Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 9: Kreispunkte der Flächenschar

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

eine Mal in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, das andere Mal in der Geraden $x = \frac{s}{2}$. Für $c = 0$ fallen beide Geraden zusammen mit der (z)-Achse des Koordinatensystems. Wenn $c > \frac{s}{2}$ ist, so wird die Schnittkurve imaginär, die Fläche 4. Grades liegt also ihrer ganzen Ausdehnung nach links von der Ebene $x = \frac{s}{2}$. In Bezug auf die Entstehungsweise der Fläche können wir nach dem Früheren noch schliessen, dass der im I. und VI. Oktanten liegende Teil derselben durch die Scheitelkante S_1' erzeugt wird, der im II. und V. durch S_1, der im IV. und VII. durch S_2 und der im III. und VIII. Oktanten liegende Teil durch die Scheitelkante S_2'.

§ 9.

Kreispunkte der Flächenschar.

Die Achsengleichung der centrischen Flächen 2. Grades hat allgemein die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Das Vorzeichen von b^2 und c^2 ist dabei noch unbestimmt gelassen. — Für jede Fläche, deren Gleichung diese Form hat, ist es möglich, zwei Systeme paralleler Schnittebenen so zu bestimmen, dass alle Schnittkurven Kreise sind. Die äussersten Ebenen der beiden Systeme sind Tangentialebenen der Fläche; sie schneiden diese in einem unendlich kleinen Kreise, in ihrem Berührungspunkte, und ein solcher Punkt heisst **Kreispunkt** oder Umbilikus. Jede centrische Fläche besitzt also im allgemeinen 4 reelle Kreispunkte; sie liegen in der (x z)-Ebene und haben die Koordinaten:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{und} \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Unsere auf die Achsen transformierte Flächengleichung heisst nun:

$$(2.)\quad \frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1$$

Da $a = b$ ist, so werden die Koordinaten der Kreispunkte:

$$x' = \pm 0 \quad \text{und} \quad z' = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Je zwei der Kreispunkte der durch Gleichung (2) dargestellten Rotationsellipsoïde und -Hyperboloïde fallen demnach in einen einzigen zusammen, so dass im ganzen nur zwei übrig bleiben; sie liegen symmetrisch zur (x y)-Ebene und haben im alten System die Koordinaten:

$$x = a_0 = \frac{s}{1-k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Für jedes Rotationsellipsoïd fallen die Kreispunkte zusammen mit den Endpunkten der Rotationsachse 2 c und bei variablem Parameter k bewegen sie sich nach der in § 4 aufgestellten Parabelgleichung (b.). Für die Rotationshyperboloïde wird die Ordinate der Kreispunkte

$$z = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k}{i\sqrt{k^2-1}} = \mp i \frac{s\,k}{\sqrt{k^2-1}} = \text{imaginär},$$

d. h. es gibt auf den Rotationshyperboloïden keine Kreispunkte. Das System paralleler Schnittebenen, welches in der Fläche Kreise ausschneidet, ist parallel der (x y)-Ebene und setzt sich nach beiden Richtungen bis ins Unendliche fort.

§ 10.

Polarebenen in Bezug auf das Rotationsflächensystem (1).

Soll die Polarebene eines beliebigen festen Punktes $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$ in Bezug auf eine Fläche 2. Grades bestimmt werden, so wird deren Gleichung zunächst mit w homogen gemacht; Gleichung (1) geht also über in $(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)\,y^2 + z^2 - 2\,s\,x\,w + s^2\,w^2 = 0$, wo w die Bedeutung 1 hat. Die Gleichung der Polarebene wird dann nach der Formel bestimmt:

$$x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial z_0} + w \frac{\partial f}{\partial w_0} = 0$$