Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 3: Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

dinatenursprunges O′ vom alten O; also ist die (z)-Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz)-Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F, also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz)-Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.
Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k.

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O′ der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1-k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O′ folgenderweise:

k	a_0
o	s
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	2s
1	$\pm\infty$
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O′ im Punkte F; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x)-Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O, den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x)-Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF.

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy)-Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x)-Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1-k^2)\,x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$

Durch Auflösen nach x ergibt sich hieraus

$$x_1 = \frac{s}{1+k} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{s}{1-k}$$

Dies sind die Abstände der Scheitel S_1 und S_2 vom Ursprung O. Variiert man k, so ändern sich die Stellungen der Scheitel nach folgender Tabelle:

k	x_1	x_2
0	s	s
1	$\frac{s}{2}$	$\pm\infty$
∞	0	0

Für $k = 0$ fallen die Scheitel S_1 und S_2 im Punkte F zusammen, die Fläche 2. Grades reduziert sich auf den festen Punkt F. Durchläuft k die Werte von 0 bis 1, so stellt die Flächengleichung stets ein Rotationsellipsoïd dar; bei zunehmendem Werte von k nähert sich dessen einer Scheitel S_1 dem Mittelpunkte der Strecke OF, der andere, S_2, rückt gegen den unendlich fernen Punkt der positiven (x)-Achse. Im Spezialfall $k = 1$ geht die Fläche 2. Ordnung in den parabolischen Cylinder über, dessen eine Scheitel im Unendlichen, der andere im Abstand $x = \frac{s}{2}$ von O liegt. Ueberschreitet k den Wert 1, so geht der Scheitel S_2 der Rotationsfläche im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und rückt mit wachsendem k auf derselben wieder ins Endliche, indem er sich immer mehr dem Nullpunkt O nähert, bis er für $k = \infty$ mit ihm zusammenfällt. Der Scheitel S_1 wandert in der bisherigen Richtung weiter gegen O. Im Intervall $1 < k < \infty$ handelt es sich immer um einschalige Rotationshyperboloïde; das Hyperboloïd $k = \infty$ reduziert sich auf die ursprüngliche (z)-Achse.

Die Längen der Halbachsen der Rotationsflächen variieren zwischen 0 (für $k = 0$ und $k = \infty$) und ∞ (für $k = 1$).

Betrachten wir nun die in der (x)-Achse liegenden Brennpunkte f_1 und f_2 des Flächensystems! Nach der Gleichung (2) betragen ihre Abstände von O′ im neuen Koordinatensystem

$$x' = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k^2}{1-k^2}$$

Nun ist der Abstand des Punktes F vom Ursprung O′ im neuen Koordinatensystem:

$$x' = s - \frac{s}{1-k^2} = -\frac{s\,k^2}{1-k^2}$$

Durch Vergleichung dieses Abstandes mit denjenigen der Brennpunkte f_1 und f_2 ist ersichtlich, dass der eine Brennpunkt f_1 der Rotationsfläche in dem festen Punkte F liegt. Da F in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem seine alte Lage stets beibehält, so bleibt auch der Ort des einen Brennpunktes f_1 aller Rotationsflächen unverändert, F ist der eine Brennpunkt aller Rotationsflächen.

Der zweite Brennpunkt, f_2, steht um

$$x_2 = a_0 + \frac{s\,k^2}{1-k^2} = \frac{s}{1-k^2} + \frac{s\,k^2}{1-k^2} = \frac{s\,(1+k^2)}{1-k^2}$$

vom Ursprung O des alten Systems ab. Bei variablem Parameter k bewegt sich daher f_2 auf der positiven (x)-Achse von F nach $+\infty$, wenn k die Werte von 0 bis 1 durchläuft; überschreitet k den Wert 1, so geht der zweite Brennpunkt im Unendlichen von der positiven (x)-Achse auf die negative über, und wenn k unendlich gross wird, so nähert er sich dem alten Nullpunkt bis zum Abstand $x_2 = -s$.

Nach obigem beträgt die lineare Exzentrizität der Rotationsfläche $e = \frac{s\,k^2}{1-k^2}$. Für $k = 0$ ist $e = 0$. Während k bis 1 anwächst, also für die Schar der Rotationsellipsoïde, nimmt sie zu bis ∞, für die Hyperboloïde wird sie wieder kleiner und im Grenzfall $k = \infty$ wird $e = s$.

Die numerische Exzentrizität der Rotationsfläche wird gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{e}{a} = \frac{s\,k^2}{1-k^2} : \frac{s\,k}{1-k^2} = k.$$

Sie ist stets gleich dem variablen Parameter k und gleich dem konstanten Verhältnis der Abstände m und n in der Definition der Fläche. Ihr Wert variiert zwischen 0 und ∞.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a = b = \frac{sk}{1-k^2}$	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O		$e = \frac{sk^2}{1-k^2}$	$\frac{e}{a}$
			S_1	S_2		
0	0	s	$x_1 = s$	$x_2 = s$	0	k
1	∞	$\pm\infty$	$= \frac{s}{2}$	$= \pm\infty$	∞	k
∞	0	0	$= 0$	$= 0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $y' = 0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (7)$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variabeln Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k < 1$, Hyperbeln, wenn $k > 1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x' = -\frac{a^2}{e} = -a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.