

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 7: Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319219>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

welcher den Abstand der Ebene des Hauptschnittes vom Koordinatenursprung O darstellt. Als Resultat dieser Elimination ergibt sich die Gleichung:

$$s y'^2 + a_0 z'^2 + a_0 s (s - a_0) = 0.$$

In dieser Gleichung ist s eine Konstante; a_0 dagegen kann als laufende Koordinate betrachtet werden, da es bei veränderlichem k alle Werte der positiven und negativen (x)-Achse durchlaufen kann, ausgenommen diejenigen der Strecke OF. Substituiert man daher für $a_0 = x$, ersetzt ferner y' wieder durch y und z' durch z , so wird obige Gleichung:

$$xz^2 - s(x^2 - y^2) + s^2 x = 0. \quad (11)$$

Durch sie ist der Ort aller Hauptschnitte parallel der (yz)-Ebene für sämtliche Rotationsflächen bestimmt. Sie stellt eine Fläche 3. Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten x , y , z dar, die symmetrisch liegt zu der (xy)- und (xz)-Ebene. Die Diskussion dieser Hauptschnittfläche 3. Grades erfolgt in § 12.

§ 7.

Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse.

Es werde durch die (x)-Achse unseres Koordinatensystems (xyz) eine Ebene gelegt, welche mit der (xy)-Ebene einen beliebigen Winkel φ bildet; wir betrachten sie als neue Koordinatenebene ($x'y'$) und transformieren nun die Gleichung des betrachteten Rotationsflächensystems

$$(1) \quad (1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 + z^2 - 2sx + s^2 = 0$$

auf das neue Koordinatensystem ($x'y'z'$). Dabei gelten folgende Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} y &= y' \cos \varphi - z' \sin \varphi \\ z &= y' \sin \varphi + z' \cos \varphi \\ x &= x' \end{aligned}$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in

$$\begin{aligned} (1-k^2)x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi)y'^2 + (1-k^2 \sin^2 \varphi)z'^2 \\ + k^2 \sin 2\varphi \cdot y'z' - 2sx' + s^2 = 0 \end{aligned}$$

Um die Gleichung der Schnittkurven des Rotationsflächensystems mit der ($x'y'$)-Ebene zu erhalten, ist in der letzten Gleichung $z' = 0$ zu setzen, und wir erhalten als Gleichung des Schnittkurvensystems

$$(1-k^2)x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi)y'^2 - 2sx' + s^2 = 0 \quad (12)$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades, jede Ebene durch die (x)-Achse schneidet also das Rotationsflächensystem im allgemeinen in einem Kegelschnitt.

Die Gleichung (12) enthält zwei Parameter, nämlich k und φ . Wir wollen zunächst zwei Spezialfälle betrachten, indem wir vorerst $\varphi = 0$ und dann $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wählen.

Für $\varphi = 0$ geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$(1-k^2)x'^2 + (1-k^2)y'^2 - 2sx' + s^2 = 0$$

und wenn man diese Gleichung durch die Transformationsformeln $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und $y' = y''$ auf die Normalform bringt, so erhält man die Kreisbüschelgleichung (8) in § 5. Diese stellt den Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene dar (s. Fig. 7).

Setzt man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und wendet die vorigen Transformationsformeln an, so geht die Gleichung (12) über in die Gleichung (7) § 4, welche das Schnittkurvensystem der Rotationsflächen in der (xz)-Ebene darstellt (Fig 5).

Wir untersuchen nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für einen bestimmten, konstanten Winkel φ , der zwischen 0° und 90° liegt; der Parameter k dagegen soll alle Werte von Null bis ∞ durchlaufen.

Sollen vorerst die Asymptotenrichtungen der Kegelschnitte bestimmt werden, so muss man die Glieder 2. Grades gleich Null setzen, also

$$(1-k^2)x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi)y'^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{k^2-1}{1-k^2 \cos^2 \varphi}} \cdot x' \quad (a)$$

Die Asymptoten der Kegelschnitte sind reell, wenn Zähler und Nenner dieser Wurzel entweder beide negativ oder beide positiv sind. Dies ist der Fall, wenn

$$\text{a)} \quad k^2 < 1 \text{ und } k^2 \cos^2 \varphi > 1 \text{ oder}$$

$$k < 1 \text{ und } k > \frac{1}{\cos \varphi}$$

was unmöglich ist, da $\frac{1}{\cos \varphi}$ immer grösser als 1 ist.

b) wenn $k^2 > 1$ und $k^2 \cos^2 \varphi < 1$ oder

$$k > 1 \text{ und } k < \frac{1}{\cos \varphi}, \text{ also } \cos \varphi < \frac{1}{k}$$

Dieser letzte Fall ist möglich. Für Werte von k , die grösser als 1 aber kleiner als $\frac{1}{\cos \varphi}$ sind, besitzt der durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnitt reelle Asymptoten, die von einander verschieden sind; er ist also eine Hyperbel.

Ist $k = 1$, so fallen nach Gleichung (a) die beiden Asymptotenrichtungen in der Geraden $y' = 0$ zusammen. Der Kegelschnitt ist daher in diesem Fall eine Parabel von der Gleichung $\sin^2 \varphi \cdot y'^2 - 2s x' + s^2 = 0$. Die (x') -Achse ist Parabelachse.

Wenn der Parameter k den Wert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ annimmt, so geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) x'^2 - 2s x' + s^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x' ; löst man sie auf, so zerfällt sie in die beiden Geradengleichungen

$$x'_1 = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \text{ und } x'_2 = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Für den Parameterwert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ besteht also die Schnittkurve (12) aus zwei Parallelen zur (y') -Achse; ihre Abstände von der selben sind $x'_1 = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$, bezüglich $x'_2 = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn die durch die (x) -Achse gelegte Schnittebene $(x' y')$ aus dem Rotationshyperboloid zwei zur $(y z)$ -Ebene parallele Erzeugende herausschneidet. Da diese durch die auf der (x) -Achse liegenden Scheitel des Hyperboloides gehen, so muss ihr Abstand $= \frac{2s k}{k^2 - 1}$ sein (s. Seite 121). Es besteht daher die Beziehung

$$\frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{2s k}{k^2 - 1}$$

Löst man diese Gleichung nach k auf, so erhält man als positive, (einzig in Betracht fallende), Wurzel wieder $k = \frac{1}{\cos \varphi}$

Liegt der Wert von k nicht im Bereich $1 < k < \frac{1}{\cos \varphi}$, ist also $k < 1$ oder $k > \frac{1}{\cos \varphi}$, so werden die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes nach Gleichung (a) imaginär, er ist also eine Ellipse. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so folgt: Eine durch die (x) -Achse gelegte Ebene, welche mit der Koordinatenebene $(x y)$ den Winkel φ einschliesst, schneidet alle Rotationsellipsoide des durch Gleichung (1) gegebenen Rotationsflächensystems in einer Ellipse, den parabolischen Cylinder $k = 1$ in einer Parabel, und die Rotationshyperboloide entweder in einer Ellipse, oder in zwei parallelen Geraden (Erzeugende des Hyperboloïdes), oder in einer Hyperbel, je nachdem $\cos \varphi \geq \frac{1}{k}$ ist.

Um die durch Gleichung (12) dargestellten Kegelschnitte genauer zu untersuchen, transformieren wir die Gleichung auf ihre Achsen, indem wir für $x' = x'' + \frac{s}{1 - k^2}$ und für $y' = y''$ substituieren. Sie nimmt dann folgende Form an:

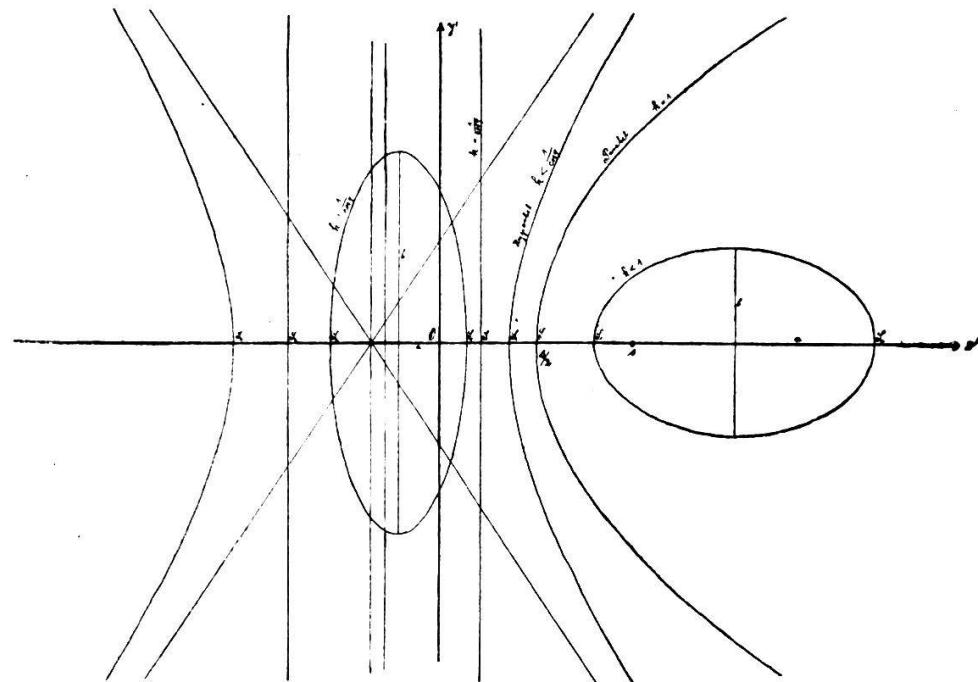


Fig. 10.

$$\frac{x''^2}{s^2 k^2} + \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}} = 1 \quad (b)$$

Der Mittelpunkt und die beiden in der (x)-Achse liegenden Scheitel jedes Kegelschnittes dieses Systems fallen mit denjenigen der entsprechenden Rotationsfläche zusammen, und die eine Achse des Kegelschnittes liegt immer in der (x)-Achse des alten Koordinatensystems.

Wir betrachten vorerst die Ellipsen, in welchen die Rotationsellipsoide $k < 1$ von der durch die (x)-Achse gelegten Ebene geschnitten werden. Der Abstand ihres Mittelpunktes vom Koordinatenursprung wird gegeben durch $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Wenn k von Null bis 1 wächst, so nimmt er alle Werte von $+s$ bis $+\infty$ an. Die Halbachsen der Ellipsen sind $a = \frac{sk}{1 - k^2}$ und $b = \frac{sk}{\sqrt{(1 - k^2)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}}$, für $k = 0$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, der mit F zusammenfällt; bei von 0 bis 1 wachsendem Parameter k nehmen beide zu von 0 bis ∞ , wobei a immer grösser als b ist. Der eine Scheitel S_1 bewegt sich bei zunehmendem k von $x'_1 = s$ bis $x'_2 = \frac{s}{2}$, der andere von $x'_2 = +s$ bis $x'_2 = +\infty$. Die lineare Exzentrizität dieser Ellipsen $e = \frac{sk^2 \sin \varphi}{(1 - k^2) \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$ nimmt vom Werte 0 an zu ∞ , die numerische dagegen $= \frac{e}{a} = \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$ von 0 bis 1.

Um die Gleichung der Parabel zu finden, in welcher der parabolische Cylinder von der Ebene durch die (x)-Achse geschnitten wird, setzen wir in Gleichung (12) den Parameter $k = 1$

$$\text{ein und finden } y'^2 = \frac{2s}{\sin^2 \varphi} \left(x' - \frac{s}{2} \right) \quad (c)$$

Durch die Transformationsformeln $y' = y''$ und $x' = x'' + \frac{s}{2}$ geht die Gleichung (c.) in die Scheitelgleichung der Schnittparabel über, welche heisst $y''^2 = \frac{2s}{\sin^2 \varphi} x'' \quad (d)$

Die (x)-Achse ist Parabelachse, ihr Scheitel befindet sich im Abstand $x' = \frac{s}{2}$ vom Koordinatenursprung. Der Halbparameter der Schnittparabel ist $p = \frac{s}{\sin^2 \varphi}$. Für veränderliches φ ist er variabel

und kann alle Werte zwischen s und ∞ annehmen, d. h. je nach dem Winkel, den die Schnittebene $(x' y')$ mit der Koordinatenebene $(x y)$ bildet, wird der Parameter grösser oder kleiner. Ein Minimum wird er, wenn $\varphi = 90^\circ$ ist, wenn also die Schnittebene auf der $(x y)$ -Ebene senkrecht steht und die Erzeugenden des Cylinders rechtwinklig schneidet. In diesem Falle wird er $= s =$ dem Halbparameter der Schnittparabel in der $(x z)$ -Ebene von der Gleichung $z'^2 = 2 s x'$ (Siehe Gleichung [6]). Je kleiner der Winkel φ wird, d. h. je mehr er sich vom rechten entfernt, desto grösser wird der Parameter. Fällt die Schnittebene mit der $(x y)$ -Ebene zusammen, so ist $\varphi = 0$, also auch $\sin^2 \varphi = 0$, und der Halbparameter $p = \infty$; der parabolische Cylinder wird durch die $(x y)$ -Ebene in der Geraden $x' = 0$, d. h. in der (y') -Achse und in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene geschnitten.

Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel $= f = \frac{s}{2 \sin^2 \varphi}$, kann also alle Werte zwischen $\frac{s}{2}$ und ∞ annehmen. Entsprechend verändert sich auch die Lage der Leitlinie; für $\varphi = 90^\circ$ wird sie gebildet durch die (z) -Achse im alten Koordinatensystem und entfernt sich für abnehmende Werte von φ bis nach $-\infty$.

Wir diskutieren nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \frac{1}{\cos \varphi}$, wo φ einen bestimmten, konstanten Wert besitzt. In diesem Fall ist die Schnittkurve eine Hyperbel, deren Achsengleichung nach Gleichung (b) geschrieben werden kann:

$$\frac{x'^{''2}}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}} - \frac{y'^{''2}}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}} = 1 \quad (e)$$

Der Abstand des Hyperbelmittelpunktes vom Koordinatenursprung $= a_0 = -\frac{s}{k^2 - 1}$; für $k = 1$ liegt der Hyperbelmittelpunkt in

— ∞ , wenn k zunimmt, so rückt er auf der negativen (x') -Achse ins Endliche und für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ beträgt sein Abstand vom Nullpunkt $x' = -s \cot^2 \varphi$. Der Abstand des Hyperbelscheitels S_1 wird bestimmt aus $x'_1 = \frac{s}{1+k}$; nimmt k alle Werte von 1 bis $\frac{1}{\cos \varphi}$ an, so bewegt sich der Scheitel S_1 auf der (x') -Achse von $x' = \frac{s}{2}$ bis $x' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$. Der Scheitel S_2 liegt im Abstand $x' = -\frac{s}{k-1}$ vom Nullpunkt; für die obigen Parameterwerte durchläuft er den negativen Teil der (x') -Achse von $x' = -\infty$ bis $x' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$. Die reelle Halbachse der Hyperbel $= a = \frac{s k}{k^2 - 1}$, die imaginäre $= b = \frac{s k}{\sqrt{(k^2 - 1)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}}$; für $k = 1$ wird $a = b = \infty$ und für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ wird $a = \frac{s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ und $b = \infty$. Für alle Hyperbeln der Schar ist $b > a$.

Im Grenzfall $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ besteht die Schnitthyperbel, deren Mittelpunkt in $x' = -s \cot^2 \varphi$ liegt, aus zwei parallelen Geraden von den Gleichungen

$$x'_1 = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad \text{und} \quad x'_2 = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \quad (f)$$

Dies ergibt sich auch daraus, dass die numerische Exzentrizität der Hyperbel für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ unendlich gross wird.

Sind die Parameter k grösser als $\frac{1}{\cos \varphi}$, so stellt die Gleichung (12) des Schnittkurvensystems wieder eine Schar von Ellipsen dar. Ihre Achsengleichung lautet:

$$\frac{x'^2}{s^2 k^2} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)^2 (k^2 \cos^2 \varphi - 1)}} = 1 \quad (g)$$

Variiert man k von $\frac{1}{\cos \varphi}$ bis ∞ , so geht der Ellipsenmittelpunkt

von $x' = -s \cot^2 \varphi$ bis $x' = 0$. Für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ sind die Halb-

achsen $a = \frac{s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$ und $b = \infty$. Bei zunehmendem k werden die

Achsen beide kleiner und zwar so, dass a immer kleiner ist als b . Für $k = \infty$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, den Nullpunkt O des ursprünglichen Koordinatensystems. Die

Scheitel S_1 und S_2 der Ellipse haben für $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ die Abstände

$x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$ und nähern sich

bei wachsendem k immer mehr dem Nullpunkt, bis sie für $k = \infty$ mit ihm zusammenfallen.

Zusammenstellung:

k	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Halbachsen		Scheitelabstände		e	$\frac{e}{a}$	Art der Kurve
		$a = \frac{sk}{1-k^2}$	$b = \frac{sk}{\sqrt{(1-k^2)(1-k^2 \cos^2 \varphi)}}$	x'_1	x'_2			
0	s	0	0	s	s	0	0	Punkt F
1	$\pm \infty$	∞	∞	$\frac{s}{2}$	$\pm \infty$	∞	1	Parabel
$\frac{1}{\cos \varphi}$	$-s \cot^2 \varphi$	$\frac{s \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$	∞	$\frac{s \cos \varphi}{1+\cos \varphi}$	$-\frac{s \cos \varphi}{1-\cos \varphi}$	∞	∞	2 parallele Gerade
∞	0	0	0	0	0	0	0	Punkt O