Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks

Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.

Kapitel: 2

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

§ 2.

Ziehen wir nun die Strahlen AK, Ak, AL, Al, BL, Bl, BI, Bi, CI, Ci, CK, Ck.

Es ist $\overline{AK}^2 = AE \cdot AC, \overline{AL}^2 = AF \cdot AB$. Aber der Kreis um BL als Durchmesser geht durch die Punkte E und F, und die Potenz des Punktes A gibt $AE \cdot AC = AF \cdot AB$. Daher

$$\begin{aligned} AK &= Ak = AL = Al = \sqrt{bc \cos A} \\ BL &= Bl = BI = Bi = \sqrt{ca \cos B} \\ CI &= Ci = CK = Ck = \sqrt{ab \cos C}. \end{aligned} \qquad 3.$$

Betrachten wir nun die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} BL \\ CK \end{matrix}\right\} = P, \quad \left.\begin{matrix} Bl \\ Ck \end{matrix}\right\} = p, \quad \left.\begin{matrix} Bl \\ CK \end{matrix}\right\} = P', \quad \left.\begin{matrix} BL \\ Ck \end{matrix}\right\} = p' \\ &\left.\begin{matrix} CI \\ AL \end{matrix}\right\} = Q, \quad \left.\begin{matrix} Ci \\ Al \end{matrix}\right\} = q, \quad \left.\begin{matrix} Ci \\ AL \end{matrix}\right\} = Q', \quad \left.\begin{matrix} CI \\ Al \end{matrix}\right\} = q' \\ &\left.\begin{matrix} AK \\ BI \end{matrix}\right\} = R, \quad \left.\begin{matrix} Ak \\ Bi \end{matrix}\right\} = r, \quad \left.\begin{matrix} Ak \\ BI \end{matrix}\right\} = R', \quad \left.\begin{matrix} AK \\ Bi \end{matrix}\right\} = r', \end{aligned} \qquad 4.$$

so haben wir also auf den hier eingeführten 12 Strahlen je die Punkte:

$$\begin{matrix} AkrR', & BlpP', & CiqQ' \\ AKRr', & BLPp', & CIQq' \\ Alqq', & Birr', & Ckpp' \\ ALQQ', & BIRR', & CKPP'. \end{matrix} \qquad 5.$$

Ziehen wir jetzt noch die Geraden AP, Ap, AP′, Ap′ u.s.w., so ist infolge von 3 Dreieck $AKP \cong ALP$, Dreieck $Akp \cong Alp$, Dreieck $AKP' \cong AlP'$, Dreieck $Akp' \cong ALp'$.

Die Geraden AP, Ap, AP′, Ap′ gehen somit respektive senkrecht durch die Mitten der Strecken KL, kl, Kl, kL, und analog gehen die Geraden BQ, Bq, BQ′, Bq′ respektive senkrecht durch die Mitten der Strecken 6.
LI, li, Li, lI, und die Geraden CR, Cr, CR′, Cr′ gehen respektive senkrecht durch die Mitten der Strecken IK, ik, Ik, iK.

Von den 12 zuletzt eingeführten Geraden schneiden sich daher noch 8 mal je 3 in einem nämlichen Punkte. Nämlich wir haben

$$\begin{array}{l}
\left.\begin{matrix} A\,P \\ B\,Q \\ C\,R \end{matrix}\right\} = N = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,K\,L, \\
\left.\begin{matrix} A\,p \\ B\,q \\ C\,r \end{matrix}\right\} = n = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,k\,l, \\
\left.\begin{matrix} A\,P \\ B\,Q' \\ C\,r' \end{matrix}\right\} = N' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,K\,L, \\
\left.\begin{matrix} A\,p \\ B\,q' \\ C\,R' \end{matrix}\right\} = n' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,k\,l, \\
\left.\begin{matrix} A\,p' \\ B\,Q \\ C\,R' \end{matrix}\right\} = N'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,k\,L, \\
\left.\begin{matrix} A\,P' \\ B\,q \\ C\,r' \end{matrix}\right\} = n'' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,K\,l, \\
\left.\begin{matrix} A\,P' \\ B\,q' \\ C\,R \end{matrix}\right\} = N''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } I\,K\,l, \\
\left.\begin{matrix} A\,p' \\ B\,Q' \\ C\,r \end{matrix}\right\} = n''' = \text{Umkreiszentrum des Dreiecks } i\,k\,L.
\end{array} \qquad 7.$$

Dies vorausgesetzt haben wir auf den in 6 eingeführten 12 Geraden je die Punkte

$$\begin{array}{lll}
A\,P\,N\,N', & B\,Q\,N\,N'', & C\,R\,N\,N''' \\
A\,p\,n\,n', & B\,q\,n\,n'', & C\,r\,n\,n''' \\
A\,P'\,n''\,N''', & B\,Q'\,n'''\,N', & C\,R'\,n'\,N'' \\
A\,p'\,N''\,n''', & B\,q'\,N'''\,n', & C\,r'\,N'\,n''.
\end{array} \qquad 8.$$

§ 3.

Da $A\,K = A\,k = A\,L = A\,l$, so liegen die vier Punkte K, k, L, l auf einem Kreise vom Mittelpunkt A. Auf diesem Kreise