

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades

Autor: Meyer, Friedrich

Kapitel: 1: Herleitung der Gleichung des Rotationsflächensystems

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319219>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Diskussion eines Systems von Rotationsflächen

2. Grades.

§ 1.

Herleitung der Gleichung des Rotationsflächensystems.

Die Gleichung des Rotationsflächensystems, welches in der vorliegenden Arbeit diskutiert werden soll, erhält man bei der Lösung folgender Aufgabe: Welches ist der Ort aller Punkte im Raum, deren Abstände von einem festen Punkte F und von einer festen Geraden in einem gegebenen konstanten Verhältnis stehen?

Als feste Gerade wählen wir die (z)-Achse eines räumlichen, kartesischen Koordinatensystems; die (x)-Achse legen wir durch den gegebenen Punkt F und bezeichnen den Abstand OF mit s. P sei einer der gesuchten Punkte; seine Koordinaten bezeichnen wir mit x, y, z ; für alle gesuchten Punkte P gilt

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{m}{n} = k = \text{konstant.}$$

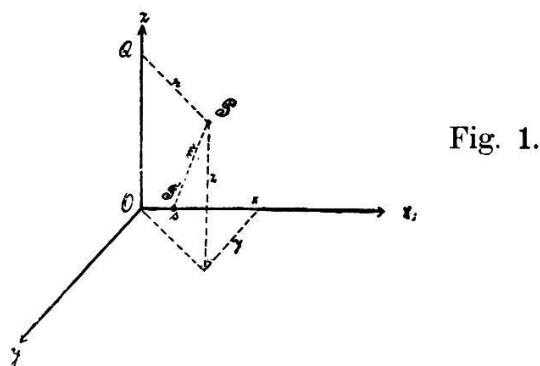


Fig. 1.

Nun ist $PF = \sqrt{(x-s)^2 + y^2 + z^2}$ und $PQ = \sqrt{x^2 + y^2}$, also

$$\frac{PF^2}{PQ^2} = \frac{(x-s)^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} = k^2 \text{ oder}$$

$$f(x, y, z) = (x-s)^2 + y^2 + z^2 - k^2 (x^2 + y^2) = 0$$

$$\underline{(1 - k^2) x^2 + (1 - k^2) y^2 + z^2 - 2 sx + s^2 = 0} \quad (1)$$

Durch diese Gleichung ist der Ort aller Punkte $P(xyz)$ bestimmt, welche obiger Bedingung Genüge leisten; sie ist eine Gleichung 2. Grades in den drei Variablen xyz , stellt also eine Fläche 2. Grades dar. Für negative Werte von k bleibt die Flächen-gleichung dieselbe, so dass nur positive k zwischen 0 und ∞ in Betracht kommen. Betrachtet man k als veränderlichen Parameter, der alle Werte von 0 bis ∞ annimmt, so erhält man eine Schar von unendlich vielen Flächen 2. Grades, die im Folgenden untersucht werden soll.

Die Flächengleichung (1) enthält keine Glieder in xy , xz oder yz ; es genügt daher eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems, um sie auf die Achsen der Fläche 2. Grades zu transformieren. Den Mittelpunkt derselben bezeichnen wir mit M , seine Koordinaten seien $a_0 b_0 c_0$. Die Invariante δ der Gleichung (1) wird nun:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 - k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - k^2)^2$$

Schliessen wir den Fall $k=1$ aus, so ist δ von Null verschieden, der Mittelpunkt M der Fläche liegt daher im Endlichen. Ist dagegen $k=1$, so wird $\delta=0$, der Mittelpunkt der Fläche liegt also im Unendlichen.

Die Koordinaten $a_0 b_0 c_0$ des Flächenmittelpunktes werden nun:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{(1 - k^2)^2} \begin{vmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & 1 - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{s}{1 - k^2} \\ b_0 &= -\frac{1}{(1 - k^2)^2} \begin{vmatrix} 1 - k^2 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ c_0 &= -\frac{1}{(1 - k^2)^2} \begin{vmatrix} (1 - k^2)^2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Der Flächenmittelpunkt M liegt also immer auf der (x)-Achse unseres Koordinatensystems und zwar um $x = \frac{s}{1 - k^2}$ vom Ursprung O entfernt.

Nun ist noch die Determinante Δ zu berechnen; nach Gleichung (1) wird sie

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - k^2 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 - k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & s^2 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$\Delta = s^2 (1 - k^2)^2 - s^2 (1 - k^2) = -s^2 k^2 (1 - k^2)$$

Nach der Transformation hat dann die Flächengleichung (1) die folgende Form:

$$f(x' y' z') = a_{11} x'^2 + a_{22} y'^2 + a_{33} z'^2 + 2 a_{12} x' y' + 2 a_{23} y' z' + 2 a_{13} x' z' + \frac{\Delta}{\delta} = 0$$

Setzt man die Werte der Koëffizienten, sowie diejenigen für Δ und δ ein, so folgt:

$$f(x' y' z') = (1 - k^2) x'^2 + (1 - k^2) y'^2 + z'^2 - \frac{s^2 k^2}{1 - k^2} = 0$$

oder

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1 - k^2}} = 1 \quad (2)$$

Der gesuchte Ort des Punktes P ist also eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1 - k^2}$ von O liegt, und deren Rotationsachse parallel der (z)-Achse ist. Ihre Halbachsen sind

$$a = b = \frac{sk}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad c = \sqrt{\frac{sk}{1 - k^2}}$$

§ 2.

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems.

Die auf die Achsen transformierte Flächengleichung (2), die den Parameter k enthält, stellt eine Schar von unendlich vielen Rotationsflächen 2. Grades dar. Je nachdem nun $k \leq 1$ ist, hat