Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: Schnitt des Rotatonsflächensystems mit der (xy)-Ebene

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

liegende Teil dieser Parabel ist Ort von reellen Scheiteln der imaginären Halbachsen der Hyperboloïde, da die Punkte innerhalb der Strecke OF nie Mittelpunkt der Rotationsflächen werden (S. Fig. 6).

§ 5.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene.

Auch die (xy)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Systems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhalten wir direkt aus der transformierten Flächengleichung (2.), indem wir in ihr $z' = o$ setzen; sie wird dann:

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} = 1 \qquad (8.)$$

Setzen wir hierin für $\frac{s}{1-k^2} = a_0$ und für $k^2 = \frac{a_0 - s}{a_0}$, so geht sie über in

$$x'^2 + y'^2 = a_0 (a_0 - s) \qquad (8_a.)$$

Variiert man k von o bis ∞, so durchläuft a_0 alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen diejenigen von o bis s. Für alle möglichen Werte von a_0 wird daher die rechte Seite der Gleichung (8_a) positiv, sie stellt also immer einen Kreis dar. Der Ort aller Punkte in der (xy)-Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten, F und O (dem Fusspunkt der z-Achse), in einem gegebenen, konstanten Verhältnis stehen, ist also ein Kreis. Für variables k kann dessen Zentrum O′ mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse, ausgenommen mit denjenigen zwischen dem Nullpunkt O und dem festen Punkt F, zusammenfallen. Die Scheitel S_1 der einem positiven a_0 entsprechenden Schnittkreise befinden sich stets zwischen den Abständen $\frac{s}{2}$ und s von O, die Scheitel S_1' der einem negativen Werte von a_0 entsprechenden Schnittkreise dagegen zwischen dem Nullpunkt O und dem Abstand $+\frac{s}{2}$. Die Radien der Kreise werden für $a_0 = \pm \infty$ unendlich gross; die entsprechenden

Kreisbogen, welche beide durch den Punkt $x = \frac{s}{2}$ gehen, sind daher Geraden von der Gleichung $x = \frac{s}{2}$. (S. Fig. 7).

Alle Schnittkreise in der (xy)-Ebene bilden ein Kreisbüschel 2. Ordnung mit den Grenzpunkten O und F; die (x)-Achse bildet die Zentrale und die Gerade $x = \frac{s}{2}$ die Chordale desselben.

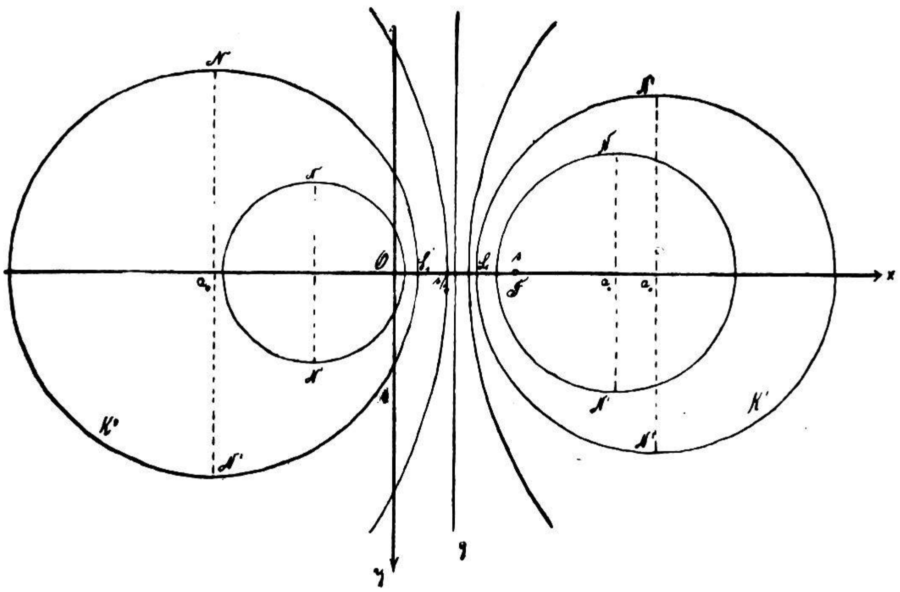

Fig. 7.

Die Kreise K′ mit dem Zentrum auf der positiven (x)-Achse entsprechen dem Schnitt der (xy)-Ebene mit den Rotationsellipsoïden; die Kreise K″ mit ihrem Zentrum auf der negativen (x)-Achse sind die Schnitte der (xy)-Ebene mit den Rotationshyperboloïden, und die Chordale g mit der Gl. $x = \frac{s}{2}$ ist der Schnitt der (xy)-Ebene mit dem parabolischen Zylinder, nämlich dessen Scheitelerzeugende. Für

den Parameter $k = o$ wird $a_0 = s$ und der Kreisradius $r = o$
» » $k = 1$ » $a_0 = \pm \infty$ » » $r = \pm \infty$
» » $k = \infty$ » $a_0 = o$ » » $r = o$

Unter der Schar der Schnittkurven gibt es also zwei Kreise vom Radius Null, die Grenzpunkte F und O.

Aus Gleichung (8_a) ist ferner ersichtlich, dass entgegengesetzt gleich grossen Werten von a_0 nicht gleich grosse Kreisradien entsprechen; der dem positiven a_0 entsprechende Radius ist immer kleiner als der dem negativen a_0 entsprechende, wie sich auch aus Fig. 7 ergibt.

Untersuchen wir noch die Lageveränderung der in der (xy)-Ebene liegenden Kreisscheitel N und N'! Ihre Koordinaten sind:

$$x = a_0 = \frac{s}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{sk}{1 - k^2}$$

Durch Elimination des Parameters k aus diesen Ausdrücken erhalten wir die Bewegungsgleichung für die beiden Punkte, nämlich

$$x^2 - y^2 - sx = o \qquad \text{(a.)}$$

Sie stellt eine Hyperbel dar; die Koordinaten des Mittelpunktes derselben sind $\xi = \frac{s}{2}$ und $\eta = o$, und die auf den Mittelpunkt transformierte Gleichung hat die Form:

$$x'^2 - y'^2 = \frac{s^2}{4} \qquad \text{(b.)}$$

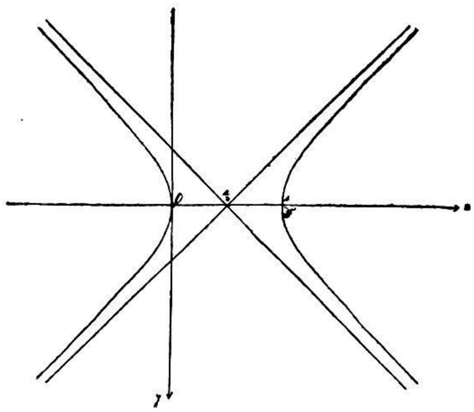

Fig. 8.

Es ist also eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbachse $a = \frac{s}{2}$, und diese Kurve gibt uns den Ort aller Kreisscheitel N und N' in der (xy)-Ebene bei veränderlichem Parameter k.