Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades
Autor: Meyer, Friedrich
Kapitel: 1: Herleitung der Gleichung des Rotationsflächensystems
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Friedrich Meyer.

Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades.

§ 1.

Herleitung der Gleichung des Rotationsflächensystems.

Die Gleichung des Rotationsflächensystems, welches in der vorliegenden Arbeit diskutiert werden soll, erhält man bei der Lösung folgender Aufgabe: Welches ist der Ort aller Punkte im Raum, deren Abstände von einem festen Punkte F und von einer festen Geraden in einem gegebenen konstanten Verhältnis stehen?

Als feste Gerade wählen wir die (z)-Achse eines räumlichen, kartesischen Koordinatensystems; die (x)-Achse legen wir durch den gegebenen Punkt F und bezeichnen den Abstand OF mit s. P sei einer der gesuchten Punkte; seine Koordinaten bezeichnen wir mit xyz; für alle gesuchten Punkte P gilt

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{m}{n} = k = \text{konstant.}$$

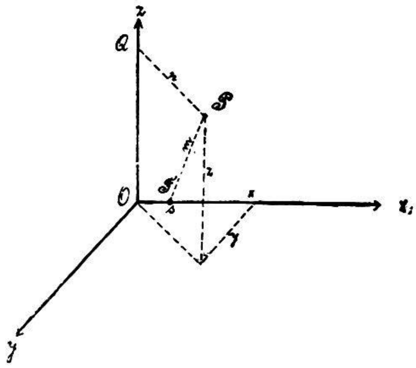

Fig. 1.

Nun ist $PF = \sqrt{(x - s)^2 + y^2 + z^2}$ und $PQ = \sqrt{x^2 + y^2}$, also

$$\frac{PF^2}{PQ^2} = \frac{(x - s)^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} = k^2 \text{ oder}$$

$$f(xyz) = (x - s)^2 + y^2 + z^2 - k^2 (x^2 + y^2) = 0$$

$$\underline{(1 - k^2)\, x^2 + (1 - k^2)\, y^2 + z^2 - 2\, sx + s^2 = 0} \qquad (1)$$

Durch diese Gleichung ist der Ort aller Punkte P(xyz) bestimmt, welche obiger Bedingung Genüge leisten; sie ist eine Gleichung 2. Grades in den drei Variablen xyz, stellt also eine Fläche 2. Grades dar. Für negative Werte von k bleibt die Flächengleichung dieselbe, so dass nur positive k zwischen o und ∞ in Betracht kommen. Betrachtet man k als veränderlichen Parameter, der alle Werte von o bis ∞ annimmt, so erhält man eine Schar von unendlich vielen Flächen 2. Grades, die im Folgenden untersucht werden soll.

Die Flächengleichung (1) enthält keine Glieder in xy, xz oder yz; es genügt daher eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems, um sie auf die Achsen der Fläche 2. Grades zu transformieren. Den Mittelpunkt derselben bezeichnen wir mit M, seine Koordinaten seien a_0 b_0 c_0. Die Invariante δ der Gleichung (1) wird nun:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1-k^2 \cdot & 0 & \cdot 0 \\ 0 & \cdot 1-k^2 & \cdot 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot 1 \end{vmatrix} = (1-k^2)^2$$

Schliessen wir den Fall $k = 1$ aus, so ist δ von Null verschieden, der Mittelpunkt M der Fläche liegt daher im Endlichen. Ist dagegen $k = 1$, so wird $\delta = 0$, der Mittelpunkt der Fläche liegt also im Unendlichen.

Die Koordinaten a_0 b_0 c_0 des Flächenmittelpunktes werden nun:

$$a_0 = -\frac{1}{(1-k^2)^2} \begin{vmatrix} -s \cdot & 0 & \cdot 0 \\ 0 \cdot & 1-k^2 & \cdot 0 \\ 0 \cdot & 0 & \cdot 1 \end{vmatrix} = +\frac{s}{1-k^2}$$

$$b_0 = -\frac{1}{(1-k^2)^2} \begin{vmatrix} 1-k^2 & \cdot -s & \cdot 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_0 = -\frac{1}{(1-k^2)^2} \begin{vmatrix} (1-k^2)^2 \cdot & 0 & \cdot -1 \\ 0 & \cdot 1-k^2 & \cdot\ 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Der Flächenmittelpunkt M liegt also immer auf der (x)-Achse unseres Koordinatensystems und zwar um $x = \frac{s}{1-k^2}$ vom Ursprung O entfernt.

Nun ist noch die Determinante $\triangle$ zu berechnen; nach Gleichung (1) wird sie

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-k^2 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1-k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & s^2 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$\triangle = s^2 (1-k^2)^2 - s^2 (1-k^2) = - s^2 k^2 (1-k^2)$$

Nach der Transformation hat dann die Flächengleichung (1) die folgende Form:

$$f(x' y' z') = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2 a_{12} x' y' + 2 a_{23} y' z' + 2 a_{13} x' z' + \frac{\triangle}{\delta} = 0$$

Setzt man die Werte der Koëffizienten, sowie diejenigen für $\triangle$ und δ ein, so folgt:

$$f(x' y' z') = (1-k^2) x'^2 + (1-k^2) y'^2 + z'^2 - \frac{s^2 k^2}{1-k^2} = 0$$

oder

$$\frac{x'^2}{\dfrac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\dfrac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\dfrac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (2)$$

Der gesuchte Ort des Punktes P ist also eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ von O liegt, und deren Rotationsachse parallel der (z)-Achse ist. Ihre Halbachsen sind

$$a = b = \frac{sk}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}}$$

§ 2.

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems.

Die auf die Achsen transformierte Flächengleichung (2), die den Parameter k enthält, stellt eine Schar von unendlich vielen Rotationsflächen 2. Grades dar. Je nachdem nun $k \lesseqgtr 1$ ist, hat