

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1910)  
**Heft:** 1740-1769

**Artikel:** Über die Kiepertsche Parabel  
**Autor:** Neuberg, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319214>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

J. Neuberg (Lüttich).

(Eingereicht den 20. März 1910.)

## Über die Kiepertsche Parabel.

1. Eine Transversale  $t$  treffe die Seiten  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$ ,  $A_1A_2$  des Dreiecks  $A_1A_2A_3$  in den Punkten  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ . Aus diesen als Zentren mit den Halbmessern  $B_1A_1$ ,  $B_2A_2$ ,  $B_3A_3$  beschreibe man drei Kreise  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ . Letztere schneiden sich in denselben zwei Punkten  $P$ ,  $P'$  oder gehören zu einem Kreisbüschel  $W$ , wenn  $t$  eine Tangente der dem Dreiecke eingeschriebenen Parabel ist, welche die Apollonische Zentrale berührt (Kiepertsche Parabel).

Dieser hübsche Satz, den ich neu glaube, ist kürzlich von Herrn O. Schenker<sup>1)</sup> bewiesen worden. Eine bekannte Lage von  $t$  ist die Apollonische Zentrale;  $P$ ,  $P'$  sind alsdann die sogenannten *isodynamischen Punkte*. Nimmt man für  $t$  die Dreieckseite  $A_2A_3$ , so wird  $B_2 = A_3$ ,  $B_3 = A_2$ ; die Kreise  $U_2$ ,  $U_3$  haben denselben Radius  $A_2A_3$  und schneiden sich in den Scheiteln  $C_1$ ,  $C_1'$  der über  $A_2A_3$  als Basis errichteten gleichseitigen Dreiecke; für  $B_1$  muss man den Schnittpunkt  $D_1$  der Seite  $A_2A_3$  mit der Mittelsenkrechten der Strecke  $A_1C_1$  nehmen.  $D_1$  ist offenbar der Berührungs punkt der Seite  $A_2A_3$  mit der Kiepertschen Parabel. Ähnlicherweise findet man die Berührungs punkte  $D_2$ ,  $D_3$  der Dreieckseiten  $A_3A_1$ ,  $A_1A_2$ ; wie bekannt treffen sich die Geraden  $A_1D_1$ ,  $A_2D_2$ ,  $A_3D_3$  auf der Steinerschen Umellipse im Steinerschen Punkte.

Die Büschel  $W$  könnten wohl noch andere interessante Eigenschaften haben. Ich gebe hier einen Beitrag, in der Hoffnung weitere Untersuchungen oder auch Vereinfachungen der analytischen Behandlung anzuregen.

<sup>1)</sup> *Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel* (Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1908).

2. In baryzentrischen Koordinaten<sup>1)</sup>  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  lauten die Gleichungen des Umkreises  $U$ , der unendlichfernen Geraden  $L$ , eines beliebigen Kreises und der Transversale  $t$ :<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} U &\equiv \alpha_1^2 \mu_2 \mu_3 + \alpha_2^2 \mu_3 \mu_1 + \alpha_3^2 \mu_1 \mu_2 = 0, \\ L &\equiv \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0, \\ U - L(p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + p_3 \mu_3) &= 0, \\ t &\equiv \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3 = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  bezeichnen die Längen  $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$ ;  $p_1, p_2, p_3$  sind die Potenzen der Ecken  $A_1, A_2, A_3$  in bezug auf den Kreis (1).

Es seien jetzt  $V_{12}, V_{13}$  die zwei durch  $A_1$  gehende Kreise, deren Zentren  $A_2$  und  $A_3$  sind; ihre Gleichungen ergeben sich sofort aus (1), da respektiv

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \quad p_2 = -\alpha_3^2, \quad p_3 = \overline{A_3 A_2}^2 - \overline{A_2 A_1}^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2; \\ p_1 &= 0, \quad p_2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2, \quad p_3 = -\alpha_2^2. \end{aligned}$$

Mithin kann man schreiben

$$V_{12} \equiv U - LL_{12}, \quad V_{13} \equiv U - LL_{13}, \quad (2)$$

wo  $L_{12} \equiv -\alpha_3^2 \mu_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \mu_3, L_{13} \equiv (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \mu_2 - \alpha_2^2 \mu_3$ .

$L_{12} = 0, L_{13} = 0$  sind die Gleichungen der Radikalaxen der Kreispaare  $UV_{12}, UV_{13}$ .

Die Kreise  $V_{12}, V_{13}, U_1$  gehören zu einem Büschel  $W_1$ , dessen Grundpunkte die Ecke  $A_1$  und deren Spiegelbild  $A_1'$  zu  $A_2 A_3$  sind. Die Gleichung irgend eines Kreises des Büschels  $W_1$  ist

$$m V_{12} - n V_{13} = 0;$$

das Zentrum dieses Kreises teilt die Strecke  $A_2 A_3$  nach dem Verhältnisse  $n : m$ . Für den Kreis  $U_1$  ist also

$$n : m = B_1 A_2 : B_1 A_3 = \lambda_2 : \lambda_3.$$

Hieraus schliesst man die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} U_1 &\equiv \lambda_3 V_{12} - \lambda_2 V_{13} = 0, \\ U_2 &\equiv \lambda_1 V_{23} - \lambda_3 V_{21} = 0, \\ U_3 &\equiv \lambda_2 V_{31} - \lambda_1 V_{32} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Im Nachtrage gebe ich Aufklärungen über die Beweismittel, die noch nicht ganz klassisch geworden sind.

<sup>2)</sup> Dasselbe Symbol bezeichnet eine Linie und das erste Glied ihrer Gleichung.

<sup>3)</sup> Die Symbole  $W_2, W_3, V_{23} \dots, L_{23} \dots$  bedürfen keiner besonderen Erklärung.

Die Elimination der veränderlichen Grössen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  gibt für den Ort der Punkte  $P, P'$ :

$$V_{12} V_{23} V_{31} = V_{21} V_{32} V_{13}. \quad (4)$$

*Mithin ist das Produkt der Potenzen eines Punktes dieses Ortes in bezug auf die Kreise  $V_{12}, V_{23}, V_{31}$  gleich dem Produkte seiner Potenzen in bezug auf die Kreise  $V_{21}, V_{32}, V_{13}$ .*

Die Gleichung (4) ist vom 6. Grade in  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ ; jedoch kann man einen Faktor  $L^3$  ausscheiden. Nach Einsetzen der Werte  $V_{rs} = U - LL_{rs}$  bekommt man

$$-AU^2L + BUL^2 - CL^3 = 0; \quad (5)$$

wo A, B, C die Aggregate

$$\begin{aligned} & L_{12} + L_{23} + L_{31} - L_{21} - L_{32} - L_{13}, \\ & L_{12}L_{23} + L_{23}L_{31} + L_{31}L_{12} - L_{21}L_{32} - L_{32}L_{13} - L_{13}L_{21}, \\ & L_{12}L_{23}L_{31} - L_{21}L_{32}L_{13} \end{aligned}$$

bezeichnen. Um diese zu berechnen, schreibe man

$$L_{12} = \alpha_1^2 \mu_3 - \alpha_3^2 (\mu_2 + \mu_3) = \alpha_1^2 \mu_3 + \alpha_3^2 \mu_1 - \alpha_3^2 L, \text{ usw.}$$

und setze

$$\alpha_2^2 \mu_3 + \alpha_3^2 \mu_2 = l_1, \quad \alpha_3^2 \mu_1 + \alpha_1^2 \mu_3 = l_2, \quad \alpha_1^2 \mu_2 + \alpha_2^2 \mu_1 = l_3,$$

so dass

$$\begin{aligned} L_{12} &= l_2 - \alpha_3^2 L, \quad L_{23} = l_3 - \alpha_1^2 L, \quad L_{31} = l_1 - \alpha_2^2 L, \\ L_{21} &= l_1 - \alpha_3^2 L, \quad L_{32} = l_2 - \alpha_1^2 L, \quad L_{13} = l_3 - \alpha_2^2 L; \end{aligned}$$

dann bekommt man<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad B = L \Sigma (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) l_1, \\ C &= -L^2 \Sigma \alpha_1^2 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) l_1 - L \Sigma (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) l_2 l_3. \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\begin{aligned} \Sigma (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) l_1 &= D, \quad \Sigma \alpha_1^2 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) l_1 = E, \\ \Sigma (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) l_2 l_3 &= F, \end{aligned}$$

so reduziert sich (5) nach Unterdrückung des Faktors  $L^3$  zu

$$DU + L(LE + F) = 0. \quad (6)$$

Der eigentliche Ort der Punkte  $P_1 P'$  ist also eine zyklische Kurve 3. Ordnung.

<sup>1)</sup> Das Zeichen  $\Sigma$  deutet hier ein Aggregat von drei Gliedern an, die sich aus den ersten, welches hinter diesem Zeichen steht, durch zweimaliges Vorrücken der Indices ableiten.

Die Gleichungen  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 0$ ,  $l_3 = 0$  stellen die Tangenten in  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  an den Umkreis dar.  $D = 0$  ist die Gleichung der Eulerschen Gerade, die das Umzentrum  $M$ , den Schwerpunkt  $S$  und das Orthozentrum  $H$  enthält. Denn für den Punkt  $S$  hat man  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ , folglich

$$l_1 : l_2 : l_3 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2 : \alpha_3^2 + \alpha_1^2 : \alpha_1^2 + \alpha_2^2$$

und letztere Summen sind eine Lösung von  $D = 0$ ; eine andere Lösung ist  $l_1 = l_2 = l_3$  und aus dieser folgert man

$$\frac{\mu_1}{\alpha_1^2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2)} = \frac{\mu_2}{\alpha_2^2(\alpha_3^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2)} = \frac{\mu_3}{\alpha_3^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2)} \quad (7)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \sin 2 A_1 : \sin 2 A_2 : \sin 2 A_3$$

und auf den Punkt  $M$  hinweist. Aus (6) erhellt, dass  $MH$  eine asymptotische Richtung der Kurve ist.

Eine weitere Rechnung gibt

$$\begin{aligned} E &= \Sigma \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) \mu_1, \\ l_2 l_3 &= \alpha_2^2 \alpha_3^2 \mu_1^2 + \alpha_1^2 \Sigma \alpha_1^2 \mu_2 \mu_3, \text{ usw.}, \\ F &= \Sigma \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \mu_1^2, \\ LE + F &= \Sigma \mu_1 \cdot \Sigma \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) \mu_1 + \Sigma \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \mu_1^2 \\ &= \Sigma \alpha_1^2 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) (\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2) \mu_2 \mu_3. \end{aligned}$$

Die Gleichung  $LE + F = 0$  stellt einen Kegelschnitt dar, der durch die Ecken  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , den Mittelpunkt  $M$  und den Lemoineschen Punkt  $K$  geht; man sieht letztere Eigenschaften, indem man  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  durch die Nenner der Brüche (7) oder durch  $\alpha_1^2$ ,  $\alpha_2^2$ ,  $\alpha_3^2$  ersetzt.<sup>2)</sup>

3. Um die Umhüllungskurve der Transversale  $t$  zu finden, schreibe ich die Gleichungen (3) in folgender Form:

<sup>1)</sup> Um diese Proportionen zu finden, kann man das System  $l_1 = l_2 = l_3$  durch folgendes ersetzen, wo  $K$  eine Hilfsgrösse ist:

$$\frac{\mu_2}{\alpha_2^2} + \frac{\mu_3}{\alpha_3^2} = K \alpha_1^2, \quad \frac{\mu_3}{\alpha_3^2} + \frac{\mu_1}{\alpha_1^2} = K \alpha_2^2, \dots$$

<sup>2)</sup> Ein anderer merkwürdiger Punkt dieses Kegelschnittes ist der Seitengegenpunkt des Orthozentrums  $H$ , mit den Koordinaten

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2, \quad \alpha_3^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2.$$

$$\frac{U_1}{\lambda_3 - \lambda_2} \equiv U - L \frac{\lambda_3 L_{12} - \lambda_2 L_{13}}{\lambda_3 - \lambda_2} \equiv U - LM_1 = 0, \text{ usw.}$$

$M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0$  sind die Gleichungen der Radikalachsen der Kreispaare  $UU_1, UU_2, UU_3; M_1 - M_2 = 0, M_1 - M_3 = 0$ , die der Kreispaare  $U_1 U_2, U_1 U_3$ . Sollen die zwei letzten Axen zusammenfallen in eine Gerade  $i$ , so müssen die drei Geraden  $M_1, M_2, M_3$  sich in einem Punkte  $I$  der Geraden  $i$  treffen. Jedoch ist diese Bedingung nicht hinreichend, wenn man für  $t$  einen beliebigen Durchmesser des Umkreises nimmt.

Der Punkt  $I$  genügt den drei Gleichungen

$$\lambda_3 L_{12} - \lambda_2 L_{13} = 0, \lambda_1 L_{23} - \lambda_3 L_{21} = 0, \lambda_2 L_{31} - \lambda_1 L_{13} = 0.$$

Die Elimination der veränderlichen Größen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  gibt für den Ort des Punktes  $I$

$$L_{12} L_{23} L_{31} - L_{13} L_{21} L_{31} = 0,$$

oder nach dem obigen

$$C \equiv L(L E + F) = 0;$$

dieser Ort besteht also aus der unendlich fernen Geraden, welche den Durchmessern des Umkreises als Transversale  $t$  entspricht, und dem Kegelschnitt  $A_1 A_2 A_3 OK$ .

4. Ordnet man die Gleichungen  $M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = 0$  nach  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , so bekommt man

$$\begin{aligned} [(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_2 + \alpha_3^2 \lambda_3] \mu_2 &= [\alpha_2^2 \lambda_2 - (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \lambda_3] \mu_3, \\ [(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \lambda_3 + \alpha_1^2 \lambda_1] \mu_3 &= [\alpha_3^2 \lambda_3 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_1] \mu_1, \\ [(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2] \mu_1 &= [\alpha_1^2 \lambda_1 - (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \lambda_2] \mu_2. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  erhält man für die Gleichung der Enveloppe von  $t$  in Linienkoordinaten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$\begin{aligned} 2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ + \Sigma (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_1 \lambda_2 [\alpha_1^2 \lambda_1 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2) \\ + \alpha_2^2 \lambda_2 (\alpha_3^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2)] = 0. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\Sigma \alpha_1^2 \lambda_1 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2) \equiv G$$

und entwickelt  $(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)$ , so wird diese Gleichung

$$\begin{aligned} -2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \Sigma \alpha_1^4 (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \\ + \Sigma (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_1 \lambda_2 [G - \alpha_3^2 \lambda_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2)] = 0, \end{aligned}$$

oder einfach

$$G \Sigma (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

Die Gleichung  $G = 0$  drückt aus, dass  $t$  durch den Punkt  $M$  geht. Die eigentliche Lösung des Problems ist

$$\Sigma (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_1 \lambda_2 = 0; \quad (8)$$

sie wird befriedigt durch  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  und durch  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$

$= \frac{1}{\alpha_1^2} : \frac{1}{\alpha_2^2} : \frac{1}{\alpha_3^2}$ . Hieraus schliesst man, dass die gesuchte Kurve die Seiten des Grunddreiecks, die Gerade  $L$  und die Apollonische Zentrale berührt; sie ist also die Kiepertsche Parabel.

5. Die Radikalaxe  $i$  der Kreise  $U_1, U_2$  hat zur Gleichung

$$\frac{\lambda_3 L_{12} - \lambda_2 L_{13}}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{\lambda_1 L_{23} - \lambda_3 L_{21}}{\lambda_3 - \lambda_1}, \quad (9)$$

unter der Bedingung (8). Aus dieser folgt

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= - \frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \lambda_1 \lambda_2}{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \lambda_2 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \lambda_1}, \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= \lambda_2 \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) (\lambda_2 - \lambda_1)}{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \lambda_2 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \lambda_1}, \\ \lambda_3 - \lambda_1 &= - \lambda_1 \frac{(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) (\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \lambda_2 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) \lambda_1}. \end{aligned}$$

Führt man diese Werte in (8) ein und unterdrückt gemeinschaftliche Faktoren, so bleibt eine Gleichung von der Form

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 0,$$

in welcher  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  lineare Funktionen von  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  darstellen. Mithin geht die Gerade  $i$  durch einen festen Punkt. Dieser ist offenbar der Mittelpunkt  $M$  des Kreises  $U$ , da den Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  und der Apollonischen Zentrale die Mittelsenkrechten der Seiten und ein Durchmesser von  $U$  entsprechen.

6. Die obigen Ergebnisse können auch synthetisch aufgestellt werden.

Man wähle beliebig das Zentrum  $B_1$  des Kreises  $U_1$ . Nach einem bekannten Satze geht die Radikalaxe von  $U_1$  und irgend eines Kreises des Büschels  $W_2$  durch einen festen Punkt  $J_2$  der Axe  $A_2 A'_2$  dieses Büschels. Ebenso geht auch die Radikalaxe von  $U$

und irgend eines Kreises des Büschels  $W_3$  durch einen festen Punkt  $J_3$  von  $A_3 A'_3$ . Hieraus folgt, dass die Schnittpunkte  $P, P'$  des Kreises  $U_1$  und der Geraden  $J_2 J_3$  konzyklisch sind mit  $A_2, A'_2$  und auch mit  $A_3, A'_3$ . Damit haben wir drei Kreise  $U_1, U_2, U_3$  der Büschel  $W_1, W_2, W_3$ , welche zwei gemeinsame Punkte  $P, P'$  besitzen.

Einem Punkte  $B_1$  von  $A_2 A_3$  entspricht nach dem Vorigen ein einziger Punkt  $J_2$  auf  $A_2 A'_2$  und ein einziger Punkt  $J_3$  auf  $A_3 A'_3$ . Umgekehrt entspricht einem Punkte  $J_2$  von  $A_2 A'_2$  ein einziger Punkt  $B_1$  von  $A_2 A_3$  und folglich auch ein einziger Punkt  $J_3$  von  $A_3 A'_3$ ; denn der Kreis  $U_1$  ist bestimmt durch zwei gegebene Punkte  $A_1, A'_1$  und durch die Bedingung, dass seine Potenz in bezug auf  $J_2$  gleich  $J_2 A_2 \cdot J_2 A'_2$  ist.

Hieraus fliesst, dass die Punkte  $J_2, J_3$  zwei projektive Reihen erzeugen, die sogar perspektiv sind. Denn man kann für  $t$  die unendlichferne Gerade  $L$  wählen; die Kreise  $U_1, U_2, U_3$ , deren Zentren die unendlichfernen Punkte der Seiten  $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$  sind, bestehen jetzt aus den Geradenpaaren  $(L, A_1 A'_1), (L, A_2 A'_2), (L, A_3 A'_3)$ , so dass  $H$  als gemeinschaftlicher Punkt einen der Punkte  $P$  ersetzt, während der andere  $P'$  im Unendlichen liegt; man wird sehen, dass die Gerade  $PP'$  jetzt mit  $HM$  zusammenfällt.

Die Geraden  $J_2 J_3$  (oder  $PP'$ ) bilden also einen Strahlbüschel. Da die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks besondere Lagen von  $J_2 J_3$  sind, ist  $M$  der Scheitel dieses Büschels.

Dieser Büschel ist auch projektiv zur Punktreihe  $[B_1]$ , und die Zentrale  $B_1 B_2 B_3$  der Kreise  $U_1, U_2, U_3$  steht senkrecht zum entsprechenden Strahle  $PP'$  des Büschels  $[M]$ . Mithin umhüllt  $t$  einen Kegelschnitt. Da aber  $L, A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$  und die Apollonische Zentrale besondere Lagen von  $t$  sind, ist dieser Kegelschnitt die Kiepertsche Parabel.

Auf jedem Durchmesser des Umkreises liegen zwei Punkte  $P, P'$ ; aber  $M$  selbst ist ein Punkt  $P$ . Denn die Zentren der Kreise  $A_1 A'_1 M, A_2 A'_2 M, A_3 A'_3 M$  sind die Schnittpunkte von  $A_2 A_3, A_3 A_1$  und  $A_1 A_2$  mit den Mittelsenkrechten der Radien  $MA_1, MA_2, MA_3$  und liegen auf einer Geraden.<sup>1)</sup> Folglich ist der Ort der Punkte  $P, P'$  von der dritten Ordnung.

<sup>1)</sup> Es sei  $K_1 K_2 K_3$  das Dreieck, welches die in  $A_1, A_2, A_3$  den Umkreis berührenden Geraden bilden. Die Mittelsenkrechten der Strecken  $MA_1, MA_2, MA_3$  und liegen auf einer Geraden.

### Nachtrag.

1. Ist ein veränderlicher Punkt  $P$  auf ein Grunddreieck  $A_1 A_2 A_3$  bezogen, so nenne ich *absolute Normalkoordinaten* von  $P$  seine Abstände von den Dreieckseiten, mit gehörigen Vorzeichen, und einfach *Normalkoordinaten* drei zu diesen Abständen proportionale Zahlen  $x_1, x_2, x_3$ .

Ich nenne *baryzentrische Koordinaten* des Punktes  $P$  drei zu den Dreiecksflächen  $PA_1 A_3, PA_3 A_1, PA_1 A_2$  proportionale Zahlen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ ; diese Flächen sind der bekannten Zeichenregel unterworfen und man hat

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = x_1 : x_2 : x_3.$$

Die *absoluten baryzentrischen Koordinaten* von  $P$  sind die Quotienten

$$PA_2 A_3 : A_1 A_2 A_3, PA_3 A_1 : A_1 A_2 A_3, PA_1 A_2 : A_1 A_2 A_3,$$

deren Summe = 1.

Die Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Ecktransversalen  $A_1 P, A_2 P, A_3 P$  seien  $P_1, P_2, P_3$ ; dann hat man

$$\frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} = \frac{\mu_3}{\mu_2}, \quad \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (1)$$

Hieraus schliesst man, dass  $P$  der Schwerpunkt von drei in  $A_1, A_2, A_3$  angebrachte Massen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  ist, jedoch muss man negative Massen zulassen.

Nimmt man für  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  drei Zahlen, deren Summe = 0, so bestimmen die Proportionen (1) auf den Dreiecksseiten drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  von der Art, dass die Geraden  $A_1 P_1, A_2 P_2, A_3 P_3$  parallel sind. Man sagt, dass solche Zahlen einen im Unendlichen in der

---

$MA_2, MA_3$  sind die Seiten eines zu  $A_1 A_2 A_3$  perspektiven Dreiecks, dessen Scheitel die Zentren  $N_1, N_2, N_3$  der den Vierecken  $MA_2 K_1 A_3, MA_3 K_2 A_1, MA_1 K_3 A_2$  umgeschriebenen Kreise sind. Die Ecktransversalen  $A_1 N_1, A_2 N_2, A_3 N_3$  schneiden sich im Winkelgegenpunkte des Mittelpunktes des Feuerbachschen Kreises.

Diesen Satz habe ich in *Mathesis*, 1884, Seite 164 vorgelegt; zwei Beweise davon befinden sich in *Mathesis*, 1886, S. 164 und 165.

Die Mittelsenkrechten der Strecken  $MA'_1, MA'_2, MA'_3$  bilden auch ein zu  $A_1 A_2 A_3$  perspektives Dreieck, das wahrscheinlich merkwürdige Eigenschaften besitzt.

Richtung  $A_1 P_1$  liegenden Punkt bestimmen und dass die Gleichung  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$  die unendlichferne Gerade darstellt.

Der Übergang von kartesischen zu absoluten baryzentrischen Koordinaten geschieht durch die Formeln

$$x = \sum \mu_1 x_1, \quad y = \sum \mu_1 y_1, \quad 1 = \sum \mu_1, \quad (2)$$

wo  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  die kartesischen Koordinaten der Ecken  $A_1, A_2, A_3$  bedeuten.

2. Ich beziehe den Umkreis auf zwei rechtwinklige Durchmesser  $MX, MY$ . Die Potenz  $p$  eines Punktes  $P(x, y)$  in bezug auf diesen Kreis ist

$$p = x^2 + y^2 - R^2,$$

oder nach den Formeln (2)

$$\begin{aligned} p &= \sum \mu_1 x_1^2 + \sum \mu_1 y_1^2 - R^2 \sum \mu_1 \\ &= \sum \mu_1^2 (x_1^2 + y_1^2 - R^2) + \sum \mu_1 \mu_2 (2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - 2R^2). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von  $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2$  sind null, da der Kreis die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  enthält; der Koeffizient von  $\mu_1 \mu_2$  ist

$$\begin{aligned} &(2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - 2R^2) - (x_1^2 + y_1^2 - R^2) - (x_2^2 + y_2^2 - R^2) \\ &= -(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = -a_3^2. \end{aligned}$$

Folglich hat man

$$p = -a_1^2 \mu_2 \mu_3 - a_2^2 \mu_3 \mu_1 - a_3^2 \mu_1 \mu_2,$$

und die Gleichung des Umkreises  $A_1, A_2, A_3$  ist

$$U \equiv a_1^2 \mu_2 \mu_3 + a_2^2 \mu_3 \mu_1 + a_3^2 \mu_1 \mu_2 = 0$$

3. Die kartesische Gleichung eines andern Kreises  $V$  ist

$$x^2 + y^2 - R^2 + fx + gy + h = 0,$$

und das erste Glied, wenn man die Koordinaten  $x, y$  eines beliebigen Punktes  $P$  einsetzt, ist gleich der Potenz  $p$  von  $P$ .

Vermittels der Formeln (2) geht  $x^2 + y^2 - R^2$  über in  $-U$  und  $fx + gy + h$  in eine lineare Funktion  $p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + p_3 \mu_3$ ; folglich kann man schreiben

$$p = -U + \sum \mu_1 \sum p_1 \mu_1, \quad (3)$$

und die Gleichung des Kreises  $V$  ist

$$V \equiv \sum U - L \sum p_1 \mu_1 = 0.$$

Die absoluten Koordinaten der Ecken  $A_1, A_2, A_3$  sind  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ ; setzt man sie in (3) ein, so findet man für  $p$  die Werte  $p_1, p_2, p_3$ . Diese sind also die Potenzen der Ecken in bezug auf  $V$ .

4. Es seien in kartesischen Koordinaten

$$V_1 \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0,$$

$$V_2 \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \gamma_2 = 0,$$

$$V \equiv m V_1 - m V_2 = 0,$$

die Gleichungen von drei Kreisen, welche zu einem Büschel gehören. Dann ist  $V$  der Ort der Punkte, deren Potenzen in den Kreisen  $V_1, V_2$  ein konstantes Verhältnis  $m:n$  haben. Die Zentren der drei Kreise  $V_1, V_2, V$  haben die Koordinaten

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \left( \frac{n\alpha_1 - m\alpha_2}{n-m}, \frac{n\beta_1 - m\beta_2}{n-m} \right)$$

Mithin teilt auch das Zentrum von  $V$  die Zentrale der Kreise  $V_1, V_2$  nach demselben Verhältnisse  $m:n$ .

Dieser Schluss findet auch statt bei den Gleichungen in baryzentrischen Koordinaten:

$$V_1 \equiv \Sigma U - LL_1 = 0, \quad V_2 \equiv \Sigma U - LL_2 = 0, \\ V \equiv m V_1 - m V_2 = 0;$$

wo  $L_1, L_2$  lineare Funktionen von  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  bedeuten.

5. Es seien jetzt  $W_1, W_2, W_3$  drei Kreisbüschel, welche nicht zwei zu zwei zu einem Kreisnetz gehören; die drei Zentralen bilden ein Dreieck  $A_1 A_2 A_3$ . Man bezeichne mit

$V_{12}, V_{13}$  die Kreise des Büschels  $W_1$  mit den Zentren  $A_2, A_3$ ;

$V_{21}, V_{23}$  » » » »  $W_2$  » » »  $A_1, A_3$ ;

$V_{31}, V_{32}$  » » » »  $W_3$  » » »  $A_1, A_2$ .

Betrachtet man drei Kreise  $U_1, U_2, U_3$  aus den Büscheln  $W_1, W_2, W_3$ , welche zwei gemeinsame Punkte  $P, P'$  besitzen, so hat der Ort dieser Punkte  $P, P'$  noch zur Gleichung

$$V_{12} V_{21} V_{31} = V_{13} V_{21} V_{32}.$$

Es wäre interessant, diese allgemeine Frage näher zu erforschen.

Lüttich, September 1909.

---

Erklärung. Als Herr Schenker meine Aufmerksamkeit auf seine oben zitierte Abhandlung zog mit der Anfrage, ob seine Untersuchungen neu seien, habe ich obige Entwicklungen ausgearbeitet, um die Resultate auf einem andern Wege zu bestätigen.

Diese Arbeit erscheint jetzt in den Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft gleichsam als Fortsetzung der Schenkerschen Resultate, wofür ich der Gesellschaft meinen aufrichtigen Dank ausspreche.

Später entdeckte ich, dass ich selbst in meinem *Mémoire sur le Tétraèdre* (Mémoires in 8° de l'Ac. de Belgique, 1884—85) die Kiepertsche Parabel mit den Schenkerschen Kreisen behandelt hatte; aber diese ersten Untersuchungen ergaben sich als Zusätze aus allgemeinen Theorien.

Seither habe ich das Studium der Schenkerschen Kreise durch andere Methoden wieder aufgenommen und zwei Artikel darüber in den *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (Okt. 1909 und Januar 1910) unter dem Titel *Sur la parabole de Kiepert* veröffentlicht.

Herrn Schenker waren im Jahre 1908 meine Untersuchungen von 1884 natürlich ganz unbekannt.

Lüttich, Februar 1911.

---