Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1911)

Artikel: Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades
Autor: Meyer, Friedrich
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319219

Friedrich Meyer.

Diskussion eines Systems von Rotationsflächen 2. Grades.

§ 1.

Herleitung der Gleichung des Rotationsflächensystems.

Die Gleichung des Rotationsflächensystems, welches in der vorliegenden Arbeit diskutiert werden soll, erhält man bei der Lösung folgender Aufgabe: Welches ist der Ort aller Punkte im Raum, deren Abstände von einem festen Punkte F und von einer festen Geraden in einem gegebenen konstanten Verhältnis stehen?

Als feste Gerade wählen wir die (z)-Achse eines räumlichen, kartesischen Koordinatensystems; die (x)-Achse legen wir durch den gegebenen Punkt F und bezeichnen den Abstand OF mit s. P sei einer der gesuchten Punkte; seine Koordinaten bezeichnen wir mit xyz; für alle gesuchten Punkte P gilt

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{m}{n} = k = \text{konstant.}$$

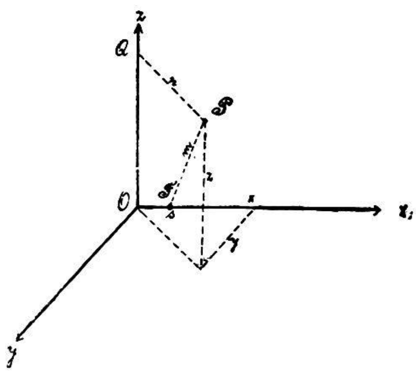

Fig. 1.

Nun ist $PF = \sqrt{(x-s)^2 + y^2 + z^2}$ und $PQ = \sqrt{x^2 + y^2}$, also

$$\frac{PF^2}{PQ^2} = \frac{(x-s)^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} = k^2 \text{ oder}$$

$$f(xyz) = (x-s)^2 + y^2 + z^2 - k^2 (x^2 + y^2) = o$$

$$\underline{(1-k^2)\, x^2 + (1-k^2)\, y^2 + z^2 - 2\, sx + s^2 = o} \qquad (1)$$

Durch diese Gleichung ist der Ort aller Punkte P(xyz) bestimmt, welche obiger Bedingung Genüge leisten; sie ist eine Gleichung 2. Grades in den drei Variablen xyz, stellt also eine Fläche 2. Grades dar. Für negative Werte von k bleibt die Flächengleichung dieselbe, so dass nur positive k zwischen o und ∞ in Betracht kommen. Betrachtet man k als veränderlichen Parameter, der alle Werte von o bis ∞ annimmt, so erhält man eine Schar von unendlich vielen Flächen 2. Grades, die im Folgenden untersucht werden soll.

Die Flächengleichung (1) enthält keine Glieder in xy, xz oder yz; es genügt daher eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems, um sie auf die Achsen der Fläche 2. Grades zu transformieren. Den Mittelpunkt derselben bezeichnen wir mit M, seine Koordinaten seien a_0 b_0 c_0. Die Invariante δ der Gleichung (1) wird nun:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1-k^2 \cdot & 0 & \cdot 0 \\ 0 & \cdot 1-k^2 & \cdot 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot 1 \end{vmatrix} = (1-k^2)^2$$

Schliessen wir den Fall $k=1$ aus, so ist δ von Null verschieden, der Mittelpunkt M der Fläche liegt daher im Endlichen. Ist dagegen $k=1$, so wird $\delta = 0$, der Mittelpunkt der Fläche liegt also im Unendlichen.

Die Koordinaten a_0 b_0 c_0 des Flächenmittelpunktes werden nun:

$$a_0 = -\frac{1}{(1-k^2)^2} \begin{vmatrix} -s \cdot & 0 & \cdot 0 \\ 0 \cdot & 1-k^2 & \cdot 0 \\ 0 \cdot & 0 & \cdot 1 \end{vmatrix} = +\frac{s}{1-k^2}$$

$$b_0 = -\frac{1}{(1-k^2)^2} \begin{vmatrix} 1-k^2 & \cdot -s & \cdot 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_0 = -\frac{1}{(1-k^2)^2} \begin{vmatrix} (1-k^2)^2 \cdot & 0 & \cdot -1 \\ 0 & \cdot 1-k^2 \cdot & 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

Der Flächenmittelpunkt M liegt also immer auf der (x)-Achse unseres Koordinatensystems und zwar um $x = \frac{s}{1-k^2}$ vom Ursprung O entfernt.

Nun ist noch die Determinante $\triangle$ zu berechnen; nach Gleichung (1) wird sie

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1-k^2 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1-k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 & s^2 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$\triangle = s^2(1-k^2)^2 - s^2(1-k^2) = -s^2 k^2 (1-k^2)$$

Nach der Transformation hat dann die Flächengleichung (1) die folgende Form:

$$f(x'y'z') = a_{11}\, x'^2 + a_{22}\, y'^2 + a_{33}\, z'^2 + 2\, a_{12}\, x'y' + 2\, a_{23}\, y'z' + 2\, a_{13}\, x'z' + \frac{\triangle}{\delta} = 0$$

Setzt man die Werte der Koëffizienten, sowie diejenigen für $\triangle$ und δ ein, so folgt:

$$f(x'y'z') = (1-k^2)\, x'^2 + (1-k^2)\, y'^2 + z'^2 - \frac{s^2 k^2}{1-k^2} = 0$$

oder

$$\frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (2)$$

Der gesuchte Ort des Punktes P ist also eine Rotationsfläche zweiter Ordnung, deren Mittelpunkt auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ von O liegt, und deren Rotationsachse parallel der (z)-Achse ist. Ihre Halbachsen sind

$$a = b = \frac{sk}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}}$$

§ 2.

Die verschiedenen Flächenarten des Rotationsflächensystems.

Die auf die Achsen transformierte Flächengleichung (2), die den Parameter k enthält, stellt eine Schar von unendlich vielen Rotationsflächen 2. Grades dar. Je nachdem nun $k \lesseqgtr 1$ ist, hat man es entweder mit einem Rotationsellipsoïd, einem parabolischen Zylinder oder mit einem einschaligen Rotationshyperboloïd zu tun. Dies soll in einem kurzen Abschnitt etwas ausgeführt werden.

1. Fall: $k < 1$.

also $m < n$

In diesem Fall werden sämtliche Nenner der Flächengleichung (2) immer einen positiven Wert haben, und wir schreiben die Gleichung zur Abkürzung in der Form:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationsellipsoïdes.

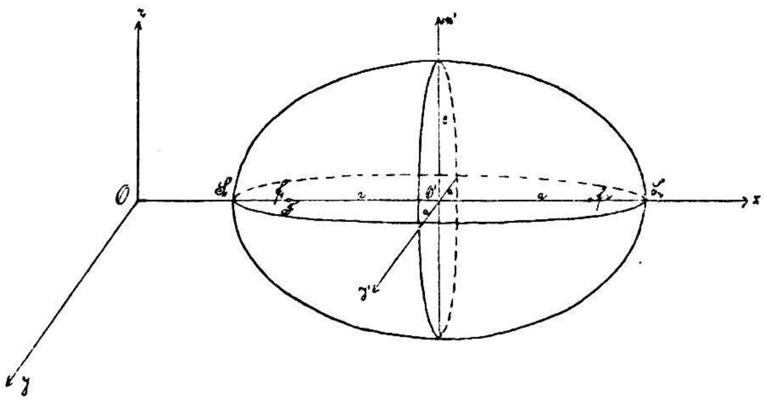

Fig. 2.

Die Halbachsen desselben sind $a = b = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s\,k}{\sqrt{1 - k^2}}$; a ist immer grösser als c. Die Rotationsachse der Fläche steht senkrecht auf der (x y)-Ebene, ihr Mittelpunkt liegt auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Koordinatenursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Da k alle Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen kann, so fällt O′ je nach der Grösse des Parameters mit irgend einem Punkte der positiven (x)-Achse zwischen + s und ∞ zusammen.

Nun ist $\frac{s}{1 - k^2} > \frac{s\,k}{1 - k^2}$ oder $a_0 > a$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt ausserhalb der Fläche. (S. Fig. 2).

2. Fall: $k > 1$

also $m > n$

Dann nimmt die Gleichung (2) die Form an:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

und stellt ein einschaliges Rotationshyperboloïd dar.

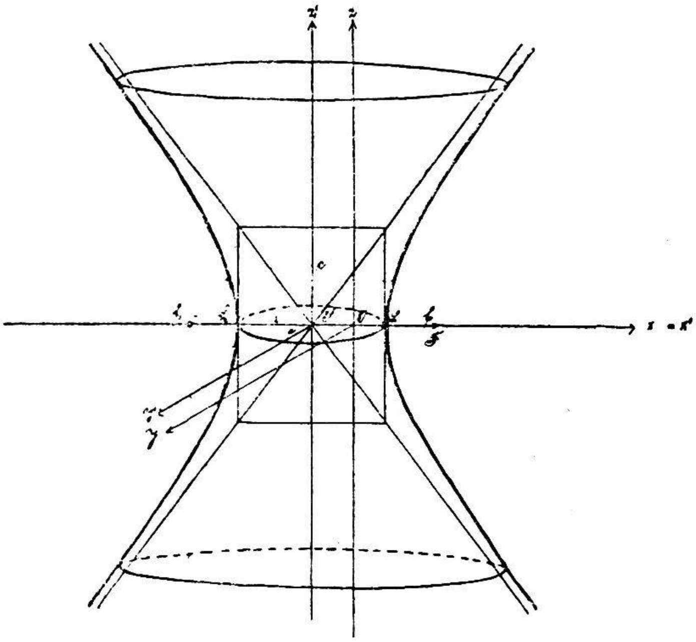

Fig. 3.

Die Rotationsachse steht senkrecht auf der (x y)-Ebene. Die (z′)-Achse schneidet die Fläche nicht, die in ihr liegende imaginäre Halbachse hat die Länge $c = \frac{s\,k}{\sqrt{k^2 - 1}}$, die Länge der Halbachse $a = b = \frac{s\,k}{k^2 - 1}$

$$\begin{array}{lll} \text{wo } c > a & \text{wenn} & k > \sqrt{2} \\ c = a & \text{„} & k = \sqrt{2} \\ \text{und } c < a & \text{„} & k < \sqrt{2} \end{array}$$

Der Abstand des Mittelpunktes O′ vom Ursprung O beträgt $a_0 = \frac{s}{1 - k^2} = - \frac{s}{k^2 - 1}$, er liegt auf der negativen (x)-Achse. Ferner ist $\frac{s\,k}{1 - k^2} > \frac{s}{1 - k^2}$ oder $a > a_0$, d. h. der alte Koordinatenursprung O liegt also innerhalb der Rotationsfläche. (S. Fig. 3).

3. Fall: $k = 1$

also $m = n$

Setzt man in der Gleichung (1) für k den Wert 1 ein, so wird sie:

$$z^2 - 2\,sx + s^2 = 0 \tag{5}$$

Die Determinante δ wird in diesem Falle

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \cdot 1 \end{vmatrix} = 0$$

Der neue Mittelpunkt O' liegt daher im Unendlichen, und eine Transformation der obigen Gleichung auf den Mittelpunkt der Fläche ist nicht möglich. Wir substituieren für $z = z'$, $y = y'$ und $x = x' + \frac{s}{2}$.

Dann geht die Gleichung (5) über in

$$z'^2 = 2\,s\,x' \tag{6}$$

Dies ist nun die Scheitelgleichung eines parabolischen Zylinders, dessen Erzeugende parallel der (y)-Achse sind. Der Halbparameter $p = s$, der Abstand des Scheitels S von der Leit-

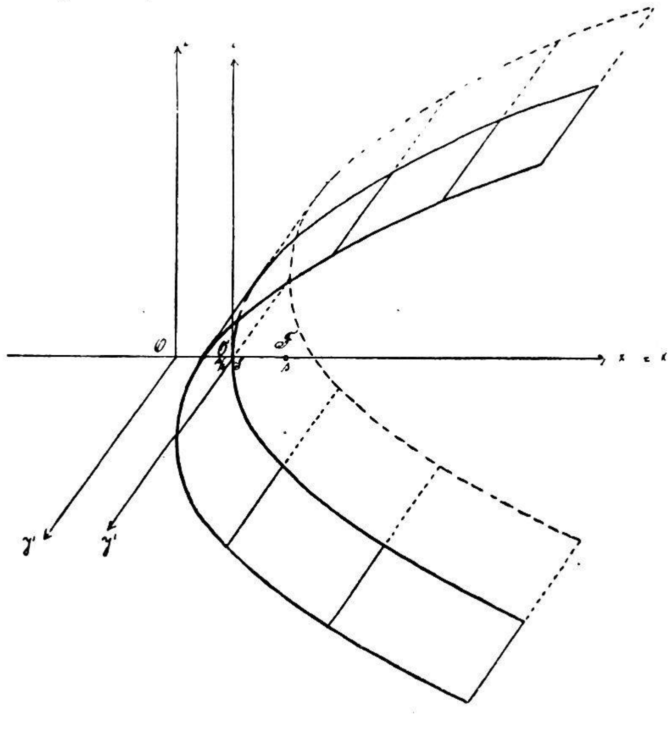

Fig. 4.

linie $= \frac{s}{2}$ und dieser ist gleich der Entfernung des neuen Koordinatenursprunges O′ vom alten O; also ist die (z)-Achse die Leitlinie der Parabel in der (xz)-Ebene.

Ferner liegt der Scheitel S in der Mitte zwischen O und F, also ist F zugleich der Brennpunkt der Schnittparabel mit der (xz)-Ebene. Die Ebene $x = \frac{s}{2}$ ist Scheiteltangentialebene des parabolischen Cylinders. (S. Fig. 4).

§ 3.

Der Ort der Mittelpunkte, Scheitel und Brennpunkte des Rotationsflächensystems bei variablem k.

Nach § 1 liegt der Mittelpunkt O′ der durch Gleichung (1) dargestellten Flächen 2. Grades immer auf der (x)-Achse; sein Abstand vom Nullpunkt $= a_0 = \frac{s}{1-k^2}$. Setzen wir für k nacheinander alle zwischen 0 und ∞ liegenden Werte ein, so ändert sich die Lage des Mittelpunktes O′ folgenderweise:

k	a_0
o	s
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	2s
1	$\pm\infty$
∞	0

Für den Parameterwert $k = 0$ befindet sich der Flächenmittelpunkt O′ im Punkte F; bei wachsendem k bewegt er sich auf der positiven (x)-Achse ins Unendliche, für $k = 1$ geht er im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und nähert sich dann bei weiter zunehmendem k wieder dem Ursprung O, den er erreicht, wenn man k den Wert ∞ gibt. Alle Punkte der positiven und negativen (x)-Achse können für einen bestimmten Wert von k Mittelpunkt einer Fläche der Schar werden, ausgenommen diejenigen innerhalb der Strecke OF.

Wenn man zunächst vom Spezialfall $k = 1$ absieht, so stellt die Gleichung (1) für jeden beliebigen Parameter k eine Rotationsfläche 2. Ordnung dar, deren Rotationsachse senkrecht auf der (xy)-Ebene steht. Die Lage ihrer Scheitel in der (x)-Achse wird gefunden, wenn man in der Flächengleichung (1) $y = z = 0$ setzt. Dann erhält man die quadratische Gleichung

$$(1 - k^2)\, x^2 - 2sx + s^2 = 0.$$

Durch Auflösen nach x ergibt sich hieraus

$$x_1 = \frac{s}{1+k} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{s}{1-k}$$

Dies sind die Abstände der Scheitel S_1 und S_2 vom Ursprung O. Variiert man k, so ändern sich die Stellungen der Scheitel nach folgender Tabelle:

k	x_1	x_2
0	s	s
1	$\frac{s}{2}$	$\pm\infty$
∞	0	0

Für $k = 0$ fallen die Scheitel S_1 und S_2 im Punkte F zusammen, die Fläche 2. Grades reduziert sich auf den festen Punkt F. Durchläuft k die Werte von 0 bis 1, so stellt die Flächengleichung stets ein Rotationsellipsoïd dar; bei zunehmendem Werte von k nähert sich dessen einer Scheitel S_1 dem Mittelpunkte der Strecke OF, der andere, S_2, rückt gegen den unendlich fernen Punkt der positiven (x)-Achse. Im Spezialfall $k = 1$ geht die Fläche 2. Ordnung in den parabolischen Cylinder über, dessen eine Scheitel im Unendlichen, der andere im Abstand $x = \frac{s}{2}$ von O liegt. Ueberschreitet k den Wert 1, so geht der Scheitel S_2 der Rotationsfläche im Unendlichen auf den negativen Teil der (x)-Achse über und rückt mit wachsendem k auf derselben wieder ins Endliche, indem er sich immer mehr dem Nullpunkt O nähert, bis er für $k = \infty$ mit ihm zusammenfällt. Der Scheitel S_1 wandert in der bisherigen Richtung weiter gegen O. Im Intervall $1 < k < \infty$ handelt es sich immer um einschalige Rotationshyperboloïde; das Hyperboloïd $k = \infty$ reduziert sich auf die ursprüngliche (z)-Achse.

Die Längen der Halbachsen der Rotationsflächen variieren zwischen 0 (für $k = 0$ und $k = \infty$) und ∞ (für $k = 1$).

Betrachten wir nun die in der (x)-Achse liegenden Brennpunkte f_1 und f_2 des Flächensystems! Nach der Gleichung (2) betragen ihre Abstände von O′ im neuen Koordinatensystem

$$x' = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2k^2}{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k^2}{1-k^2}$$

Nun ist der Abstand des Punktes F vom Ursprung O′ im neuen Koordinatensystem:

$$x' = s - \frac{s}{1-k^2} = -\frac{s\,k^2}{1-k^2}$$

Durch Vergleichung dieses Abstandes mit denjenigen der Brennpunkte f_1 und f_2 ist ersichtlich, dass der eine Brennpunkt f_1 der Rotationsfläche in dem festen Punkte F liegt. Da F in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem seine alte Lage stets beibehält, so bleibt auch der Ort des einen Brennpunktes f_1 aller Rotationsflächen unverändert, F ist der eine Brennpunkt aller Rotationsflächen.

Der zweite Brennpunkt, f_2, steht um

$$x_2 = a_0 + \frac{s\,k^2}{1-k^2} = \frac{s}{1-k^2} + \frac{s\,k^2}{1-k^2} = \frac{s\,(1+k^2)}{1-k^2}$$

vom Ursprung O des alten Systems ab. Bei variablem Parameter k bewegt sich daher f_2 auf der positiven (x)-Achse von F nach $+\infty$, wenn k die Werte von 0 bis 1 durchläuft; überschreitet k den Wert 1, so geht der zweite Brennpunkt im Unendlichen von der positiven (x)-Achse auf die negative über, und wenn k unendlich gross wird, so nähert er sich dem alten Nullpunkt bis zum Abstand $x_2 = -s$.

Nach obigem beträgt die lineare Exzentrizität der Rotationsfläche $e = \frac{s\,k^2}{1-k^2}$. Für $k = 0$ ist $e = 0$. Während k bis 1 anwächst, also für die Schar der Rotationsellipsoïde, nimmt sie zu bis ∞, für die Hyperboloïde wird sie wieder kleiner und im Grenzfall $k = \infty$ wird $e = s$.

Die numerische Exzentrizität der Rotationsfläche wird gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{e}{a} = \frac{s\,k^2}{1-k^2} : \frac{s\,k}{1-k^2} = k.$$

Sie ist stets gleich dem variablen Parameter k und gleich dem konstanten Verhältnis der Abstände m und n in der Definition der Fläche. Ihr Wert variiert zwischen 0 und ∞.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

k	$a=b=\dfrac{sk}{1-k^2}$	$a_0=\dfrac{s}{1-k^2}$	Abstände der Scheitel von O S_1	S_2	$e=\dfrac{sk^2}{1-k^2}$	$\dfrac{e}{a}$
0	0	s	$x_1=s$	$x_2=s$	0	k
1	∞	$\pm\infty$	$=\dfrac{s}{2}$	$=\pm\infty$	∞	k
∞	0	0	$=0$	$=0$	s	k

§ 4.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xz)-Ebene des Koordinatensystems.

Die (xz)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Rotationsflächensystems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhält man aus der auf den Mittelpunkt transformierten Gleichung (2), indem man in ihr $\cdot\, y'=0$ setzt; sie lautet dann

$$\frac{x'^2}{\dfrac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}}+\frac{z'^2}{\dfrac{s^2k^2}{1-k^2}}=1 \qquad (7)$$

Betrachten wir in dieser Gleichung k als variabeln Parameter, so stellt sie die Schar von Kurven dar, in welchen die (xz)-Ebene das Flächensystem schneidet, und zwar sind es Ellipsen, wenn $k<1$, Hyperbeln, wenn $k>1$ ist. Die eine Achse dieser Kegelschnitte liegt in der (x)-Achse des Koordinatensystems, der eine Brennpunkt fällt mit dem Punkte F zusammen; die zu F gehörige Leitlinie hat die Gleichung $x'=-\dfrac{a^2}{e}=-a_0$, d. h. alle diese Kegelschnitte haben die eine Leitlinie gemeinsam, sie wird gebildet von der (z)-Achse des alten Koordinatensystems. Ueber die Länge der Achsen und die verschiedenen Lagen der Scheitel und Brennpunkte der in der (xz)-Ebene erzeugten Schnittkegelschnitte gibt § 3 Aufschluss.

Der spezielle Fall $k = 1$ wird nach Gleichung (5.) diskutiert; die Schnittkurve nimmt hier die Form einer Parabel an, deren Gleichung durch

$$z'^2 = 2\,sx' \qquad (6.)$$

gegeben ist.

Nach dem Bisherigen lässt sich nun die Schnittkurvenschar in der (xz)-Ebene folgenderweise darstellen:

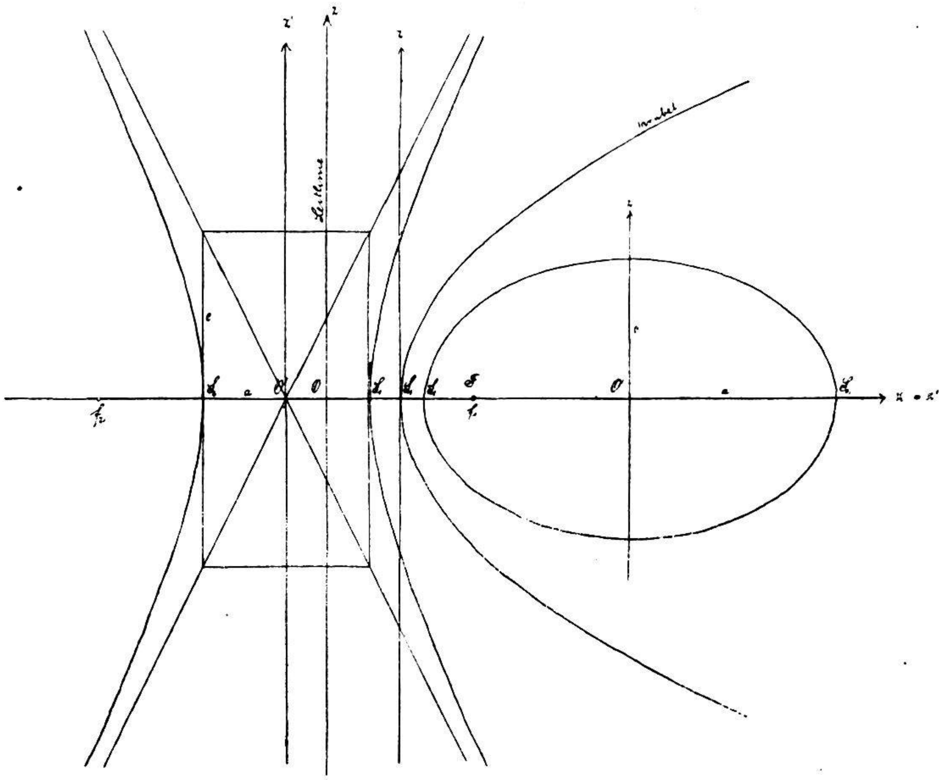

Fig. 5.

Betrachten wir noch die in der (xz)-Ebene liegende Halbachse c der Rotationsfläche! Für die Ellipsoïde ist ihre Länge $c = \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}}$. Die Koordinaten der beiden Scheitel sind daher:

$$x = a_0 = \frac{s}{1-k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{1-k^2}} \qquad (a.)$$

Wird der Parameter k aus diesen beiden Ausdrücken eliminiert, so erhält man die Gleichung

$$z^2 - sx + s^2 = o \quad \text{oder} \quad z^2 = s\,(x - s) \qquad (b.)$$

Sie stellt eine Parabel dar als Ort der Scheitelpunkte aller Halbachsen c, die in der (xz)-Ebene liegen. Die (x)-Achse ist

Parabelachse, der Punkt F Scheitelpunkt. Setzt man für $x = x' + s$ und für $z = z'$, so hat man die Scheitelgleichung der Parabel:

$$z'^2 = sx'.$$

Der Halbparameter $p = \frac{s}{2} = \frac{1}{2}$ der Strecke OF. Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel $= \frac{s}{4} = \frac{1}{4}$ der Strecke OF.

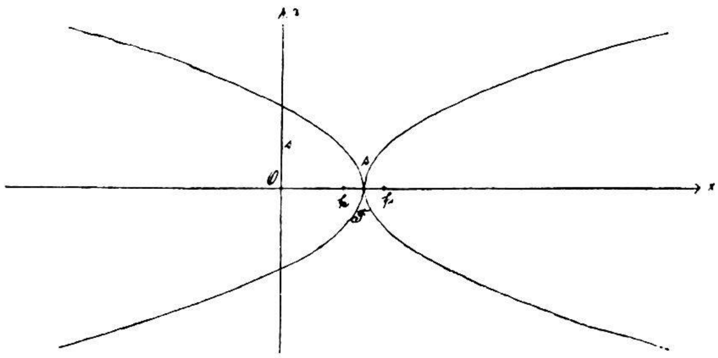

Fig. 6.

Ist $k > 1$, so dass die Rotationsfläche durch ein Hyperboloïd dargestellt wird, so misst die imaginäre Halbachse $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$.
Die Scheitelkoordinaten werden also

$$x = \frac{s}{1 - k^2} = - \frac{s}{k^2 - 1} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Durch Elimination von k aus diesen zwei Ausdrücken erhält man die Gleichung einer linksseitigen Parabel, nämlich

$$z^2 = s^2 - sx = - s(x - s)$$

oder, wenn man für $z = z'$ und für $x = x' + s$ einsetzt,

$$z'^2 = - sx'.$$

Der Punkt F ist auch Parabelscheitel, der Halbparameter $= p = - \frac{s}{2}$. Diese Parabel ist mit der obigen kongruent, sie ist nur um 180^0 gedreht. Die (z)-Achse wird von der Kurve in $\pm$ s geschnitten, d. h. das Hyperboloïd $k = \infty$, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt O zusammenfällt, besitzt eine Halbachse $c = s$ (und $a = b = o$). Nur der links von der (z)-Achse liegende Teil dieser Parabel ist Ort von reellen Scheiteln der imaginären Halbachsen der Hyperboloïde, da die Punkte innerhalb der Strecke OF nie Mittelpunkt der Rotationsflächen werden (S. Fig. 6).

§ 5.

Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (xy)-Ebene.

Auch die (xy)-Ebene des Koordinatensystems schneidet jede Fläche des Systems in einem Hauptschnitt. Die Achsengleichung desselben erhalten wir direkt aus der transformierten Flächengleichung (2.), indem wir in ihr $z' = o$ setzen; sie wird dann:

$$\frac{x'^2}{\dfrac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\dfrac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} = 1 \qquad (8.)$$

Setzen wir hierin für $\frac{s}{1-k^2} = a_o$ und für $k^2 = \frac{a_o - s}{a_o}$, so geht sie über in

$$x'^2 + y'^2 = a_o\,(a_o - s) \qquad (8_a.)$$

Variiert man k von o bis ∞, so durchläuft a_o alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, ausgenommen diejenigen von o bis s. Für alle möglichen Werte von a_o wird daher die rechte Seite der Gleichung (8_a) positiv, sie stellt also immer einen Kreis dar. Der Ort aller Punkte in der (xy)-Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten, F und O (dem Fusspunkt der z-Achse), in einem gegebenen, konstanten Verhältnis stehen, ist also ein Kreis. Für variables k kann dessen Zentrum O′ mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse, ausgenommen mit denjenigen zwischen dem Nullpunkt O und dem festen Punkt F, zusammenfallen. Die Scheitel S_1 der einem positiven a_o entsprechenden Schnittkreise befinden sich stets zwischen den Abständen $\frac{s}{2}$ und s von O, die Scheitel S_1' der einem negativen Werte von a_o entsprechenden Schnittkreise dagegen zwischen dem Nullpunkt O und dem Abstand $+\frac{s}{2}$. Die Radien der Kreise werden für $a_o = \pm\infty$ unendlich gross; die entsprechenden

Kreisbogen, welche beide durch den Punkt $x = \frac{s}{2}$ gehen, sind daher Geraden von der Gleichung $x = \frac{s}{2}$. (S. Fig. 7).

Alle Schnittkreise in der (xy)-Ebene bilden ein K r e i s - b ü s c h e l 2. Ordnung mit den Grenzpunkten O und F; die (x)-Achse bildet die Zentrale und die Gerade $x = \frac{s}{2}$ die Chordale desselben.

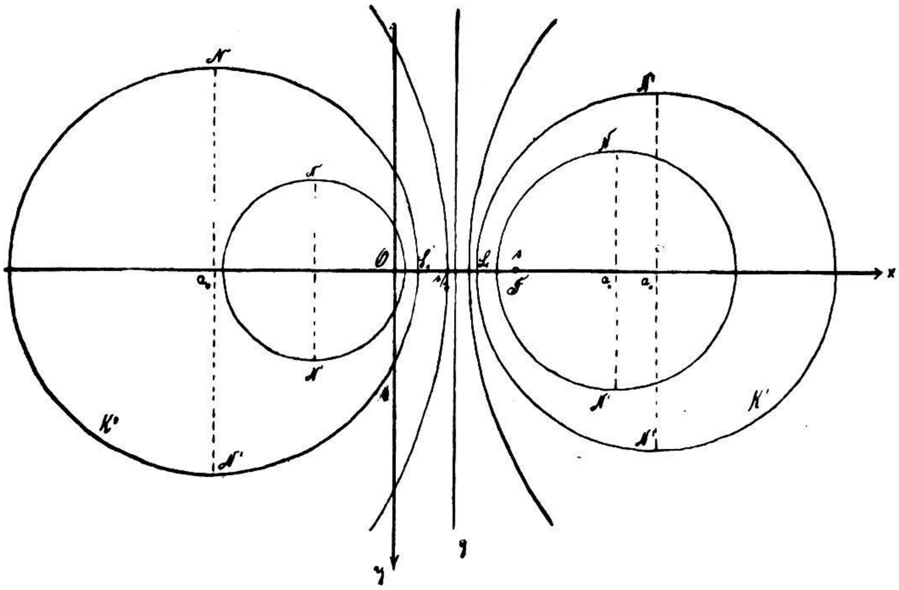

Fig. 7.

Die Kreise K′ mit dem Zentrum auf der positiven (x)-Achse entsprechen dem Schnitt der (xy)-Ebene mit den Rotationsellipsoïden; die Kreise K″ mit ihrem Zentrum auf der negativen (x)-Achse sind die Schnitte der (xy)-Ebene mit den Rotationshyperboloïden, und die Chordale g mit der Gl. $x = \frac{s}{2}$ ist der Schnitt der (xy)-Ebene mit dem parabolischen Zylinder, nämlich dessen Scheitelerzeugende. Für

den Parameter	$k = o$	wird $a_0 = s$	und der	Kreisradius	$r = o$
» »	$k = 1$	» $a_0 = \pm\infty$	»	»	$r = \pm\infty$
» »	$k = \infty$	» $a_0 = o$	»	»	$r = o$

Unter der Schar der Schnittkurven gibt es also zwei Kreise vom Radius Null, die Grenzpunkte F und O.

Aus Gleichung (8_a) ist ferner ersichtlich, dass entgegengesetzt gleich grossen Werten von a_0 nicht gleich grosse Kreisradien entsprechen; der dem positiven a_0 entsprechende Radius ist immer kleiner als der dem negativen a_0 entsprechende, wie sich auch aus Fig. 7 ergibt.

Untersuchen wir noch die Lageveränderung der in der (xy)-Ebene liegenden Kreisscheitel N und N'! Ihre Koordinaten sind:

$$x = a_0 = \frac{s}{1 - k^2} \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{sk}{1 - k^2}$$

Durch Elimination des Parameters k aus diesen Ausdrücken erhalten wir die Bewegungsgleichung für die beiden Punkte, nämlich

$$x^2 - y^2 - sx = o \qquad \text{(a.)}$$

Sie stellt eine Hyperbel dar; die Koordinaten des Mittelpunktes derselben sind $\xi = \frac{s}{2}$ und $\eta = o$, und die auf den Mittelpunkt transformierte Gleichung hat die Form:

$$x'^2 - y'^2 = \frac{s^2}{4} \qquad \text{(b.)}$$

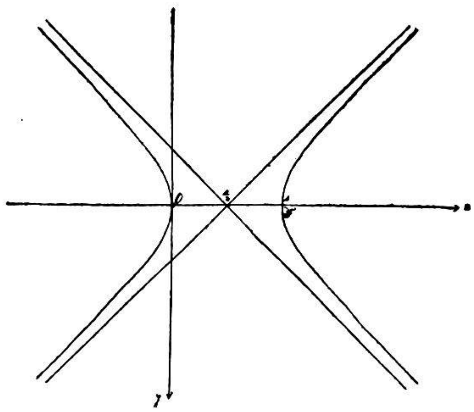

Fig. 8.

Es ist also eine gleichseitige Hyperbel mit der Halbachse $a = \frac{s}{2}$, und diese Kurve gibt uns den Ort aller Kreisscheitel N und N' in der (xy)-Ebene bei veränderlichem Parameter k.

§ 6.

Der Hauptschnitt der Rotationsfläche parallel zur (yz)-Ebene bei variablem Parameter k.

Ersetzen wir in der auf den Mittelpunkt transformierten Flächengleichung

$$(2.)\qquad \frac{x'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1$$

x' durch o, so erhalten wir den Hauptschnitt der Fläche 2. Grades parallel zur (yz)-Ebene, nämlich

$$\frac{y'^2}{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2k^2}{1-k^2}} = 1 \qquad (9)$$

Die Gleichung (9) stellt eine Ellipse oder eine Hyperbel dar, je nachdem $k \lessgtr 1$ ist; dies ist die Kurve, in welcher die durch Gleichung (1) gegebene Rotationsfläche die neue Koordinatenebene ($y'z'$) schneidet.

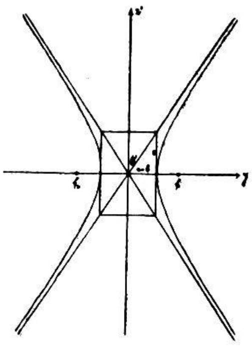

Fig. 9.

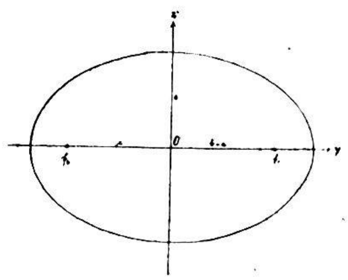

Fig. 9 a.

Die Halbachsen der Ellipse sind:

$$a = \frac{s\,k}{1-k^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}} \quad \text{wo } c < a$$

Für alle Werte von k zwischen 0 und 1 sind die zur (yz)-Ebene parallelen Hauptschnitte der Rotationsflächen Ellipsen, deren grosse Achse in der (xy)-Ebene und deren kleinere Achse in der (xz)-Ebene liegt. Für $k = 0$ werden beide Achsen einander gleich, nämlich $a = c = o$, die Hauptschnittellipse reduziert sich auf einen Punkt, der im Abstand $x = +s$ vom Ursprung O auf der (x)-Achse liegt. Bei zunehmendem k entfernt sich der Mittelpunkt der Hauptschnittellipse auf der positiven (x)-Achse immer weiter vom alten Ursprung O und für $k = 1$ wird sein Abstand unendlich gross. Gleichzeitig wachsen auch die Ellipsenhalbachsen a und c an und werden zuletzt ebenfalls unendlich gross.

Für alle Parameterwerte $k > 1$ stellt die Gleichung (9) eine Hyperbel dar, deren reelle Halbachse $a = \frac{sk}{k^2 - 1}$ und deren imaginäre Halbachse $c = \frac{sk}{\sqrt{k^2 - 1}}$ ist. Dabei ist

$$\begin{aligned} c &> a, \text{ wenn } k > \sqrt{2} \\ c &= a, \text{ wenn } k = \sqrt{2} \\ c &< a, \text{ wenn } k < \sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Asymptotengleichungen dieser Hyperbeln sind:

$$z' = \pm \frac{c}{a} y' \quad \text{oder} \quad z' = \pm \sqrt{k^2 - 1} \cdot y'$$

Den halben Asymptotenwinkel φ erhält man aus der Formel: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{k^2 - 1}$. Für das Rotationshyperboloïd $k = 1$ befindet sich der zur (yz)-Ebene parallele Hauptschnitt im Abstand $x = -\infty$ vom Koordinatenursprung O; die Asymptoten der Schnitthyperbel in $-\infty$ haben die Gleichung $z' = 0$ (doppelt), und der halbe Asymptotenwinkel φ wird $= 0$, d. h. die Asymptoten fallen zusammen in die ∞ ferne Gerade der (xy)-Ebene, und der Hauptschnitt selber geht in diese Gerade über. Wächst k, so sind die Asymptoten voneinander verschieden; durchläuft k alle Werte von 1 bis ∞, so nimmt der halbe Asymptotenwinkel φ alle Werte von 0^0 bis 90^0 an, und für $k = \infty$ fallen die Asymptoten wieder zusammen, da $y' = \pm \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}} = 0$ wird; die Asymptoten des Hauptschnittes des Hyperboloïdes $k = \infty$, welches sich auf die (z)-Achse reduziert, werden von der (z)-Achse selber gebildet.

Alle Mittelpunkte der Hauptschnitthyperbeln parallel zur (yz)-Ebene der Rotationshyperboloïde befinden sich auf der negativen (x)-Achse. Ist der Abstand der Schnitthyperbel vom

Ursprung O $x = 0$, so reduziert sich der Hauptschnitt auf die (z)-Achse; dies ist der Fall, wenn $k = \infty$ gross ist. Nimmt k endliche Werte an, die aber noch grösser sind als $\sqrt{2}$, so ist der halbe Asymptotenwinkel der Schnitthyperbel grösser als 45° aber kleiner als 90°, und der Abstand der Schnitthyperbel vom Ursprung O beträgt absolut genommen weniger als $a_0 = \frac{s}{1-k^2} = \frac{s}{1-2} = -s$. Ist $k = \sqrt{2}$, so ist der Abstand $x = -s$ und der halbe Asymptotenwinkel $\varphi = 45^0$, der Hauptschnitt ist also eine gleichseitige Hyperbel. Ist $1 < k < \sqrt{2}$, so kann der Abstand der Schnitthyperbel von der (y z)-Ebene alle Werte von $x = -s$ bis $x = -\infty$ durchlaufen, für $k = 1$ wird er unendlich gross; der halbe Asymptotenwinkel φ wird immer kleiner, und für $k = 1$ ist er $\varphi = 0$. Der Hauptschnitt im Abstand $x = -\infty$ reduziert sich auf die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene.

Die Brennpunkte f_1 und f_2 aller Schnittkegelschnitte parallel zur (yz)-Ebene liegen in der (x y)-Ebene. Ihre Koordinaten im alten Koordinatensystem sind:

$$y = \sqrt{\frac{s^2k^2}{(1-k^2)^2} - \frac{s^2k^2}{1-k^2}} = \pm\frac{s\,k^2}{1-k^2} \quad \text{und nach } \S\,1 \quad x = \frac{s}{1-k^2}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Ausdrücken den veränderlichen Parameter k, so erhält man den geometrischen Ort der Brennpunkte aller dieser Schnittkegelschnitte durch die Gleichung

$$x \mp y = \pm s \qquad \text{oder zerlegt}$$

$$x - y = s \quad \text{und} \quad x + y = -s \tag{10}$$

Die Gleichungen (10) stellen zwei Gerade in der (xy)-Ebene dar, die symmetrisch zur (x)-Achse liegen, durch den Punkt F gehen und rechtwinklig aufeinanderstehen, also mit der (x)-Achse je einen Winkel von 45° bilden. Auf diesen beiden Geraden g_1 und g_2 liegen alle Brennpunkte f_1 und f_2 der zur (y z)-Ebene parallelen Hauptschnitte der Rotationsflächen.

Durchläuft k alle Werte von 0 bis ∞, so gehen die zur (yz)-Ebene parallelen Hauptschnitte, die durch Gleichung (9) gegeben sind, successive in einander über und bilden eine neue Fläche. Ihre Gleichung erhält man durch Elimination des Parameters k aus der Gleichung (9.) und dem Ausdruck $a_0 = \frac{s}{1-k^2}$, welcher den Abstand der Ebene des Hauptschnittes vom Koordinatenursprung O darstellt. Als Resultat dieser Elimination ergibt sich die Gleichung:

$$s y'^2 + a_0 z'^2 + a_0 s (s - a_0) = 0.$$

In dieser Gleichung ist s eine Konstante; a_0 dagegen kann als laufende Koordinate betrachtet werden, da es bei veränderlichem k alle Werte der positiven und negativen (x)-Achse durchlaufen kann, ausgenommen diejenigen der Strecke OF. Substituiert man daher für $a_0 = x$, ersetzt ferner y' wieder durch y und z' durch z, so wird obige Gleichung:

$$x z^2 - s (x^2 - y^2) + s^2 x = 0. \qquad (11)$$

Durch sie ist der Ort aller Hauptschnitte parallel der (yz)-Ebene für sämtliche Rotationsflächen bestimmt. Sie stellt eine Fläche 3. Ordnung in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z dar, die symmetrisch liegt zu der (xy)- und (xz)-Ebene. Die Diskussion dieser Hauptschnittfläche 3. Grades erfolgt in § 12.

§ 7.
Die Schnitte der Rotationsflächenschar mit einer Ebene durch die (x)-Achse.

Es werde durch die (x)-Achse unseres Koordinatensystems (xyz) eine Ebene gelegt, welche mit der (xy)-Ebene einen beliebigen Winkel φ bildet; wir betrachten sie als neue Koordinatenebene $(x'y')$ und transformieren nun die Gleichung des betrachteten Rotationsflächensystems

(1.) $$(1 - k^2) x^2 + (1 - k^2) y^2 + z^2 - 2 s x + s^2 = 0$$

auf das neue Koordinatensystem $(x' y' z')$. Dabei gelten folgende Transformationsformeln:

$$y = y' \cos \varphi - z' \sin \varphi$$
$$z = y' \sin \varphi + z' \cos \varphi$$
$$x = x'$$

Die Gleichung (1.) geht dann über in

$$(1 - k^2) x'^2 + (1 - k^2 \cos^2 \varphi) y'^2 + (1 - k^2 \sin^2 \varphi) z'^2 + k^2 \sin 2\varphi \cdot y' z' - 2 s x' + s^2 = 0$$

Um die Gleichung der Schnittkurven des Rotationsflächensystems mit der $(x' y')$-Ebene zu erhalten, ist in der letzten Gleichung $z' = 0$ zu setzen, und wir erhalten als Gleichung des Schnittkurvensystems

$$(1 - k^2) x'^2 + (1 - k^2 \cos^2 \varphi) y'^2 - 2 s x' + s^2 = 0 \qquad (12)$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grades, jede Ebene durch die (x)-Achse schneidet also das Rotationsflächensystem im allgemeinen in einem Kegelschnitt.

Die Gleichung (12) enthält zwei Parameter, nämlich k und φ. Wir wollen zunächst zwei Spezialfälle betrachten, indem wir vorerst $\varphi = 0$ und dann $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wählen.

Für $\varphi = 0$ geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$(1-k^2)\, x'^2 + (1-k^2)\, y'^2 - 2\, s x' + s^2 = 0$$

und wenn man diese Gleichung durch die Transformationsformeln $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und $y' = y''$ auf die Normalform bringt, so erhält man die Kreisbüschelgleichung (8) in § 5. Diese stellt den Schnitt des Rotationsflächensystems mit der (x y)-Ebene dar (s. Fig. 7).

Setzt man für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und wendet die vorigen Transformationsformeln an, so geht die Gleichung (12) über in die Gleichung (7) § 4, welche das Schnittkurvensystem der Rotationsflächen in der (xz)-Ebene darstellt (Fig 5).

Wir untersuchen nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für einen bestimmten, konstanten Winkel φ, der zwischen 0^0 und 90^0 liegt; der Parameter k dagegen soll alle Werte von Null bis ∞ durchlaufen.

Sollen vorerst die Asymptotenrichtungen der Kegelschnitte bestimmt werden, so muss man die Glieder 2. Grades gleich Null setzen, also

$$(1-k^2)\, x'^2 + (1-k^2 \cos^2 \varphi)\, y'^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{k^2-1}{1-k^2 \cos^2 \varphi}} \cdot x' \qquad \text{(a)}$$

Die Asymptoten der Kegelschnitte sind reell, wenn Zähler und Nenner dieser Wurzel entweder beide negativ oder beide positiv sind. Dies ist der Fall, wenn

$$\text{a)} \quad k^2 < 1 \text{ und } k^2 \cos^2 \varphi > 1 \text{ oder}$$

$$k < 1 \text{ und } k > \frac{1}{\cos \varphi}$$

was unmöglich ist, da $\frac{1}{\cos \varphi}$ immer grösser als 1 ist.

b) wenn $k^2 > 1$ und $k^2 \cos^2 \varphi < 1$ oder

$$k > 1 \text{ und } k < \frac{1}{\cos \varphi}, \text{ also } \cos \varphi < \frac{1}{k}$$

Dieser letzte Fall ist möglich. Für Werte von k, die grösser als 1 aber kleiner als $\frac{1}{\cos \varphi}$ sind, besitzt der durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnitt reelle Asymptoten, die von einander verschieden sind; er ist also eine Hyperbel.

Ist $k = 1$, so fallen nach Gleichung (a) die beiden Asymptotenrichtungen in der Geraden $y' = o$ zusammen. Der Kegelschnitt ist daher in diesem Fall eine Parabel von der Gleichung $\sin^2 \varphi \cdot y'^2 - 2\, s\, x' + s^2 = 0$. Die (x')-Achse ist Parabelachse.

Wenn der Parameter k den Wert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ annimmt, so geht die Kegelschnittgleichung (12) über in

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) x'^2 - 2\, s\, x' + s^2 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in x'; löst man sie auf, so zerfällt sie in die beiden Geradengleichungen

$$x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \quad \text{und} \quad x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

Für den Parameterwert $k = \frac{1}{\cos \varphi}$ besteht also die Schnittkurve (12) aus zwei Parallelen zur (y')-Achse; ihre Abstände von derselben sind $x_1' = \frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}$.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn die durch die (x)-Achse gelegte Schnittebene $(x'\, y')$ aus dem Rotationshyperboloïd zwei zur (y z)-Ebene parallele Erzeugende herausschneidet. Da diese durch die auf der (x)-Achse liegenden Scheitel des Hyperboloïdes gehen, so muss ihr Abstand $= \frac{2\, s\, k}{k^2 - 1}$ sein (s. Seite 121). Es besteht daher die Beziehung

$$\frac{s \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} + \frac{s \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{2\, s\, k}{k^2 - 1}$$

Löst man diese Gleichung nach k auf, so erhält man als positive, (einzig in Betracht fallende), Wurzel wieder $k = \frac{1}{\cos \varphi}$

Liegt der Wert von k nicht im Bereiche $1 < k < \frac{1}{\cos\varphi}$, ist also $k < 1$ oder $k > \frac{1}{\cos\varphi}$, so werden die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes nach Gleichung (a) imaginär, er ist also eine Ellipse. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so folgt: Eine durch die (x)-Achse gelegte Ebene, welche mit der Koordinatenebene (x y) den Winkel φ einschliesst, schneidet alle Rotationsellipsoïde des durch Gleichung (1) gegebenen Rotationsflächensystems in einer Ellipse, den parabolischen Cylinder $k = 1$ in einer Parabel, und die Rotationshyperboloïde entweder in einer Ellipse, oder in zwei parallelen Geraden (Erzeugende des Hyperboloïdes), oder in einer Hyperbel, je nachdem $\cos\varphi \gtreqless \frac{1}{k}$ ist.

Um die durch Gleichung (12) dargestellten Kegelschnitte genauer zu untersuchen, transformieren wir die Gleichung auf ihre Achsen, indem wir für $x' = x'' + \frac{s}{1-k^2}$ und für $y' = y''$ substituieren. Sie nimmt dann folgende Form an:

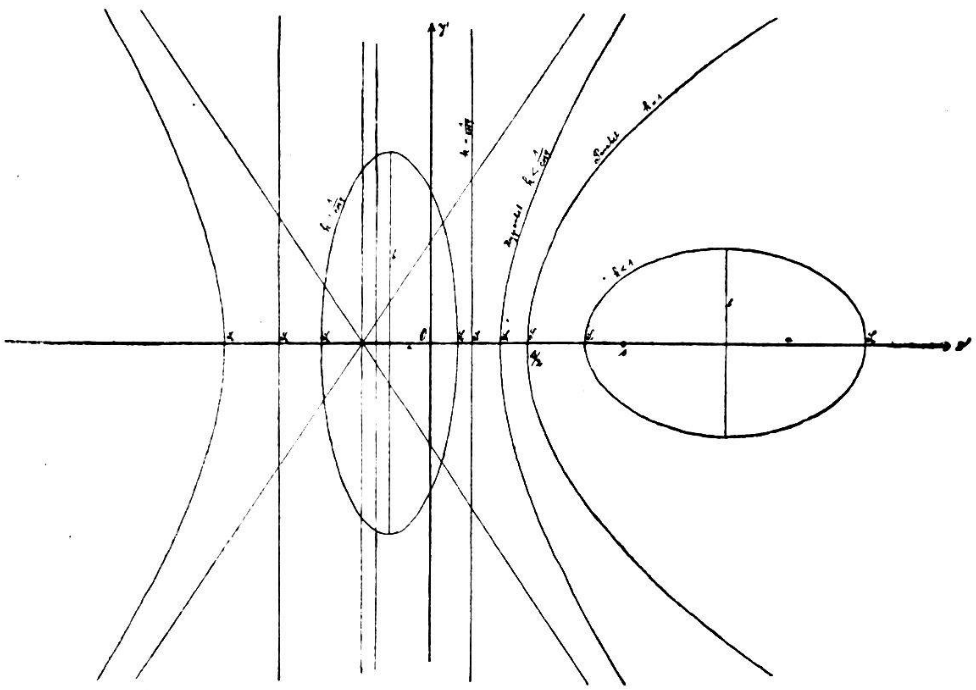

Fig. 10.

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)(1-k^2\cos^2\varphi)}} = 1 \qquad \text{(b)}$$

Der Mittelpunkt und die beiden in der (x)-Achse liegenden Scheitel jedes Kegelschnittes dieses Systems fallen mit denjenigen der entsprechenden Rotationsfläche zusammen, und die eine Achse des Kegelschnittes liegt immer in der (x)-Achse des alten Koordinatensystems.

Wir betrachten vorerst die Ellipsen, in welchen die Rotationsellipsoïde $k < 1$ von der durch die (x)-Achse gelegten Ebene geschnitten werden. Der Abstand ihres Mittelpunktes vom Koordinatenursprung wird gegeben durch $a_0 = \frac{s}{1 - k^2}$. Wenn k von Null bis 1 wächst, so nimmt er alle Werte von $+ s$ bis $+ \infty$ an. Die Halbachsen der Ellipsen sind $a = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $b = \frac{s\,k}{\sqrt{(1 - k^2)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}}$, für $k = 0$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, der mit F zusammenfällt; bei von 0 bis 1 wachsendem Parameter k nehmen beide zu von 0 bis ∞, wobei a immer grösser als b ist. Der eine Scheitel S_1 bewegt sich bei zunehmendem k von $x_1' = s$ bis $x_2' = \frac{s}{2}$, der andere von $x_2' = + s$ bis $x_2' = + \infty$. Die lineare Excentrizität dieser Ellipsen $e = \frac{s\,k^2 \sin \varphi}{(1 - k^2)\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$ nimmt vom Werte 0 an zu bis ∞, die numerische dagegen $= \frac{e}{a} = \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$ von 0 bis 1.

Um die Gleichung der Parabel zu finden, in welcher der parabolische Cylinder von der Ebene durch die (x)-Achse geschnitten wird, setzen wir in Gleichung (12) den Parameter $k = 1$ ein und finden $y'^2 = \frac{2\,s}{\sin^2 \varphi}\left(x' - \frac{s}{2}\right)$ (c)

Durch die Transformationsformeln $y' = y''$ und $x' = x'' + \frac{s}{2}$ geht die Gleichung (c.) in die Scheitelgleichung der Schnittparabel über, welche heisst $y''^2 = \frac{2\,s}{\sin^2 \varphi}\, x''$ (d)

Die (x)-Achse ist Parabelachse, ihr Scheitel befindet sich im Abstand $x' = \frac{s}{2}$ vom Coordinatenursprung. Der Halbparameter der Schnittparabel ist $p = \frac{s}{\sin^2 \varphi}$. Für veränderliches φ ist er variabel und kann alle Werte zwischen s und ∞ annehmen, d. h. je nach dem Winkel, den die Schnittebene $(x' \, y')$ mit der Koordinatenebene $(x \, y)$ bildet, wird der Parameter grösser oder kleiner. Ein Minimum wird er, wenn $\varphi = 90^0$ ist, wenn also die Schnittebene auf der $(x \, y)$-Ebene senkrecht steht und die Erzeugenden des Cylinders rechtwinklig schneidet. In diesem Falle wird er $= s =$ dem Halbparameter der Schnittparabel in der $(x \, z)$-Ebene von der Gleichung $z'^2 = 2 \, s \, x'$ (Siehe Gleichung [6]). Je kleiner der Winkel φ wird, d. h. je mehr er sich vom rechten entfernt, desto grösser wird der Parameter. Fällt die Schnittebene mit der $(x \, y)$-Ebene zusammen, so ist $\varphi = 0$, also auch $\sin^2 \varphi = 0$, und der Halbparameter $p = \infty$; der parabolische Cylinder wird durch die $(x \, y)$-Ebene in der Geraden $x' = 0$, d. h. in der (y')-Achse und in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene geschnitten.

Der Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel $= f = \frac{s}{2 \sin^2 \varphi}$, kann also alle Werte zwischen $\frac{s}{2}$ und ∞ annehmen. Entsprechend verändert sich auch die Lage der Leitlinie; für $\varphi = 90^0$ wird sie gebildet durch die (z)-Achse im alten Koordinatensystem und entfernt sich für abnehmende Werte von φ bis nach $-\infty$.

Wir diskutieren nun das durch Gleichung (12) dargestellte Kegelschnittsystem für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \frac{1}{\cos \varphi}$, wo φ einen bestimmten, konstanten Wert besitzt. In diesem Fall ist die Schnittkurve eine Hyperbel, deren Achsengleichung nach Gleichung (b) geschrieben werden kann:

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)^2}} - \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2 - 1)(1 - k^2 \cos^2 \varphi)}} = 1 \qquad \text{(e)}$$

Der Abstand des Hyperbelmittelpunktes vom Koordinatenursprung $= a_0 = - \frac{s}{k^2 - 1}$; für $k = 1$ liegt der Hyperbelmittelpunkt in

$-\infty$, wenn k zunimmt, so rückt er auf der negativen (x')-Achse ins Endliche und für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ beträgt sein Abstand vom Nullpunkt $x' = -s\,\mathrm{cotg}^2\varphi$. Der Abstand des Hyperbelscheitels S_1 wird bestimmt aus $x'_1 = \frac{s}{1+k}$; nimmt k alle Werte von 1 bis $\frac{1}{\cos\varphi}$ an, so bewegt sich der Scheitel S_1 auf der (x')-Achse von $x' = \frac{s}{2}$ bis $x' = \frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. Der Scheitel S_2 liegt im Abstand $x' = -\frac{s}{k-1}$ vom Nullpunkt; für die obigen Parameterwerte durchläuft er den negativen Teil der (x')-Achse von $x' = -\infty$ bis $x' = -\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$. Die reelle Halbachse der Hyperbel $= a = \frac{s\,k}{k^2-1}$, die imaginäre $= b = \frac{s\,k}{\sqrt{(k^2-1)\,(1-k^2\cos^2\varphi)}}$; für $k=1$ wird $a = b = \infty$ und für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ wird $a = \frac{s\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ und $b = \infty$. Für alle Hyperbeln der Schar ist $b > a$.

Im Grenzfall $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ besteht die Schnitthyperbel, deren Mittelpunkt in $x' = -s\,\mathrm{cotg}^2\varphi$ liegt, aus zwei parallelen Geraden von den Gleichungen

$$x_1' = \frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \quad \text{und} \quad x_2' = -\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \tag{f}$$

Dies ergibt sich auch daraus, dass die numerische Excentrizität der Hyperbel für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ unendlich gross wird.

Sind die Parameter k grösser als $\frac{1}{\cos\varphi}$, so stellt die Gleichung (12) des Schnittkurvensystems wieder eine Schar von Ellipsen dar. Ihre Achsengleichung lautet:

$$\frac{x''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2-1)^2}} + \frac{y''^2}{\frac{s^2 k^2}{(k^2-1)\,(k^2\cos^2\varphi-1)}} = 1 \tag{g}$$

Variiert man k von $\frac{1}{\cos\varphi}$ bis ∞, so geht der Ellipsenmittelpunkt von $x' = -s \operatorname{cotg}^2 \varphi$ bis $x' = 0$. Für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ sind die Halbachsen $a = \frac{s \cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ und $b = \infty$. Bei zunehmendem k werden die Achsen beide kleiner und zwar so, dass a immer kleiner ist als b. Für $k = \infty$ reduziert sich die Ellipse auf einen Punkt, den Nullpunkt O des ursprünglichen Koordinatensystems. Die Scheitel S_1 und S_2 der Ellipse haben für $k = \frac{1}{\cos\varphi}$ die Abstände $x_1' = \frac{s \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$, bezüglich $x_2' = -\frac{s \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}$ und nähern sich bei wachsendem k immer mehr dem Nullpunkt, bis sie für $k = \infty$ mit ihm zusammenfallen.

Zusammenstellung:

k	$a_0 = \frac{s}{1-k^2}$	Halbachsen		Scheitelabstände		e	$\frac{e}{a}$	Art der Kurve
		$a = \frac{sk}{1-k^2}$	$b = \frac{sk}{\sqrt{(1-k^2)(1-k^2\cos^2\varphi)}}$	x'_1	x'_2			
0	s	0	0	s	s	0	0	Punkt F
1	$\pm\infty$	∞	∞	$\frac{s}{2}$	$\pm\infty$	∞	1	Parabel
$\frac{1}{\cos\varphi}$	$-s\,\text{cotg}^2\varphi$	$\frac{s\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$	∞	$\frac{s\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$	$-\frac{s\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$	∞	∞	2 parallele Gerade
∞	0	0	0	0	0	0	0	Punkt O

§ 8.

Die Rotationshyperboloïde, erzeugt durch projektivische Ebenenbüschel.

Die Gleichung der einschaligen Hyperboloïde des Rotationsflächensystems kann nach Gleichung (1) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(k^2-1)\,x^2+(k^2-1)\,y^2-z^2+2\,s\cdot x-s^2=0 \qquad \text{(a)}$$

In dieser Gleichung kann der Parameter k alle Werte von $k=1$ bis $k=\infty$ annehmen. Nun kann man sich jedes einschalige Hyperboloïd entstanden denken aus zwei projektivischen Ebenenbüscheln von den Gleichungen

$$E_1+\lambda\,E_2=0 \qquad \text{und} \qquad E_3+\lambda\,E_4=0$$

Wenn in diesen zwei Gleichungen der Parameter λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so erzeugen die aufeinander folgenden Schnittlinien je zweier entsprechender Ebenen der beiden Büschel ein Hyperboloïd, dessen Gleichung lautet: $E_1\,E_4-E_2\,E_3=0$. Wir suchen daher die Gleichung (a.) auf diese Form zu bringen. Ersetzt man in ihr

$(k^2-1)\,x^2+2\,s\,x-s^2$ durch $[(k+1)\,x-s]\cdot[(k-1)\,x+s]$ und

$-[z^2-(k^2-1)\,y^2]$ durch $-[z+\sqrt{k^2-1}\cdot y]\cdot[z-\sqrt{k^2-1}\cdot y]$

so geht sie über in

$$[(k+1)\,x-s]\cdot[(k-1)\,x+s] - [z+\sqrt{k^2-1}\cdot y]\cdot[z-\sqrt{k^2-1}\cdot y]=0 \qquad (13),$$

und dies ist der Form nach die Gleichung des Hyperboloïdes als Erzeugnis je zweier projektivischer Ebenenbüschel.

Die Gleichung des einen Ebenenbüschels lautet

$$E_1+\lambda\,E_2=(k+1)\,x-s+\lambda\,[z+\sqrt{k^2-1}\cdot y]=0$$

und diejenige des zu ihm projektivischen Ebenenbüschels:

$$E_3+\lambda\,E_4=z-\sqrt{k^2-1}\cdot y+\lambda\,[(k-1)\,x+s]=0$$

Das erste Ebenenbüschel hat die beiden Grundebenen:

$$E_1: x=\frac{s}{k+1} \quad \text{und} \quad E_2: z=-\sqrt{k^2-1}\cdot y$$

Die Grundebene E_1 liegt parallel zur Koordinatenebene (y z) im Abstand $x=\frac{s}{k+1}$. Für alle k zwischen $k=1$ bis $k=\infty$ variiert dieser Abstand von $x = \frac{s}{2}$ bis $x = 0$. Die Grundebene E_2 steht senkrecht auf der (y z)-Ebene des Koordinatensystems und geht durch die (x)-Achse desselben, sie geht durch den II., III, V. und VIII. Oktanten. Die Scheitelkante S_1 des ersten Ebenenbüschels, also die Schnittgerade der beiden Grundebenen E_1 und E_2, geht folglich durch den II. und V. Oktanten, liegt parallel zur (y z)-Ebene und schneidet die (x)-Achse des Koordinatensystems im Abstand $x = \frac{s}{k+1}$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{s}{2}$. Für das Hyperboloïd $k = 1$ liegt die Scheitelkante S_1 in der (x y)-Ebene und hat die Gleichung $x = \frac{s}{2}$. Bei wachsendem k nähert sich der Schnittpunkt auf der (x-)Achse dem Nullpunkt, und der mit der (x y)-Ebene gebildete Winkel wird immer grösser, für $k = \infty$ fällt die Scheitelkante S_1 mit der (z)-Achse zusammen.

Das zweite Ebenenbüschel hat die beiden Grundebenen:

$$E_3 : z = \sqrt{k^2 - 1} \cdot y \quad \text{und} \quad E_4 : x = - \frac{s}{k-1}$$

Die Grundebene E_3 steht senkrecht auf der (y z)-Ebene des Koordinatensystems und enthält die (x)-Achse desselben; sie geht durch die Oktanten I, IV, VI, VII. Die Grundebene E_4 ist parallel der (y z)-Ebene des Koordinatensystems und hat vom Nullpunkt den Abstand $x = - \frac{s}{k-1}$; für die verschiedenen Flächen der Schar kann derselbe also variieren zwischen $x = -\infty$ und $x = 0$. Die Scheitelkante S_2 des zweiten Ebenenbüschels ist also parallel zur (y z)-Ebene, schneidet den negativen Teil der (x)-Achse im Abstand $x = - \frac{s}{k-1}$ und geht durch den IV. und VII. Oktanten. Für das Hyperboloïd $k = \infty$ fällt die Scheitelkante S_2 des zweiten Büschels mit der (z)-Achse, also auch mit der Scheitelkante S_1 des ersten Büschels, zusammen. Lassen wir den Parameter k successive kleinere Werte annehmen, so wird der Winkel, den die Scheitelkante S_2 mit der (x y)-Ebene bildet, immer kleiner, und ihr Schnittpunkt mit der negativen (x)-Achse entfernt sich immer weiter vom Nullpunkt. Für das Rotationshyperboloïd $k = 1$ liegt die Scheitelkante S_2 des zweiten projektivischen Ebenenbüschels in der (x y)-Ebene im Unendlichen.

Diese zwei projektivischen Ebenenbüschel $E_1 + \lambda E_2 = 0$ und $E_3 + \lambda E_4 = 0$ erzeugen auf jedem Hyperboloïd vom Parameter k eine Schar von Geraden oder Erzeugenden. Nach der Gleichung (13) kann man sich aber das Rotationshyperboloïd noch aus zwei andern projektivischen Ebenenbüscheln entstanden denken, nämlich aus folgenden:

$$E_1' + \lambda E_2' = (k+1)x - s + \lambda\left[z - \sqrt{k^2-1}\cdot y\right] = 0 \quad \text{und}$$

$$E_3' + \lambda E_4' = z + \sqrt{k^2-1}\cdot y + \lambda\left[(k-1)x + s\right] = 0$$

Das Ebenenbüschel $E_1' + \lambda E_2' = 0$ hat die beiden Grundebenen

$$E_1' : x = \frac{s}{k+1} \quad \text{und} \quad E_2' : z = \sqrt{k^2-1}\cdot y$$

Die Grundebene E_1' ist identisch mit der Grundebene E_1 der ersten zwei projektivischen Ebenenbüschel, E_2' dagegen liegt in Bezug auf die (x z)-Ebene des Koordinatensystems symmetrisch zur Ebene E_2. Die Scheitelkante S_1' dieses Ebenenbüschels, also die Schnittgerade der Grundebenen E_1' und E_2', liegt daher parallel zur (y z)-Ebene, schneidet die (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{k+1}$ also zwischen $x = 0$ und $x = \frac{s}{2}$, und geht durch den I. und VI. Oktanten. Für das Hyperboloïd $k = 1$ liegt die Scheitelkante S_1' in der (x y)-Ebene und hat die Gleichung $x = \frac{s}{2}$, sie ist also identisch mit der Scheitelkante S_1 des ersten Büschels. Bei wachsendem k nähert sich der Schnittpunkt auf der (x)-Achse dem Nullpunkt, und der mit der (x y)-Ebene gebildete Winkel wird immer grösser, und zwar so, dass die Scheitelkante S_1' in Bezug auf die (x z)- oder (x y)-Ebene symmetrisch liegt zur entsprechenden Scheitelkante S_1; für $k = \infty$ fällt S_1' mit der (z)-Achse, also auch wieder mit S_1 zusammen.

Das Ebenenbüschel $E_3' + \lambda E_4' = 0$ hat die beiden Grundebenen $E_3' : z = -\sqrt{k^2-1}\cdot y$ und $E_4' : x = -\frac{s}{k-1}$

E_4' ist identisch mit E_4, und E_3' liegt in Bezug auf die (x z)-oder (x y)-Ebene des Koordinatensystems symmetrisch zu E_3. Daher wird für jedes bestimmte Hyperboloïd die Scheitelkante S_2' dieses Ebenenbüschels, das zu $E_1' + \lambda E_2' = 0$ projektivisch ist, zu der entsprechenden Scheitelkante S_2 des Ebenenbüschels $E_3 + \lambda E_4 = 0$ in Bezug auf die (x z)-Ebene symmetrisch liegen. Für $k = \infty$ fällt S_2' mit S_2 in der (z)-Achse zusammen, für $k = 1$ wird sowohl S_2 als auch S_2' von der unendlich fernen Geraden der (x y)-Ebene gebildet.

Die vier Scheitelkanten S_1, S_2, S_1' und S_2' der 4 Ebenenbüschel, von denen je zwei zueinander projektivisch sind, haben für jedes Rotationshyperboloïd eine ganz bestimmte, feste Lage. Wenn aber der Parameter k alle Werte von $k = 1$ bis $k = \infty$ durchläuft, so ändert sich successive auch die Lage dieser Scheitelkanten, und jede derselben erzeugt dabei eine developpable Fläche. Die Gleichung derselben wird gefunden, indem man aus den beiden Grundebenen des entsprechenden Büschels den Parameter k eliminiert. Nun führt aber diese Elimination bei jedem dieser vier Ebenenbüschel zu derselben Gleichung; man erhält nämlich

$$x^2 z^2 + 2 s x y^2 - s^2 y^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$x^2 z^2 - s y^2 (s - 2 x) = 0 \qquad (14)$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche 4. Grades in den Coordinaten x y z. Variiert also der Parameter k von $k = 1$ bis $k = \infty$, so erzeugen die Scheitelkanten S_1, S_2, S_1' und S_2' der vier Ebenenbüschel alle dieselbe developpable Fläche 4. Grades, welche durch Gleichung (14) bestimmt ist. Den Verlauf dieser Fläche kennen wir bereits aus ihrer Entstehungsweise. Da die Koordinaten y und z nur quadratisch in der Flächengleichung (14) vorkommen, so liegt die Fläche wirklich symmetrisch in Bezug auf die beiden Koordinatenebenen (x y) und (x z). Untersucht man die Schnittkurven der Fläche 4. Grades mit den Koordinatenebenen, so zeigt es sich, dass sowohl die (x)-Achse als auch die (z)-Achse Doppelgeraden der Fläche sind. Ferner wird die (x y)-Ebene von ihr in den beiden zur (y)-Achse Parallelen $x = \frac{s}{2}$ und $x = -\infty$ geschnitten. Eine zur (y z)-Ebene parallele Schnittebene im Abstand $x = c$ vom Ursprung erzeugt als Schnittkurve zwei in der (x)-Achse sich schneidende Geraden von den Gleichungen $z = \pm \frac{1}{c} \sqrt{s (s - 2 c)} \cdot y$. Für $c = -\infty$, sowie auch für $c = + \frac{s}{2}$ fallen die beiden Geraden je in der (x y)-Ebene zusammen, das eine Mal in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, das andere Mal in der Geraden $x = \frac{s}{2}$. Für $c = 0$ fallen beide Geraden zusammen mit der (z)-Achse des Koordinatensystems. Wenn $c > \frac{s}{2}$ ist, so wird die Schnittkurve imaginär, die Fläche 4. Grades liegt also ihrer ganzen Ausdehnung nach links von der Ebene $x = \frac{s}{2}$. In Bezug auf die Entstehungsweise der Fläche können wir nach dem Früheren noch schliessen, dass der im I. und VI. Oktanten liegende Teil derselben durch die Scheitelkante S_1' erzeugt wird, der im II. und V. durch S_1, der im IV. und VII. durch S_2 und der im III. und VIII. Oktanten liegende Teil durch die Scheitelkante S_2'.

§ 9.

Kreispunkte der Flächenschar.

Die Achsengleichung der centrischen Flächen 2. Grades hat allgemein die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Das Vorzeichen von b^2 und c^2 ist dabei noch unbestimmt gelassen. — Für jede Fläche, deren Gleichung diese Form hat, ist es möglich, zwei Systeme paralleler Schnittebenen so zu bestimmen, dass alle Schnittkurven Kreise sind. Die äussersten Ebenen der beiden Systeme sind Tangentialebenen der Fläche; sie schneiden diese in einem unendlich kleinen Kreise, in ihrem Berührungspunkte, und ein solcher Punkt heisst K r e i s p u n k t oder Umbilikus. Jede centrische Fläche besitzt also im allgemeinen 4 reelle Kreispunkte; sie liegen in der (x z)-Ebene und haben die Koordinaten:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \text{und} \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Unsere auf die Achsen transformierte Flächengleichung heisst nun:

$$(2.)\qquad \frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1$$

Da $a = b$ ist, so werden die Koordinaten der Kreispunkte:

$$x' = \pm 0 \quad \text{und} \quad z' = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Je zwei der Kreispunkte der durch Gleichung (2) dargestellten Rotationsellipsoïde und -Hyperboloïde fallen demnach in einen einzigen zusammen, so dass im ganzen nur zwei übrig bleiben; sie liegen symmetrisch zur (x y)-Ebene und haben im alten System die Koordinaten:

$$x = a_0 = \frac{s}{1-k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Für jedes Rotationsellipsoïd fallen die Kreispunkte zusammen mit den Endpunkten der Rotationsachse 2 c und bei variablem Parameter k bewegen sie sich nach der in § 4 aufgestellten Parabelgleichung (b.). Für die Rotationshyperboloïde wird die Ordinate der Kreispunkte

$$z = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k}{i\sqrt{k^2-1}} = \mp i \frac{s\,k}{\sqrt{k^2-1}} = \text{imaginär},$$

d. h. es gibt auf den Rotationshyperboloïden keine Kreispunkte. Das System paralleler Schnittebenen, welches in der Fläche Kreise ausschneidet, ist parallel der (x y)-Ebene und setzt sich nach beiden Richtungen bis ins Unendliche fort.

§ 10.

Polarebenen in Bezug auf das Rotationsflächensystem (1).

Soll die Polarebene eines beliebigen festen Punktes $P_0(x_0\,y_0\,z_0)$ in Bezug auf eine Fläche 2. Grades bestimmt werden, so wird deren Gleichung zunächst mit w homogen gemacht; Gleichung (1) geht also über in $(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)\,y^2 + z^2 - 2\,s\,x\,w + s^2\,w^2 = 0$, wo w die Bedeutung 1 hat. Die Gleichung der Polarebene wird dann nach der Formel bestimmt:

$$x\frac{\partial f}{\partial x_0} + y\frac{\partial f}{\partial y_0} + z\frac{\partial f}{\partial z_0} + w\frac{\partial f}{\partial w_0} = 0$$

Es ist nun $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 2\,(1-k^2)\,x_0 - 2\,s\,w_0$

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = 2\,(1-k^2)\,y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} = 2\,z_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial w_0} = -2\,s\,x_0 + 2\,s^2\,w_0$$

Also wird die Gleichung der Polarebene des Punktes $P_0\,(x_0\,y_0\,z_0)$, wenn $w_0 = w = 1$ gesetzt wird:

$[(1-k^2)\,x_0 - s]\,x + (1-k^2)\,y_0\,y + z_0\,z - s\,(x_0 - s) = 0$ oder

$$(1-k^2)\,[x_0\,x + y_0\,y] - s\,x + z_0\,z - s\,(x_0 - s) = 0 \qquad (15)$$

Als Pol wählen wir vorerst einen beliebigen Punkt $P_0\,(x_0, 0, 0)$ der (x)-Achse. Wir haben also in der Gleichung (15) für $y_0 = z_0 = 0$ zu setzen, und sie geht dann über in

$$x = \frac{s\,(x_0 - s)}{(1-k^2)\,x_0 - s}$$

Wir sehen hieraus, dass allgemein die Polarebene eines Punktes der (x)-Achse in Bezug auf jede beliebige Fläche des Systems zu der (y z)-Ebene des Koordinatensystems parallel ist. Wählt man speziell den festen Punkt F (s, 0, 0) als Pol und erinnert sich daran, dass nach § 4 die (z)-Achse die Leitlinie, d. h. die Polare in Bezug auf den einen Brennpunkt F aller Schnittkegelschnitte in der (x z)-Ebene darstellt, so folgt, dass alle Polarebenen des Punktes F mit der (y z)-Ebene zusammenfallen; denn sie müssen die (z)-Achse enthalten und zugleich zur (x)-Achse senkrecht stehen. Setzt man in der Polarebenengleichung (15) für $x_0 = s$, $y_0 = z_0 = 0$, so geht sie wirklich für jedes beliebige k über in $x = 0$, die Gleichung der (y z)-Ebene.

Für den Pol $P_0\,(0, 0, 0)$, also den Ursprung des Koordinatensystems, wird die Polarebenengleichung $x = s$. Auch die Polarebene des Nullpunktes ist also für alle Flächen der Schar dieselbe; sie ist parallel zu der (y z)-Ebene und geht durch den Punkt F.

Wir wählen nun einen beliebigen aber festen Punkt $P\,(x_0\,y_0\,z_0)$ und betrachten seine Polarebenen in Bezug auf alle Rotationsflächen des ganzen Systems. Dann spielt in der Polarebenengleichung (15) die Grösse $(1-k^2)$ die Rolle eines veränderlichen Parameters, der alle Werte von 1 bis $-\infty$ annehmen kann, und die Gleichung (15) stellt daher bei veränderlichem k ein Ebenenbüschel dar. Die Gleichungen seiner Grundebenen sind:

$$E_1 = x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 0 \qquad \text{und}$$
$$E_2 = s \cdot x - z_0 \cdot z + s\,(x_0 - s) = 0$$

Die Grundebene E_1 steht senkrecht auf der (x y)-Ebene und geht durch die (z)-Achse. Ihre Spurgerade in der (x y)-Ebene hat die Gleichung $y = -\frac{x_0}{y_0} x$; sie ist die Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Fläche $k = \infty$ des Systems, welche die (z)-Achse ist. Die Grundebene E_2 des Büschels steht senkrecht auf der (x z)-Ebene; ihre Spurgerade hat die Gleichung $z = \frac{s}{z_0} x + \frac{s}{z_0}(x_0 - s)$; sie ist die Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Fläche $k = 1$ des Systems, welches ein parabolischer Cylinder ist.

Die Achsenabschnitte der Grundebene E_2 sind $x = s - x_0$ und $z = \frac{s}{z_0}(x_0 - s)$. Die Scheitelkante des Büschels, durch welche alle Polarebenen des Punktes $P\,(x_0\, y_0\, z_0)$ in Bezug auf alle Rotationsflächen des Systems hindurch gehen, hat die Doppelgleichung:

$$x = -\frac{y_0}{x_0} y = \frac{z_0}{s} z - x_0 + s$$

Diese Gerade geht durch die (z)-Achse und zwar im Abstand $z = \frac{s}{z_0}(x_0 - s)$. Ihr Durchstosspunkt mit der (x y)-Ebene hat die Koordinaten $x = s - x_0$ und $y = \frac{x_0}{y_0}(x_0 - s)$

Haben wir zwei verschiedene Pole $P_1\,(x_1\, y_1\, z_1)$ und $P_2\,(x_2\, y_2\, z_2)$, so werden die Polarebenengleichungen des Rotationsflächensystems in Bezug auf P_1 und P_2 nach Gleichung (15):

$$(1 - k^2)\,[x_1 x + y_1 y] - s x + z_1 z - s\,(x_1 - s) = 0 \quad \text{und} \qquad \text{(a)}$$
$$(1 - k^2)\,[x_2 x + y_2 y] - s x + z_2 z - s\,(x_2 - s) = 0 \qquad \text{(b)}$$

Betrachtet man wieder die Grösse $(1 - k^2)$ als variablen Parameter, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen abgekürzt in der Form schreiben

$$(1 - k^2)\, E_1 + E_2 = 0 \quad \text{und} \tag{c}$$

$$(1 - k^2)\, E_3 + E_4 = 0 \tag{d}$$

Dabei stellen E_1 und E_2 die Grundebenengleichungen des Ebenenbüschels für den Pol P_1, E_3 und E_4 diejenigen für den Pol P_2 dar, welche die oben angegebene Bedeutung als Polarebenen der Grenzflächen $k = \infty$ und $k = 1$ haben. Weil der Parameter $(1 - k^2)$ in den Gleichungen (c) und (d) der beiden Ebenenbüschel dieselben Werte durchläuft, so stellen diese Gleichungen zwei projektivische Ebenenbüschel dar. Jedem Parameterwert entspricht in jedem Büschel eine bestimmte Ebene; zwei solche Ebenen heissen entsprechende Ebenen. Je zwei entsprechende Ebenen schneiden sich in einer Geraden, und die Gesamtheit aller dieser Schnittgeraden bildet in ihrer Aufeinanderfolge eine Linienfläche oder windschiefe Regelfläche. Man erhält ihre Gleichung, wenn man aus den beiden Büschelgleichungen den veränderlichen Parameter $(1 - k^2)$ eliminiert. Es folgt dann als Eliminationsgleichung:

$$E_2 E_3 - E_1 E_4 = 0 \quad \text{oder}$$

$$s(x_1 - x_2)\, x^2 + s(y_1 - y_2)\, x\, y + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\, x\, z + (y_2 z_1 - y_1 z_2)\, y\, z$$
$$+ s^2 (x_2 - x_1)\, x + s\left[s(y_2 - y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)\right] y = 0 \tag{16}$$

Da diese Linienfläche vom zweiten Grade ist, so stellt die Gleichung (16) entweder ein einschaliges Hyperboloïd oder ein hyperbolisches Paraboloïd dar. Um dies zu entscheiden, muss die Determinante δ der allgemeinen Flächengleichung 2. Grades berechnet werden. Für die Gleichung (16) wird sie:

$$\delta = \begin{vmatrix} s(x_1 - x_2) \cdot & \frac{s}{2}(y_1 - y_2) \cdot & \frac{1}{2}(x_2 z_1 - x_1 z_2) \\ \frac{s}{2}(y_1 - y_2) \cdot & 0 & \cdot\ \frac{1}{2}(y_2 z_1 - y_1 z_2) \\ \frac{1}{2}(x_2 z_1 - x_1 z_2) \cdot & \frac{1}{2}(y_2 z_1 - y_1 z_2) & \cdot\ 0 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet:

$$\delta = (y_2 z_1 - y_1 z_2)\left[\frac{s}{8}(y_1 - y_2)(x_2 z_1 - x_1 z_2) - \frac{s}{4}(x_1 - x_2)(y_2 z_1 - y_1 z_2)\right]$$

Wenn der Determinantenwert δ von Null verschieden ist, so stellt die Gleichung (16) eine centrische Fläche 2. Grades dar, also ein einschaliges Hyperboloïd. Verschwindet dagegen der Wert von δ, so rückt der Mittelpunkt der Fläche ins Unendliche; sie stellt dann im allgemeinen ein Paraboloïd dar, kann aber in speziellen Fällen auch in zwei Ebenen zerfallen. Für das Verschwinden der Determinante δ gibt es folgende mögliche Fälle:

a) $y_2 z_1 - y_1 z_2 = 0$ oder $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. Dies ist der Fall, wenn die Verbindungsgerade der beiden Pole P_1 und P_2 die (x)-Achse schneidet. Die Flächengleichung (13) geht dann über in:

$$s(x_1 - x_2)x^2 + s(y_1 - y_2)xy + (x_2 z_1 - x_1 z_2)xz + s^2(x_2 - x_1)x + s[s(y_2 - y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)]y = 0$$

Dies ist die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloïdes.

b) $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$. Wenn diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, so liegen die beiden Pole P_1 und P_2 auf einer Parallelen zur (z)-Achse. Setzt man in der Gleichung (16) $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$, so zerfällt sie in die beiden Ebenengleichungen:

$$z = 0 \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = 0$$

Die eine Ebene wird gebildet von der (x y)-Ebene des Koordinatensystems und die andere steht auf ihr senkrecht; sie geht durch die (z)-Achse und erzeugt eine Spurgerade von der Gleichung

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x$$

c) $x_1 = x_2$ und $z_1 = z_2$. Die Pole P_1 und P_2 müssen in dem Fall auf einer Parallelen zur (y)-Achse liegen. Die Flächengleichung (16) zerfällt dann in:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad sx + z_1 \cdot z + s^2 + sx_1 = 0$$

Dies sind die Gleichungen zweier Ebenen; die erste fällt zusammen mit der (x z)-Ebene des Koordinatensystems, die zweite steht dazu senkrecht und erzeugt die Achsenabschnitte:

$$x = -(s + x_1) \quad \text{und} \quad z = -\frac{s(s + x_1)}{z_1}$$

Die beiden projektivischen Polarebenenbüschel zweier Pole P_1 und P_2 in Bezug auf das Rotationsflächensystem erzeugen also ein hyperbolisches Paraboloïd, wenn die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ die (x)-Achse schneidet, zwei Ebenen, wenn sie entweder zur (z)- oder zur (y)-Achse parallel ist, in allen andern Fällen dagegen ein einschaliges Hyperboloïd.

§ 11.

Ort der Schnittpunkte von drei sich rechtwinklig schneidenden Tangentialebenen für die verschiedenen Flächen des Rotationsflächensystems.

Die Achsengleichung einer beliebigen centrischen Fläche 2. Grades hat allgemein die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun ist der Ort aller Punkte im Raum, von denen aus drei zueinander senkrecht stehende Tangentialebenen an eine solche Fläche gelegt werden können, eine mit der Fläche concentrische Kugel vom Radius $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Da die Halbachsen unserer Rotationsfläche $a = b = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s\,k}{\sqrt{1 - k^2}}$ sind, so ist der Radius der Kugel von obiger Beschaffenheit

$$R = \sqrt{\frac{2\,s^2\,k^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{s^2\,k^2}{1 - k^2}} = \frac{s\,k}{1 - k^2}\sqrt{3 - k^2} \qquad \text{(a)}$$

Wir können aus diesem Wert für R bereits schliessen, dass nur für diejenigen Flächen des Rotationsflächensystems eine Kugel von der oben erwähnten Eigenschaft besteht, für welche $k < \sqrt{3}$ ist, also für alle Rotationsellipsoïde und für die Rotationshyperboloïde $k < \sqrt{3}$. Für jede dieser Flächen lässt sich die Gleichung einer Kugel bestimmen, deren sämtliche Flächenpunkte Schnittpunkte von je drei senkrecht aufeinander stehenden Tangentialebenen an die betreffende Fläche sind; diese Kugelgleichung lautet

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{s^2\,k^2}{(1 - k^2)^2}(3 - k^2) \qquad (17)$$

Um diese Gleichung auf das alte Coordinatensystem zu beziehen, haben wir in ihr $x' = x - \frac{s}{1 - k^2}$, $y' = y$ und $z' = z$ zu setzen; die Gleichung (17) geht dann über in

$$F(x\,y\,z\,k) = x^2 - \frac{2\,s}{1-k^2}\,x + y^2 + z^2 + \frac{s^2\,(k^4 - 3\,k^2 + 1)}{(1-k^2)^2} = 0 \qquad (17\,a)$$

Es soll nun die Enveloppe aller Kugeln bestimmt werden, die den unendlich vielen Flächen des Rotationsflächensystems entsprechen. Dies geschieht durch Elimination des Parameters k aus der Gleichung (17 a) und der folgenden;

$$\frac{\partial F}{\partial k} = (s - 2\,x)\,k^4 + 4\,x\,k^2 - 2\,x - s = 0$$

Wir bestimmen aus der letzten Gleichung die Wurzeln k^2; die eine wird $k_1^2 = 1$, die andere $k_2^2 = \frac{2\,x + s}{2\,x - s}$. Nur die letzte liefert ein brauchbares Resultat. Setzt man ihren Wert in Gleichung (17 a) ein, so geht sie über in

$$2\,x^2 + y^2 + z^2 - s\,x + \frac{5}{4}\,s^2 = 0$$

Dies ist die Gleichung eines imaginären Rotationsellipsoïdes. Wir finden also das Resultat, dass die durch Gleichung (17 a) gegebene Schar von Kugelflächen keine Enveloppe besitzt.

Der Mittelpunkt des obigen imaginären Ellipsoïdes liegt auf der (x)-Achse im Abstand $x = +\frac{s}{4}$ vom Nullpunkt. Seine Halbachse a hat die Länge $a = \frac{3}{4\,s}$, sie liegt in der (z)-Achse und ist Rotationsachse des Ellipsoïdes. Die beiden andern Halbachsen sind $b = c = \frac{3\,s}{\sqrt{8}}$

Die Mittelpunkte der Kugeln von der oben verlangten Beschaffenheit fallen immer mit denjenigen der entsprechenden Rotationsflächen zusammen; sie liegen also auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{1-k^2}$ vom Coordinatenursprung. Nun hat ein Hauptschnitt der durch Gleichung (17) dargestellten Kugel parallel zur (y z)-Ebene des Coordinatensystems folgende Kreisgleichung:

$$y'^2 + z'^2 = \frac{s^2\,k^2}{(1-k^2)^2}\,(3 - k^2) \qquad (b)$$

Wenn wir nacheinander immer andere Rotationsflächen des Systems ins Auge fassen, so ändert sich der Radius dieses Kreises, und sein Mittelpunkt rückt auf der (x)-Achse des Coordinatensystems vorwärts. Die aufeinander folgenden Kreise erzeugen so wieder eine Fläche, deren Gleichung sich durch Elimination des Parameters k aus der Kreisgleichung (b) und der Gleichung der Schnittebene $x = \frac{s}{1 - k^2}$ ergibt.

Sie wird, bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem:

$$2x^2 - y^2 - z^2 - sx - s^2 = 0 \qquad (18)$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche 2. Grades; durch die Substitution $x = x' + \frac{s}{4}$, $y = y'$ und $z = z'$ erhält man die Achsengleichung

$$\frac{x'^2}{\frac{9}{16}s^2} - \frac{y'^2}{\frac{9}{8}s^2} - \frac{z'^2}{\frac{9}{8}s^2} = 1$$

Die obige Hauptschnittfläche ist also ein zweischaliges Rotationshyperboloïd. Die reelle Achse desselben liegt in der (x)-Achse des Coordinatensystems, sie ist Rotationsachse. Der Flächenmittelpunkt O′ hat die Koordination $x = \frac{s}{4}$, $y = z = 0$, die reelle Halbachse $a = \frac{3}{4}s$. Der eine Schnittpunkt des Rotationshyperboloïdes mit der (x)-Achse befindet sich daher im Punkte F (s, 0, 0) derselben, der andere im Abstand $x = -\frac{s}{2}$ vom alten Nullpunkt O. Die Schnittkurve des zweischaligen Hyperboloïdes mit der (x y)-Ebene ist eine Hyperbel; die Asymptoten derselben haben die Gleichungen $y' = \pm \frac{4}{\sqrt{8}} x'$, oder im alten Koordinatensystem $y = \pm \frac{4}{\sqrt{8}}\left(x - \frac{s}{4}\right)$. Der Winkel φ, den die Asymptoten mit der (x)-Achse einschliessen, ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{\sqrt{8}}$, er ist also grösser als 45°.

Die Hauptschnittfläche (18) wird von der (x z)-Ebene ebenfalls in einer Hyperbel geschnitten; diese ist kongruent zu der Schnitthyperbel in der (x y)-Ebene.

Aus der Beschaffenheit der Fläche dieses zweischaligen Rotationshyperboloïdes sehen wir, dass die Centra der Kugelflächen mit allen Punkten der positiven und negativen (x)-Achse zusammenfallen können, ausgenommen mit denjenigen der Strecke von $x = -\frac{s}{2}$ bis $x = +s$. Demnach existiert für alle Flächen des Rotationsflächensystems, deren Mittelpunkte entweder auf der positiven (x)-Achse zwischen $x = +s$ und $x = +\infty$, oder auf der negativen (x-)Achse zwischen $x = -\infty$ und $x = -\frac{s}{2}$ liegt, eine Kugel, welche der oben geforderten Bedingung Genüge leistet. Für diejenigen einschaligen Rotationshyperboloïde des Flächensystems, deren Mittelpunkte zwischen $x = -\frac{s}{2}$ und $x = 0$ liegen, ist $k > \sqrt{3}$, und für sie lässt sich keine solche Kugelfläche finden.

Wir betrachten nun das Schnittkurvensystem, das durch die unendlich vielen, durch Gleichung (17) bestimmten Kugelflächen in der (x y)-Ebene des alten Koordinatensystems erzeugt wird, wenn der variable Parameter k alle Werte von $k = o$ bis $k = \sqrt{3}$ durchläuft. Jede Kugel erzeugt als Schnittkurve einen Kreis, dessen Centrum auf der (x)-Achse liegt; seine Gleichung lautet $x'^2 + y'^2 = \frac{s^2 k^2}{(1 - k^2)^2}(3 - k^2)$. Wenn der Parameter k alle Werte von $k = 0$ bis $k = 1$ annimmt, so durchläuft der Kreismittelpunkt die positive (x)-Achse von $x = s$ bis $x = +\infty$, und für die Parameterwerte von $k = 1$ bis $k = \sqrt{3}$ rückt das Kreiscentrum auf der negativen (x)-Achse von $x = -\infty$ bis $x = -\frac{s}{2}$. Die Abstände x_1 und x_2 der auf der (x)-Achse liegenden Kreisscheitel S_1 und S_2 sind:

$$x_1 = \frac{s}{1 - k^2} - \frac{s\,k}{1 - k^2}\sqrt{3 - k^2}, \quad \text{bezüglich}$$

$$x_2 = \frac{s}{1 - k^2} + \frac{s\,k}{1 - k^2}\sqrt{3 - k^2}$$

Ueber die Veränderung ihrer Lage bei veränderlichem Parameter gibt folgende Tabelle Aufschluss:

k	S_1	S_2
0	$x_1 = s$	$x_2 = s$
1	$x_1 = -\infty$	$x_2 = \infty$
$\sqrt{3}$	$x_1 = -\frac{s}{2}$	$x_2 = -\frac{s}{2}$

Für die Rotationsfläche $k = 0$ reduziert sich der Schnittkreis, also auch die entsprechende Kugelfläche, auf den Punkt $F(s, 0, 0)$. Wenn k von 0 bis 1 wächst, so rücken die beiden Kreisscheitel ins Unendliche, S_1 in negativer, S_2 in positiver Richtung. Alle Rotationsflächen $o < k < 1$ werden somit von der entsprechenden Kugelfläche vollständig eingeschlossen. Wenn k den Wert 1 überschreitet, so ändert sich die Bewegungsrichtung der beiden Kreisscheitel, sie rücken wieder ins Endliche, und für $k = \sqrt{3}$ fallen sie im Punkte $P\left(-\frac{s}{2}, 0, 0\right)$ zusammen. Auch für das Hyperboloïd $k = \sqrt{3}$ reduziert sich der Kreis, folglich auch die entsprechende Kugelfläche, auf einen Punkt der (x)-Achse.

§ 12.
Diskussion der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Bei der Besprechung der Hauptschnitte des Rotationsflächensystems parallel zur (y z)-Ebene wurde gezeigt, dass sie in ihrer Aufeinanderfolge eine Fläche 3. Grades erzeugen, deren Gleichung nach § 6 lautet:

$$x z^2 - s(x^2 - y^2) + s^2 x = 0 \qquad (11)$$

Im Folgenden soll nun diese Hauptschnittfläche diskutiert werden.

Um zunächst ihren Asymptoten- oder Richtungskegel zu bestimmen, machen wir Gleichung (11) mit w homogen; sie geht dann über in $x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 w^2 = 0$. Da die unendlich ferne Ebene die Gleichung $w = 0$ hat, so findet man den Schnitt der Hauptschnittfläche mit ihr, indem man in der homogenen

Flächengleichung $w = 0$ setzt; so erhält man einen Kegel 3. Grades von der Gleichung $x z^2 = 0$, welcher in die (y z)- und die doppelt gelegte (x y)-Ebene zerfällt, und der die unendlich ferne Ebene in derselben Kurve schneidet, wie die Hauptschnittfläche, nämlich in der unendlich fernen Geraden der (y z)-Ebene und in der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der (x y)-Ebene.

Ferner untersuchen wir die Schnittkurven der Hauptschnittfläche mit den Coordinatenebenen (x y) und (x z). Setzen wir in Gleichung (11) $z = 0$, so geht sie über in

$$x^2 - y^2 - s x = 0 \qquad \text{(a)}$$

Diese Gleichung (a) stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, als Schnitt der Fläche 3. Ordnung mit der (x y)-Ebene; zum vollständigen Schnitt gehört noch die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene. Die obige Hyperbelgleichung ist identisch mit Gleichung (a) in § 5; die (x)-Achse ist die eine Achse der Hyperbel; ihr Mittelpunkt hat die Coordinaten $x = \frac{s}{2}$ und $y = o$; die Halbachse ist $\frac{s}{2}$ (Fig. 8).

Um die Schnittkurve der Hauptschnittfläche mit der (x z)-Ebene zu finden, setzen wir in Gleichung (11) $y = 0$ und finden dann:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} 1) & x = 0, \text{ die (z)-Achse, und} \\ 2) & z^2 = s\,(x - s) \end{cases}$$

Die letzte Gleichung stellt eine rechts von der (z)-Achse liegende Parabel dar und ist identisch mit Gleichung (b) in § 4. (Siehe auch Figur 6). Diese Parabel ist die Kurve, in welcher der den Rotationsflächen $k < 1$, (also den Ellipsoïden), entsprechende Teil der Fläche 3. Ordnung die (x z)-Ebene schneidet. Ihre Achse ist die (x)-Achse; der Scheitel liegt im Punkte F und der Halbparameter $= \frac{s}{2}$. Für den Teil der Hauptschnittfläche 3. Grades, welcher den Hauptschnitten der Rotationshyperboloïde ($k > 1$) entspricht, erhalten wir als Schnittkurve in der (x z)-Ebene die (z)-Achse, auf welche sich das Rotationshyperboloïd für $k = \infty$ reduziert. Die (z)Achse liegt also ihrer ganzen Ausdehnung nach auf der Fläche 3. Grades.

Da in der Flächengleichung (11) das konstante Glied fehlt, so geht die Fläche durch den Nullpunkt und die Gleichung der Tangentialebene in ihm wird gegeben durch die gleich Null gesetzten Glieder ersten Grades; sie lautet: $x = 0$. Die (y z)-Ebene ist also Tangentialebene im Nullpunkt O, sie berührt die Fläche längs der ganzen (z)-Achse.

Auch der Punkt F liegt auf der Hauptschnittfläche, denn seine Coordinaten $x = + s$ und $y = z = 0$ genügen der Gleichung (11). Die Tangentialebene im Punkte F bestimmt man nach der Gleichung:

$$(x - x_1) f_1 + (y - y_1) f_2 + (z - z_2) f_3 = 0$$

wo $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Punktes F sind, also $x_1 = + s$ und $y_1 = z_1 = 0$, und wo

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = - s^2$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

$$f_3 = \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \text{ ist.}$$

Als Gleichung der Tangentialebene der Hauptschnittfläche im Punkte F findet man so die Gleichung

$$-(x - s) s^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x = s.$$

Sie stellt eine Ebene parallel zur (y z)-Ebene im Abstand $x = + s$ dar. Der Punkt F ist Scheitel des rechts der (y z)-Ebene liegenden paraboloïdischen Teils der Hauptschnittfläche.

Im weitern untersuchen wir die Schnitte der Hauptschnittfläche 3. Ordnung mit Ebenen parallel zu den zwei Koordinatenebenen (x y) und (x z). Setzt man in der Flächengleichung (11) $z = c =$ konstant, so erhält man die Schnittkurven parallel zur (x y)-Ebene, nämlich

$$\text{(c)} \qquad s y^2 - s x^2 + (c^2 + s^2) x = 0$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, dessen Asymptoten $y = \pm x$ sind, also eine gleichseitige Hyperbel. Ihre Normalformgleichung findet man durch die Substitution $y = y'$ und $x = x' + \frac{c^2 + s^2}{2 s}$ in Gleichung (c); dann erhält man nämlich:

$$\text{(d)} \qquad x'^2 - y'^2 = \left(\frac{c^2 + s^2}{2 s}\right)^2$$

Die Hyperbelachse liegt in der (x z)-Ebene parallel zur (x)-Achse, im Abstand c von derselben. Fällt die Schnittebene mit der (x y)-Ebene zusammen, so ist $c = 0$ und die Gleichung (c) wird identisch mit der Gleichung (a), d. h. sie stellt den Schnitt der Hauptschnittfläche mit der (x y)-Ebene dar. Für bestimmte positive oder negative Werte von c beträgt der Abstand des Hyperbelmittelpunktes von der (z)-Achse $x = \frac{c^2 + s^2}{2s}$; er ist also stets positiv und kann alle Werte von $\frac{s}{2}$ bis $+\infty$ annehmen. Da die Achsen der Hyperbel $a = b = \frac{c^2 + s^2}{2s}$ sind, so liegt der eine Scheitel stets auf der (z)-Achse, der andere im Abstand $x' = \frac{c^2 + s^2}{s}$ von der (z)-Achse auf der (x')-Achse. Zu jedem Schnitt parallel zur (x y)-Ebene gehört ferner die unendlich ferne Gerade der betreffenden Schnittebene.

Setzt man in der Gleichung der Hauptschnittfläche $z = z'$, $x = x'$ und $y = c =$ konstant, so bekommt man die Kurvengleichung für die Schnitte parallel zur (x z)-Ebene, nämlich

$$x' z'^2 - s x'^2 + s^2 x' + s c^2 = 0 \tag{e}$$

Diese Gleichung 3. Grades in x' und z' stellt eine Kurve dar, die symmetrisch zur (x')-Achse liegt, weil die Variable z' nur in der 2. Potenz darin enthalten ist. Für $c = 0$ geht die Gleichung (e) in die zwei Gleichungen (b) über, welche die Schnittkurve der Hauptschnittfläche mit der (x z)-Ebene darstellen. Für jeden andern beliebigen positiven oder negativen Wert von c stellt die Gleichung (e) eine Kurve 3. Grades dar, deren Asymptotenrichtungen man erhält, wenn die Glieder höchsten Grades gleich Null gesetzt werden, also $x' z'^2 = 0$ oder

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad z' = 0 \quad \text{doppelt.}$$

Die drei Asymptotenrichtungen sind reell; die eine wird gegeben durch die Richtung der (z')-Achse, die beiden andern zusammenfallenden durch die Richtung der (x')-Achse. Die unendlich ferne Gerade der (x' z')-Ebene schneidet also die Kurve in einem einfachen und zwei zusammenfallenden Punkten. Um den letztern Schnittpunkt der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu untersuchen, projizieren wir ihn durch die Transformationsformeln $x' = \frac{1}{x''}$ und $z' = \frac{z''}{x''}$ in den Nullpunkt. Setzt man diese Werte in der Kurvengleichung (e) ein, so wird sie:

$$z''^2 - s\,x'' + s^2\,x''^2 + s\,c^2\,x''^3 = 0$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve 3. Ordnung dar, die durch den neuen, dem unendlich fernen Punkt der (x')-Achse entsprechenden, Nullpunkt geht. Die Tangente in ihm hat die Gleichung $x'' = \frac{1}{x'} = 0$, also $x' = \infty$. Der unendlich ferne Punkt der (x')-Achse ist daher ein einfacher Kurvenpunkt, in welchem die unendlich ferne Gerade der (x' z')-Ebene die Kurve berührt.

Um den unendlich fernen Punkt der (z')-Achse zu unter suchen, projiziert man ihn durch die Transformationsformeln $z' = \frac{1}{z''}$ und $x' = \frac{x''}{z''}$ n den Nullpunkt. Die Kurvengleichung geht dann über in

$$x'' - s\,x''^2\,z'' + s^2\,x''\,z''^2 + s\,c^2\,z''^3 = 0$$

Die transformierte Gleichung beginnt mit Gliedern 1. Grades, der unendlich ferne Punkt der (z')-Achse ist daher ein einfacher Kurvenpunkt. Die Tangente in ihm hat die Gleichung $x'' = 0$ oder zurücktransformiert $x' = 0$. Die (z')-Achse ist also Asymptote der Kurve. Setzt man in der transformierten Gleichung $x'' = 0$, so findet man die Schnittpunkte der (z')-Achse mit der Kurve, nämlich $z''^3 = 0$, also $z'' = 0$ dreifach, oder zurücktransformiert $z' = \infty$ dreifach; d. h. die (z')-Achse schneidet die Kurve im unendlich fernen Punkt in drei zusammenfallenden Punkten, sie ist daher Wendeasymptote der Kurve.

Um die Schnittpunkte der Kurve 3. Grades mit der (x')-Achse zu bestimmen, schreiben wir ihre Gleichung (e) in der Form

$$z' = \sqrt{\frac{s}{x'}\,(x'^2 - s\,x' - c^2)}$$

Für die zu bestimmenden Schnittpunkte ist $z' = 0$ also

$$\sqrt{\frac{s}{x'}\,(x'^2 - s\,x' - c^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

$\frac{s}{x'}(x'^2 - s\,x' - c^2) = 0$. Diese Gleichung hat die drei Wurzeln

$$x'_1 = \infty$$

$$x'_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

$$x'_3 = \frac{s - \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

Dies sind die Abscissen, in welchen die Kurve die (x')-Achse schneidet; x'_2 ist immer positiv, x'_3 dagegen stets negativ. Die Ordinaten mit den Abscissen x'_1, x'_2 und x'_3 sind Tangenten an die Kurve.

Die Kurve 3. Grades besteht aus zwei unendlichen Aesten; der paare parabolische Zug hat seinen Scheitel in

$$x' = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

und erstreckt sich in der Richtung der positiven (x')-Achse bis ins Unendliche; die unendlich ferne Gerade der $(x'\,z')$-Ebene ist Tangente an diesen Zug. Der unpaare Zug schneidet die (z')-Achse in

$$x' = -\frac{-s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

Die Gerade

$$x' = -\frac{-s + \sqrt{s^2 + 4c^2}}{2}$$

ist Tangente im Schnittpunkte mit der (x')-Achse, und die (z')-Achse ist Wendeasymptote der Kurve; diese besitzt ferner zwei Wendepunkte im Endlichen, die symmetrisch zur (x')-Achse liegen. Ihre Abscissen werden gefunden, indem man aus der Kurvengleichung (e) $\frac{d^2 z'}{d\,x'^2}$ bestimmt, diesen Wert gleich Null setzt und die Wurzeln dieser Gleichung aufsucht.

Aus Gleichung (e) folgt:

$$z' = \left(s\,x' - s\,c^2\,x'^{-1} - s^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{d\,z'}{d\,x'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s\,c^2\,x'^{-2} + s}{\left(s\,x' - s\,c^2\,x'^{-1} - s^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2 z'}{d\,x'^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\,s\,c^2\,x'^{-3}\left(s\,x' - s\,c^2\,x'^{-1} - s^2\right) - \frac{1}{2}\left(s\,c^2\,x'^{-2} + s\right)^2}{\left(s\,x' - s\,c^2\,x'^{-1} - s^2\right)^{3/2}}$$

Dieser Ausdruck für $\dfrac{d^2 z'}{d x'^2}$ kann nur gleich Null sein, wenn der Zähler dieses Bruches verschwindet, also wenn

$$x'^4 + 6\,c^2\,x'^2 - 4\,s\,c^2\,x' - 3\,c^4 = 0 \text{ ist.}$$

Die Kurve, in der die Hauptschnittfläche durch Ebenen parallel zur (x z)-Ebene geschnitten wird.

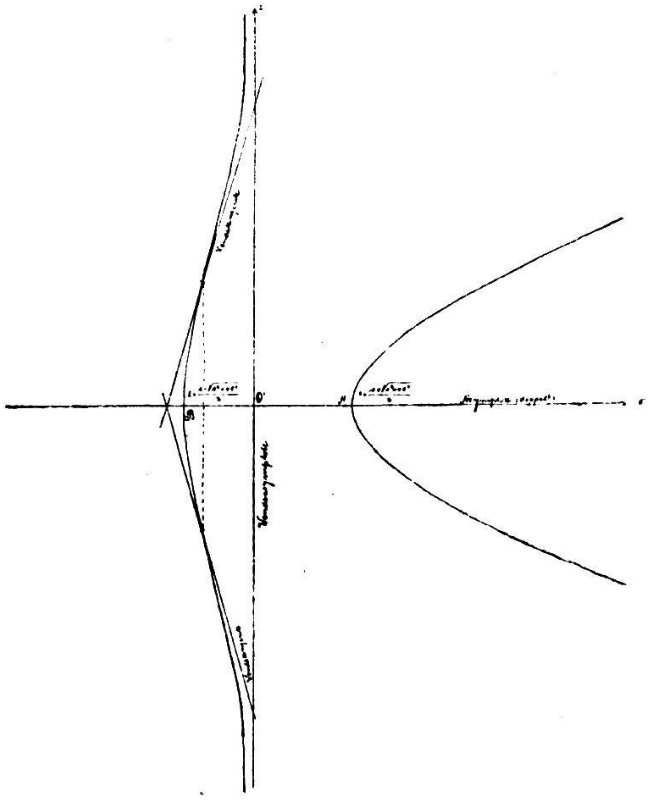

Fig. 11.

Wird diese Gleichung aufgelöst, z. B. nach der Methode von Ferrari, so findet man, dass sie zwei konjugiert komplexe und zwei reelle Wurzeln besitzt. Von den letzteren hat die eine einen positiven Wert; die andere dagegen, welche den beiden im Endlichen liegenden Wendepunkten der Kurve dritten Grades entspricht, ist negativ, nämlich

$$x' = \frac{1}{2}\sqrt{q - 6c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{-q - 6c^2 + \frac{8sc^2}{\sqrt{q - 6c^2}}},$$

$$\text{wo } q = 2c^2 + \sqrt[3]{64c^6 + 16s^2c^4} \text{ bedeutet.}$$

Durch diesen Wert von x' ist die Abscisse der beiden zur (x')-Achse symmetrisch liegenden Wendepunkte des unpaaren Zuges der Kurve 3. Grades bestimmt.

Gehen wir nun über zur Untersuchung der Flächenpunkte der Hauptschnittfläche 3. Grades! Ihre Gleichung kann, wenn sie nach z aufgelöst wird, auch in folgender Form geschrieben werden:

$$z = F(xy) = \left(sx - s\frac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2} \tag{f}$$

Lässt sich die Gleichung einer Fläche in diese Form bringen, so gilt als Kriterium der Flächenpunkte allgemein der Ausdruck $F_{11}F_{22} - F_{12}^2$. Setzt man hierin die Koordinaten des zu untersuchenden Flächenpunktes ein, so ist er entweder elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem $F_{11}F_{22} - F_{12}^2 \gtreqless 0$ ist. Wir berechnen daher zunächst F_{11}, F_{22} und F_{12}. Nach Gleichung (f) folgt:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{s + s\dfrac{y^2}{x^2}}{\left(sx - s\dfrac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2}}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(sx - s\dfrac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2} s\dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{s^2}{2}\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(sx - s\dfrac{y^2}{x} - s^2\right)^{-1/2}}{sx - s\dfrac{y^2}{x} - s^2}$$

$$\text{oder } F_{11} = -s\frac{y^2}{x^3 z} - \frac{s^2}{4} \cdot \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

$$\text{Ferner ist } F_2 = -\frac{s\dfrac{y}{x}}{\left(sx - s\dfrac{y^2}{x} - s^2\right)^{1/2}}$$

und $F_{22} = -\frac{s}{x\,z} - \frac{s^2\,y^2}{x^2\,z^3}$

Aus F_1 bestimmen wir $F_{12} = \frac{s\,y}{x^2\,z} + \frac{s^2}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{y}{x\,z^3}$

$$F_{12}^{\,2} = \frac{s^2\,y^2}{x^4\,z^2} + \frac{s^3\,y^2}{x^3\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{s^4}{4}\,\frac{y^2}{x^2\,z^6}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

$$F_{11} \cdot F_{22} = s^2\frac{y^2}{x^4\,z^2} + \frac{s^3}{4}\cdot\frac{1}{x\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 + \frac{s^3\,y^4}{x^5\,z^4} + \frac{s^4}{4}\cdot\frac{y^2}{x^2\,z^6}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

Wir bilden nun die Differenz

$$F_{11} \cdot F_{22} - F_{12}^{\,2} = \frac{s^3}{4}\cdot\frac{1}{x\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 + \frac{s^3\,y^4}{x^5\,z^4} - \frac{s^3\,y^2}{x^3\,z^4}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$F_{11} \cdot F_{22} - F_{12}^{\,2} = \frac{s^3}{4\,x^5\,z^4}\left(x^4 - 2\,x^2\,y^2 + y^4\right)$$

$$F_{11} \cdot F_{22} - F_{12}^{\,2} = \frac{s^3}{4\,x^5\,z^4}\left(x^2 - y^2\right)^2 \qquad \text{(g)}$$

Je nachdem die Koordinaten $x_1\,y_1\,z_1$ irgend eines Flächenpunktes $P_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$, in diesen Ausdruck eingesetzt, diesem einen positiven oder negativen Wert geben, ist er entweder elliptisch oder hyperbolisch. Wird der Ausdruck gleich Null, oder, was gleichbedeutend ist, unendlich gross, so ist der Punkt parabolisch.

Das Vorzeichen des obigen Ausdrucks (g) wird nun einzig bestimmt durch das Vorzeichen von x; für jedes positive x ist auch $F_{11} \cdot F_{22} - F_{12}^{\,2} =$ positiv. Da nun alle Punkte des rechts von der (y z)-Ebene liegenden Teils der Hauptschnittfläche eine positive Koordinate x haben, so sind alle diese Punkte elliptische Flächenpunkte, und die beiden Inflexionstangenten in jedem derselben sind imaginär. Wir wollen speziell die Gleichung der Inflexionstangenten in dem auf der positiven (x)-Achse liegenden Flächenpunkte F bestimmen. Zu diesem Zwecke eliminieren wir aus der Tangentialebenengleichung $x = s$ dieses Punktes und aus der Flächengleichung (11) die Variable x und finden so die beiden Gleichungen $z = \pm\, i\, y$. Dies sind die Strahlen absoluter Richtung einer Ellipse mit gleichen Halbachsen, also eines Kreises, der Flächenpunkt F ist daher speziell ein Kreispunkt, Nabelpunkt oder Umbilikus der Hauptschnittfläche.

Wir wissen ferner, dass sämtliche Punkte der (z)-Achse des Koordinatensystems zugleich Flächenpunkte sind. Da sie alle die Koordinate $x = 0$ haben, so geht für sie die Gleichung (g) über in $F_{11} F_{22} - F_{12}^2 = \infty$, d. h. alle Punkte der (z)-Achse sind parabolische Punkte der Hauptschnittfläche 3. Grades. Da nun in jedem parabolischen Flächenpunkt die beiden Inflexionstangenten zusammen fallen, und da ferner jeder Punkt der (z)-Achse, als Punkt der Hauptschnittfläche betrachtet, dieselbe Tangentialebene besitzt, nämlich die (y z)-Ebene des Koordinatensystems, so fallen alle Tangenten in diesen Flächenpunkten in eine einzige zusammen. Ihre Gleichung ergibt sich aus der Flächengleichung (11), wenn man in ihr $x = 0$ setzt, nämlich $y = 0$ doppelt. Alle Inflexionstangenten in den auf der (z)-Achse liegenden Flächenpunkten fallen also zusammen in die (z)-Achse des Koordinatensystems.

Für alle Flächenpunkte, die links von der Koordinatenebene (y z) liegen, hat die Koordinate x einen negativen Wert, daher auch der Ausdruck (g). Folglich sind alle Punkte des links von der (y z)-Ebene liegenden Teils der Hauptschnittfläche hyperbolische Punkte, und in jedem derselben sind zwei reelle Inflexionstangenten möglich.

Sowohl für $x = + \infty$ als auch für $x = - \infty$ wird $F_{11} F_{22} - F_{12}^2 = 0$. Im Unendlichen sind daher alle Flächenpunkte parabolisch. Wenn man im Unendlichen von dem rechts von der (y z)-Ebene liegenden Teil der Fläche auf den links von dieser Ebene liegenden Teil übergeht, so geht der elliptische Charakter der Flächenpunkte über in den parabolischen und dann in den hyperbolischen.

Gestützt auf die Untersuchungen dieses Paragraphs können wir uns über die Gestalt der durch Gleichung (11) dargestellten Hauptschnittfläche folgendes Bild machen: sie besteht aus zwei Teilen, einem hyperboloïdischen links und einem paraboloïdischen rechts der (y z)-Ebene. Die (z)-Achse liegt ganz auf dem hyperboloïdischen Teil, und dieser erstreckt sich von ihr aus in der negativen (x)-Richtung bis ins Unendliche und schneidet die unendlich ferne Ebene in der Richtung der (y z)-Ebene in einer einfachen und in der Richtung der (x y)-Ebene in einer doppelt gelegten Geraden. Der paraboloïdische Teil der Fläche erstreckt sich vom Scheitel F aus, welcher ein Kreispunkt ist, in positiver (x)-Richtung bis nach $+ \infty$ und schneidet die unendlich ferne

Ebene ebenfalls in jener doppelt gelegten Geraden der (x y)-Ebene. Man kann sich vorstellen, dass die beiden Flächenstücke im Unendlichen sich in der unendlich fernen Doppelgeraden der (x y)-Ebene aneinander schliessen und so eine zusammenhängende Fläche bilden, die drei Gerade enthält, nämlich die (z)-Achse, die unendlich ferne Gerade der (y z)-Ebene und die unendlich ferne Gerade der (x y)-Ebene als Doppelgerade.

§ 13.
Ueber Polarflächen der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Die Hauptschnittfläche 3. Grades hat die Gleichung

$$x z^2 - s x^2 + s y^2 + s^2 x = 0 \tag{11}$$

oder homogen gemacht:

$$f(x y z w) = x z^2 - s x^2 w + s y^2 w + s^2 x w^2 = 0$$

Nun hat die erste Polarfläche in Bezug auf einen festen Pol P′ (x′, y′, z′) die Gleichung:

$$\triangle f = x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} + w' \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

Nach der homogenen Flächengleichung ergeben sich für die partiellen Differentialquotienten folgende Werte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 - 2 s x + s^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 s y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 x z$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = - s x^2 + s y^2 + 2 s^2 x$$

Daher wird die Gleichung der quadratischen Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades, bezogen auf einen festen Pol P′ (x′, y′, z′):

$$s(x^2 - y^2) - x' \cdot z^2 - 2 z' \cdot x z - 2 s (s - x') x - 2 s y' \cdot y - s^2 x' = 0 \tag{19}$$

Wir nehmen nun an, der Pol P′ (x′, y′, z′) sei nicht fest, sondern er nehme successive andere Lagen an; er durchlaufe z. B. die ganze (x)-Achse des Koordinatensystems. In diesem Falle haben wir in der Gleichung der quadratischen Polarfläche (19) für $y' = z' = 0$ zu setzen, und für x′ substituieren wir einen veränderlichen Parameter n, der alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen soll. Dann geht die Gleichung (19) über in

$$s x^2 - s y^2 - n z^2 - 2 s^2 x + 2 n s \cdot x - n s^2 = 0 \quad (20)$$

Bei variablem Parameter n stellt diese Gleichung eine Schar von unendlich vielen Flächen 2. Grades dar. Alle diese Flächen bilden in ihrer Gesamtheit die Schar von unendlich vielen quadratischen Polarflächen, bezogen auf die sämtlichen Punkte der (x)-Achse als Pole.

Da die Gleichung (20) keine Glieder in xy, xz oder yz enthält, so genügt eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems, um die Flächengleichung auf die Achsengleichung zu transformieren. Wir haben zu diesem Zwecke in Gleichung (20) für $y = y'$, $z = z'$ und für $x = x' + s - n$ zu substituieren; sie geht dann über in

$$\frac{x'^2}{n^2 + n s + s^2} - \frac{y'^2}{n^2 + n s + s^2} - \frac{n z'^2}{s(n^2 + n s + s^2)} = 1 \quad (20a)$$

Die Mittelpunkte M sämtlicher Flächen der durch Gleichung (20) gegebenen Polarflächenschar liegen demnach auf der (x)-Achse und zwar im Abstand $x = s - n$ vom Koordinatenursprung.

Wir nehmen nun zunächst an, der Pol P′ durchlaufe den positiven Teil der (x)-Achse, so dass der Parameter n alle Werte annimmt zwischen $n = +\infty$ und $n = 0$. Dann sind in der Gleichung (20a) alle Nenner positiv, und die quadratische Polarfläche des Punktes P′ ist ein zweischaliges Hyperboloïd, von den Halbachsen:

$$a = b = \sqrt{n^2 + n s + s^2} \text{ und } c = \sqrt{\frac{s}{n}(n^2 + n s + s^2)}$$

Seine Scheitel liegen auf der (x)-Achse im Abstand $x' = \pm \sqrt{n^2 + n s + s^2}$ vom Mittelpunkt M. (S. Fig. 12).

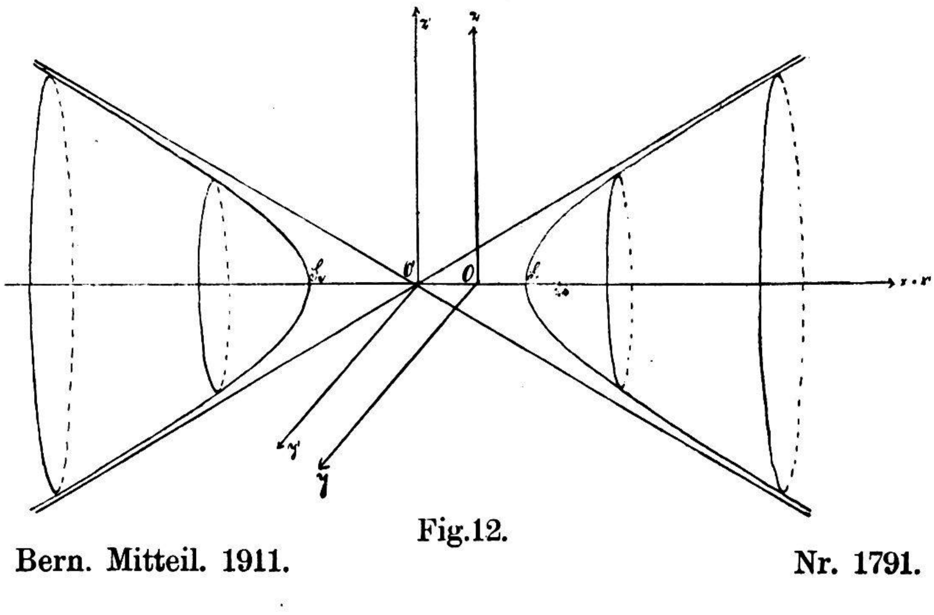

Fig.12.

Um die Polarfläche des unendlich fernen Punktes der (x)-Achse zu bestimmen, dividieren wir die Gleichung (20) durch n und setzen dann für $n = \infty$; sie wird dann

$$z^2 - 2sx + s^2 = 0 \qquad (a)$$

Dies ist die Gleichung eines parabolischen Cylinders; sie ist identisch mit Gleichung (5) in § 2. Wir finden somit, dass die Rotationsfläche $k = 1$ unseres Rotationsflächensystems zugleich quadratische Polarfläche der durch Gleichung (11) gegebenen Hauptschnittfläche 3. Grades ist, bezogen auf den unendlich fernen Punkt der (x)-Achse als Pol P′. (S. auch Fig. 4).

Der Pol P′ rücke nun auf der positiven (x)-Achse ins Endliche, der Parameter n werde also immer kleiner! Dann werden alle Halbachsen des zweischaligen Hyperboloïdes (20a) zunächst abnehmen; wandert der Pol P′ bis in den Nullpunkt, wird also n immer kleiner und zuletzt gleich Null, so reduziert sich die Länge der Halbachsen a und b auf $a = b = s$. Der Mittelpunkt M des Hyperboloïdes rückt gleichzeitig auf der negativen (x)-Achse ins Endliche, und für $n = 0$ befindet er sich auf der positiven (x)-Achse im Abstand $x = s$. Die Halbachse c nun erreicht schon vorher ein gewisses Minimum ihrer Länge, nämlich dann, wenn $\frac{d}{dn}\left(n + s + \frac{s}{n}\right) = 1 - \frac{s}{n^2} = 0$ wird, also wenn $n = \sqrt{s}$ ist, oder wenn der Pol P′ im Punkte $x = \sqrt{s}$ liegt. Wird n noch kleiner, so nimmt die Länge der Halbachse c rasch wieder zu und für $n = 0$ ist sie unendlich gross.

Die quadratische Polarfläche in Bezug auf den Nullpunkt des alten Koordinatensystems ist also ein zweischaliges Rotationshyperboloïd, dessen eine imaginäre Halbachse unendlich lang ist; diese Fläche wird daher vorteilhafter aufgefasst als hyperbolischer Cylinder, dessen Gleichung wir direkt aus der Polarflächengleichung (20) finden, wenn man ihr $n = 0$ setzt:

$$x^2 - y^2 - 2sx = 0 \qquad (b)$$

Dies ist die Gleichung der Kurve, in welcher der gleichseitige hyperbolische Cylinder die (x y)-Ebene schneidet. Es ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel von der Halbachse s. Der Mittelpunkt dieser Schnittkurve liegt im Abstand $x = s$ vom Koordinatenursprung O, also im Flächenpunkte F. Die Asymptotengleichungen sind $y = \pm(x - s)$. Die Erzeugenden des hyperbolischen Cylinders stehen auf der (x y)-Ebene senkrecht; die (z)-Achse ist auch Cylindererzeugende, also hat die Polarfläche die (z)-Achse mit der Hauptschnittfläche gemein. Dieses Resultat entspricht dem allgemein gültigen Satze, dass, wenn der Pol auf der Fläche selbst liegt, dann die sämtlichen Polarflächen die Tangentialebene in ihm berühren. (S. Fig. 13).

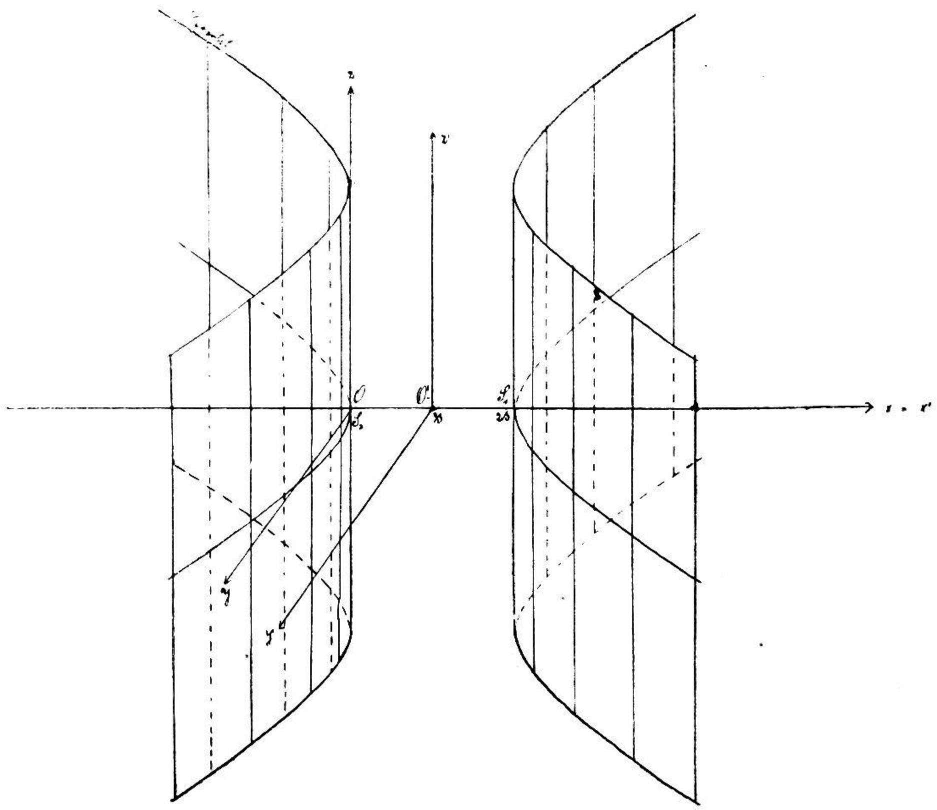

Fig. 13.

Der Pol P′ gehe nun im Koordinatenursprung auf den negativen Teil der (x)-Achse über; dann müssen wir in der Polarflächengleichung n durch — n ersetzen und n wieder alle Werte von 0 bis ∞ annehmen lassen, wenn der Pol P′ bis ins Unendliche rückt. Die Gleichung (20a) geht nun über in

$$\frac{x'^2}{n^2 - n s + s^2} - \frac{y'^2}{n^2 - n s + s^2} + \frac{n z'^2}{s (n^2 - n s + s^2)} = 1 \quad (20b)$$

Der Ausdruck $(n^2 - n s + s^2)$ im Nenner dieser Gleichung hat immer einen positiven Wert, denn die Wurzeln der Gleichung $n^2 - n s + s^2 = 0$ sind komplex; der Parameter n kann aber nur reelle Werte annehmen, also kann kein Wert von n der Gleichung $n^2 - n s + s^2 = 0$ genügen. Der Ausdruck $n^2 - n s + s^2$ nimmt daher stetig vom Werte s^2 bis ∞ zu, und die Gleichung (20b) hat immer den allgemeinen Typus $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$. Dies ist die Gleichung eines einschaligen Hyperboloïdes, dessen imaginäre

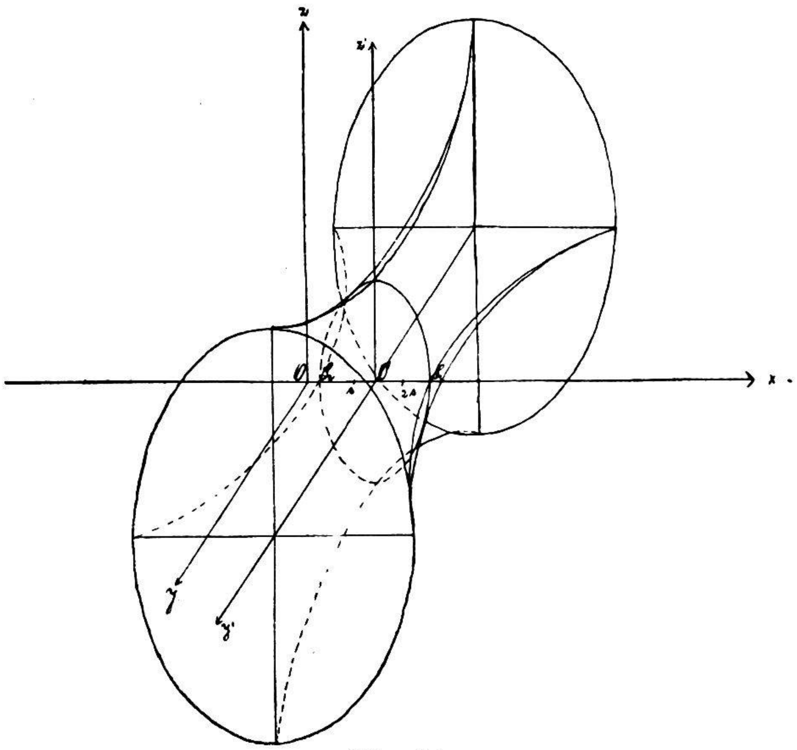

Fig. 14.

Achse in der (y')-Achse liegt. Fig. 14. Wenn also der auf der (x)-Achse gelegene Pol P' vom Nullpunkt aus in negativer Richtung weiter rückt, so geht der durch Gleichung (b) bestimmte hyperbolische Cylinder in ein einschaliges Hyperboloïd über. Jener lässt sich auch als Grenzfall eines zweischaligen und eines einschaligen Hyperboloïdes betrachten, nämlich als ein solches, dessen eine Achse, c, unendlich gross wird, während die beiden andern einander gleich, $a = b = s$, sind. Nimmt der Parameter n zu, so wird die Halbachse c des Hyperboloïdes kleiner, sie nimmt endliche Werte an. Ein Minimum wird sie, wenn $\frac{d}{dn}\left(n - s + \frac{s^2}{n}\right) = 1 - \frac{s^2}{n^2} = 0$ ist, also wenn der Parameter $n = s$ ist, d. h. für den Punkt $x = -s$ als Pol; ihre Länge ist dann $c = s$. Wird $|n| > s$, so wächst die Halbachse c wieder, und für $n = \infty$, wenn sich also der Pol P' in $x = -\infty$ befindet, ist c wieder unendlich gross. Die beiden Halbachsen a und b haben für $n = 0$ den Wert $a = b = s$; wenn der Parameter n bis ins Unendliche wächst, so nimmt ihre Länge stetig zu und wird für $n = \infty$ ebenfalls unendlich gross. Der Mittelpunkt der quadratischen Polarfläche befindet sich für $n = 0$ auf der positiven (x)-Achse im Abstand $x = + s$. Bei zunehmendem n rückt er in positiver Richtung weiter, und für $n = \infty$ befindet er sich im Unendlichen. Die quadratische Polarfläche des unendlich fernen Punktes der negativen (x)-Achse ist demnach ein einschaliges Hyperboloïd, dessen Halbachsen unendlich lang sind und dessen Mittelpunkt sich im Abstand $x = + \infty$ befindet. Die (x)-Achse schneidet daher das Hyperboloïd im Endlichen nur einmal. Der im Endlichen liegende Teil desselben lässt sich als parabolischer Cylinder auffassen, welcher identisch ist mit demjenigen von der Gleichung (a).

Die Zusammenfassung der letzten Resultate ergibt folgendes: betrachtet man sämtliche Punkte der (x)-Achse von $+ \infty$ bis $- \infty$ successive als Pole in Bezug auf die Hauptschnittfläche 3. Grades, so erhält man eine Schar von unendlich vielen quadratischen Polarflächen. Die Polarfläche des unendlich fernen Punktes der positiven (x)-Achse ist ein parabolischer Cylinder, dessen Erzeugende auf der (x z)-Ebene senkrecht stehen und dessen Scheitel vom Koordinatenursprung den Abstand $x = \frac{s}{2}$ besitzt. Rückt der Pol ins Endliche, so geht dieser Cylinder in ein zweischaliges Hyperboloïd über. Während der Pol die ganze positive (x)-Achse durchläuft, rückt der eine Scheitel desselben von $x = \frac{s}{2}$ nach $x = 2 s$, der andere von $x = - \infty$ durch die ganze negative (x)-Achse nach dem Koordinatenursprung. Fällt der Pol mit dem Nullpunkt der (x)-Achse zusammen, so geht das zweischalige Hyperboloïd in einen hyperbolischen Cylinder über, dessen Erzeugende senkrecht auf der (x y)-Ebene stehen und dessen Scheitel die Abstände $x = 2 s$ und $x = 0$ besitzen. Wenn der Pol P′ die ganze positive (x)-Achse durchläuft, so durchwandert der Mittelpunkt der entsprechenden Polarflächen die ganze negative (x)-Achse in positiver Richtung von $x = - \infty$ bis $x = + s$. Sobald nun der Pol P′ auf die negative (x)-Achse übergeht, wird die quadratische Polarfläche ein einschaliges Hyperboloïd, dessen imaginäre Achse in der (x y)-Ebene parallel zur (y)-Achse liegt. Durchläuft der Pol die ganze negative (x)-Achse von $x = 0$ bis $x = -\infty$, so rückt der Mittelpunkt der Polarfläche im bisherigen Sinne weiter von $x = +s$ bis $x = +\infty$. Die Schnittpunkte des einschaligen Hyperboloïdes mit der (x)-Achse rücken von $x = +2s$ bis $x = \infty$, bezüglich von $x = 0$ bis $x = \frac{s}{2}$. Die quadratische Polarfläche der Hauptschnittfläche in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der negativen (x)-Achse als Pol ist dann wieder der parabolische Cylinder, mit dem die Entwicklung der Flächenschar beginnt. Ueber die gesamte Lageveränderung des Mittelpunktes und der Achsenabschnitte in der (x)-Achse gibt folgende Tabelle Aufschluss:

n	Mittelpunkt	Scheitel S_1	Scheitel S_2
$+\infty$	$x = -\infty$	$x_1 = \frac{s}{2}$	$x_2 = -\infty$
0	$= s$	$= 2s$	$= 0$
$-\infty$	$= +\infty$	$= +\infty$	$= +\frac{s}{2}$

Wir gehen nun über zur Untersuchung der quadratischen Polarflächen der Hauptschnittfläche 3. Grades für den Fall, dass der Pol $P'(x'\ y'\ z')$ die (z)-Achse des Koordinatensystems durchläuft. Wir setzen daher in der allgemeinen Gleichung (19) der ersten Polarfläche für $x' = y' = 0$ und $z' = n$, wo n wieder variabler Parameter ist und alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann; sie geht dann über in

$$s\,x^2 - s\,y^2 - 2\,n\,x\,z - 2\,s^2\,x = 0 \qquad (21)$$

Diese Gleichung stellt unendlich viele Flächen dar; jede Fläche der Schar geht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems und enthält die (z)-Achse desselben als Erzeugende, denn die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ leisten der Gleichung (21) für jeden Wert von z Genüge. Da nun nach § 12 jeder Punkt der (z)-Achse auf der Hauptschnittfläche 3. Grades liegt und zudem ein parabolischer Flächenpunkt ist, so müssen nach der Theorie der Polarflächen alle Flächen des obigen Büschels Kegel 2. Grades sein. (S. Fig. 15).

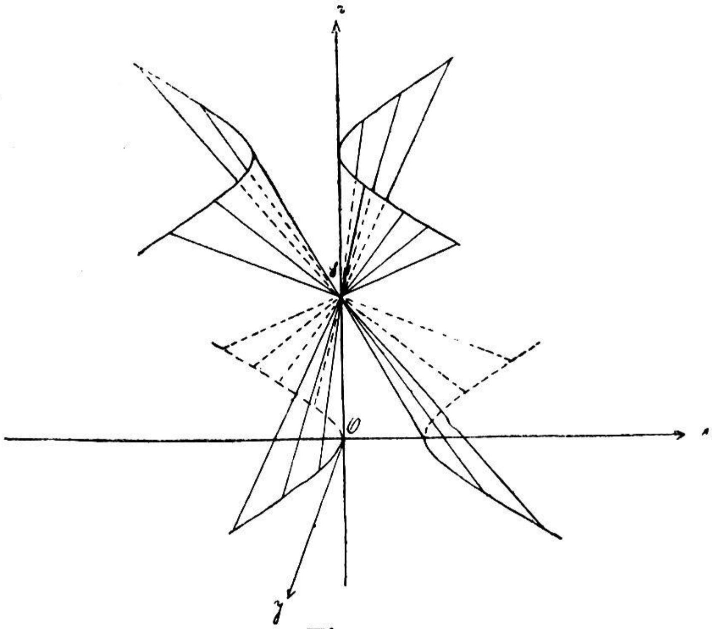

Fig. 15.

Ihre Scheitelgleichung finden wir, wenn in Gleichung (21) für $x = x'$, $y = y'$ und für $z = z' - \frac{s^2}{n}$ substituiert wird. Sie geht dann über in

$$s\,x'^2 - s\,y'^2 - 2\,n\,x'\,z' = 0 \tag{21a}$$

Zur Bestimmung der Schnittkurven dieser Kegelschar mit der (x y)-Ebene des ursprünglichen Koordinatensystems setzen wir in Gleichung (21) für $z = 0$ und finden so die Gleichung $x^2 - y^2 - 2\,s\,x = 0$; sie stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, welche identisch ist mit der Schnittkurve des vorhin besprochenen hyperbolischen Cylinders mit der (x y)-Ebene; sie bleibt für alle Flächen der Schar dieselbe. Also schneidet jeder Kegel zweiten Grades, der durch die in x' y' z' homogene Gleichung (21a) dargestellt wird, die (x y)-Ebene in der nämlichen gleichseitigen Hyperbel; ihr Mittelpunkt liegt im Abstand $x = s$ auf der (x)-Achse, ihre Halbachse $= s$; der eine Scheitel fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen, der andere liegt im Abstand $x = 2\,s$. Der Kegelscheitel S liegt auf der (z)-Achse und hat vom alten Nullpunkt den Abstand $z' = -\frac{s^2}{n}$. Dem Pol P′ $(z = n)$ auf der (z)-Achse entspricht der Scheitel S seines Polarkegels $z' = -\frac{s^2}{n}$; da $z \cdot z' = -s^2 =$ konstant und negativ ist, so bilden die Punktepaare (P', S) auf der (z)-Achse eine elliptische Punktinvolution vom Mittelpunkt O. Für $n = s$ wird $z = s$ und $z' = -s$, welche beiden Punkte P und S symmetrisch zu O liegen.

Für alle Werte von n zwischen 0 und $+\infty$ bewegt sich der Kegelschnitt S von $z = -\infty$ bis $z = 0$, für diejenigen von 0 bis $-\infty$ dagegen von $z = +\infty$ bis $z = 0$. Wenn der Pol P′ im Endlichen von der positiven (z)-Achse auf die negative übergeht, also den Koordinatenursprung passiert, so rückt der Kegelscheitel S im Unendlichen von der negativen (z)-Achse auf die positive. Für den Polabstand $z = \pm\infty$ ist der Koordinatenursprung Kegelscheitel; alle Erzeugenden durch denselben schneiden aber die (x y)-Ebene zugleich noch in einem Punkte der Schnitthyperbel (b), sie liegen also alle in der (x y)-Ebene des alten Koordinatensystems, und diese ist die erste Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der (z)-Achse als Pol; die quadratische Polarfläche hat sich also auf eine Ebene reduziert. Wählt man dagegen den Koordinatenursprung als Pol, so dass der Kegelscheitel im Abstand $z = \infty$ liegt, so sind alle Erzeugende einander parallel und senkrecht zur (x y)-Ebene, d. h. der Kegel 2. Grades ist identisch mit dem durch Gleichung (b) bestimmten hyperbolischen Cylinder. (Fig. 13).

Wir lassen nun den Pol $P'(x' y' z')$ die (y)-Achse des Koordinatensystems durchlaufen und bestimmen die Schar von quadratischen Polarflächen, die den Punkten derselben entspricht. Es ist daher in der allgemeinen Gleichung (19) der quadratischen Polarfläche $x' = z' = 0$ und y' gleich einem variabeln Parameter n zu setzen und wir erhalten die Gleichung:

$$x^2 - y^2 - 2\,s\,x - 2\,n\,y = 0 \qquad (22)$$

Da n alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ annehmen kann, so stellt diese Gleichung, im Raume gedeutet, eine Schar von gleichseitigen hyperbolischen Cylindern dar, deren Erzeugende auf der (x y)-Ebene senkrecht stehen. Die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ genügen der Gleichung (22) für jedes z, also ist die (z)-Achse des Koordinatensystems für jede Fläche der Schar eine Erzeugende derselben. Sämtliche Cylinderflächen der Schar schneiden die (x y)-Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel von der Gleichung (22); die Mittelpunkte dieser Schnitthyperbeln liegen alle auf einer durch den Punkt F gehenden Geraden, die parallel ist zur (y)-Achse, denn ihre Koordinaten sind $y = -n$ und $x = s =$ konstant, und durch die Substitution $x = x' + s$ und $y = y' - n$ geht die Hyperbelgleichung (22) in die Achsengleichung über, welche lautet:

$$\left.\begin{array}{ll} & \dfrac{x'^2}{s^2 - n^2} - \dfrac{y'^2}{s^2 - n^2} = 1 \\ \text{oder, wenn } s < n \text{ ist} & \dfrac{y'^2}{n^2 - s^2} - \dfrac{x'^2}{n^2 - s^2} = 1 \end{array}\right\} \tag{22a}$$

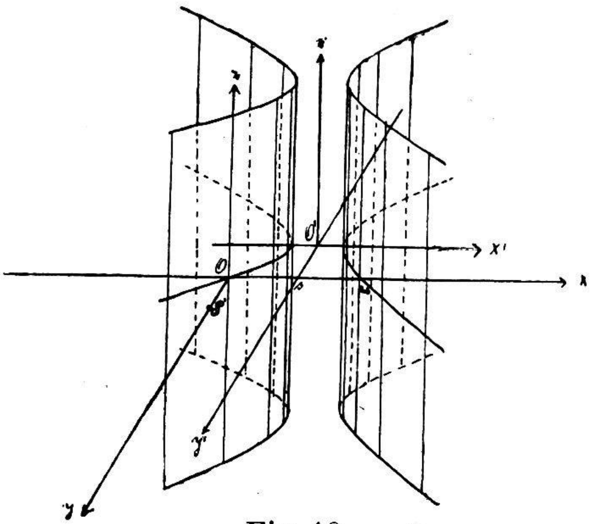

Fig. 16.

Ueber die Aenderungen der Lage der Hyperbelmittelpunkte O′ und die Länge der Halbachse bei variablem Parameter n gibt folgende Tabelle Aufschluss:

n	$x = s$	$y = -n$	$a = b = \sqrt{n^2 - s^2}$
$+\infty$	s	$-\infty$	∞
$+s$	s	$-s$	0
0	s	0	s
$-s$	s	$+s$	0
$-\infty$	s	$+\infty$	∞

Zunächst zeigt sich wieder, dass die quadratische Polarfläche in Bezug auf den Koordinatenursprung als Pol ein hyperbolischer Cylinder ist, der in Fig. 13 dargestellt und bereits besprochen wurde. Rückt nun der Pol P′ auf der (y)-Achse vom Nullpunkt aus in positiver Richtung vorwärts, so wandert der Mittelpunkt O′ der Schnitthyperbel auf der Geraden $x = s$ in negativer (y)-Richtung weiter, und zugleich nimmt die Länge der Halbachsen $a = b$ vom Anfangswerte s an ab. Wenn sich der auf der (y)-Achse liegende Pol im Abstand $y = + s$ befindet, so sind die Halbachsen der Schnitthyperbel $a = b = 0$ und der hyperbolische Cylinder reduziert sich auf zwei sich rechtwinklig schneidende Ebenen, die beide auf der (x y)-Ebene senkrecht stehen, während sie mit den beiden andern Koordinatenebenen je Winkel von 45^0 bilden. Der Durchstosspunkt ihrer Schnittgeraden mit der (x y)-Ebene hat die Koordinaten $x = s$ und $y = - s$.

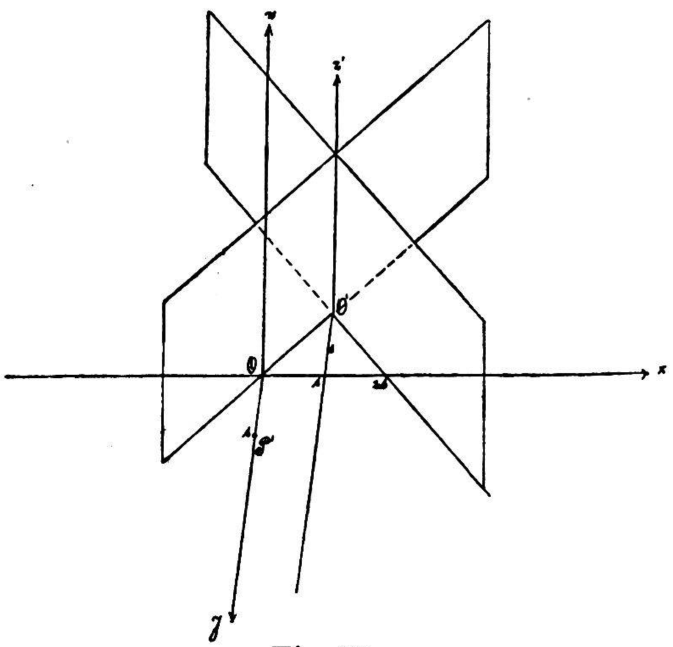

Fig. 17.

Geht der Pol im bisherigen Sinne weiter und durchläuft er die (y)-Achse von $y = + s$ bis $y = + \infty$, so ist der Parameter $n > s$, und wir haben als Gleichung der gleichseitigen Schnitthyperbel die zweite Gleichung (22a) zu betrachten. Es zeigt sich, dass aus den zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden, in welchen die soeben besprochenen Ebenen die (x y)-Ebene schneiden, nun eine solche gleichseitige Hyperbel entsteht, deren reelle Achse in die (y)-Richtung und deren imaginäre Achse in die (x)-Richtung fällt, während für $0 < n < s$ die Verhältnisse entgegengesetzte waren. Der Mittelpunkt der Schnitthyperbel, also auch die Achse des entsprechenden hyperbolischen Cylinders, rückt bei wachsendem n auf der Geraden $x = s$ in der eingeschlagenen Richtung immer weiter, so dass er sich immer gleich weit hinter der (x z)-Ebene befindet, wie der Pol P′ vor derselben; ist der Abstand des Pols $y = +\infty$, so ist derjenige der Cylinderachse $y = -\infty$. Die Länge der Hyperbelhalbachsen $a = b$ nimmt vom Werte Null an stetig zu und für $n = \infty$ werden sie unendlich gross. Für grosse Werte des Parameters n ist der Abstand des Hyperbelmittelpunktes von der (x)-Achse des Koordinatensystems verhältnismässig nur wenig grösser als die Länge der Hyperbelachse; die Scheitelerzeugende der einen Schale des hyperbolischen Cylinders entfernt sich daher nur wenig von der (x)-Achse, so dass die (z)-Achse des Koordinatensystems immer Cylindererzeugende ist. Befindet sich

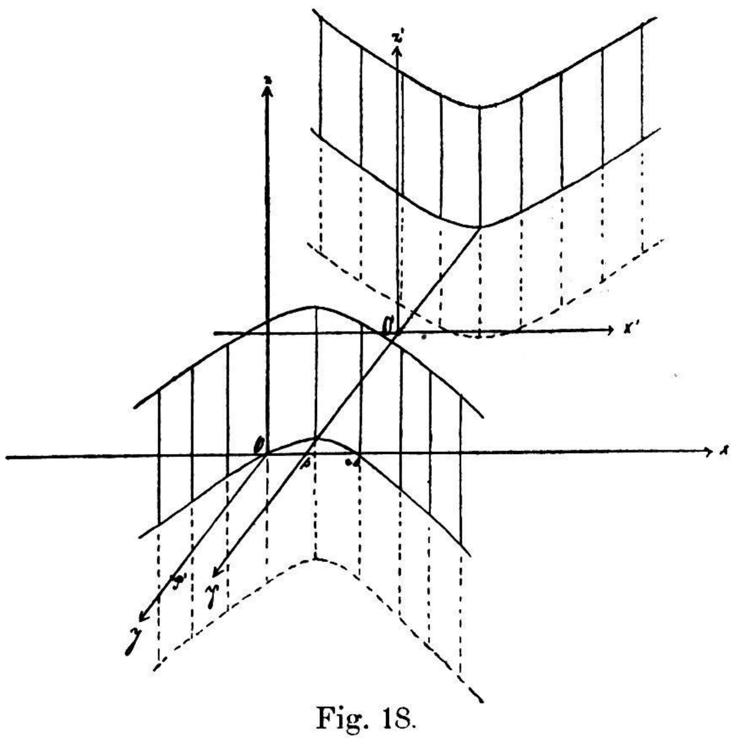

Fig. 18.

der Pol P′ im Abstand $y = +\infty$, so ist sowohl der Abstand des Hyperbelmittelpunktes als auch die Länge der Halbachse unendlich gross, und die im Endlichen liegende Schale des hyperbolischen Cylinders geht in eine Ebene, die (x z)-Ebene des Koordinatensystems, über; diese ist also 1. Polarfläche in Bezug auf den unendlich fernen Punkt der (y)-Achse. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man die Gleichung (22) durch n dividiert und dann für $n = \infty$ einsetzt; sie geht dann über in $y = 0$, die Gleichung der (x z)-Ebene.

Lassen wir den Pol $P'(x'\,y'\,z')$ statt der positiven die negative (y)-Achse durchlaufen, so erhalten wir die nämliche Schar von quadratischen Polarflächen, nur mit dem Unterschiede, dass der Mittelpunkt ihrer Schnitthyperbel die Gerade $x = s$ in positiver (y)-Richtung von $y = 0$ an durchläuft.

Durchläuft der Pol P′ alle Punkte der (x y)-Ebene, so ist in der Polarflächengleichung (19) $z' = 0$ zu setzen; x' und y' können jeden beliebigen Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Setzt man daher für x' den Parameter n und für y' den Parameter m, so erhält man als Gleichung der quadratischen Polarflächen in Bezug auf alle Punkte der (x y)-Ebene

$$s x^2 - s y^2 - n z^2 - 2 s^2 x + 2 n s x - 2 m s y - n s^2 = 0$$

Für variable Parameter n und m stellt diese Gleichung ein Netz von Flächen 2. Grades dar. Analog liessen sich die Gleichungen zweier weiterer Netze von Flächen aufstellen, wenn man den Pol P′ die (x z)-, bezüglich die (y z)-Ebene, durchlaufen lässt.

Wir gehen nun über zur Bestimmung der zweiten Polarfläche der Hauptschnittfläche 3. Grades, bezogen auf einen festen Pol $P'(x'\,y'\,z')$; sie ist eine Fläche 1. Grades, also eine Ebene. Wählen wir den Pol P′ im Nullpunkt, so liegt er auf der Hauptschnittfläche und die Polarebene fällt mit der Tangentialebene in ihm zusammen; sie hat die Gleichung $x = 0$. Aus dem gleichen Grunde hat der Flächenpunkt F im Abstand $x = s$ vom Nullpunkt die Polarebene $x = s$.

Allgemein hat die zweite Polarfläche einer Fläche folgende Gleichung:

$$\triangle^2 f = 0 \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} x'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &+ 2 x' y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 x' z' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2 x' w' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial w} \\ &+ y'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2 y' z' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2 y' w' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial w} + z'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &+ 2 z' w' \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z} + w'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 0 \end{aligned}$$

Nach der homogenen Flächengleichung

$$f(x\,y\,z\,w) = x\,z^2 - s\,x^2\,w + s\,y^2\,w + s^2\,x\,w^2 = 0 \quad \text{wird nun}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2 - 2\,s\,x\,w + s^2\,w^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,s\,y\,w$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2\,x\,z \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = -s\,x^2 + s\,y^2 + 2\,s^2\,x\,w$$

und hieraus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,s \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,s \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 2\,z \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial w} = 2\,s\,y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 2\,s^2\,x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial w} = -2\,s\,x + 2\,s^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\,x$$

Demnach wird die Gleichung der Polarebene des Punktes $P'\,(x'\,y'\,z')$:

$$(s^2 + z'^2 - 2\,s\,x')\,x + 2\,s\,y'\,y + 2\,x'\,z' \cdot z + s\,(y'^2 - x'^2 + 2\,s\,x') = 0 \quad (23)$$

Nun soll der Pol P' die (x)-Achse durchlaufen, x' also alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen; wir ersetzen daher x' durch den variabeln Parameter n und $y' = z'$ durch 0. Dann geht die Polarebenengleichung (23) über in

$$x = \frac{n^2 - 2\,s\,n}{s - 2\,n}$$

Diese Gleichung stellt eine Schar von unendlich vielen Polarebenen dar, den unendlich vielen Punkten der (x)-Achse entsprechend; sie sind alle parallel zur (y z)-Ebene, und ihr Abstand von derselben kann alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Durchläuft der Pol P' die (y)-Achse, so ist für $x' = z' = 0$ und $y' = n$ zu setzen. Die Polarebenengleichung geht dann über in

$$s\,x + 2\,n\,y + n^2 = 0.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung n als variabeln Parameter, so stellt sie eine Schar von unendlich vielen den Punkten der (y)-Achse entsprechenden Polarebenen dar, die alle auf der (x y)-Ebene senkrecht stehen. In ihrer Gesamtheit hüllen sie einen Cylinder ein, dessen Erzeugende senkrecht auf der (x y)-Ebene stehen und dessen Gleichung man erhält durch Bestimmung der Enveloppe aller Geraden, die bei variablem n durch die Gleichung $s x + 2 n y + n^2 = 0$ gegeben sind.

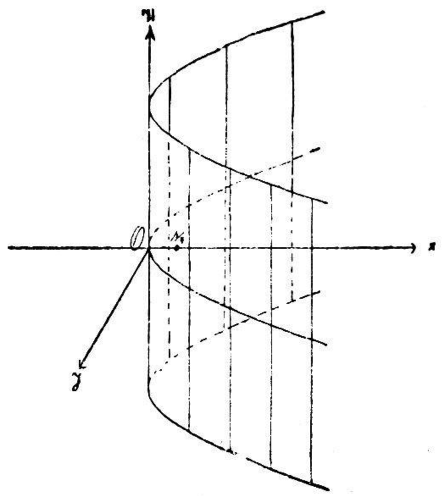

Fig. 19.

Eliminiert man aus den beiden Gleichungen $F(x y n) = s x + 2 n y + n^2 = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial n} = y + n = 0$ den Parameter n, so erhält man als Gleichung der Enveloppe die Parabelgleichung $y^2 = s x$. Der umhüllte Cylinder ist also ein parabolischer. Seine Achse wird gebildet durch die positive (x)-Achse; die Scheitelerzeugende fällt zusammen mit der (z)-Achse des Koordinatensystems. Der Halbparameter der Schnittparabel in der (x y)-Ebene ist $\frac{p}{2} = \frac{s}{2}$ (S. Fig. 19).

Schliesslich durchlaufe der Pol P′ noch die (z)-Achse; wir haben dann in der Polarebenengleichung $x' = y' = 0$ und $z' = n$ zu setzen und sie geht über in:

$$s^2 x + n^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0$$

d. h. sämtliche Polarebenen der Hauptschnittfläche, bezogen auf einen beliebigen Punkt der (z)-Achse, fallen zusammen und zwar in der (y z)-Ebene des Koordinatensystems. Dieses Resultat lässt sich auch daraus schliessen, dass die (z)-Achse selber in der Hauptschnittfläche liegt und die (y z)-Ebene in jedem Punkte der (z)-Achse Tangentialebene der Hauptschnittfläche ist.

§ 14.

Die Hessiana der Hauptschnittfläche 3. Grades.

Unter der Hessiana oder Kernfläche einer gegebenen Fläche versteht man den geometrischen Ort aller Punkte im Raum, deren quadratische Polarfläche ein Kegel ist, oder, was dasselbe ist, den geometrischen Ort der Doppelpunkte ihrer ersten Polarflächen. Für unsere Hauptschnittfläche 3. Grades ist nun die quadratische Polarfläche identisch mit der ersten Polarfläche, und nach § 13 können wir bereits schliessen, dass die Hessiana der Hauptschnittfläche sowohl die (z)-Achse als auch die (y)-Achse des Koordinatensystems enthalten wird; denn die quadratischen Polarflächen in Bezug auf die Punkte der (z)-Achse sind ja Kegel, deren Scheitel auf der (z)-Achse selber liegen, und diejenigen in Bezug auf die Punkte der (y)-Achse sind hyperbolische Cylinder oder Kegel, deren Scheitel im Unendlichen liegen.

Die Hessiana oder Kernfläche hat allgemein folgende Gleichung:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0$$

wo die f_{ik} die zweiten Ableitungen der homogenen Flächengleichung $f(x\,y\,z\,w) = 0$ bedeuten und Seite 181 bereits berechnet sind. Setzen wir die dort gefundenen Werte in obiger Determinante ein, so geht sie über in:

$$H = \begin{vmatrix} -2s & 0 & 2z & -2sx + 2s^2 \\ 0 & 2s & 0 & 2sy \\ 2z & 0 & 2x & 0 \\ -2sx + 2s^2 & 2sy & 0 & 2s^2x \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man sie in ihre Unterdeterminanten zerlegt,

$$H = -2s \begin{vmatrix} 2s & 0 & 2sy \\ 0 & 2x & 0 \\ 2sy & 0 & 2s^2x \end{vmatrix} + 2z \begin{vmatrix} 0 & 2s & 2sy \\ 2z & 0 & 0 \\ -2sx + 2s^2 & 2sy & 2s^2x \end{vmatrix}$$

$$+ (2sx - 2s^2) \begin{vmatrix} 0 & 2s & 0 \\ 2z & 0 & 2x \\ -2sx + 2s^2 & 2sy & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet

$$H = y^2 z^2 - s x^3 + s x y^2 - s x z^2 + s^2 x^2 - s^3 x = 0 \qquad (24)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Fläche 4. Grades ist die Hessiana der Hauptschnittfläche 3. Grades. Da die Koordinaten y und z nur quadratisch in obiger Gleichung enthalten sind, so liegt die Hessiana sowohl zur (x z)-Ebene als auch zur (x y)-Ebene symmetrisch. Weil ferner einerseits die Koordinaten $x = y = 0$, andererseits auch $x = z = 0$, der Gleichung (24) für jedes z, bezüglich y, genügen, so enthält wirklich die Fläche die (z)- und die (y)-Achse des Koordinatensystems.

Um die Gleichung des Asymptotenkegels der Hesse'schen Fläche zu finden, machen wir die Gleichung (24) mit w homogen und setzen nachher $w = 0$; dann geht sie über in $y^2 z^2 = 0$; diese Gleichung stellt einen Kegel 4. Grades dar, welcher die unendlich ferne Ebene in derselben Kurve schneidet, wie die Hessiana, nämlich in der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der (x z)-Ebene und in der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der (x y)-Ebene.

Wir bestimmen ferner die Schnittkurve der Hessiana mit der (x y)-Ebene des Koordinatensystems. Nach Gleichung (24) wird deren Gleichung:

$$x^3 - x y^2 - s x^2 + s^2 x = 0$$

Sie zerfällt in zwei, nämlich in

(a) $\qquad x = 0 \quad [(y) = \text{Achse}]$

(b) $\qquad$ und $x^2 - y^2 - s x + s^2 = 0 \quad$ [Hyperbel]

Die Hesse'sche Fläche schneidet also die (x y)-Ebene in der unendlich fernen Geraden, der (y)-Achse des Koordinatensystems und in einer gleichseitigen Hyperbel. Der Mittelpunkt derselben hat die Koordinaten $x = \frac{s}{2}$ und $y = 0$; die Hyperbelgleichung (b) geht daher durch die Substitution $x = x' + \frac{s}{2}$ und $y = y'$ über in die Achsengleichung

$$y'^2 - x'^2 = \frac{3}{4} s^2 \qquad (c)$$

Die Halbachse der Hyperbel ist $a = \frac{s}{2}\sqrt{3}$, also kleiner als s aber grösser als $\frac{s}{2}$. Die reelle Hyperbelachse liegt in der Richtung der (y)-Achse. Die Achsenabschnitte der Hyperbel auf der (y)-Achse sind nach Gleichung (b) $y = \pm s$. (S. Fig. 20).

In der (x z)-Ebene des Koordinatensystems erzeugt die Hessiana eine Schnittkurve von folgender Gleichung:

$$x^3 + x z^2 - s x^2 + s^2 x = 0$$

Diese zerfällt in $\quad x = 0 \qquad$ (d)

und $\quad x^2 + z^2 - s x + s^2 = 0 \qquad$ (e)

Die Gleichung (d) stellt die (z)-Achse des Koordinatensystems

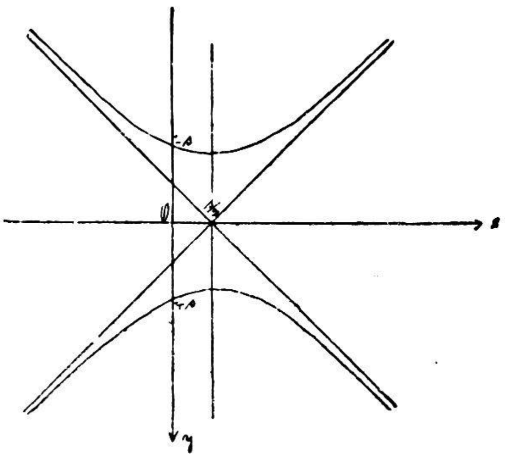

Fig. 20.

dar, die Gleichung (e) dagegen einen imaginären Kreis, dessen Centrum auf der (x)-Achse im Abstand $x = \frac{s}{2}$ vom Koordinatenursprung liegt und dessen imaginärer Radius absolut gleich lang ist wie die Halbachse der obigen Schnitthyperbel in der (x y)-Ebene. Der reelle Schnitt der Hessiana mit der (x z)-Ebene besteht also aus zwei Geraden, der (z)-Achse des Koordinatensystems und der unendlich fernen Geraden.

Wenn wir auch noch die Schnittkurve der Hesse'schen Fläche mit der (y z)-Ebene bestimmen, so finden wir die Gleichung $y = 0$ und $z = 0$, je doppelt. Also sind die Koordinatenachsen z und y Doppelgeraden der Hessiana.

Um den Schnitt der Hesse'schen Fläche mit der Hauptschnittfläche 3. Grades zu bestimmen, eliminieren wir aus den Gleichungen (11) und (24) die Koordinate y, und wir erhalten so die Gleichung des auf die (x z)-Ebene projizierenden Cylinders der Schnittlinie, nämlich $x = 0$ und $z^2 = - s^2$. Die erste dieser

Gleichungen stellt die (y z)-Ebene dar, die andere zwei zu der (x y)-Ebene parallele, imaginäre Ebenen, welche also keine reellen Schnittkurven liefern. Da nun die Schnittlinie der (y z)-Ebene mit der Fläche 3. Grades aus der doppelt gelegten (z)-Achse besteht, so finden wir, dass sich die Hessiana und die Hauptschnittfläche in einer Doppelgeraden, der (z)-Achse des Koordinatensystems, schneiden, und dies ist der Ort der parabolischen Punkte der Hauptschnittfläche.