§ 14.

Die Hessiana der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Unter der Hessiana oder Kernfläche einer gegebenen Fläche versteht man den geometrischen Ort aller Punkte im Raum, deren quadratische Polarfläche ein Kegel ist, oder, was dasselbe ist, den geometrischen Ort der Doppelpunkte ihrer ersten Polarflächen. Für unsere Hauptschnittfläche 3. Grades ist nun die quadratische Polarfläche identisch mit der ersten Polarfläche, und nach § 13 können wir bereits schliessen, dass die Hessiana der Hauptschnittfläche sowohl die (z)-Achse als auch die (y)-Achse des Koordinatensystems enthalten wird; denn die quadratischen Polarflächen in Bezug auf die Punkte der (z)-Achse sind ja Kegel, deren Scheitel auf der (z)-Achse selber liegen, und diejenigen in Bezug auf die Punkte der (y)-Achse sind hyperbolische Cylinder oder Kegel, deren Scheitel im Unendlichen liegen.

Die Hessiana oder Kernfläche hat allgemein folgende Gleichung:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0$$

wo die f_{ik} die zweiten Ableitungen der homogenen Flächengleichung $f(x\,y\,z\,w) = 0$ bedeuten und Seite 181 bereits berechnet sind. Setzen wir die dort gefundenen Werte in obiger Determinante ein, so geht sie über in:

$$H = \begin{vmatrix} -2s & 0 & 2z & -2sx + 2s^2 \\ 0 & 2s & 0 & 2sy \\ 2z & 0 & 2x & 0 \\ -2sx + 2s^2 & 2sy & 0 & 2s^2x \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man sie in ihre Unterdeterminanten zerlegt,

$$H = -2s \begin{vmatrix} 2s & 0 & 2sy \\ 0 & 2x & 0 \\ 2sy & 0 & 2s^2x \end{vmatrix} + 2z \begin{vmatrix} 0 & 2s & 2sy \\ 2z & 0 & 0 \\ -2sx + 2s^2 & 2sy & 2s^2x \end{vmatrix}$$

$$+ (2sx - 2s^2) \begin{vmatrix} 0 & 2s & 0 \\ 2z & 0 & 2x \\ -2sx + 2s^2 & 2sy & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$H = y^2 z^2 - s x^3 + s x y^2 - s x z^2 + s^2 x^2 - s^3 x = 0 \qquad (24)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche 4. Grades ist die Hessiana der Hauptschnittfläche 3. Grades. Da die Koordinaten y und z nur quadratisch in obiger Gleichung enthalten sind, so liegt die Hessiana sowohl zur (x z)-Ebene als auch zur (x y)-Ebene symmetrisch. Weil ferner einerseits die Koordinaten $x = y = 0$, andererseits auch $x = z = 0$, der Gleichung (24) für jedes z, bezüglich y, genügen, so enthält wirklich die Fläche die (z)- und die (y)-Achse des Koordinatensystems.

Um die Gleichung des Asymptotenkegels der Hesse'schen Fläche zu finden, machen wir die Gleichung (24) mit w homogen und setzen nachher $w = 0$; dann geht sie über in $y^2 z^2 = 0$; diese Gleichung stellt einen Kegel 4. Grades dar, welcher die unendlich ferne Ebene in derselben Kurve schneidet, wie die Hessiana, nämlich in der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der (x z)-Ebene und in der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der (x y)-Ebene.

Wir bestimmen ferner die Schnittkurve der Hessiana mit der (x y)-Ebene des Koordinatensystems. Nach Gleichung (24) wird deren Gleichung:

$$x^3 - x y^2 - s x^2 + s^2 x = 0$$

Sie zerfällt in zwei, nämlich in

(a) $x = 0$ [(y) = Achse]

(b) und $x^2 - y^2 - s x + s^2 = 0$ [Hyperbel]

Die Hesse'sche Fläche schneidet also die (x y)-Ebene in der unendlich fernen Geraden, der (y)-Achse des Koordinatensystems und in einer gleichseitigen Hyperbel. Der Mittelpunkt derselben hat die Koordinaten $x = \frac{s}{2}$ und $y = 0$; die Hyperbelgleichung (b) geht daher durch die Substitution $x = x' + \frac{s}{2}$ und $y = y'$ über in die Achsengleichung

$$y'^2 - x'^2 = \frac{3}{4} s^2 \qquad (c)$$

Die Halbachse der Hyperbel ist $a = \frac{s}{2}\sqrt{3}$, also kleiner als s aber grösser als $\frac{s}{2}$. Die reelle Hyperbelachse liegt in der Richtung der (y)-Achse. Die Achsenabschnitte der Hyperbel auf der (y)-Achse sind nach Gleichung (b) $y = \pm s$. (S. Fig. 20).

In der (x z)-Ebene des Koordinatensystems erzeugt die Hessiana eine Schnittkurve von folgender Gleichung:

$$x^3 + x z^2 - s x^2 + s^2 x = 0$$

Diese zerfällt in $\quad x = 0 \qquad$ (d)

und $\quad x^2 + z^2 - s x + s^2 = 0 \qquad$ (e)

Die Gleichung (d) stellt die (z)-Achse des Koordinatensystems

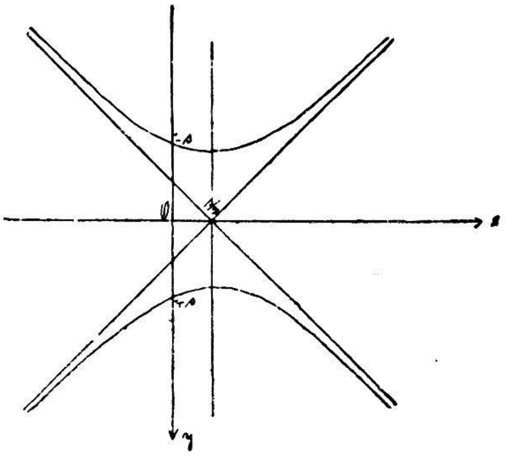

Fig. 20.

dar, die Gleichung (e) dagegen einen imaginären Kreis, dessen Centrum auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{2}$ vom Koordinatenursprung liegt und dessen imaginärer Radius absolut gleich lang ist wie die Halbachse der obigen Schnitthyperbel in der (x y)-Ebene. Der reelle Schnitt der Hessiana mit der (x z)-Ebene besteht also aus zwei Geraden, der (z)-Achse des Koordinatensystems und der unendlich fernen Geraden.

Wenn wir auch noch die Schnittkurve der Hesse'schen Fläche mit der (y z)-Ebene bestimmen, so finden wir die Gleichung $y = 0$ und $z = 0$, je doppelt. Also sind die Koordinatenachsen z und y Doppelgeraden der Hessiana.

Um den Schnitt der Hesse'schen Fläche mit der Hauptschnittfläche 3. Grades zu bestimmen, eliminieren wir aus den Gleichungen (11) und (24) die Koordinate y, und wir erhalten so die Gleichung des auf die (x z)-Ebene projizierenden Cylinders der Schnittlinie, nämlich $x = 0$ und $z^2 = - s^2$. Die erste dieser

Gleichungen stellt die (y z)-Ebene dar, die andere zwei zu der (x y)-Ebene parallele, imaginäre Ebenen, welche also keine reellen Schnittkurven liefern. Da nun die Schnittlinie der (y z)-Ebene mit der Fläche 3. Grades aus der doppelt gelegten (z)-Achse besteht, so finden wir, dass sich die Hessiana und die Hauptschnittfläche in einer Doppelgeraden, der (z)-Achse des Koordinatensystems, schneiden, und dies ist der Ort der parabolischen Punkte der Hauptschnittfläche.