Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 6: Der Hauptschnitt der Rotationsfläche parallel zur (yz)-Ebene bei variablem Parameter k

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 6.

Der Hauptschnitt der Rotationsfläche parallel zur (yz)-Ebene bei variablem Parameter k.

Ersetzen wir in der auf den Mittelpunkt transformierten Flächengleichung

$$(2.)\qquad \frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1$$

x′ durch o, so erhalten wir den Hauptschnitt der Fläche 2. Grades parallel zur (yz)-Ebene, nämlich

$$\frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (9)$$

Die Gleichung (9) stellt eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, je nachdem $k \lessgtr 1$ ist; dies ist die Kurve, in welcher die durch Gleichung (1) gegebene Rotationsfläche die neue Koordinatenebene (y′z′) schneidet.

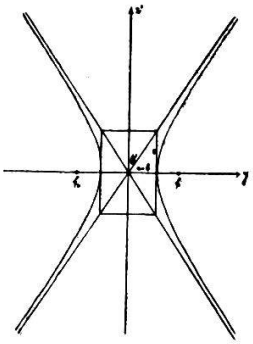

Fig. 9.

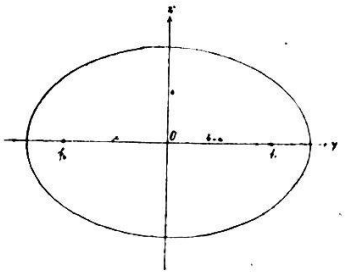

Fig. 9 a.

Die Halbachsen der Ellipse sind:

$$a = \frac{sk}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}} \quad \text{wo } c < a$$

Für alle Werte von k zwischen 0 und 1 sind die zur (yz)-Ebene parallelen Hauptschnitte der Rotationsflächen Ellipsen, deren grosse Achse in der (xy)-Ebene und deren kleinere Achse in der (xz)-Ebene liegt. Für $k = 0$ werden beide Achsen einander gleich, nämlich $a = c = o$, die Hauptschnittellipse reduziert sich auf

einen Punkt, der im Abstand $x = +s$ vom Ursprung O auf der (x)-Achse liegt. Bei zunehmendem k entfernt sich der Mittelpunkt der Hauptschnittellipse auf der positiven (x)-Achse immer weiter vom alten Ursprung O und für $k = 1$ wird sein Abstand unendlich gross. Gleichzeitig wachsen auch die Ellipsenhalbachsen a und c an und werden zuletzt ebenfalls unendlich gross.

Für alle Parameterwerte $k > 1$ stellt die Gleichung (9) eine Hyperbel dar, deren reelle Halbachse $a = \frac{s\,k}{k^2 - 1}$ und deren imaginäre Halbachse $c = \frac{s\,k}{\sqrt{k^2 - 1}}$ ist. Dabei ist

$$c > a, \text{ wenn } k > \sqrt{2}$$
$$c = a, \text{ wenn } k = \sqrt{2}$$
$$c < a, \text{ wenn } k < \sqrt{2}$$

Die Asymptotengleichungen dieser Hyperbeln sind:

$$z' = \pm \frac{c}{a} y' \quad \text{oder} \quad z' = \pm \sqrt{k^2 - 1} \cdot y'$$

Den halben Asymptotenwinkel φ erhält man aus der Formel: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{k^2 - 1}$. Für das Rotationshyperboloïd $k = 1$ befindet sich der zur (yz)-Ebene parallele Hauptschnitt im Abstand $x = -\infty$ vom Koordinatenursprung O; die Asymptoten der Schnitthyperbel in $-\infty$ haben die Gleichung $z' = 0$ (doppelt), und der halbe Asymptotenwinkel φ wird $= 0$, d. h. die Asymptoten fallen zusammen in die ∞ ferne Gerade der (xy)-Ebene, und der Hauptschnitt selber geht in diese Gerade über. Wächst k, so sind die Asymptoten voneinander verschieden; durchläuft k alle Werte von 1 bis ∞, so nimmt der halbe Asymptotenwinkel φ alle Werte von 0^0 bis 90^0 an, und für $k = \infty$ fallen die Asymptoten wieder zusammen, da $y' = \pm \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}} = 0$ wird; die Asymptoten des Hauptschnittes des Hyperboloïdes $k = \infty$, welches sich auf die (z)-Achse reduziert, werden von der (z)-Achse selber gebildet.

Alle Mittelpunkte der Hauptschnitthyperbeln parallel zur (yz)-Ebene der Rotationshyperboloïde befinden sich auf der negativen (x)-Achse. Ist der Abstand der Schnitthyperbel vom

Ursprung O $x = 0$, so reduziert sich der Hauptschnitt auf die (z)-Achse; dies ist der Fall, wenn $k = \infty$ gross ist. Nimmt k endliche Werte an, die aber noch grösser sind als $\sqrt{2}$, so ist der halbe Asymptotenwinkel der Schnitthyperbel grösser als 45^0 aber kleiner als 90^0, und der Abstand der Schnitthyperbel vom Ursprung O beträgt absolut genommen weniger als $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$ $= \frac{s}{1 - 2} = -s$. Ist $k = \sqrt{2}$, so ist der Abstand $x = -s$ und der halbe Asymptotenwinkel $\varphi = 45^0$, der Hauptschnitt ist also eine gleichseitige Hyperbel. Ist $1 < k < \sqrt{2}$, so kann der Abstand der Schnitthyperbel von der (y z)-Ebene alle Werte von $x = -s$ bis $x = -\infty$ durchlaufen, für $k = 1$ wird er unendlich gross; der halbe Asymptotenwinkel φ wird immer kleiner, und für $k = 1$ ist er $\varphi = 0$. Der Hauptschnitt im Abstand $x = -\infty$ reduziert sich auf die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene.

Die Brennpunkte f_1 und f_2 aller Schnittkegelschnitte parallel zur (yz)-Ebene liegen in der (x y)-Ebene. Ihre Koordinaten im alten Koordinatensystem sind:

$$y = \sqrt{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2k^2}{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k^2}{1-k^2} \quad \text{und nach § 1} \quad x = \frac{s}{1-k^2}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Ausdrücken den veränderlichen Parameter k, so erhält man den geometrischen Ort der Brennpunkte aller dieser Schnittkegelschnitte durch die Gleichung

$$x \mp y = \pm s \qquad \text{oder zerlegt}$$

$$x - y = s \quad \text{und} \quad x + y = -s \tag{10}$$

Die Gleichungen (10) stellen zwei Gerade in der (xy)-Ebene dar, die symmetrisch zur (x)-Achse liegen, durch den Punkt F gehen und rechtwinklig aufeinanderstehen, also mit der (x)-Achse je einen Winkel von 45^0 bilden. Auf diesen beiden Geraden g_1 und g_2 liegen alle Brennpunkte f_1 und f_2 der zur (y z)-Ebene parallelen Hauptschnitte der Rotationsflächen.

Durchläuft k alle Werte von 0 bis ∞, so gehen die zur (yz)-Ebene parallelen Hauptschnitte, die durch Gleichung (9) gegeben sind, successive in einander über und bilden eine neue Fläche. Ihre Gleichung erhält man durch Elimination des Parameters k aus der Gleichung (9.) und dem Ausdruck $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$,

welcher den Abstand der Ebene des Hauptschnittes vom Koordinatenursprung O darstellt. Als Resultat dieser Elimination ergibt sich die Gleichung:

$$s\,y'^2 + a_0\,z'^2 + a_0\,s\,(s - a_0) = 0.$$

In dieser Gleichung ist s eine Konstante; a_0 dagegen kann als laufende Koordinate betrachtet werden, da es bei veränderlichem k alle Werte der positiven und negativen (x)-Achse durchlaufen kann, ausgenommen diejenigen der Strecke OF. Substituiert man daher für $a_0 = x$, ersetzt ferner y' wieder durch y und z' durch z, so wird obige Gleichung:

$$x z^2 - s\,(x^2 - y^2) + s^2\,x = 0. \qquad (11)$$

Durch sie ist der Ort aller Hauptschnitte parallel der (yz)-Ebene für sämtliche Rotationsflächen bestimmt. Sie stellt eine Fläche 3. Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z dar, die symmetrisch liegt zu der (xy)- und (xz)-Ebene. Die Diskussion dieser Hauptschnittfläche 3. Grades erfolgt in § 12.

§ 7.
Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse.

Es werde durch die (x)-Achse unseres Koordinatensystems (xyz) eine Ebene gelegt, welche mit der (xy)-Ebene einen beliebigen Winkel φ bildet; wir betrachten sie als neue Koordinatenebene $(x'y')$ und transformieren nun die Gleichung des betrachteten Rotationsflächensystems

(1.) $$(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)y^2 + z^2 - 2sx + s^2 = 0$$

auf das neue Koordinatensystem $(x'\,y'\,z')$. Dabei gelten folgende Transformationsformeln:

$$y = y' \cos\varphi - z' \sin\varphi$$
$$z = y' \sin\varphi + z' \cos\varphi$$
$$x = x'$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in

$$(1-k^2)\,x'^2 + (1-k^2\cos^2\varphi)\,y'^2 + (1-k^2\sin^2\varphi)\,z'^2 + k^2 \sin 2\varphi \cdot y'\,z' - 2s\,x' + s^2 = 0$$

Um die Gleichung der Schnittkurven des Rotationsflächensystems mit der $(x'\,y')$-Ebene zu erhalten, ist in der letzten Gleichung $z' = 0$ zu setzen, und wir erhalten als Gleichung des Schnittkurvensystems

$$(1-k^2)x'^2 + (1-k^2\cos^2\varphi)\,y'^2 - 2sx' + s^2 = 0 \qquad (12)$$