Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 4: Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a = b = \frac{sk}{1-k^2}$	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O S_1	S_2	$e = \frac{sk^2}{1-k^2}$	$\frac{e}{a}$
0	0	s	$x_1 = s$	$x_2 = s$	0	k
1	∞	$\pm\infty$	$= \frac{s}{2}$	$= \pm\infty$	∞	k
∞	0	0	$= 0$	$= 0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $\cdot\, y' = 0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1 \tag{7}$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variabeln Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k < 1$, Hyperbeln, wenn $k > 1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x' = -\frac{a^2}{e} = -a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.

Der spezielle Fall $k = 1$ wird nach Gleichung (5.) diskutiert; die Schnittkurve nimmt hier die Form einer Parabel an, deren Gleichung durch

$$z'^2 = 2\,sx' \qquad (6.)$$

gegeben ist.

Nach dem Bisherigen lässt sich nun die Schnittkurvenschar in der (xz)-Ebene folgenderweise darstellen:

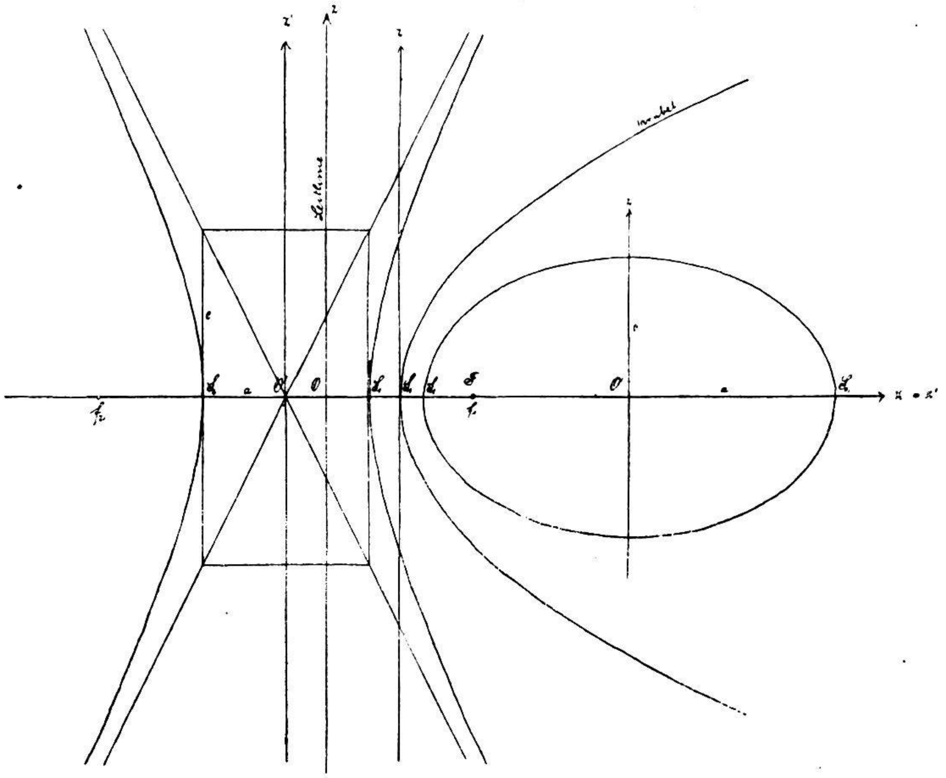

Fig. 5.

Betrachten wir noch die in der (xz)-Ebene liegende Halbachse c der Rotationsfläche! Für die Ellipsoïde ist ihre Länge $c = \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}}$. Die Koordinaten der beiden Scheitel sind daher:

$$x = a_o = \frac{s}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{1 - k^2}} \qquad (a.)$$

Wird der Parameter k aus diesen beiden Ausdrücken eliminiert, so erhält man die Gleichung

$$z^2 - sx + s^2 = o \quad \text{oder} \quad z^2 = s\,(x - s) \qquad (b.)$$

Sie stellt eine Parabel dar als Ort der Scheitelpunkte aller Halbachsen c, die in der (xz)-Ebene liegen. Die (x)-Achse ist

Parabelachse, der Punkt F Scheitelpunkt. Setzt man für $x = x' + s$ und für $z = z'$, so hat man die Scheitelgleichung der Parabel:

$$z'^2 = sx'.$$

Der Halbparameter $p = \frac{s}{2} = \frac{1}{2}$ der Strecke OF. Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel $= \frac{s}{4} = \frac{1}{4}$ der Strecke OF.

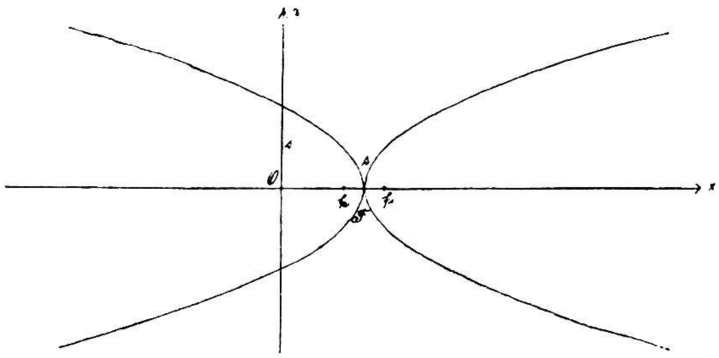

Fig. 6.

Ist $k > 1$, so dass die Rotationsfläche durch ein Hyperboloïd dargestellt wird, so misst die imaginäre Halbachse $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$. Die Scheitelkoordinaten werden also

$$x = \frac{s}{1 - k^2} = -\frac{s}{k^2 - 1} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Durch Elimination von k aus diesen zwei Ausdrücken erhält man die Gleichung einer linksseitigen Parabel, nämlich

$$z^2 = s^2 - sx = - s(x - s)$$

oder, wenn man für $z = z'$ und für $x = x' + s$ einsetzt,

$$z'^2 = - sx'.$$

Der Punkt F ist auch Parabelscheitel, der Halbparameter $= p = - \frac{s}{2}$. Diese Parabel ist mit der obigen kongruent, sie ist nur um 180^0 gedreht. Die (z)-Achse wird von der Kurve in $\pm s$ geschnitten, d. h. das Hyperboloïd $k = \infty$, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt O zusammenfällt, besitzt eine Halbachse $c = s$ (und $a = b = o$). Nur der links von der (z)-Achse liegende Teil dieser Parabel ist Ort von reellen Scheiteln der imaginären Halbachsen der Hyperboloïde, da die Punkte innerhalb der Strecke OF nie Mittelpunkt der Rotationsflächen werden (S. Fig. 6).

§ 5.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene.

Auch die (xy)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Systems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhalten wir direkt aus der transformierten Flächengleichung (2.), indem wir in ihr $z' = o$ setzen; sie wird dann:

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} = 1 \qquad (8.)$$

Setzen wir hierin für $\frac{s}{1-k^2} = a_0$ und für $k^2 = \frac{a_0 - s}{a_0}$, so geht sie über in

$$x'^2 + y'^2 = a_0 (a_0 - s) \qquad (8_a.)$$

Variiert man k von o bis ∞, so durchläuft a_0 alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen diejenigen von o bis s. Für alle möglichen Werte von a_0 wird daher die rechte Seite der Gleichung (8_a) positiv, sie stellt also immer einen Kreis dar. Der Ort aller Punkte in der (xy)-Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten, F und O (dem Fusspunkt der z-Achse), in einem gegebenen, konstanten Verhältnis stehen, ist also ein Kreis. Für variables k kann dessen Zentrum O′ mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse, ausgenommen mit denjenigen zwischen dem Nullpunkt O und dem festen Punkt F, zusammenfallen. Die Scheitel S_1 der einem positiven a_0 entsprechenden Schnittkreise befinden sich stets zwischen den Abständen $\frac{s}{2}$ und s von O, die Scheitel S_1' der einem negativen Werte von a_0 entsprechenden Schnittkreise dagegen zwischen dem Nullpunkt O und dem Abstand $+\frac{s}{2}$. Die Radien der Kreise werden für $a_0 = \pm \infty$ unendlich gross; die entsprechenden