Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Zur Geometrie des Dreiecks
Autor: Droz-Farny, A. / Silder, G. / Schenker, O.
Kapitel: [Zum bessern Verständnis des Textes..."]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319223

nicht eintreten auf die reichhaltige Literatur, welche Prof. Sidler über das Dreieck gesammelt hat. Ich habe die Schwierigkeiten betreffs der Figuren so zu überwinden gesucht, dass ich dieselben neu erstellte und zerlegte. Dem freundlichen Entgegenkommen von Frau Prof. Sidler sowie der Redaktionskommission und des Vorstandes der Naturforschenden Gesellschaft ist es zu verdanken, dass eine Perle geometrischer Forschung auch einem weitern Kreise zugänglich gemacht werden kann.

Bern, den 16. August 1911.

Dr. O. Schenker.

Zum bessern Verständnis des Textes soll hier noch an einige (leicht zu beweisende) Sätze und Definitionen aus der synthetischen Geometrie erinnert werden. Das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C und D nämlich $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ (mit A und B zu Grund-, C und D zu Teilpunkten) wird durch Zentralprojektion nicht geändert. Ist $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$, so wird die Strecke AB durch C und D harmonisch geteilt (A, B, C und D bilden vier harmonische Punkte). Liegen auf einer Geraden vier Punkte harmonisch, so ist der halbe Abstand der Grundpunkte das geometrische Mittel zwischen den Abständen der Teilpunkte von der Mitte der Grundpunkte. Hieraus folgt: die Zentrale zweier sich schneidenden Kreise wird von diesen in vier harmonischen Punkten (A, B, C und D) geschnitten. Hält man A und B fest, so beschreiben C und D zwei projektivische Punktreihen (je vier entsprechende Punkte haben dasselbe Doppelverhältnis), sie bilden zusammen ein involutorisches Punktsystem auf einer Geraden (die den unendlich fernen Punkten der einen Punktreihe entsprechenden der andern fallen zusammen (in das Zentrum M des einen Kreises). A und B heissen die Doppelpunkte der Involution, M ihr Mittelpunkt.

Zieht man durch A, B, C und D je einen Strahl (a, b, c und d) durch denselben Punkt, so heisst $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$ das Doppelverhältnis dieser Strahlen (mit a und b zu Grund- und c und d zu Teilstrahlen) und es ist $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$.

Pol und Polare.

Zieht man von einem Punkte P die Tangenten an einem Kreis, so heisst die Berührungssehne die Polare von P in Bezug auf den Kreis. Dreht sich die Polare um einen Punkt, so beschreibt der Pol eine Gerade (durch Zentralprojektion zu beweisen). Irgend eine Gerade durch P schneidet den Kreis und die Polare in drei Punkten, die mit P vier harmonische Punkte bilden (mit Zentralprojektion zu beweisen).

Das vollständige Vierseit.

Vier Gerade a, b, c und d bilden ein vollständiges Vierseit, a, b, c, d sind seine Seiten. Der Schnittpunkt zweier Seiten ist eine Ecke. Man hat also $\binom{4}{2} = 6$ Ecken. Jede Ecke hat den Schnittpunkt der beiden andern Seiten zur Gegenecke. Man hat also drei Paare von Gegenecken. Die Verbindungsgerade zweier Gegenecken ist eine Diagonale. Das vollständige Vierseit hat also drei Diagonalen. Diese bilden ein Dreiseit und die Ecken desselben sind die Diagonalpunkte des Vierseits. Ein Diagonalpunkt ist also der Schnittpunkt zweier Diagonalen oder der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zweier Paare von Gegenecken. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird von den beiden andern und den Seiten in vier harmonischen Punkten geschnitten (zu beweisen, indem man das vollständige Vierseit als Parallelogramm projiziert).

Bern, den 8. September 1911.

Dr. O. Schenker.