Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades
Autor: Meyer, Friedrich
Kapitel: Schnitt des Rotatonsflächensystems mit der (xy)-Ebene
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

liegende Teil dieser Parabel ist Ort von reellen Scheiteln der imaginären Halbachsen der Hyperboloïde, da die Punkte innerhalb der Strecke OF nie Mittelpunkt der Rotationsflächen werden (S. Fig. 6).

§ 5.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene.

Auch die (xy)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Systems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhalten wir direkt aus der transformierten Flächengleichung (2.), indem wir in ihr $z' = o$ setzen; sie wird dann:

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} = 1 \qquad (8.)$$

Setzen wir hierin für $\frac{s}{1-k^2} = a_o$ und für $k^2 = \frac{a_o - s}{a_o}$, so geht sie über in

$$x'^2 + y'^2 = a_o (a_o - s) \qquad (8_a.)$$

Variiert man k von o bis ∞, so durchläuft a_o alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen diejenigen von o bis s. Für alle möglichen Werte von a_o wird daher die rechte Seite der Gleichung (8_a) positiv, sie stellt also immer einen Kreis dar. Der Ort aller Punkte in der (xy)-Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten, F und O (dem Fusspunkt der z-Achse), in einem gegebenen, konstanten Verhältnis stehen, ist also ein Kreis. Für variables k kann dessen Zentrum O′ mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse, ausgenommen mit denjenigen zwischen dem Nullpunkt O und dem festen Punkt F, zusammenfallen. Die Scheitel S_1 der einem positiven a_o entsprechenden Schnittkreise befinden sich stets zwischen den Abständen $\frac{s}{2}$ und s von O, die Scheitel S_1' der einem negativen Werte von a_o entsprechenden Schnittkreise dagegen zwischen dem Nullpunkt O und dem Abstand $+\frac{s}{2}$. Die Radien der Kreise werden für $a_o = \pm\infty$ unendlich gross; die entsprechenden

Kreisbogen, welche beide durch den Punkt $x = \frac{s}{2}$ gehen, sind daher Geraden von der Gleichung $x = \frac{s}{2}$. (S. Fig. 7).

Alle Schnittkreise in der (xy)-Ebene bilden ein Kreisbüschel 2. Ordnung mit den Grenzpunkten O und F; die (x)-Achse bildet die Zentrale und die Gerade $x = \frac{s}{2}$ die Chordale desselben.

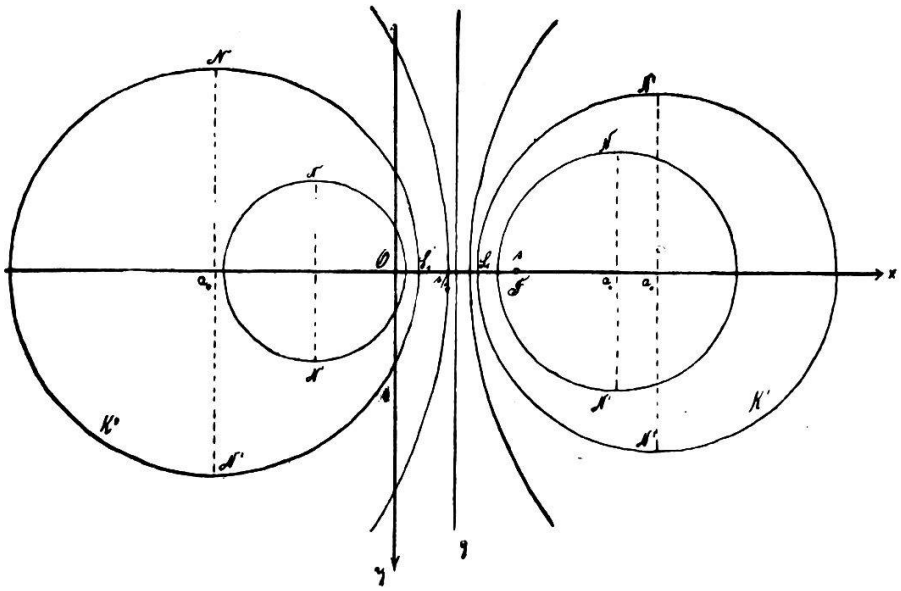

Fig. 7.

Die Kreise K′ mit dem Zentrum auf der positiven (x)-Achse entsprechen dem Schnitt der (xy)-Ebene mit den Rotationsellipsoïden; die Kreise K″ mit ihrem Zentrum auf der negativen (x)-Achse sind die Schnitte der (xy)-Ebene mit den Rotationshyperboloïden, und die Chordale g mit der Gl. $x = \frac{s}{2}$ ist der Schnitt der (xy)-Ebene mit dem parabolischen Zylinder, nämlich dessen Scheitelerzeugende. Für

den Parameter	$k = o$	wird	$a_o = s$	und der	Kreisradius	$r = o$
»	»	$k = 1$ »	$a_o = \pm\infty$	»	»	$r = \pm\infty$
»	»	$k = \infty$ »	$a_o = o$	»	»	$r = o$

Unter der Schar der Schnittkurven gibt es also zwei Kreise vom Radius Null, die Grenzpunkte F und O.

Aus Gleichung (8_a) ist ferner ersichtlich, dass entgegengesetzt gleich grossen Werten von a_o nicht gleich grosse Kreisradien entsprechen; der dem positiven a_o entsprechende Radius ist immer kleiner als der dem negativen a_o entsprechende, wie sich auch aus Fig. 7 ergibt.

Untersuchen wir noch die Lageveränderung der in der (xy)-Ebene liegenden Kreisscheitel N und N'! Ihre Koordinaten sind:

$$x = a_o = \frac{s}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{sk}{1 - k^2}$$

Durch Elimination des Parameters k aus diesen Ausdrücken erhalten wir die Bewegungsgleichung für die beiden Punkte, nämlich

$$x^2 - y^2 - sx = o \qquad \text{(a.)}$$

Sie stellt eine Hyperbel dar; die Koordinaten des Mittelpunktes derselben sind $\xi = \frac{s}{2}$ und $\eta = o$, und die auf den Mittelpunkt transformierte Gleichung hat die Form:

$$x'^2 - y'^2 = \frac{s^2}{4} \qquad \text{(b.)}$$

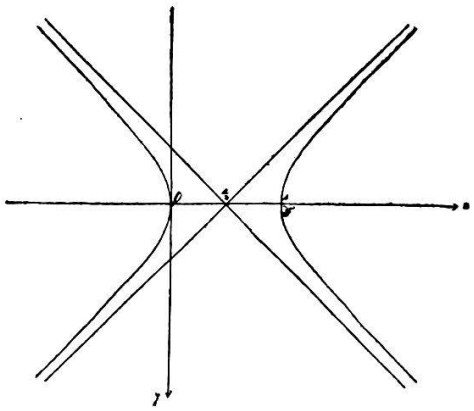

Fig. 8.

Es ist also eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbachse $a = \frac{s}{2}$, und diese Kurve gibt uns den Ort aller Kreisscheitel N und N' in der (xy)-Ebene bei veränderlichem Parameter k.