Die Verfolgungskurven einer Geraden.

Einleitung.

Bewegt sich ein Punkt A (x', y') mit einer bestimmten, gleichförmigen Geschwindigkeit v auf einer durch die Gleichung $f(x', y') = 0$ (1) dargestellten Kurve, und bewegt sich ein zweiter Punkt B (x, y) von einer gegebenen Anfangslage an mit einer andern gleichförmigen Geschwindigkeit u derart, dass er in jedem Augenblicke seinen Weg nach dem ersten Punkte A hinlenkt, d. h. so, dass er sich immer geradlinig gegen A hinbewegt, so beschreibt der 2te Punkt B eine Bahn von der Gleichung $f(x, y) = 0$, die Verfolgungskurve genannt wird. Die Kurve heisst auch, von dem Beispiel des auf seinen Herrn zueilenden Hundes, Hundekurve, bei französischen Geometern courbe du chien oder courbe de poursuite. Da man diese Kurve auch erhalten würde, wenn der Punkt B sich so bewegt, dass er immer in der Richtung von A nach B entflieht, so ist auch mit der gleichen Berechtigung der Name Fluchtkurve oder Fliehkurve in Gebrauch. Je nach dem Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten v und u der beiden Punkte A und B gestaltet sich auch die Form der zu den verschiedenen Grundkurven von A gehörenden Verfolgungskurven.

Das Problem der Verfolgungskurven wurde auf Leonardo da Vinci zurückgeführt, indem S. Günther eine Stelle in dem Werke des grossen italienischen Malers in dieser Weise auslegte; unabhängig von ihm begegnete diesen Kurven Bourguer und andere; aber von denen, die der Ansicht von O. Terquem sich anschliessen, wird dieses Verdienst Dubois-Aymé, der im Anfange des 19. Jahrhunderts Zolldirektor in Foligno (Prov. Perugia) war, zugewiesen. [1]) Es sei hierorts ein in einer Ab-

[1]) Vergleiche Gino-Loria: Ebene Kurven (Leipzig 1902).

handlung in «La Correspondance sur l'Ecole Polytéchnique 1814» angeführtes Zitat wiedergegeben: [1])

«Un ancien élève, directeur des douanes à Fuligno, département de Trasimène (M. Dubois-Aymé) se promenait sur le bord de la mer: il aperçut à quelque distance une personne de sa connaissance, et se mit à courir pour l'atteindre. Son chien, qui s'était écarté, courut vers lui en décrivant une courbe dont l'empreinte resta sur le sable. M. Dubois, revenant sur ses pas, fut frappé de la régularité de cette courbe, et il en chercha l'équation en supposant, 1° que le chien se dirigeait toujours vers le lieu que le maître venait de quitter; 2° que le maître parcourait une ligne droite; 3° que les vitesses du maître et du chien étaient uniformes.»

Jedenfalls steht fest, dass das Problem erst in dem Jahrzehnt von 1800—1810 untersucht und teilweise gelöst worden ist.

Was die Anwendungen der Verfolgungskurven anbetrifft, so können diese nicht hohen praktischen Wert beanspruchen, immerhin verdienen die mannigfaltigen Formen und Eigenschaften dieser Kurvenart das Interesse des Mathematikers und dies umso mehr, da solche Kurven tagtäglich beobachtet werden können. Bewegt sich z. B., um einen einfachen Fall herauszugreifen, ein Mensch auf einer geraden Strasse vorwärts und ein anderer, der seitwärts vom Wege sich befindet, geht immer gerade auf ihn zu, so beschreibt der letztere eine Verfolgungskurve, deren Form je nach dem Verhältnis der beiden gleichförmigen Geschwindigkeiten der beiden Gehenden eine andere ist. Auch in der Taktik kommt diese Kurve vor und zwar auf eine Art, die der vorhin erwähnten ganz gleich ist. Wenn nämlich z. B. zwei Züge mit Abstand hinter einander marschieren, und der zweite Zug soll während des Marsches links aufmarschieren, so beschreibt der rechte Flügelmann des zweiten Zuges, der immer auf den fortschreitenden linken Flügelmann des ersten Zuges seine Richtung nimmt, eine Kurve von der Form, welche denjenigen, in der nachfolgenden Behandlung unter Fall II $v < u$ angeführten Kurven, verwandt ist, weil der Mann schneller gehen muss, als der linke Flügelmann des ersten Zuges. Da alle

---

[1]) Nouvelles Annales de Math. VIII. 1849, 94.

übrigen Personen des zweiten Zuges mit dem rechten Flügelmann desselben Zuges parallel gehen, so beschreiben auch sie die gleichen Kurven. Ueberhaupt findet das eben Gesagte bei allen Aufmärschen statt, die während des Marsches geschehen. Es sei hier auch noch erwähnt, dass die alte Regel, nach welcher ein Kaperschiff beständig auf das verfolgte Schiff hingesteuert wird, auf das Problem der Verfolgungskurven führt.

Hauptteil.

Ableitung der Integralgleichung der Verfolgungskurven einer Geraden.

Wie das Problem der Verfolgungskurven gelöst wird, ersieht man, wenn man beachtet, dass in jedem Punkte der Bahnlinie des Punktes B die Tangente durch den Punkt A in der zugehörigen Lage hindurchgehen muss; infolgedessen haben wir zunächst die Relation[1])

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x) \tag{2}$$

denn der Punkt A hat die Koordinaten x', y' und B die laufenden Koordinaten x und y. Ist ferner n das Verhältnis der Geschwindigkeiten der beiden betrachteten gleichförmigen Bewegungen, so ist das Bogendifferential des einen Punktes gleich n mal dem Bogendifferential des andern Punktes, also

$$\sqrt{dx'^2 + dy'^2} = n\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2} = n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,. \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (1): $f(x', y')$ und (2) sowie ihren Ableitungen ergeben sich x', y', $\frac{dx'}{dx}$, $\frac{dy'}{dx}$ als Funktionen von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Werden diese Werte in (3) eingesetzt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \tag{4}$$

und damit ist die Untersuchung der Verfolgungskurve der Kurve

[1]) Vergleiche Gino-Loria: Ebene Kurven.

(1) auf die Integration dieser Differentialgleichung (4) zurückgeführt.

Die Integration ist vollständig ausführbar, wenn die Bahn des Punktes A eine Gerade ist, und diese Bedingung, dass A sich auf einer geradlinigen Bahn bewege, soll den sämtlichen nachfolgenden Untersuchungen zu Grunde gelegt sein. Wir lassen nun zwei verschiedene Ableitungen der Integralgleichung für die Verfolgungskurven einer Geraden folgen.

1.

Die Bahn des Punktes A wählen wir als y-Achse; dann werden die Gleichungen (1) und (2)

$$x' = 0, \qquad y' = y - x \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Wir bilden die Ableitungen und erhalten

$$\frac{dx'}{dx} = 0, \quad \frac{dy'}{dx} = -x \cdot \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Setzt man diese Werte für $\frac{dx'}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx}$ in der Gleichung (3) ein, so wird sie

$$-x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = n \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{5}$$

Um diese Gleichung zu integrieren, gibt es keinen bessern Weg, als zu dem klassischen Verfahren seine Zuflucht zu nehmen, indem man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt. Dann folgt

$$-x\frac{dp}{dx} = n \cdot \sqrt{1+p^2}$$

$$n \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Durch Integration erhält man

$$\log x^n = \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)^{-1} = \log\left(\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}\right) - \log c$$

d. f. $$e^{\log x^n + \log c} = e^{\log c \cdot x^n} = e^{\log \frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}},$$

oder wenn man zu den Numeri übergeht, wird die Gleichung

$$c \cdot x^n = \frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}}; \qquad \text{d. f.}$$

$$p + \sqrt{1+p^2} = c^{-1} x^{-n} \quad (6) \qquad \text{und } p - \sqrt{1+p^2} = -c \cdot x^n. \quad (7)$$

Addiert man die beiden Gleichungen (6) und (7), so folgt

$$2p = c^{-1} x^{-n} - c \cdot x^n.$$

Für p seinen Wert gesetzt, gibt

$$2\,dy = c^{-1} x^{-n} dx - c \cdot x^n \cdot dx;$$

wenn integriert und die neu hinzukommende Integrationskonstante aus zwei sich entsprechenden Lagen der Punkte A und B bestimmt wird, so erhält man die beiden Gleichungen

$$2(y - y_0) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-n}}{c \cdot (1-n)} - \dfrac{c \cdot x^{n+1}}{n+1}; & \text{wenn } n \lesseqgtr 1 \\ \dfrac{1}{c} \cdot \log x - \dfrac{c \cdot x^2}{2}; & \text{wenn } n = 1 \end{cases}, \quad (8)$$

und dies sind die Gleichungen der Verfolgungskurven der Geraden, je nachdem die Punkte A und B sich mit ungleicher oder gleicher Geschwindigkeit bewegen; im letztern Falle ist die Kurve transcendent, im erstern algebraisch oder interscendent, je nachdem n rational oder nicht; ist insbesondere n eine ganze Zahl, so haben wir eine parabolische Kurve vor uns.

Wenn die Bahn des Punktes A ein Kreis wäre, so würde die des Punktes B eine Integralkurve der Gleichung

$$\frac{\omega}{b} \cdot \frac{\left[1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = 1 - \frac{x + y \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{a^2\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] - \left[y - x \cdot \dfrac{dy}{dx}\right]^2}} \quad (9)$$

sein, wo ω die Winkelgeschwindigkeit von A, b die Geschwindigkeit von B, und a der Radius des gegebenen Kreises ist[1]); diese Differentialgleichung ist jedoch noch nicht integriert worden.

2.[2])

Wir gehen zu einer zweiten Ableitung der Integralgleichung über, an welche sämtliche nachfolgenden Betrachtungen

[1]) Vgl. von Keelhoff in Mathésis VI.

[2]) Vgl. Seminar-Vorträge des Herrn Prof. Dr. G. Huber in Bern vom S.-S. 1906.

geknüpft sein sollen. Dabei wählen wir, im Gegensatze zur vorigen Ableitung, die Gerade, auf welcher sich der Punkt A bewegt, als x-Achse.

Es sei (Fig. 1) CC′ ein Teil des Weges des Punktes B. Der Punkt A hat die gleichförmige Geschwindigkeit v und B die von u. Sind P und Q zwei gleichzeitige, also sich entsprechende Lagen der beiden bewegten Punkte A und B, so muss stets die Bewegungsrichtung in P gegen Q gerichtet sein, d. h. die Gerade PQ muss stets Tangente sein an die Verfolgungskurve. Zu einer bestimmten Zeit muss sich der Punkt B senkrecht gegen die x-Achse, die Bahn von A, bewegen, also muss die Kurve eine zur x-Achse senkrechte Tangente besitzen, und diese wählen wir in unserer Ableitung als y-Achse. Ihr Berührührungspunkt D und der Koordinatenanfangspunkt O sind dann zwei sich entsprechende Lagen der bewegten Punkte. Wir rechnen die Zeit von dem Augenblicke an, indem sich B in D, also A in O befindet. Nach der Zeit t, von diesem Augenblicke an, befindet sich der Punkt B in P. Der von ihm durchlaufene Weg in dieser Zeit ist dann

$$\text{arc DP} = s = t \cdot u,$$

woraus folgt

$$t = \frac{s}{u}. \tag{10}$$

Nach der gleichen Zeit t befindet sich der Punkt A in Q und es ist der von ihm durchlaufene Weg $OQ = t \cdot v$, woraus folgt

$$t = \frac{OQ}{v}. \tag{11}$$

Weil die Zeit in beiden Fällen die gleiche ist, so sind die beiden Ausdrücke für t der Gleichungen (10) und (11) einander gleich, also

$$\frac{s}{u} = \frac{OQ}{v}. \tag{12}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P seien x, y und der Winkel, den die Tangente PQ mit dem positiven Ast der x-Achse bildet sei τ, dann ist

$$OQ = OS + SQ = x + \frac{y}{\operatorname{tg}(180 - \tau)} = x - \frac{y}{\operatorname{tg}\tau}.$$

Nun ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau$, also $\frac{1}{\operatorname{tg} \tau} = \frac{dx}{dy}$, also wird $OQ = x - y \cdot \frac{dx}{dy}$.
Setzen wir diesen Wert in der Gleichung (12) ein, so erhält man

$$\frac{s}{u} = \frac{1}{v} \cdot \left(x - y \cdot \frac{dx}{dy} \right), \qquad \text{oder}$$

$$\frac{v}{u} \cdot s = x - y \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten der Punkte A und B, also $\frac{v}{u} = k$, dann ist

$$k \cdot s = x - y \cdot \frac{dx}{dy}. \qquad (13)$$

Der Bogen $s = DP$, den der Punkt P in der Zeit t durchlaufen hat, ist eine Funktion der Koordinaten x, y seines Endpunktes P und zwar ist

$$ds = dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \qquad \text{oder}$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2. \qquad (14)$$

Wir differentieren Gleichung (13) nach y und erhalten

$$k \cdot \frac{ds}{dy} = -y \cdot \frac{d^2x}{dy^2}.$$

Quadriert, gibt

$k^2 \cdot \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = y^2 \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2$. Wert für $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2$ aus Gl. (14) eingesetzt, ergibt

$$k^2 + k^2 \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = y^2 \cdot \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2, \qquad (15)$$

und dies ist die Differentialgleichung der Verfolgungskurve einer Geraden; sie ist von der zweiten Ordnung und vom zweiten Grade. Um sie zu integrieren, setzen wir $\frac{dx}{dy} = p$, also $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{dp}{dy}$ und erhalten aus Gl. (15)

$$k^2 + k^2 \cdot p^2 = y^2 \left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

beiderseits radiziert, liefert

$$k \cdot \sqrt{1+p^2} = y \cdot \frac{dp}{dy}, \qquad \text{oder}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k \cdot \frac{dy}{y}.$$

Die Gleichung integriert, gibt

$$\log\,\text{nat.}\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \log\,\text{nat.}\, y^k + c,$$

$$p + \sqrt{1+p^2} = C \cdot y^k. \tag{16}$$

Um die Integrationskonstante C zu bestimmen, beachten wir, dass die Punkte 0 ($x = o$, $y = 0$) und D ($x = 0$, $y = a$) zwei entsprechende Lagen der bewegten Punkte A und B darstellen. Es muss dabei für den Kurvenpunkt D ($x = 0$, $y = a$) die Differentialgleichung (16) der Kurve erfüllt sein. Die Tangente im Punkte D steht auf der x-Achse senkrecht, also ist für diesen Fall $\tau = 90^0$, somit

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} 90^0 = \infty,$$

also ist $$\frac{dx}{dy} = p = 0.$$

Setzt man diese Werte in der Gl. (16) ein, so erhält man

$$1 = C \cdot a^k, \text{ d. f. } C = \frac{1}{a^k} = a^{-k}.$$

Wert für C in Gl. (16) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+p^2} &= a^{-k} y^k - p \\
1 + p^2 &= a^{-2k} y^{2k} - 2a^{-k} y^k \cdot p + p^2 \\
a^{-2k} y^{2k} &= 1 + 2a^{-k} \cdot p \cdot y^k \,|\cdot a^{2k} \\
y^{2k} &= a^{2k} + 2a^k \cdot p \cdot y^k \\
y^{2k} - a^{2k} &= 2a^k \cdot p \cdot y^k.
\end{aligned}$$

Die ganze Gleichung durch y^k dividiert und $p = \frac{dx}{dy}$ gesetzt, liefert

$$y^k - a^{2k} y^{-k} = 2a^k \cdot \frac{dx}{dy}. \tag{17}$$

Mit dy multipliziert und integriert, gibt

$$\frac{y^{k+1}}{k+1} - a^{2k}\frac{y^{-k+1}}{-k+1} = 2a^k x + C. \tag{18}$$

Um die Integrationskonstante zu bestimmen, verfahren wir auf gleiche Weise, wie vorhin. Die Gleichung (18) muss erfüllt sein für den Kurvenpunkt D, also für die Koordinaten $x = 0$, $y = a$. Dies ergibt

$$\frac{a^{k+1}}{k+1} - a^{2k}\frac{a^{1-k}}{1-k} = C, \qquad \text{oder}$$

$$C = \frac{a^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{1-k} = a^{1+k} \cdot \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{1-k}\right) = -\frac{2k \cdot a^{k+1}}{1-k^2}.$$

Setzt man diesen gefundenen Wert für C in Gleichung (18) ein, so erhält man

$$\frac{y^{k+1}}{k+1} - a^{2k}\frac{y^{1-k}}{1-k} = 2a^k x - \frac{2k \cdot a^{k+1}}{1-k^2}.$$

Schafft man schliesslich noch die Brüche weg, so wird die Gleichung (19)

$$(1-k)\,y^{1+k} - (1+k)\,a^{2k} \cdot y^{1-k} - 2 \cdot (1-k^2)\,a^k \cdot x + 2k\,a^{1+k} = 0,$$

oder auf x aufgelöst

$$x = \frac{y^{1+k}}{2(1+k)\,a^k} - \frac{a^k \cdot y^{1-k}}{2(1-k)} + \frac{k \cdot a}{(1-k^2)}, \text{ für } k \lessgtr 1. \tag{20}$$

Sind die beiden Geschwindigkeiten v und u der beiden Punkte A und B gleich gross, ist also $k = 1$, so muss die Integration der Differentialgleichung (17) besonders ausgeführt werden, und man erhält

$$\frac{y^2}{2} - a^2 \cdot \log\text{nat.}\, y = 2ax + C.$$

Für $x = 0$ wird $y = a$, also

$$C = \frac{a^2}{2} - a^2 \log a.$$

Wert für C eingesetzt, gibt

$$\frac{y^2}{2} - a^2 \log y = 2ax + \frac{a^2}{2} - a^2 \log a$$

$$y^2 - 2a^2 \log\text{nat.}\, \frac{y}{a} - 4ax - a^2 = 0 \tag{21}$$

oder auf x aufgelöst

$$x = \frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2} \cdot \log\text{nat.}\, \frac{y}{a} - \frac{a}{4}, \text{ für } k = 1. \tag{22}$$

Die Gleichungen (19) bis (22) stellen also die Gleichungen der Verfolgungskurven der drei möglichen Fälle $k \gtreqless 1$ in rechtwinkligen Koordinaten dar. Ist $k = \frac{v}{u}$ eine von 1 verschiedene ganze Zahl, oder ein rationaler Bruch, so stellt die Gleichung (19) oder (20) eine algebraische Kurve dar. Ist das Verhältnis eine irrationale Zahl, so heisst die Kurve interscendent. Ist endlich $v = u$, also $k = 1$, so stellt die Gleichung eine transcendente, speziell eine logarithmische Kurve dar

Um die Gleichung (20) für $k \lessgtr 1$ in eine symmetrische Form zu bringen, verschieben wir die y-Achse parallel um den Betrag $\frac{k}{1-k^2}a$ und erhalten die Gleichung der Kurve in der einfachern Form

$$x = \frac{y^{1+k}}{2(1+k)a^k} - \frac{a^k y^{1-k}}{2(1-k)}. \tag{23}$$

Und diese symmetrische Gleichung soll allen Untersuchungen der beiden Hauptfälle $k > 1$ und $k < 1$ zu Grunde gelegt sein. Die Verschiebung der y-Achse wird im Falle $k > 1$ eine nach links, im Falle $k < 1$ eine nach rechts gerichtete sein.

Anschliessend wollen wir für diese beiden Fälle für ein ganzzahliges k den unendlich fernen Punkt näher untersuchen. Zu diesem Zwecke schaffen wir in Gleichung (23) die Brüche weg und bekommen

$$(1-k)y^{1+k} - a^{2k}(1+k)y^{1-k} - 2(1-k^2)a^k x = 0 \tag{23 a}$$

Im Falle $k > 1$ würde im 2. Gliede der Exponent von y negativ. Um dies zu verhüten, multiplizieren wir Gl. (23a) mit y^{k-1} und bekommen

$$(1-k)y^{2k} - a^{2k}(1+k) - 2(1-k^2)a^k y^{k-1} x = 0.$$

Wir bestimmen in dieser Gleichung die Asymptotenrichtungen indem wir die Glieder höchsten Grades gleich Null setzen und erhalten $y^{2k} = 0$ also $y = 0$, die 2 kfache x-Achse, d. h. die $g\infty$ (unendlich ferne Gerade) schneidet unsere Kurve in der Richtung der x-Achse in 2 k zusammenfallenden Punkten. Wir projizieren den $P\infty$ (unendlich fernen Punkt) in den Nullpunkt, bezw. die $g\infty$ auf die y-Achse, d. h. wir transformieren unsere Gleichung nach den Formeln

$$y = \frac{1}{x'}, \; y = \frac{y'}{x'}$$

und erhalten

$$(1-k)\,\frac{y'^{2k}}{x'^{2k}} - a^{2k}(1+k) - 2\,(1-k^2)\,a^k\,\frac{y'^{k-1}}{x'^{k-1}} \cdot \frac{1}{x'} = 0.$$

Mit x'^{2k} multipliziert, liefert

$$(1-k)\,y'^{2k} - a^{2k}(1+k)\,x'^{2k} - 2\,(1-k^2)\,a^k \cdot y'^{k-1} x^k = 0.$$

Die transformierte Gleichung beginnt mit einem Gliede $(2k-1)$ten Grades; der Nullpunkt ist somit ein $(2k-1)$ facher Punkt der Kurve, und wir erhalten die Tangenten in ihm, indem wir $-2\,(1-k^2)\,a^k y'^{k-1} x'^k = 0$ setzen. Hieraus folgt $y'^{k-1} = 0$, also $y' = 0$, die $(k-1)$ fache x'-Achse und $x'^k = 0$, also $x' = 0$, die k-fache y'-Achse, oder zurücktransformiert $y = \frac{y'}{x'} = 0$, die $(k-1)$ fache x-Achse und $x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{0} = \infty$, die k-fache $g\infty$. Die Kurve hat somit im unendlich fernen $(2k-1)$ fachen Punkte $(2k-1)$ reelle Tangenten, von denen k mit der $g\,\infty$ und $(k-1)$ mit der x-Achse zusammenfallen.

Unsere Kurve ist, wenn k eine ganze Zahl, von der $2\,k$ten Ordnung und kann demnach $\frac{(2k-1)(2k-2)}{2}$ Doppelpunkte besitzen. Ihr unendlich ferner $(2k-1)$facher Punkt ist aber äquivalent $\frac{(2k-1)(2k-2)}{2}$ Doppelpunkten. Die Kurve erreicht somit in ihrem $P\,\infty$ die Maximalzahl an Doppelpunkten. Alle Kurven für ein ganzzahliges $k > 1$ sind somit rational und unikursal. Die Parameterdarstellung unserer Kurven lautet

$$y = \lambda a, \; x = \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{\lambda^{1+k}}{1+k} - \frac{\lambda^{1-k}}{1-k}\right], \tag{24}$$

worin λ ein variabler Parameter bedeutet. Wir differentieren die Gleichungen (24) und erhalten

$$dy = a \cdot d\lambda; \;\; dx = \frac{a}{2}\,[\lambda^k - \lambda^{-k}] \cdot d\lambda;$$

ferner ist das Bogendifferential

$$ds = dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a \cdot d\lambda \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{a}{2}(\lambda^k - \lambda^{-k})\, d\lambda}{a \cdot d\lambda}\right]^2}$$

$$= a \cdot d\lambda \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda^{2k} - 1}{2\lambda^k}\right)^2} = a \cdot d\,\lambda \frac{\sqrt{4\lambda^{2k} + \lambda^{4k} - 2\lambda^{2k} + 1}}{2\lambda^k}$$

$$= \frac{a \cdot (\lambda^{2k} + 1)}{2\lambda^k} \cdot d\lambda = \frac{a}{2}(\lambda^k + \lambda^{-k})\, d.\lambda$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir übergehen zur Rektifikation, Quadratur etc. unserer Kurve für die beiden Hauptfälle $k \gtrless 1$.

Rektifikation: Bezeichnet man die Länge des Kurvenbogens mit s, so folgt

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ds = \frac{a}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\lambda^k + \lambda^{-k})\, d\lambda = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{1+k}}{1+k} + \frac{\lambda^{1-k}}{1-k}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}, \tag{25}$$

wo λ_1 und λ_2 hier, wie bei allen folgenden Grenzeinsätzen, gleiches Vorzeichen haben müssen.

Quadratur: Wir bezeichnen das Flächenstück begrenzt von Bogen, x-Achse und zwei Ordinaten mit F_x und dasjenige, begrenzt von Bogen, y-Achse und 2 Abscissen mit F_y und erhalten

$$F_x = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx = \frac{a^2}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [\lambda^{k+1} - \lambda^{1-k}]\, d\lambda$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\lambda^{2+k}}{2+k} - \frac{\lambda^{2-k}}{2-k}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \tag{26}$$

$$F_y = \int_{y_1}^{y_2} x \cdot dy = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{1+k}}{1+k} - \frac{\lambda^{1-k}}{1-k}\right] a \cdot d\lambda$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left[\frac{\lambda^{2+k}}{(1+k)(2+k)} - \frac{\lambda^{2-k}}{(1-k)(2-k)}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tag{27}$$

Die Integration muss für den Fall $k = 2$ hier, wie bei der folgenden Komplanation besonders ausgeführt werden und liefert als letztes Glied den natürlichen Logarithmus.

Komplanation: Rotiert der Kurvenbogen um die x-Achse, so beschreibt er eine Oberfläche vom Flächeninhalt

$$O_x = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y \cdot ds = \pi a^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [\lambda^{1+k} + \lambda^{1-k}] \cdot d\lambda$$

$$= \pi a^2 \left[\frac{\lambda^{2+k}}{2+k} + \frac{\lambda^{2-k}}{2-k}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \tag{28}$$

Rotiert der Bogen dagegen um die y-Achse, so beschreibt er die Oberfläche

$$O_y = 2\pi \cdot \int_{y_1}^{\lambda_2} x \cdot ds = 2\pi \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{1+k}}{1+k} - \frac{\lambda^{1-k}}{1-k}\right] \cdot \frac{a}{2}\left[\lambda^k\right.$$

$$\left. + \lambda^{-k}\right] d\lambda = \frac{\pi a^2}{2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{\lambda^{1+2k}}{1+k} - \frac{\lambda}{1-k} + \frac{\lambda}{1+k} - \frac{\lambda^{1-2k}}{1-k}\right] d\lambda$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left[\frac{\lambda^{2+2k}}{(1+k)(2+2k)} - \frac{\lambda^2}{2(1-k)} + \frac{\lambda^2}{2(1+k)} - \frac{\lambda^{2-2k}}{(1-k)(2-2k)}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\cdot\left[\frac{(1-k)^2\lambda^{2(1+k)} - (1-k)(1+k)^2\lambda^2 + (1+k)(1-k)^2\lambda^2 - (1+k)^2\lambda^{2(1-k)}}{(1-k)^2(1+k)^2}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4(1-k^2)^2}\left[(1-k)^2\lambda^{2(1+k)} - \lambda^2 \cdot \{(1-k)(1+k)^2\right.$$

$$\left. - (1+k)(1-k)^2\} - (1+k)^2\lambda^{2(1-k)}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4(1-k^2)^2}\left[(1-k)^2\lambda^{2(1+k)} - 2k(1-k^2)\lambda^2\right.$$

$$\left. - (1+k)^2\lambda^{2(1-k)}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}. \tag{29}$$

Kubatur: Der durch Rotation der Fläche F_x bez. F_y entstehende Körper habe das Volumen V_x bez. V_y; dann ist

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \cdot dx = \frac{a^3 \pi}{2} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\lambda^{2+k} - \lambda^{2-k})\, d\lambda$$

$$= \frac{a^3 \pi}{2} \left[\frac{\lambda^{3+k}}{3+k} - \frac{\lambda^{3-k}}{3-k} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} . \qquad (30)$$

$$V_y = \int_{y_1}^{y_2} x^2 \pi\, dy = \pi \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{a^2}{4} \left(\frac{\lambda^{2(1+k)}}{(1+k)^2} - \frac{2}{1-k^2} \lambda^2 + \frac{\lambda^{2(1-k)}}{(1-k)^2} \right] \cdot d\lambda$$

$$= \frac{a^3 \pi}{4} \cdot \left[\frac{\lambda^{3+2k}}{(1+k)^2 (3+2k)} - \frac{2}{3(1-k^2)} \lambda^3 + \frac{\lambda^{3-2k}}{(1-k)^2 (3-2k)} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

$$= \frac{a^3 \pi}{4} \cdot \left[\frac{3 \cdot (1-k)^2 (3-2k) \lambda^{3+2k} - 2(1-k^2)(9-4k^2)\lambda^3 + 3(1+k)^2 (3+2k) \lambda^{3-2k}}{3 \cdot (1+k)^2 (3+2k)(3-2k)(1-k)^2} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

$$= \frac{a^3 \pi}{12 (1-k^2)^2 (9-4k^2)} \Big[3(1-k)^2 (3-2k) \lambda^{3+2k} - 2(1-k^2)(9-4k^2)\lambda^3 + 3(1+k)^2 \cdot (3+2k) \lambda^{3-2k} \Big]_{\lambda_1}^{\lambda_2} . \qquad (31)$$

Rektifikation, Quadratur etc. des III. Hauptfalles $k = 1$ sollen erst später angeführt werden.

Es sei nun hier schon eine Fundamentaleigenschaft unserer Kurven angeführt. Klügel's «Wörterbuch der Mathematik», Leipzig 1831, bezeichnet als Verfolgungslinien allgemein Kurven, bei denen der Bogen zu der Differenz von Subtangente und Abscisse ein gegebenes konstantes Verhältnis bildet. Dass diese Eigenschaft für unsere Kurve gilt, lässt sich sofort sehr einfach beweisen. Dabei setzen wir, wie es die analytische Geometrie zu tun pflegt, das Gesuchte voraus. Für unsere in Fig. 1 dargestellte Kurve gelte also die Bedingungsgleichung

Bogen = Konstante. {Subtangente — Abscisse} oder $s = \frac{1}{k} (S_t - x)$. Es ist allgemein die Subtangente einer Kurve dargestellt durch den Ausdruck $y \cdot \frac{dx}{dy}$, also ist

$$s = \frac{1}{k} \cdot \left(y \cdot \frac{dx}{dy} - x\right), \tag{32}$$

oder

$$s = \frac{1}{k} \cdot y \cdot \frac{dx}{dy} - \frac{1}{k} \cdot x.$$

Differentiert man diesen Ausdruck nach x, so erhält man

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{k} \cdot y \cdot \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx} + \frac{dx}{dy} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \cdot y \, \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx},$$

oder $ds = \frac{y}{k} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right)$. Allgemein ist nun das Bogendifferential $ds = dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Setzt man die beiden für ds gefundenen Werte einander gleich, so erhält man

$$\frac{y}{k} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right) = dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

oder

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}. \tag{33}$$

Der variable Faktor auf der rechten Seite hat die Form $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ und gibt integriert log nat $\{z + \sqrt{1+z^2}\}$; also liefert die Integration der Gleichung (33)

$$\log y = \frac{1}{k} \cdot \log \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right\} + \log C,$$

somit

$$y = C \cdot \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{k}}. \tag{34}$$

In Fig. 1 ist aber für $\frac{dx}{dy} = 0$ $y = a$, also folgt $C = a$, deshalb wird aus Gleichung (34)

$$y = a \cdot \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{k}}, \qquad \text{oder}$$

$$y^k = a^k \cdot \left\{ \frac{dx}{dy} + \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right\} = a^k \frac{dx}{dy} + a^k \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

oder
$$y^k - a^k \cdot \frac{dx}{dy} = a^k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Wir quadrieren diese Gleichung und erhalten

$$y^{2k} - 2 \cdot y^k a^k \frac{dx}{dy} + a^{2k} \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = a^{2k} + a^{2k} \left(\frac{dx}{dy}\right)^2;$$

daraus folgt

$$dx = \frac{y^{2k} - a^{2k}}{2 a^k y^k} \cdot dy = \frac{dy}{2} \left(\frac{y^k}{a^k} - \frac{a^k}{y^k} \right). \tag{35}$$

Diese Gleichung integriert, gibt

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{a^{-k} \cdot y^{1+k}}{1+k} - \frac{a^k \cdot y^{1-k}}{1-k} \right\} + C.$$

Für $x = 0$ ist aber $y = a$; also wird

$$C = \frac{k \cdot a}{1 - k^2}.$$

Setzt man den gefundenen Wert für C in der obigen Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{a^{-k} \cdot y^{1+k}}{2 \cdot (1+k)} - \frac{a^k \cdot y^{1-k}}{2(1-k)} + \frac{k \cdot a}{(1 - k^2)} \quad \text{für } k \gtrless 1. \tag{36}$$

Ist $k = 1$, so folgt durch Integration der Gleichung (35)

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{y^2}{2} - a \cdot \log y \right) + C = \frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2} \cdot \log y + C.$$

Ist $x = 0$, so wird $y = a$, und wir erhalten

$$C = \frac{a}{2} \log a - \frac{a}{4}.$$

Diesen Wert in der obigen Gleichung eingesetzt, gibt

$$x = \frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2} \log y + \frac{a}{2} \log a - \frac{a}{4} \qquad \text{oder}$$

$$x = \frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2} \log \frac{y}{a} - \frac{a}{4} \quad \text{für } k = 1. \tag{37}$$

Die Gleichungen (36) und (37) stimmen aber vollständig mit den Gleichungen (20) und (22), den Gleichungen der Verfolgungskurven einer Geraden, überein, und wir können sagen:

Bei den Verfolgungskurven einer Geraden ist das Verhältnis des Bogens zur Differenz von Subtangente und Abscisse konstant und gleich dem reziproken Geschwindigkeitsverhältnis der beiden bewegten Punkte A und B. Da ferner nach der Gleichung $s = \frac{1}{k}\left(y \cdot \frac{dx}{dy} - x\right)$ für unsere Kurven mit Leichtigkeit der Bogen s bestimmt werden kann, so darf man mit Recht die Verfolgungskurven der Geraden als Kurven bezeichnen, die mit Hilfe ihrer Subtangente rektifiziert werden können. Wir wollen nun im Folgenden die drei verschiedenen Hauptfälle der Verfolgungskurven der Geraden einer eingehenden Diskussion unterwerfen.

I. Hauptfall $k > 1$.

Die Geschwindigkeit des verfolgten Punktes A ist grösser als diejenige des verfolgenden Punktes B, also $v > u$.

Die für $k \lesseqgtr 1$ geltende symmetrische Gleichung heisst

$$x = \frac{y^{1+k}}{2(1+k)a^k} - \frac{a^k y^{1-k}}{2(1-k)}.$$

Da in diesem Hauptfalle $k > 1$ ist, so musste die ursprüngliche y-Achse um $\frac{k}{1-k^2} \cdot a$ nach links verschoben werden, und die den folgenden Untersuchungen dieses Hauptfalles zu Grunde gelegte Kurvengleichung lautet

$$x = \frac{y^{k+1}}{2(k+1)a^k} + \frac{a^k}{2(k-1)y^{k-1}}. \tag{38}$$

Beim I. Hauptfall können wir drei verschiedene Unterfälle auseinanderhalten. Seien p und r zwei ungerade, ganze Zahlen und q eine gerade, ganze Zahl, und es bestehe die Bedingung $p < q < r$, dann kann k, oder das Geschwindigkeitsverhältnis der beiden bewegten Punkte A und B, die Formen annehmen 1. $k = \frac{r}{p}$, 2. $k = \frac{q}{p}$ und 3. $k = \frac{r}{q}$. Darunter sind alle möglichen Fälle enthalten; denn entweder ist k eine ganze Zahl und dann ist sie unter den beiden ersten Fällen begriffen, von denen der erste alle ungeraden, der zweite alle geraden Zahlen enthält, oder k ist ein unechter Bruch, bei dem der Nenner entweder eine gerade Zahl — dann haben wir Fall 3 —, oder eine ungerade Zahl ist, und dann enthält Fall 1. alle Brüche derart, wo der Zähler eine ungerade Zahl, Fall 2. dagegen, wo er eine gerade Zahl ist.

Unterfall 1. $k = \frac{r}{p} =$ unechter Bruch mit ungeradem Zähler und Nenner, oder ungerade, ganze Zahl.

Setzt man den Wert für k in der Gleichung (38) ein, so erhält man

$$x = \frac{y^{\frac{r+p}{p}}}{2\left(\frac{r+p}{p}\right)a^{\frac{r}{p}}} + \frac{a^{\frac{r}{p}}}{2\left(\frac{r-p}{p}\right)y^{\frac{r-p}{p}}}$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{a^{\frac{r}{p}}\, y^{\frac{r-p}{p}}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{2r}{p}}}{r+p} + \frac{a^{\frac{2r}{p}}}{r-p}\right]. \qquad (39)$$

Da nun $r - p$ immer eine gerade Zahl ist, so wird der Faktor vor der Klammer, wie auch der Ausdruck $y^{\frac{2r}{p}}$ stets positiv; folglich liefert derselbe positive und negative Wert von y nur einen positiven Wert von x, und die Kurve muss daher ihrer ganzen Ausdehnung nach symmetrisch zur x-Achse, auf der rechten Seite der y-Achse liegen. Für $y = 0$ wird $x = \infty$. Ferner ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{r+p}{p}\right)y^{\frac{r+p-p}{p}}}{2\left(\frac{r+p}{p}\right)a^{\frac{r}{p}}} + \frac{a^{\frac{r}{p}}\left(-\frac{r-p}{p}\right)}{2\left(\frac{r-p}{p}\right)y^{\frac{r-p+p}{p}}}$$

$$= \frac{p}{2}\left[\frac{y^{\frac{r}{p}}}{a^{\frac{r}{p}}} - \frac{a^{\frac{r}{p}}}{y^{\frac{r}{p}}}\right].$$

Um die der y-Achse zunächst liegenden Punkte, die Scheitel der Kurve, zu bestimmen, setzen wir diesen Ausdruck $= 0$ und erhalten

$$\frac{p}{2}\left[\frac{y^{\frac{r}{p}}}{a^{\frac{r}{p}}} - \frac{a^{\frac{r}{p}}}{y^{\frac{r}{p}}}\right] = 0, \text{ also } \frac{y^{\frac{r}{p}}}{a^{\frac{r}{p}}} = \frac{a^{\frac{r}{p}}}{y^{\frac{r}{p}}},$$

oder $y^{\frac{2r}{p}} = a^{\frac{2r}{p}}$; d. f. $y = \pm a$. Setzt man diese Werte für y in der C-Gleichung (Kurvengleichung) (39) ein, so erhält man

$$x = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{a^{r+p}}{(r+p)\, a^{\frac{r}{p}}} + \frac{a^{\frac{r}{p}}}{(r-p) \cdot a^{\frac{r-p}{p}}}\right] = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{a}{r+p} + \frac{a}{r-p}\right]$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{ar - ap + ar + ap}{r^2 - p^2}\right] = \frac{p \cdot r}{r^2 - p^2} \cdot a.$$

Ferner ist

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{\frac{r}{p} \cdot y^{\frac{r-p}{p}}}{a^{\frac{r}{p}}} - \frac{a^{\frac{r}{p}} \cdot \left(-\frac{r}{p}\right)}{y^{\frac{r+p}{p}}}\right].$$

$y = \pm a$ gesetzt, liefert

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{r}{2} \cdot \left[\pm \frac{a^{\frac{r-p}{p}}}{a^{\frac{r}{p}}} + \frac{a^{\frac{r}{p}}}{\pm a^{\frac{r+p}{p}}}\right] = \frac{r}{2} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right]$$

$= + \dfrac{r}{a} =$ pos., d. h. die Ordinaten $y = \pm a$ ergeben als Minimalwerte der Abscissen

$$x = \frac{p \cdot r}{r^2 - p^2} \cdot a = \frac{a \cdot k}{k^2 - 1}.$$

Da ferner in der C-Gleichung (39) der Exponent $\frac{2r}{p} > \frac{r-p}{p}$ ist, so liefern die Werte $y = \pm \infty$, $x = + \infty$. Die Kurve erstreckt sich somit in zwei kongruenten Ästen aus $+\infty$ durchs endliche Gebiet nach $+\infty$ zurück. Die Punkte $x = \frac{p \cdot r}{r^2 - p^2} \cdot a$, $y = \pm a$ sind Scheitelpunkte, und die Gerade $x = \frac{p \cdot r}{r^2 - p^2} \cdot a$, die ursprüngliche y-Achse, ist Scheiteltangente an die beiden Kurvenäste. Die Ordinaten $y = \pm a$ der Scheitel sind unabhängig von r und p, also auch unabhängig von k, d. h. die Scheitelpunkte aller

Spezialfälle dieses Unterfalls liegen auf den beiden Geraden $y = \pm a$.

Als Beispiel dieses Unterfalles sei der Spezialfall

$$k = 3 = \text{ungerade, ganze Zahl}$$

angeführt.

Setzt man in der Gleichung (39) $k = \frac{r}{p} = 3$, so wird die Kurvengleichung

$$x = \frac{y^4}{8a^3} + \frac{a^3}{4y^2},$$

oder

$$y^6 + 2a^6 - 8a^3y^2x = 0.$$

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie enthält das x in der 1. Potenz und stellt somit eine parabolische Kurve dar. Die Scheitel der beiden Kurvenäste liegen in den Punkten $y = \pm a$, $x = \frac{3}{8}a$ und die zugehörige Scheitel- und Doppeltangente hat die Gleichung $x = \frac{3}{8}a$ (Fig. 2). Die $g\infty$ schneidet die Kurve in der Richtung der x-Achse in 6 zusammenfallenden Punkten. Der $P\infty$ ist ein fünffacher Punkt der Kurve. Die $g\infty$ ist dreifache und die x-Achse zweifache Tangente in demselben.

Im unendlich fernen, fünffachen Punkte hat somit der eine Kurvenast einen Spitzpunkt oder Bicuspidalpunkt mit drei in der $g\infty$ zusammenfallenden Tangenten und der andere Kurvenast eine Spitze mit der x-Achse als Rückkehrtangente (Fig. 3). Unsere Kurve ist von der 6. Ordnung, nach Plücker von der 10. Klasse und besitzt 24 Doppeltangenten, die reell oder imaginär sein können. Die Kurve hat das Geschlecht 0, ist rational, und ihre Parameterdarstellung lautet nach Gleichung (24)

$$y = a\lambda, \quad x = \frac{a(\lambda^6 + 2)}{8\lambda^2}.$$

Wir bestimmen nach diesen Gleichungen einige Kurvenpunkte und erhalten:

Für $\lambda =$	± 0	0,1	0,2	0,5	1	2	2,4	2,8	∞	wird
$y =$	± 0	0,1 a	0,2 a	0,5 a	a	2 a	2,4 a	2,8 a	∞	und
$x =$	∞	24,9 a	6,2 a	1,0 a	0,4 a	2,1 a	4,2 a	7,7 a	∞ .	

(Graphische Darstellung siehe Fig. 2). Die Kurve besteht aus zwei kongruenten, parabolischen Ästen, die symmetrisch zur x-Achse, der gemeinsamen Asymptote, im I., bezw. im IV. Quadranten liegen.

Wächst der variable Parameter λ von $-\infty$ bis $+\infty$, so wandert der Schnittpunkt der Geraden $y = \lambda a$ mit der Kurve vom $+\infty$ ins endliche Gebiet, kehrt beim Punkte D' um und geht in Pfeilrichtung nach $+\infty$ (IV); von hier aus kommt er mit pos. λ zurück und geht über D wieder nach $+\infty$ (I).

Die Länge des vom Scheitel D aus gerechneten Bogens DC ist

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^4}{4} - \frac{\lambda^{-2}}{2}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \frac{a}{2}\left[\frac{16}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{33}{16}\,a = 2{,}06\,a;$$

mit der x-Achse und den zugehörigen Ordinaten bildet er eine Fläche vom Inhalt

$$F_x = \frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\lambda^5}{5} + \frac{\lambda^{-1}}{1}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{32}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 1\right]$$
$$= \frac{57}{20}\,a^2 = 2{,}85\,a^2.$$

Rotiert der Bogen DC um die x-Achse, so beschreibt er eine Fläche vom Flächeninhalte

$$O_x = \pi\,a^2\left[\frac{\lambda^5}{5} - \frac{\lambda^{-1}}{1}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \pi a^2\left[\frac{32}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + 1\right]$$
$$= \frac{67}{10}\,\pi\cdot a^2 = 21{,}05\,a^2$$

und diese schliesst einen Körper ein vom Volumen

$$V_x = \frac{\pi\cdot a^2}{2}\cdot\left[\frac{\lambda^6}{6} + \frac{\lambda^{-0}}{0}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \frac{\pi\cdot a^3}{2}\left[\frac{\lambda^6}{6} + \infty\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2}$$
$$= \frac{\pi\cdot a^3}{2}\cdot\left[\frac{64}{6} + \infty - \frac{1}{6} - \infty\right] = \frac{21}{4}\,\pi\cdot a^3 = 16{,}49\,a^3.$$

Für alle Geschwindigkeitsverhältnisse dieses Unterfalles besteht die Kurve aus zwei kongruenten, parabol. Ästen, von denen der eine ganz im I., der andere ganz im IV. Quadranten verläuft. Die x-Achse ist immer gemeinschaftliche Asymptote an beide Kurvenäste. Die Gerade $x = \frac{p \cdot r}{r^2 - p^2} \cdot a$, oder die ursprüngliche y-Achse, ist Scheitel- und Doppeltangente an beide Kurvenäste. Diese letztern nähern sich mit zunehmendem k immer mehr der Geraden $y = +a$, bezw. $y = -a$ und gehen mit $k = \infty$ in diese über, d. h. die beiden parabol. Äste reduzieren sich auf die je doppelt gelegten Geraden $y = +a$ bezw. $y = -a$ aus $+\infty$ bis zur Doppeltangente. Das ganze westliche Gebiet der Doppeltangente besitzt keine reellen Punkte der Kurve.

Beobachten wir die Bewegung der beiden Punkte A und B, so gestaltet sich diese auf folgende Weise. Der Punkt B aus $+\infty$ kommend verfolgt den von $-\infty$ auf der x-Achse heranrückenden Punkt A. Ist A im ursprünglichen Nullpunkte angelangt, so ist B in $y = +a$ der Scheiteltangente. Von hier aus gehen beide nach $+\infty$ und zwar A mit der k-fachen Geschwindigkeit des B, so dass B hinter A immer mehr zurückbleibt. Die gleiche Verfolgungsbewegung kann auch auf dem Kurvenaste im IV. Quadranten erfolgen; dabei durchläuft der Punkt A die x-Achse ebenfalls von $-\infty$ nach $+\infty$.

Unterfall 2. $k = \frac{q}{p}$ = unechter Bruch mit geradem Zähler und ungeradem Nenner, wobei $q > p$, oder gerade ganze Zahl.

Setzt man den Wert $k = \frac{q}{p}$ in der C-Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{y^{\frac{q+p}{p}}}{2\left(\frac{q+p}{p}\right) a^{\frac{q}{p}}} + \frac{a^{\frac{q}{p}}}{2\left(\frac{q-p}{p}\right) y^{\frac{q-p}{p}}}$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{a^{\frac{q}{p}} \cdot y^{\frac{q-p}{p}}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{2q}{p}}}{q+p} + \frac{a^{\frac{2q}{p}}}{q-p}\right].$$

Da $q - p$ stets eine positive, ungerade Zahl darstellt, so ist hier $y^{\frac{q-p}{p}}$ stets positiv oder negativ, je nachdem y positiv oder negativ ist. Der Klammerausdruck ist immer positiv. Die Kurve liefert somit für die gleichen positiven und negativen Werte von y gleichgrosse Werte von x, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die

Kurve liegt also symmetrisch zum 0-Punkt im I. und III. Quadranten. Für $y = 0$ wird $x = \pm \infty$;
ferner ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{q+p}{p}\right) y^{\frac{q+p-p}{p}}}{2\left(\frac{q+p}{p}\right) a^{\frac{q}{p}}} + \frac{a^{\frac{q}{p}} \cdot \left(-\frac{q-p}{p}\right)}{2\left(\frac{q-p}{p}\right) y^{\frac{q-p+p}{p}}} = \frac{y^{\frac{q}{p}}}{2\,a^{\frac{q}{p}}} - \frac{a^{\frac{q}{p}}}{2\,y^{\frac{q}{p}}}.$$

Setzt man die 1. Ableitung $= 0$, so erhält man $y^{\frac{2q}{q}} = a^{\frac{2q}{q}}$, w. f. $y = \pm a$. Diesen Wert in der C-Gleichung eingesetzt, liefert

$$x = \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{(\pm a)^{\frac{q+p}{p}}}{(q+p) \cdot a^{\frac{q}{p}}} + \frac{a^{\frac{q}{p}}}{(q-p) \cdot (\pm a)^{\frac{q-p}{p}}}\right]$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \left[\frac{\pm a}{q+p} \pm \frac{a}{q-p}\right] = \pm \frac{p \cdot q}{q^2 - p^2} \cdot a;$$

ferner wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{q}{p} \cdot y^{\frac{q-p}{p}}}{2\,a^{\frac{q}{p}}} - \frac{a^{\frac{q}{p}} \cdot \left(-\frac{q}{p}\right)}{2\,y^{\frac{q+p}{p}}} = \frac{q}{2p} \cdot \left[\frac{y^{\frac{q-p}{p}}}{a^{\frac{q}{p}}} + \frac{a^{\frac{q}{p}}}{y^{\frac{q+p}{p}}}\right].$$

Setzt man hierin $y = \pm a$, so wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{q}{2p} \cdot \left[\frac{(\pm a)^{\frac{q-p}{p}}}{a^{\frac{q}{p}}} + \frac{a^{\frac{q}{p}}}{(\pm a)^{\frac{q+p}{p}}}\right] = \begin{cases} \text{pos.} \\ \\ \text{neg.} \end{cases}, \text{ d. h.}$$

$$y = \pm a \text{ macht } x = \pm \frac{p \cdot q}{q^2 - p^2} \cdot a \text{ zu einem } \begin{cases} \text{Minimalwerte.} \\ \text{Maximalwerte.} \end{cases}$$

Da je beide Koordinaten der Kurvenpunkte entweder das positive, oder das negative Vorzeichen besitzen, so hat die Kurve je einen Ast im I. und III. Quadranten. Die beiden Punkte $x = \pm \frac{p \cdot q}{q^2 - p^2} \cdot a$, $y = \pm a$ liegen der y-Achse am nächsten; sie sind Scheitelpunkte, und ihre zugehörigen Scheiteltangenten haben die Gleichungen $x = \pm \frac{p \cdot q}{q^2 - p^2} \cdot a = \pm \frac{a \cdot k}{k^2 - 1}$, wie im Unterfall 1. Die Doppeltangente durch den 0-Punkt habe die Gleichung $y = m\,x$. Setzt man diesen Wert für y in der von den Nennern befreiten Kurvengleichung (38) ein, so erhält man

$$(k-1)\,m^{2k} \cdot x^{2k} - 2\,(k^2 - 1)\,a^k\,m^{k-1}x^k + (k+1)\,a^{2k} = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf x^k quadratisch, und man hat deshalb

$$x^k = \frac{(k^2-1)\,a^k\,m^{k-1} \pm \sqrt{(k^2-1)\cdot a^{2k}\cdot[(k^2-1)\,m^{2k-2}-m^{2k}]}}{(k-1)\,m^{2k}}.$$

Die vier Schnittpunkte der Geraden $y = m\,x$ mit der Kurve liegen paarweise symmetrisch zum 0-Punkt. Setzt man in der obigen Gleichung die Diskriminante $(k^2-1)\,m^{2k-2} - m^{2k} = 0$, so fallen je zwei Schnittpunkte zusammen, und die Gerade durch den 0-Punkt wird zur Doppeltangente an die Kurve. Durch 0-Setzung der Diskriminante folgt aber

$$(k^2-1)\,m^{2k} = m^{2k+2}\quad,\qquad\text{oder}$$

$$m^2 = k^2 - 1,\qquad\text{woraus folgt}$$

$$m = \pm\sqrt{k^2-1} = \pm(k^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

als Richtungskoeffizienten der zwei Doppeltangenten durch 0. Setzt man den positiven Wert für m in dem Ausdruck für x^k ein, so erhält man

$$x^k = \frac{(k^2-1)\,a^k\cdot m^{k-1-2k}}{(k-1)} = \frac{(k^2-1)\,a^k\cdot m^{-1-k}}{k-1}$$

$$= \pm\frac{(k^2-1)^{\frac{2-k-1}{2}}}{k-1}\,a^k = \pm\frac{(k+1)^{\frac{1-k}{2}}\cdot(k-1)^{\frac{1-k}{2}}}{(k-1)}\,a^k$$

$$= \pm\frac{(k+1)^{\frac{1-k}{2}}}{(k-1)^{\frac{1+k}{2}}}\cdot a^k,$$

d. f. $$x = a\sqrt[k]{\pm\frac{(k+1)^{\frac{1-k}{2}}}{(k-1)^{\frac{1+k}{2}}}}\;;$$ es wird somit

$$y = m\cdot x = a\,(k^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[k]{\pm\frac{(k+1)^{\frac{1-k}{2}}}{(k-1)^{\frac{1+k}{2}}}}.$$

Ersetzt man in den gefundenen Resultaten k durch das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{q}{p}$, so folgt

$$m = \pm\left(\frac{q^2 - p^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p},$$

und die Koordinaten der Berührungspunkte werden

$$x = \pm\sqrt[\frac{q}{p}]{\pm\frac{\left(\frac{q+p}{p}\right)^{\frac{1-\frac{q}{p}}{2}}}{\left(\frac{q-p}{p}\right)^{\frac{1+\frac{q}{p}}{2}}}}\cdot a = \pm\sqrt[q]{\frac{\left(\frac{q+p}{p}\right)^{\frac{p-q}{2}}}{\left(\frac{q-p}{p}\right)^{\frac{p+q}{2}}}}\cdot a$$

$$= \pm a\cdot p\sqrt[q]{\frac{(q+p)^{\frac{p-q}{2}}}{(q-p)^{\frac{p+q}{2}}}},$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}\cdot\sqrt[q]{\frac{\left(\frac{q+p}{p}\right)^{\frac{p-q}{2}}}{\left(\frac{q-p}{p}\right)^{\frac{p+q}{2}}}}\cdot a$$

$$= \pm a\cdot\sqrt{q^2 - p^2}\cdot\sqrt[q]{\frac{(q+p)^{\frac{p-q}{2}}}{(q-p)^{\frac{p+q}{2}}}}.$$

Die Doppeltangente durch den 0-Punkt hat somit die Gleichung

$$y = \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}\cdot x,$$

und die Berührungspunkte haben die oben angegebenen Koordinaten. Die reelle Doppeltangente hat den Richtungskoeffizienten $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$ und schliesst mit dem positiven Zweig der x-Achse einen Winkel von $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$ ein. Die negative Wurzel von m würde für x und y imaginäre Werte und eine Doppeltangente mit imaginären Berührungspunkten liefern.

Als Beispiel führen wir den Fall an

$$k = \frac{v}{u} = \frac{2u}{u} = \frac{2}{1} = \text{gerade Zahl.}$$

Setzt man den Wert $k = 2$ in der Kurvengleichung ein, so wird sie

$$y^4 - 6a^2yx + 3a^4 = 0.$$

Die Kurve ist eine Parabel vierter Ordnung. Die Koordinatenpaare $x = +\frac{2}{3}a$, $y = +a$, bezüglich $x = -\frac{2}{3}a$, $y = -a$, sind die Koordinaten der Scheitelpunkte D des C-Astes im I., bezüglich D′ des C-Astes im III. Quadranten. Die zugehörigen Scheiteltangenten haben die Gleichungen $x = \pm\frac{2}{3}a$ und schliessen ein Gebiet ein, in dem sich keine reellen Punkte der Kurve befinden. Die $g\infty$ schneidet die Kurve in der Richtung der x-Achse in vier zusammenfallenden Punkten. Der $P\infty$ ist ein dreifacher Punkt, und die Tangenten in ihm haben die Gleichungen $y = 0$, x-Achse und $x = 0$ doppelt, d. h. in der $g\infty$ fallen im 3-fachen $P\infty$ der x-Achse zwei Tangenten der Kurve zusammen. Die x-Achse ist die 3. Tangente an die Kurve im dreifachen Punkte. Beide Tangenten haben in ihm mit der Kurve vier Punkte gemein. Die Kurve hat somit im $P\infty$ eine Spitze, die auf einem Kurvenzweig aufsitzt, mit der $g\infty$ als Spitzentangente. Der dreifache $P\infty$ besteht aus der Vereinigung von zwei Doppelpunkten und einer Spitze. Die Kurve ist rational und ihre Parameterdarstellung lautet nach (24) $y = \lambda a$, $x = \frac{(\lambda^4 + 3)a}{6\lambda}$. Wir bestimmen einige Kurvenpunkte, indem wir dem λ aufeinanderfolgende Werte erteilen und erhalten:

Für

$\lambda = \pm 0$	0,1	0,2	0,5	1	2	3	∞	wird
$y = \pm 0$	0,1 a	0,2 a	0,5 a	a	2 a	3 a	∞	und
$x = \pm \infty$	5,0 a	2,5 a	1,0 a	0,7 a	1,6 a	4,7 a	∞.	

Die Kurve besteht (siehe Fig. 4) aus zwei kongruenten, parabolischen Ästen, von denen der eine ganz im I., der andere ganz im III. Quadranten verläuft. Beide Äste nähern sich asymptotisch der x-Achse. Erteilt man in der rationalen Darstellung dem λ alle Werte von $+\infty$, bis $-\infty$, so durchläuft der Schnittpunkt der Büschelgeraden $y = \lambda a$ mit der Kurve alle Kurvenpunkte und zwar von $+\infty$ durchs endliche Gebiet nach $+\infty$ (I), kommt dann von $-\infty$ bis zum Punkte D′ und kehrt wieder nach $-\infty$ (III) zurück. Die Kurve ist unikursal und nach Plücker von der 5. Klasse. Die reelle Doppeltangente durch den Ursprung hat die Gleichung $y = \sqrt{3} \cdot x$. Sie berührt die Kurve in den Punkten

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{\sqrt{27}}}\, a = \pm\, 0{,}76\, a, \quad y = \pm \sqrt{3} \cdot a = \pm\, 1{,}32\, a$$

und bildet mit dem positiven Ast der y-Achse den Winkel $\varphi = 60^0$. Die Länge des Bogens DC ist

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^{-1}}{1}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \frac{a}{2} \cdot \left[\frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{17}{12}\, a = 1{,}41\, a;$$

mit der x-Achse und den zugehörigen Ordinaten schliesst er eine Fläche ein vom Inhalt

$$F_x = \frac{a^2}{2} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\lambda^3 - \lambda^{-1})\, d\lambda = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\lambda^4}{4} - \log \text{nat.}\, \lambda\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{16}{4} - \log \text{nat.}\, 2 - \frac{1}{4} + \log \text{nat.}\, 1\right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left[4 - \frac{1}{4} - 0{,}69\right] = \frac{a^2}{2} \cdot 3{,}06 = 1{,}53\, a^2.$$

Rotiert der Bogen DC um die x-Achse, so beschreibt er eine Fläche vom Inhalte

$$O_x = \pi a^2 \left[\frac{\lambda^{2+k}}{2+k} + \frac{\lambda^{2-k}}{2-k}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \pi a^2 \left[\frac{2^{2+2}}{2+2} + \frac{2^{2-k}}{2-k} - \frac{1^{2+2}}{2+2} - \frac{1^{2-k}}{2-k}\right]_{k=2}$$

$$= \pi a^2 \left[4 - \frac{1}{4}\right] + \pi a^2 \left[\frac{2^{2-k}}{2-k} - \frac{1^{2-k}}{2-k}\right]_{k=2}.$$

Der Klammerausdruck des 2. Gliedes liefert aber für $k = 2$ das vieldeutige Symbol $\infty - \infty$ und hat, nach der bekannten Regel ausgerechnet, den Wert 0. Es wird also

$$O_x = \frac{15}{4} \cdot \pi \cdot a^2 = 11{,}78\, a^2.$$

Der Körper, den die Oberfläche O_x in sich schliesst, hat das Volumen

$$V_x = \frac{\pi a^3}{2} \cdot \left[\frac{\lambda^5}{5} - \lambda\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \frac{\pi a^3}{2} \cdot \left[\frac{32}{5} - 2 - \frac{1}{5} + 1\right]$$

$$V_x = \frac{26}{10}\pi \cdot a^3 = 8{,}16\,a^3.$$

Für diesen 2. Unterfall liegen die beiden kongruenten, parabolischen Kurvenäste ihrer ganzen Ausdehnung nach im I. und III. Quadranten und nähern sich in $+\infty$ bezw. $-\infty$ asymptotisch der x-Achse. Die Scheiteltangenten haben die Gleichungen $x = \pm \frac{p \cdot q}{q^2 - p^2} \cdot a$; sie nähern sich wie ihre Scheitelpunkte mit zunehmendem $k = \frac{q}{p}$ der y-Achse und fallen im Grenzfall $k = \infty$ mit dieser zusammen. Die Halbäste der beiden Parabeln nähern sich mit aufsteigendem k immer mehr den beiden Geraden $y = +a$, bezw. $y = -a$, und die parabolischen Züge reduzieren sich für den Grenzfall $k = \infty$ auf die je doppelt gelegten Geraden $y = \pm a$ von $+\infty$, bezw. $-\infty$, bis zur y-Achse. Mit veränderlichem k ändert sich auch die Lage der jeweiligen Doppeltangente durch den 0-Punkt. Der Richtungswinkel dieser Doppeltangente nimmt mit wachsender Geschwindigkeit von 0^0 [für $k = 1$] an zu und wird im Grenzfall $k = \infty$ gleich 90^0. Für diesen Grenzfall fallen also sowohl die Doppeltangente durch den Nullpunkt, wie auch die beiden Scheiteltangenten in der y-Achse zusammen.

Die Bewegung der beiden Punkte gestaltet sich im endlichen Gebiete auf folgende Weise: Der Punkt B verfolgt aus $+\infty$ auf dem Kurvenast im I. Quadranten herkommend den Punkt A, der von $-\infty$ her auf der x-Achse vorrückt. Ist der Punkt A im Schnittpunkte der Scheiteltangente mit der x-Achse angelangt, so befindet sich B in $y = a$ der Scheiteltangente, senkrecht über A. Von hier aus rücken beide Punkte nach $+\infty$ und zwar A mit der k-fachen Geschwindigkeit des B, so dass B hinter A immer mehr zurückbleibt. Die analoge Verfolgungsbewegung kann auch auf dem Kurvenaste im III. Quadranten erfolgen. Dabei kommt der verfolgende Punkt B aus $-\infty$ und geht über D′ nach $-\infty$ zurück, während der Punkt A die x-Achse gerade entgegengesetzt wie im vorigen Falle, also von $+\infty$ nach $-\infty$, durchläuft.

U n t e r f a l l 3. $k = \frac{r}{q}$ = unechter Bruch mit ungeradem Zähler und geradem Nenner, wobei $r > q$. Setzt man den Wert für k in Gleichung (38) ein, so erhält man

$$x = \frac{y^{\frac{r+q}{q}}}{2\left(\frac{r+q}{q}\right) a^{\frac{r}{q}}} + \frac{a^{\frac{r}{q}}}{2\left(\frac{r-q}{q}\right) y^{\frac{r-q}{q}}}$$

$$= \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{y^{\frac{r+q}{q}}}{(r+q)\, a^{\frac{r}{q}}} + \frac{a^{\frac{r}{q}}}{(r-q)\, y^{\frac{r-q}{q}}}\right].$$

Weil $r + q$ und $r - q$ stets ungerade, positive Zahlen darstellen, so wird x für negative y imaginär; für positive y dagegen erhält man zwei gleiche und entgegengesetzte Werte von **x**. Für $y = 0$ wird $x = \pm\infty$; ferner ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{r+q}{q} \cdot y^{\frac{r+q-q}{q}}}{2\frac{r+q}{q} \cdot a^{\frac{r}{q}}} + \frac{a^{\frac{r}{q}} \cdot \left(-\frac{r-q}{q}\right)}{2\left(\frac{r-q}{q}\right) y^{\frac{r-q+q}{q}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^{\frac{r}{q}}}{a^{\frac{r}{q}}} - \frac{a^{\frac{r}{q}}}{y^{\frac{r}{q}}}\right].$$

Wir setzen die 1. Ableitung $= 0$ und erhalten

$$y^{\frac{2r}{q}} = a^{\frac{2r}{q}}, \text{ w. f. } y = a.$$

Dieser Wert in der C-Gleichung eingesetzt, liefert

$$x = \pm\frac{q}{2}\left[\frac{a^{\frac{r+q}{q}}}{(r+q)\, a^{\frac{r}{q}}} + \frac{a^{\frac{r}{q}}}{(r-q)\, a^{\frac{r-q}{q}}}\right] = \pm\frac{q}{2}\left[\frac{a}{r+q} + \frac{a}{r-q}\right]$$

$$= \pm\frac{q \cdot r}{r^2 - q^2} \cdot a. \qquad \text{Ferner wird}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\frac{r}{q} \cdot y^{\frac{r-q}{q}}}{a^{\frac{r}{q}}} - \frac{a^{\frac{r}{q}} \cdot \left(-\frac{r}{p}\right)}{y^{\frac{r+q}{q}}}\right] = \frac{r}{2q}\left[\frac{y^{\frac{r-q}{q}}}{a^{\frac{r}{q}}} + \frac{a^{\frac{r}{q}}}{y^{\frac{r+q}{q}}}\right]$$

$$= \begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}, \quad \text{d. h. es macht}$$

$$y = +a \qquad x = \pm\frac{q \cdot r}{r^2 - q^2} \cdot a \text{ zu einem} \begin{cases} \text{Minimalwerte.} \\ \text{Maximalwerte.} \end{cases}$$

Nimmt y von $+a$ an beständig zu, so wächst auch x von $\pm\frac{p \cdot r}{r^2 - q^2} a$ aus positiv und negativ und wird für $y = +\infty$ zu $x = \pm\infty$. Nimmt y von $+a$ an beständig ab bis $y = 0$, so wächst auch x positiv und negativ von obigen Werten aus bis $x = \pm\infty$. Die Kurve liegt somit ganz auf der Nordseite der x-Achse und besitzt im I. und II. Quadranten je einen Kurvenast, die sich von $+\infty$, bezw. $-\infty$, durchs endliche Gebiet nach $+\infty$, bezw. $-\infty$, hinziehen. Die beiden Pnnkte $y = +a$, $x = \pm\frac{q \cdot r}{r^2 - q^2} \cdot a$ liegen der x-Achse am nächsten; es sind die Scheitelpunkte der Kurvenäste und ihre zugehörigen Scheiteltangenten haben die Gleichungen $x = \pm\frac{q \cdot r}{r^2 - q^2} \cdot a$. Alle Kurven dieses Unterfalles sind nicht mehr rational.

Als Beispiel für Unterfall 3 wählen wir den Spezialfall

$$k = \frac{r}{q} = \frac{3}{2}.$$

Setzt man den Wert von k in der Kurvengleichung ein, so bekommt man

$$x = \frac{2}{2}\left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5 \cdot a^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right], \qquad \text{oder}$$

$$y^3 + 5a^3 = 5a^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} x; \qquad \text{quadriert gibt}$$

$$y^6 + 10a^3y^3 + 25a^6 = 25a^3yx^2, \qquad \text{oder}$$

$$y^6 + 10a^3y^3 - 25a^3yx^2 + 25a^6 = 0.$$

Die Kurve ist von der 6. Ordnung und schneidet die $g\infty$ in der Richtung der x-Achse in 6 zusammenfallenden Punkten. Der $P\infty$ ist ein vierfacher Punkt der Kurve und die $g\infty$ ist dreifache-, die x-Achse einfache Tangente in demselben. Die Kurve hat somit im $P\infty$ einen Spitzpunkt, oder Bicuspidalpunkt mit der $g\infty$ als zugehörige dreifache Tangente, und zudem geht die Kurve noch einfach durch denselben.

Bringt man die Kurvengleichung in die Parameterdarstellung, so lautet diese

$$y = \lambda a \quad , \quad x = \frac{(k-1)\lambda^{2k} + (k+1)}{2(k^2-1)\lambda^{k-1}}\, a = \frac{\left(\frac{3-2}{2}\right)\lambda^3 + \left(\frac{3+2}{2}\right)}{2\left(\frac{9-4}{4}\right)\lambda^{\frac{3-2}{2}}} \cdot a$$

$$= \frac{\lambda^3+5}{5\lambda^{\frac{1}{2}}} \cdot a = \pm \frac{\lambda^3+5}{5\cdot\sqrt{\lambda}} \cdot a.$$

Die Kurve ist nicht mehr rational. Um die Kurve zeichnen zu können seien noch einige Punkte derselben berechnet:

Für	$\lambda =$ 0	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	∞
wird	$x = \pm\infty$	3,2 a	2,2 a	1,4 a	1,2 a	1,8 a	3,7 a	6,9 a	∞
und	$y =$ 0	0,1 a	0,2 a	0,5 a	a	2 a	3 a	4 a	∞.

(Graphische Darstellung siehe Fig. 5).

Die Kurve besitzt je einen C-Ast im I. und II. Quadranten, die aus $+\infty$, bezw. $-\infty$, herkommen und wieder nach $+\infty$, bezw. $-\infty$, zurückgehen. Die x-Achse ist Asymptote an beide C-Äste. Die Scheitel liegen in den Punkten $y = a$, $x = \pm\frac{6}{5}\,a$, und die zugehörigen Scheiteltangenten haben die Gleichungen $x = \pm\frac{6}{5}\,a$. Die Länge des Bogens DC beträgt

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{\frac{3+2}{2}}}{\frac{3+2}{2}} - \frac{\lambda^{-\frac{3-2}{2}}}{\frac{3-2}{2}}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2}$$

$$= \frac{a}{5}\cdot\left[\lambda^{\frac{5}{2}} - 5\lambda^{-\frac{1}{2}}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = \frac{a}{5}\cdot\left[2^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2^{\frac{1}{2}}} - 1 + 5\right] = 1{,}2\ a.$$

Er bildet mit der x-Achse und den zugehörigen Ordinaten die Fläche

$$F_x = \frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\lambda^{\frac{3}{2}+2}}{\frac{3}{2}+2} + \frac{\lambda^{-\left(\frac{3}{2}-2\right)}}{\frac{3}{2}-2}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = a^2\left[\frac{\lambda^{\frac{7}{2}}}{7} - \lambda^{\frac{1}{2}}\right]_{\lambda=1}^{\lambda=2}$$

$$= a^2\cdot\left[\frac{2^{\frac{7}{2}}}{7} - 2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{7} + 1\right] = 1{,}07\ a^2.$$

Rotiert der Bogen DC um die x-Achse, so beschreibt er eine Fläche vom Inhalt

$$O_x = \pi a^2 \left[\frac{\lambda^{\frac{3}{2}+2}}{\frac{3}{2}+2} - \frac{\lambda^{-\left(\frac{3}{2}-2\right)}}{\frac{3}{2}-2} \right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = 2\pi \cdot a^2 \left[\frac{\lambda^{\frac{7}{2}}}{7} + \lambda^{\frac{1}{2}} \right]_{\lambda=1}^{\lambda=2}$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot a^2 \left[\frac{2^{\frac{7}{2}}}{7} + 2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{7} - 1 \right] = 11{,}88\, a^2$$

und schliesst einen Körper ein vom Volumen

$$V^x = \frac{\pi a^3}{2} \cdot \left[\frac{\lambda^{\frac{3}{2}+3}}{\frac{3}{2}+3} + \frac{\lambda^{-\left(\frac{3}{2}-3\right)}}{\frac{3}{2}-3} \right]_{\lambda=1}^{\lambda=2} = p \cdot a^3 \left[\frac{\lambda^{\frac{9}{2}}}{9} - \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{\lambda=1}^{\lambda=2}$$

$$= \pi \cdot a^3 \left[\frac{2^{\frac{9}{2}}}{9} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \right] = 5{,}62\, a^3.$$

Für den 3. Unterfall liegen die beiden Parabeln im I. und II. Quadranten. Die x-Achse ist wieder gemeinschaftliche Asymptote. Die Scheiteltangenten haben die Gleichungen $x = \pm \frac{q \cdot r}{r^2 - q^2} \cdot a$; sie nähern sich mit steigendem k der y-Achse. Für den Grenzfall $k = \infty$ fallen sie mit der y-Achse zusammen und die Parabeln reduzieren sich gleichzeitig auf die je doppelt gelegte Gerade $y = a$ von $+\infty$, bezw. $-\infty$, bis zur y-Achse und zurück. Die Bewegung der beiden Punkte stimmt mit derjenigen des vorigen Falles überein, mit der einzigen Ausnahme, dass der 2. Ast der Verfolgungskurve hier nicht in den III., sondern in den II. Quadranten zu liegen kommt. Der 1. Ast der Verfolgungskurve liegt also immer im I. Quadranten, während der 2. je nach dem Werte von $k > 1$ in einem der drei andern Quadranten verläuft.

II. Hauptfall $k < 1$.

Die Geschwindigkeit des verfolgenden Punktes B ist für diesen Fall grösser, als diejenige des verfolgten Punktes A. Die für diesen Hauptfall geltende symmetrische Gleichung der Verfolgungskurve heisst

$$x = \frac{y^{1+k}}{2(1+k)a^k} - \frac{a^k y^{1-k}}{2(1-k)}$$

und ist aus der Grundgleichung dadurch hervorgegangen, dass man die Ordinatenachse um $\frac{k}{1-k^2} \cdot a$ parallel nach rechts verschob.

Wie beim ersten Hauptfall, so können wir auch hier drei verschiedene Unterfälle auseinanderhalten. Das Geschwindigkeitsverhältnis, das immer ein echter Bruch sein muss, kann sein

$$1.\quad k = \frac{p}{q} = \frac{\text{ungerade Zahl}}{\text{gerade Zahl}},$$

$$2.\quad k = \frac{p}{r} = \frac{\text{ungerade Zahl}}{\text{ungerade Zahl}}, \qquad \text{und}$$

$$3.\quad k = \frac{q}{r} = \frac{\text{gerade Zahl}}{\text{ungerade Zahl}},$$

wobei p, q und r die nämliche Bedeutung wie im Hauptfall I haben und der Bedingung genügen

$$p < q < r.$$

Unterfall 1. $k = \frac{p}{q} = \frac{\text{ungerade Zahl}}{\text{gerade Zahl}} < 1.$

Setzt man den Wert für k in der symmetrischen Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{y^{\frac{q+p}{q}}}{2\cdot\left(\frac{q+p}{q}\right)a^{\frac{p}{q}}} - \frac{a^{\frac{p}{q}}\, y^{\frac{q-p}{q}}}{2\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)} = \frac{q}{2}\cdot\left[\frac{y^{\frac{q+p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}}(q+p)} - \frac{a^{\frac{p}{q}}\, y^{\frac{q-p}{q}}}{(q-p)}\right].$$

Da q gerade ist, die Ausdrücke $q+p$ und $q-p$ dagegen stets ungerade Zahlen darstellen, so würde für ein negativ gewähltes y, x imaginär, und für ein positiv gewähltes y erhält man stets zwei gleiche, entgegengesetzte Werte von x. Die Kurve muss daher ganz auf der obern Seite der Abscissenachse und symmetrisch zur neuen Ordinatenachse liegen. Setzt man $y = 0$, so wird auch $x = 0$; ferner ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}}} - \frac{a^{\frac{p}{q}}}{y^{\frac{p}{q}}}\right].$$

Setzt man diese 1. Ableitung $= 0$, so folgt

$$\frac{y^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}}} - \frac{a^{\frac{p}{q}}}{y^{\frac{p}{q}}} = 0 = y^{\frac{2p}{q}} - a^{\frac{2p}{q}}, \quad \text{also } y = \pm a.$$

Der Wert $y = -a$ ist zu verwerfen, weil er auf imaginäre Resultate führen würde. Setzt man $y = +a$ in der obigen Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{a^{\frac{q+p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}} \cdot (q+p)} - \frac{a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{q-p}{q}}}{(q-p)} \right].$$

Da q im Nenner des Exponenten eine gerade Zahl ist, so liefert die Wurzel zwei Werte, und man erhält

$$x = \pm \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{a}{q+p} - \frac{a}{q-p} \right] = \mp \frac{q \cdot p}{q^2 - p^2} \cdot a.$$

Die 2. Ableitung wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{p}{2q} \cdot \left[\frac{y^{\frac{p-q}{q}}}{a^{\frac{p}{q}}} + \frac{a^{\frac{p}{q}}}{y^{\frac{p+q}{q}}} \right].$$

Setzt man hierin $y = a$, so wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \pm \frac{p}{2q} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right] = \pm \frac{p}{q \cdot a}, \qquad \text{d. h.}$$

$$y = a \text{ macht} \begin{cases} x = -\dfrac{q \cdot p}{q^2 - p^2} \cdot a = -\dfrac{k}{1 - k^2} \cdot a & \text{zu einem Minimalwerte.} \\ x = +\dfrac{q \cdot p}{q^2 - p^2} \cdot a = +\dfrac{k}{1 - k^2} \cdot a & \text{zu einem Maximalwerte.} \end{cases}$$

Für $x = 0$ fanden wir $y = 0$. Setzt man den Wert $x = 0$ in dem Ausdruck für x ein, so erhält man

$$\frac{y^{\frac{q+p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}} \cdot (q+p)} - \frac{a^{\frac{p}{q}} y^{\frac{q-p}{q}}}{(q-p)} = 0 = y \cdot \left[\frac{y^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p}{q}}(q+p)} - \frac{a^{\frac{p}{q}} y^{-\frac{p}{q}}}{(q-p)} \right],$$

$$\text{w. f.} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y^{\frac{2p}{q}} (q-p) - a^{\frac{2p}{q}} (q+p) = 0,$$

also auch $y = \left(\frac{q+p}{q-p}\right)^{\frac{q}{2p}} \cdot a$. Dem Werte $x = 0$ entspricht sowohl $y = 0$, wie auch $y = \left(\frac{q+p}{q-p}\right)^{\frac{q}{2p}} \cdot a = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2k}} \cdot a$. Da aber, wie wir gesehen haben, die Kurve symmetrisch zur y-Achse liegt, so müssen die Punkte $x = 0$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \left(\frac{q+p}{q-p}\right)^{\frac{q}{2p}} \cdot a$ der Kurve je doppelt angehören. Der erstere kann nur ein Berührungspunkt sein; der letztere dagegen ist ein Knotenpunkt unserer Kurve, was durch Verschieben des 0-Punktes in denselben leicht gezeigt werden kann. Vom Doppelpunkte an nimmt der Wert von x positiv wie negativ immer zu und wird für $y = +\infty$ zu $x = \pm\infty$.

Als Beispiel dieses Unterfalls sei der Spezialfall

$$k = \frac{p}{q} = \frac{\text{ungerade Zahl}}{\text{gerade Zahl}} = \frac{1}{2}$$

angeführt. Die Geschwindigkeit des Punktes B ist also hier doppelt so gross, als diejenige von A. Setzt man den Wert von $k = \frac{1}{2}$ in der allgemeinen Kurvengleichung dieses Unterfalls ein, so folgt

$$x = \frac{y^{1+\frac{1}{2}}}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}y^{1-\frac{1}{2}}}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot a^{\frac{1}{2}}} - a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}},$$

oder
$$y^3 - 6ay^2 + 9a^2y - 9ax^2 = 0,$$

und dies ist die Gleichung der Verfolgungskurve für $k = \frac{1}{2}$. Sie ist von der 3. Ordnung und beginnt mit Gliedern 1. Grades; die Kurve geht somit einfach durch den 0-Punkt; dieser ist der Scheitel der Schleife, und die x-Achse ist zugehörige Scheiteltangente in demselben. Für $y = a$ wird $x = -\frac{q \cdot p}{q^2 - p^2}a = -\frac{2}{3}a$ zu einem Minimalwerte, und $x = +\frac{2}{3}a$ zu einem Maximalwerte. Die beiden Punkte $y = a$, $x = \mp\frac{2}{3}a$ sind die äussersten Punkte D und F (Fig. 6) der Schleife und ihre zugehörigen Tangenten haben die Gleichungen $x = \mp\frac{2}{3}a$. Die y-Achse schneidet die Kurve ausser im Punkte $y = 0$ noch in $y = \left(\frac{q+p}{q-p}\right)^{\frac{q}{2p}} \cdot a = 3a$; dieser Punkt ist ein Knotenpunkt unserer Kurve; denn verschiebt man den Ursprung in diesen Punkt, d. h. transformiert man obige Kurvengleichung nach den Formeln

$x = x' \quad , \quad y = y' + 3a,$ so wird sie

$$y'^3 + 3ay'^2 - 9ax'^2 = 0.$$

Die transformierte Kurvengleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades; der neue Nullpunkt ist somit wirklich ein Doppelpunkt unserer Kurve und die Tangenten in ihm haben die Gleichungen $y' = \pm\sqrt{3} \cdot x'$. Die Tangenten sind reell und verschieden; der Doppelpunkt ist ein Knotenpunkt. Wir transformieren die Gleichungen der Tangenten rückwärts und erhalten $y = \pm\sqrt{3} \cdot x + 3a$. Die Doppelpunktstangente $y = \sqrt{3}x + 3a$ hat den Richtungswinkel $\varphi_1 = 60^0$ und schneidet die x-Achse im Punkte $x = -\sqrt{3}a = -1{,}732\,a$; die andere $y = -\sqrt{3} \cdot x + 3a$ dagegen hat den Richtungswinkel $\varphi_2 = 120^0$ und schneidet die x-Achse im Abstande $x = \sqrt{3} \cdot a = 1{,}732\,a$ vom Ursprung. Die beiden Doppelpunktstangenten schliessen somit am Knotenpunkte einen Winkel von 60^0 ein. Die zwischen dem Knoten und der x-Achse gelegenen Teile der beiden Doppelpunktstangenten bilden mit dem auf der x-Achse abgeschnittenen Stücke ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge gleich ist dem zwischen Knoten und x-Achse gelegenen Stücke der Doppelpunktstangente, nämlich gleich $2.\sqrt{3}\,a = 3{,}46\,a$.

Um die rationale Darstellung zu ermitteln, schneiden wir unsere Kurve mit einer Schar von Geraden durch den Doppelpunkt von der Gleichung $y = \lambda x + 3a$. Jede Gerade des Büschels schneidet die Kurve 3. Ordnung im Knoten in 2 zusammenfallenden Punkten und ausserdem noch in einem 3. Punkte, der je nach dem Werte von λ alle Punkte der Kurve durchläuft. Wir setzen in der Kurvengleichung $y = \lambda x + 3a$ und erhalten

$\lambda^3 x + 3a\lambda^2 - 9a = 0,$ woraus folgt

$$x = \frac{9a - 3a\lambda^2}{\lambda^3} = 3a\left[\frac{3}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda}\right] = \frac{3a}{\lambda}\left[\frac{3}{\lambda^2} - 1\right],$$

und somit

$$y = \lambda x + 3a = 3a\left[\frac{3}{\lambda^2} - 1 + 1\right] = 9a\lambda^{-2};$$

diese Werte von x und y repräsentieren die rationale Darstellung unserer Kurve. Um die Kurve zeichnen zu können, bestimmen wir nach diesen Gleichungen einige Punkte und erhalten :

Für	$\lambda = \pm 0$	$\sqrt{1{,}6}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1	2	3	4	∞
wird	$y = \infty$	5,6 a	4,5 a	3 a	9 a	2,3 a	a	$\frac{9}{16}$ a	0
und	$x = \pm \infty$	2,1 a	1,1 a	0	6 a	$\mp \frac{3}{8}$ a	$\frac{2}{3}$ a	$\frac{39}{64}$ a	0

Wie die Konstruktion (Fig. 6) zeigt, liegt unsere Kurve ganz auf der Nordseite der x-Achse und symmetrisch zur y-Achse. Im endlichen Gebiete zeigt sie die Schleifenform der Newton'schen Knotenparabel oder Parabola nodata, oder die Form der Cayley'schen Crunodale. Erteilt man in der Parameterdarstellung dem λ alle Werte von 0 bis $+\infty$, beziehungsweise von 0 bis $-\infty$, so durchläuft der dritte Schnittpunkt der Büschelgeraden mit der Kurve diese von $+\infty$, beziehungsweise von $-\infty$, über den Knoten zum Ursprung.

Um den P ∞ der Kurve zu untersuchen, bestimmen wir die Asymptotenrichtungen und erhalten $y^3 = 0$, also $y = 0$ dreifach, d. h. die g ∞ schneidet unsere Kurve in der Richtung der x-Achse in drei zusammenfallenden Punkten. Wir projizieren die g ∞ auf die y-Achse, d. h. wir transformieren unsere Kurvengleichung nach den Formeln

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

und erhalten

$$y'^3 - 6 a y'^2 x' + 9 a^2 y' x'^2 = 9 a x'.$$

Die transformierte Gleichung beginnt mit Gliedern 1. Grades; die Kurve geht deshalb nur einfach durch den neuen O-Punkt. Die Tangenten in ihm erhält man aus $9 a x' = 0$, d. h. $x' = 0$ die y'-Achse. Für $x' = 0$ wird aber $y'^3 = 0$, also $y' = 0$ dreifach, d. h. die Tangente im neuen 0-Punkte, also die y'-Achse schneidet die Kurve in drei zusammenfallenden Punkten; sie ist also eine Wende- oder Inflexionstangente im neuen 0-Punkte. Der P ∞ ist somit ein Wende- oder Inflexionspunkt. Die Wendetangente erhält man durch Rücktransformation von $x' = 0$, nämlich $x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{0} = \infty$, d. h. die g ∞ ist Inflexionstangente im Wendepunkt. Die Richtigkeit des obigen geht schon daraus hervor, dass die Newton'sche Knotenparabel im P ∞ wirklich eine Inflexionsstelle besitzt.

Wir differentieren die Gleichungen der Parameterdarstellung und erhalten

$$dx = 3a(\lambda^{-2} - 9\lambda^{-4})\,d\lambda \quad \text{und} \quad dy = -18a\lambda^{-3}\,d\lambda.$$

Ferner ist $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} \cdot d\lambda$

$$= \sqrt{9a^2(\lambda^{-4} - 18\lambda^{-6} + 81\lambda^{-8} + 36\lambda^{-6})}\,d\lambda$$

$$= 3a \cdot \sqrt{(\lambda^{-2} + 9\lambda^{-4})^2} \cdot d\lambda = 3a(\lambda^{-2} + 9\lambda^{-4}) \cdot d\lambda.$$

Bezeichnet man die Bogenlänge der Schleife E D O F E mit s, so wird

$$\frac{s}{2} = \operatorname{arc} EDO = \int_{\lambda=\sqrt{3}}^{\lambda=0} 3a(\lambda^{-2} + 9\lambda^{-4}) \cdot d\lambda = 3a\Big[-\lambda^{-1} - 3\lambda^{-3}\Big]_{\lambda=\sqrt{3}}^{\lambda=0}$$

$$= 3a\left[-\frac{1}{0} - \frac{3}{0} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{3\sqrt{3}}\right], \quad \text{und dies ist}$$

$$= 2\sqrt{3}\,a = 3{,}46\,a,$$

was sofort durch Wertbestimmung des an der obern Grenze auftretenden vieldeutigen Symbols gezeigt werden kann. Die halbe Schleife ist somit gleich der Länge einer Knotenpunktstangente und gleich dem halben Werte der Subtangente im Knoten. Die ganze Schleife ist $= 4\sqrt{3} \cdot a = 6{,}92\,a$. Diese Grösse lässt sich leicht konstruieren; sie ist gleich der Höhe in einem gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge 8 a.

Wir bezeichnen die Fläche der Schleife mit F und erhalten

$$F = \int_{\lambda=-\sqrt{3}}^{\lambda=\sqrt{3}} 9a\lambda^{-2} \cdot 3a[\lambda^{-2} - 9\lambda^{-4}]\,d\lambda$$

$$= 27a^2 \int_{\lambda=-\sqrt{3}}^{\lambda=\sqrt{3}} [\lambda^{-}{}_{4} - 9\lambda^{-6}]\,d\lambda$$

$$= 27a^2\left[\frac{9}{5\lambda^5} - \frac{1}{3\lambda^3}\right]_{\lambda=-\sqrt{3}}^{\lambda=\sqrt{3}}$$

$$= 27 \cdot \sqrt{3}\,a^2\left[\frac{9}{5 \cdot 27} - \frac{1}{27} + \frac{9}{5 \cdot 27} - \frac{1}{27}\right] = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{3}\,a^2.$$

Rotiert die ganze Schleife um die x-Achse, so beschreibt sie eine Fläche vom Inhalte

$$O_x = \pi \cdot \int_{\lambda=\sqrt{3}}^{\lambda=-\sqrt{3}} 18\,a \cdot \lambda^{-2} \cdot 3\,a [\lambda^{-2} + 9\lambda^{-4}]\, d\lambda$$

$$= 54 \cdot \pi \cdot a^2 \int_{\lambda=\sqrt{3}}^{\lambda=-\sqrt{3}} [\lambda^{-4} + 9\lambda^{-6}] \cdot d\lambda$$

$$= 54 \cdot \pi \cdot a^2 \left[-\frac{1}{3\lambda^3} - \frac{9}{5\lambda^5} \right]_{\lambda=\sqrt{3}}^{\lambda=-\sqrt{3}} = \frac{56}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot a^2.$$

Rotiert dagegen die halbe Schleife OFE um die y-Achse, so beschreibt sie einen Flächeninhalt von

$$O_y = \pi \cdot \int_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{3}} 2 \cdot 3\,a\, [3\lambda^{-2} - \lambda^{-1}] \cdot 3\,a [\lambda^{-2} + 9\lambda^{-4}] \cdot d\lambda$$

$$= 18 \pi a^2 \int_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{3}} [3\lambda^{-5} + 27\lambda^{-7} - \lambda^{-3} - 9\lambda^{-5}] \cdot d\lambda$$

$$= 18 \pi a^2 \left[-\frac{27}{6\lambda^6} + \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{6}{4\lambda^4} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{3}}.$$

Das an der untern Grenze auftretende Symbol $\infty - \infty$ hat den Wert Null, und wir erhalten

$$O_y = 18 \pi \cdot a^2 \left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right] = 3 \pi a^2,$$

gleich der dreifachen Fläche des Kreises vom Radius a.

Die Oberfläche O_x schliesst einen Körper ein vom Volumen

$$V_x = \pi \cdot \int_{\lambda=-\sqrt{3}}^{\lambda=\sqrt{3}} 81\, a^2 \lambda^{-4} \cdot 3\,a \cdot [\lambda^{-2} - 9\lambda^{-4}]\, d\lambda$$

$$= 3 \cdot 81 \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \int_{\lambda=-\sqrt{3}}^{\lambda=\sqrt{3}} [\lambda^{-6} - 9\lambda^{-8}]\, d\lambda$$

$$= 3 \cdot 81 \cdot a^3 \left[\frac{9}{7 \cdot \lambda^7} - \frac{1}{5\lambda^5} \right]_{\lambda=-\sqrt{3}}^{\lambda=\sqrt{3}} = \frac{144}{35} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \cdot a^8$$

und diejenige von O_y einen Körper vom Inhalte

$$V_y = \pi \cdot \int_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{3}} \frac{9\,a^2}{\lambda^2} \left[\frac{9}{\lambda^4} - \frac{6}{\lambda^2} + 1 \right] \cdot -18\,a \cdot \lambda^{-3} \cdot d\lambda$$

$$= 9 \cdot 18 \cdot \pi \cdot a^3 \int_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{3}} [-9\lambda^{-9} + 6\lambda^{-7} - \lambda^{-5}] \cdot d\lambda$$

$$= 9 \cdot 18 \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \left[\frac{9}{8\lambda^8} - \frac{1}{\lambda^6} + \frac{1}{4\lambda^4}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{3}},$$

und dies ergibt, weil das an der untern Grenze auftretende vieldeutige Symbol den Wert Null hat,

$$V_y = 9 \cdot 18 \cdot \pi \cdot a^3 \cdot \left[\frac{9}{24 \cdot 9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4 \cdot 9}\right] = \frac{3}{4} \pi \cdot a^3;$$

dies ist $= \frac{9}{16}$ des Inhaltes einer Kugel vom Radius a.

Substituiert man in der für diesen Unterfall geltenden Kurvengleichung für k kleinere und grössere Werte als $\frac{1}{2}$, so werden die zugehörigen Kurvengleichungen, wenn ihre gebrochenen Exponenten durch fortgesetztes Quadrieren ganzzahlig gemacht werden, immer mehrgliedriger. Mit veränderlichem k ändert sich die Lage des Knotens und der Knotentangenten, während die x-Achse in allen Fällen Scheiteltangente bleibt.

Für alle von $\frac{1}{2}$ abnehmenden k nähert sich der Knoten dem Punkte $y = a$ der Ordinatenachse. Die Kurve wird schmäler; der Winkel, den die Doppelpunktstangenten bilden, nimmt beständig ab, und die Doppelpunktstangenten, wie die Kurvenäste, schmiegen sich mehr und mehr der y-Achse an. Für den untern Grenzfall, also für $k = \frac{p}{q} = \frac{1}{\infty\,(\text{gerade})} = 0$, fällt der Knotenpunkt in $y = a$ der Ordinatenachse. Der von den Doppelpunktstangenten eingeschlossene Winkel wird zu 0^0, und die Doppelpunktstangenten, wie die Kurvenäste, fallen ihrer ganzen Ausdehnung nach in die y-Achse. Für diesen Grenzfall reduzieren sich somit die beiden Kurvenäste auf die doppelt gelegte y-Achse von $+\infty$ bis zum Ursprunge.

Nimmt k dagegen von $\frac{1}{2}$ an zu, so entfernt sich der Knoten auf der y-Achse immer mehr von der x-Achse; der von den Doppelpunktstangenten eingeschlossene Winkel wird immer grösser und die ganze Schleife breiter. Wird $k = \frac{p}{q} = \frac{\infty\,(\text{ungerade})}{\infty\,(\text{gerade})}$, so fallen Knoten und Doppelpunktstangenten ins Unendliche. Der von den Doppelpunktstangenten eingeschlossene Winkel wird zu 180°, und der im Endlichen liegende Teil der Kurve wird in die x-Achse gedrängt. Der P ∞ der Kurve ist für alle Fälle ein Inflexionspunkt, und die g ∞ ist stets Wendetangente in ihm mit mehr oder weniger innigerer Berührung.

Die Bewegung der beiden Punkte A und B gestaltet sich im endlichen Gebiete für diesen Unterfall auf folgende Weise:

B kommt mit der k-fachen Geschwindigkeit des A aus $+\infty$ und verfolgt den aus $-\infty$ auf der x-Achse heranrückenden Punkt A. Ist B im Knotenpunkte E, bezw. im Punkte D, angelangt, so ist A bis zu G, dem Schnittpunkte der Doppelpunktstangente mit der x-Achse, bezw. bis J, dem Schnittpunkte der Tangente in D mit der x-Achse, vorgerückt. Im Ursprung, im Scheitel der Schleife, treffen sich die beiden Punkte, und nun tritt B auf die Fluchtbahn, d. h. bewegt sich von jetzt an immer so, dass er in jedem Augenblicke in der Richtung der Tangente durch A entflieht. Ist A bis H, dem Schnittpunkte der 2. Doppelpunktstangente mit der x-Achse, vorgerückt, so ist der Punkt B zum 2. Male im Knoten E angelangt. Von hier aus bewegen sich A in Pfeilrichtung nach $+\infty$ und B auf der Fluchtbahn nach $-\infty$.

Unterfall 2. $k = \frac{p}{r} = \frac{\text{ungerade Zahl}}{\text{ungerade Zahl}}$, wobei $p < r$.

Setzt man den Wert von k in die symmetrische Gleichung ein, so bekommt man

$$x = \frac{y^{\frac{r+p}{r}}}{2\left(\frac{r+p}{r}\right)a^{\frac{p}{r}}} - \frac{a^{\frac{p}{r}}\,y^{\frac{r-p}{r}}}{2\left(\frac{r-p}{r}\right)}.$$

Da $r+p$, wie $r-p$ stets gerade Zahlen bedeuten, so liefert die Gleichung für dieselben positiven und negativen Werte von y nur je einen Wert von x, der positiv oder negativ sein kann. Die Kurve liegt somit symmetrisch zur Abscissenachse. Für $y = 0$ wird $x = 0$. Es ist ferner

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^{\frac{p}{r}}}{2a^{\frac{p}{r}}} - \frac{a^{\frac{p}{r}}}{2y^{\frac{p}{r}}}.$$

Setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so erhält man

$$y^{\frac{2p}{r}} = a^{\frac{2p}{r}}, \quad \text{w. f.} \quad y = \pm a.$$

Werte für y in der C-Gleichung eingesetzt, liefert

$$x = \frac{a^{\frac{r+p}{r}}}{2\left(\frac{r+p}{r}\right) a^{\frac{p}{r}}} - \frac{a^{\frac{p}{r}} \cdot a^{\frac{r-p}{r}}}{2\left(\frac{r-p}{r}\right)} = \frac{r}{2} \cdot \left[\frac{a}{r+p} - \frac{a}{r-p}\right]$$

$$= -\frac{r \cdot p}{r^2 - p^2} \cdot a; \qquad \text{ferner ist}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{p}{2r} \cdot \left[\frac{y^{\frac{p-r}{r}}}{a^{\frac{p}{r}}} - \frac{a^{\frac{p}{r}}}{y^{\frac{p+r}{r}}}\right]. \qquad y = \pm a \text{ gesetzt, liefert}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{p}{2r} \cdot \left[a - \frac{1}{a}\right] = \text{positiv, wenn } a > 1 \text{ vorausgesetzt wird.}$$

Da also die 2. Ableitung von x positiv ausfällt, so liefert $y = \pm a$ für $x = -\frac{r \cdot p}{r^2 - p^2} \cdot a = -\frac{k}{1-k^2} a$ zwei Minimalwerte. Die Punkte $y = \pm a$, $x = -\frac{r \cdot p}{r^2 - p^2} a = -\frac{k}{1-k^2} \cdot a$ sind Scheitelpunkte, und die zugehörige Scheitel- und Doppeltangente hat die Gleichung $x = -\frac{r \cdot p}{r^2 - p^2} \cdot a = -\frac{k}{1-k^2} \cdot a$. Setzt man in der C-Gleichung $x = 0$, so erhält man

$$\frac{y^{\frac{r+p}{r}}}{(r+p) \cdot a^{\frac{p}{r}}} - \frac{a^{\frac{p}{r}} \cdot y^{\frac{r-p}{r}}}{r-p} = 0, \qquad \text{oder}$$

$$y \cdot \left[y^{\frac{p}{r}}(r-p) - a^{\frac{2p}{r}}(r+p)\, y^{-\frac{p}{r}}\right] = 0, \qquad \text{w. f.}$$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad y^{\frac{p}{r}}(r-p) - a^{\frac{2p}{r}}(r+p)\, y^{-\frac{p}{r}} = 0, \qquad \text{oder}$$

$$y^{\frac{2p}{r}}(r-p) - a^{\frac{2p}{r}}(r+p) = 0,$$

also $y = \pm\left(\frac{r+p}{r-p}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a$. Die Kurve schneidet somit die y-Achse ausser im 0-Punkte noch in den Punkten

$$y = \pm\left(\frac{r+p}{r-p}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a = \pm\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2k}} \cdot a.$$

Ferner ist x stets negativ, solange $|y| < \left(\frac{r+p}{r-p}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a$ und stets positiv, solange $|y| > \left(\frac{r+p}{r-p}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a$ ist; denn angenommen y sei um einen kleinern Betrag kleiner, also z. B.

$$= \pm \left(\frac{r+p}{r-p} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a,$$

so wird vorerst

$$x = \frac{r}{2} \cdot \frac{y^{\frac{r-p}{r}}}{a^{\frac{p}{r}}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{2p}{r}}}{r+p} - \frac{a^{\frac{2p}{r}}}{r-p}\right].$$

Ersetzt man hierin y durch $\pm \left(\frac{r+p}{r-p} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a$, so folgt

$$x = \frac{r}{p} \cdot \frac{\left[\pm \left(\frac{r+p}{r-p} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a\right]^{\frac{r-p}{r}}}{a^{\frac{p}{r}}} \cdot \left[\frac{a^{\frac{2p}{r}}}{r+p} \cdot \left(\frac{r+p}{r-p} - \frac{1}{n}\right) - \frac{a^{\frac{2p}{r}}}{r-p}\right]$$

$$= \pm \frac{r}{p} \cdot \frac{\left[\left(\frac{r+p}{r-p} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a\right]^{\frac{r-p}{r}}}{a^{\frac{p}{r}}} \cdot \left[\frac{a^{\frac{2p}{r}}}{r-p} - \frac{a^{\frac{2p}{r}}}{n(r+p)} - \frac{a^{\frac{2p}{r}}}{r-p}\right],$$

d. h. x = negativ. Ersetzt man dagegen y durch $\pm \left(\frac{r+p}{r-p} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a$, so wird der Ausdruck für x positiv. Wird y positiv und negativ grösser als $\left(\frac{r+p}{r-p}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a$, so nimmt x stetig zu und wird für $y = \pm\infty$ zu $x = +\infty$.

Das Wertepaar $x = 0$, $y = 0$ genügt, wie wir gefunden haben, der C-Gleichung. Da aber die Kurve symmetrisch zur x-Achse gelegen ist, so muss ihr der Punkt $x = 0$, $y = 0$ doppelt angehören. Die beiden C-Äste bilden somit im 0-Punkte eine Spitze mit der x-Achse als Spitzentangente, was auch sofort aus der Kurvengleichung folgt.

Als Beispiel führen wir an

$$k = \frac{p}{r} = \frac{\text{ungerade Zahl}}{\text{ungerade Zahl}} = \frac{1}{3}.$$

Die Geschwindigkeit des verfolgenden Punktes B ist 3 mal so gross als diejenige des verfolgten Punktes A. Setzt man den Wert $k = \frac{1}{3}$ in der für diesen Unterfall geltenden C-Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{3 \cdot y^{\frac{4}{3}}}{8\,a^{\frac{1}{3}}} - \frac{3\,a^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}}}{4}, \quad \text{oder } 3\,y^{\frac{2}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}} - 2\,a^{\frac{2}{3}}\right) = 8\,a^{\frac{1}{3}}x.$$

Wir erheben diese Gleichung in die 3. Potenz und bekommen

$$27\,y^2\left[y^2 - 6\,a^{\frac{2}{3}}\,y^{\frac{4}{3}} + 12\,a^{\frac{4}{3}}\,y^{\frac{2}{3}} - 8a^2\right] = 512\,a\,x^3$$

$$27\,y^2\left[y^2 - 8\,a^2\right] - 27\,y^2 \cdot 6\,a^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}} - 2\,a^{\frac{2}{3}}\right) = 512\,a\,x^3$$

$$27\,y^2(y^2 - 8\,a^2) - 54\,a^{\frac{2}{3}}\,y^2 \cdot 3\,y^{\frac{2}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}} - 2\,a^{\frac{2}{3}}\right) = 512\,a\,x^3.$$

Der Faktor des zweiten Gliedes stimmt vollständig mit der linken Seite unserer Ausgangsgleichung überein, und wir erhalten

$$27\,y^2 \cdot (y^2 - 8\,a^2) - 54\,a^{\frac{2}{3}}\,y^2 \cdot 8\,a^{\frac{1}{3}}\,x = 512\,a\,x^3,$$

oder $27\,y^4 - 216\,a^2y^2 - 432\,a\,y^2x - 512\,a\,x^3 = 0.$

Die C-Gleichung ist von der 4. Ordnung und beginnt mit Gliedern 2. Grades; der 0-Punkt ist somit ein Doppelpunkt der Kurve. Die Gleichungen der Doppelpunktstangenten erhält man, indem man die quadratischen Glieder $= 0$ setzt, und es folgt $-216\,a^2y^2 = 0$, oder $y = 0$, die x-Achse doppelt. Die Tangenten im Doppelpunkte sind reell und zusammenfallend; der Doppelpunkt ist somit eine Spitze mit der x-Achse als Spitzentangente. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten liegen in den Punkten $y = \pm a$, $x = -\frac{3}{8}a = -0{,}37\,a$, und die zugehörige Scheiteltangente, bezw. die Doppeltangente, hat die Gleichung $x = -\frac{3}{8}a$ Die Kurve schneidet die y-Achse ausser im Ursprung noch in den Punkten $y = \pm\left(\frac{r+p}{r-p}\right)^{\frac{r}{2p}} \cdot a = \pm 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a = 2{,}82\,a.$

Die C Gleichung liefert für alle $y < 2 \cdot \sqrt{2}\,a$ nur negative, für alle $y > 2\sqrt{2}\,a$ dagegen nur positive Abscissen. Die Untersuchung des $P\infty$ zeigt, dass dieser ein einfacher Punkt ist, durch welchen die Kurve auch nur einfach hindurch geht. Die $g\infty$ ist Tangente an die Kurve mit 4 punktiger Berührung; ihre Parameterdarstellung lautet nach (24)

$$y=\lambda a, \quad x=\frac{a}{2}\cdot\left[\frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]=a\left[\frac{3\lambda^{\frac{4}{3}}}{8}-\frac{3\lambda^{\frac{2}{3}}}{4}\right].$$

Erteilt man dem λ in obigen Gleichungen verschiedene, aufeinanderfolgende Werte, so erhält man:

Für	$\lambda=\pm 0$	1	2	3	4	∞
wird	$y=\pm 0\,a$		2 a	3 a	4 a	∞
und	$x=$ 0	$-0{,}37$ a	$-0{,}25$ a	$+0{,}06$ a	$+0{,}49$ a.	$+\infty$.

Wie die Konstruktion (Fig. 7) zeigt, besitzt unsere Kurve zwei kongruente, symmetrisch zur x-Achse gelegene Äste, die im Ursprung eine Spitze bilden mit der x-Achse als Spitzentangente. Die Gerade $x=-\frac{3}{8}a$, die ursprüngliche y-Achse, ist Scheitel- und Doppeltangente an die Kurve. Auf der Westseite derselben besitzt die Kurve keine reellen Punkte.

Nach der Rektifikationsformel hat das Bogenstück EO, wo E der Schnittpunkt der Kurve mit der positiven y-Achse ist, die Länge

$$s=\frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^3}}=\frac{3}{8}a\left[\lambda^{\frac{4}{3}}+2\lambda^{\frac{2}{3}}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{2^3}}$$

$=\frac{3}{8}a\cdot\left[2^2+2\cdot 2\right]=3a$, und bildet mit der y-Achse die Fläche

$$F_y=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\lambda^{\frac{7}{3}}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}-\frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}\right]_{\lambda=\sqrt{2^3}}^{\lambda=0}=\frac{9}{2}a^2\left[\frac{\lambda^{\frac{7}{3}}}{28}-\frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{10}\right]_{\lambda=\sqrt{2^3}}^{\lambda=0}$$

$$=\frac{9}{2}a^2\left[-\frac{(\sqrt{2^3})^{\frac{7}{3}}}{28}+\frac{(\sqrt{2^3})^{\frac{5}{3}}}{10}\right]=\frac{18}{35}\sqrt{2}\,a^2=0{,}73\,a^2.$$

Rotiert dieser Bogen EO um die x-Achse, so beschreibt er eine Oberfläche von

$$O_x = \pi a^2 \left[\frac{\lambda^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \frac{3 \cdot \pi \cdot a^2}{35} \left[5\lambda^{\frac{7}{3}} + 7\lambda^{\frac{5}{3}} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{2^3}}$$

$$= \frac{3}{35} \cdot \pi \cdot a^2 \left[5 \cdot \left(\sqrt{2^3}\right)^{\frac{7}{3}} + 7\left(\sqrt{2^3}\right)^{\frac{5}{3}} \right] = \frac{204}{35} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot a^2 = 25{,}89\, a^2$$

und schliesst einen Körper ein vom Volumen

$$V_x = \frac{a^3 \cdot \pi}{2} \left[\frac{\lambda^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} - \frac{\lambda^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{2^3}} = \frac{3}{160} \cdot \pi \cdot a^3 \left[8\lambda^{\frac{10}{3}} - 10\lambda^{\frac{8}{3}} \right]_{\lambda=0}^{\lambda=\sqrt{2^3}}$$

$$= \frac{3}{160} \cdot \pi \cdot a^3 \left[8 \cdot \left(\sqrt{2^3}\right)^{\frac{10}{3}} - 10\left(\sqrt{2^3}\right)^{\frac{8}{3}} \right] = \frac{9}{5} \cdot \pi \cdot a^3 = 5{,}65\, a^3.$$

Rotiert dagegen der Bogen ODE um die y-Achse, so beschreibt er eine Oberfläche von

$O_y = \frac{3}{2} \pi \cdot a^2 = 4{,}71\ a^2$ und schliesst einen Körper in sich vom Volumen

$$V_y = \frac{12}{77} \sqrt{2} \cdot \pi \cdot a^3 = 0{,}69\, a^3.$$

Ersetzt man in der C-Gleichung k durch kleinere Werte als $\frac{1}{3}$, so nähern sich die Scheitelpunkte D und D′ und mit ihnen die gemeinschaftliche Scheiteltangente und Doppeltangente der y-Achse und die Schnittpunkte E und E′ der Kurve mit der y-Achse den Punkten $y = \pm a$. Für den untern Grenzfall, also für $k = \frac{1}{\infty} = 0$, fällt die Doppeltangente in die y-Achse; die Schnittpunkte E, bezw. E′, der Kurve mit dieser fallen mit den Scheiteln D, bezw. D′, in $y = a$, bezw. $y = -a$, zusammen, und unsere Kurve reduziert sich auf die einfache y-Achse von $+\infty$ bis $-\infty$.

Mit von $\frac{1}{3}$ an steigendem k entfernen sich die Doppeltangente, wie die Schnittpunkte E und E′ der Kurve mit der y-Achse immer mehr von dem O-Punkte und fallen für den obern Grenzfall $k = \frac{p}{r} = \frac{\infty \text{ (ungerade)}}{\infty \text{ (ungerade)}}$ ins Unendliche; die Kurve reduziert sich dabei im endlichen Gebiete auf zwei der negativen Hälfte der x-Achse unendlich benachbarte Geraden, die im Ursprung zu einer Spitze zusammenlaufen.

Die Bewegung der beiden Punkte gestaltet sich für diesen Unterfall in gleicher Weise, wie die Verfolgungsbewegung im vorigen Unterfalle. Im Ursprunge aber, also im Punkte, wo A und B zusammenstossen, hört die Bewegung plötzlich auf. Der Lauf von B kann hier auch auf dem zur x-Achse symmetrischen Kurvenaste im III. und IV. Quadranten erfolgen.

Unterfall 3. $k = \frac{q}{r} = \frac{\text{gerade Zahl}}{\text{ungerade Zahl}}$, wo $r > q$.

Setzt man den Wert von k in der symmetrischen Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{y^{\frac{r+q}{r}}}{2\left(\frac{r+q}{r}\right)a^{\frac{q}{r}}} - \frac{a^{\frac{q}{r}} \cdot y^{\frac{r-q}{r}}}{2\left(\frac{r-q}{r}\right)} = \frac{r}{2} \frac{y^{\frac{r-q}{r}}}{a^{\frac{q}{r}}} \cdot \left[\frac{y^{\frac{2q}{r}}}{r+q} - \frac{a^{\frac{2q}{r}}}{r-q}\right].$$

Je nachdem y pos. oder neg. ist, wird $y^{\frac{r-q}{r}}$ ebenfalls positiv oder negativ. Da ferner $y^{\frac{2q}{r}}$ für positive und negative Werte stets positiv ausfällt, so liefert unsere C-Gleichung für dieselben positiven und negativen Werte von y dieselben Werte von x, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Kurve liegt also symmetrisch zum 0-Punkt. Für $y = o$ wird $x = o$. Ferner wird

$$\frac{dx}{dy} = \frac{r}{2}\left[\frac{y^{\frac{q}{r}}}{a^{\frac{q}{r}}} - \frac{a^{\frac{q}{r}}}{y^{\frac{q}{r}}}\right].$$ Die 1. Ableitung $= 0$ gesetzt, liefert

$y^{\frac{2q}{r}} = a^{\frac{2q}{r}}$, also $y = \pm a$. Werte von y in der C-Gleichung eingesetzt, ergibt

$$x = \frac{r}{2} \cdot \left[\frac{(\pm a)^{\frac{r+q}{r}}}{(r+q) \cdot a^{\frac{q}{r}}} - \frac{a^{\frac{q}{r}} \cdot (\pm a)^{\frac{r-q}{r}}}{(r-q)}\right] = \pm \frac{r}{2}\left[\frac{a}{r+q} - \frac{a}{r-q}\right]$$

$= \mp \frac{r \cdot q}{r^2 - q^2} \cdot a$. Die 2. Ableitung wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{y^{\frac{q-r}{r}}}{a^{\frac{q}{r}}} + \frac{a^{\frac{q}{r}}}{y^{\frac{q+r}{r}}} \right].$$

$y = \pm a$ gesetzt, liefert

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{(\pm a)^{\frac{q-r}{r}}}{a^{\frac{q}{r}}} + \frac{a^{\frac{q}{r}}}{(\pm a)^{\frac{q+r}{r}}} \right] = \pm \frac{q}{2} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right]$$

$$= \pm \frac{q}{a}, \text{ d. h.}$$

$y = + a$ macht $x = - \frac{r \cdot q}{r^2 - q^2} \cdot a = - \frac{k \cdot a}{1 - k^2}$ zu einem Minimalwerte und

$y = - a$ » $x = + \frac{r \cdot q}{r^2 - q^2} \cdot a = + \frac{k \cdot a}{1 - k^2}$ zu einem Maximalwerte.

Die Kurve schneidet die y-Achse ausser im Punkte $x = 0$, $y = 0$ noch in den Punkten $y = \pm \sqrt{\left(\frac{r+q}{r-q}\right)^{\frac{r}{q}}} \cdot a$; denn setzt man in der C-Gleichung $x = \frac{r}{2} \cdot y \left[\frac{y^{\frac{q}{r}}}{(r+q) a^{\frac{q}{r}}} - \frac{a^{\frac{q}{r}} y^{-\frac{q}{r}}}{(r-q)} \right]$ $x = 0$, so folgt $y = 0$ und

$$\frac{y^{\frac{q}{r}}}{(r+q) \cdot a^{\frac{q}{r}}} - \frac{a^{\frac{q}{r}} y^{-\frac{q}{r}}}{(r-q)} = 0, \text{ also } y^{\frac{2q}{r}} (r-q) = a^{\frac{2q}{r}} \cdot (r+q),$$

oder $y = \pm \sqrt{\left(\frac{r+q}{r-q}\right)^{\frac{r}{q}}} \cdot a = \pm a \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{\frac{1}{2k}}$. Wird y pos. und neg. grösser als $\sqrt{\left(\frac{r+q}{r-q}\right)^{\frac{r}{q}}} \cdot a$, so nimmt x pos. und neg. zu und wird für $y = \pm \infty$ zu $x = \pm \infty$.

Als Beispiel dieses Unterfalls sei hierorts der Fall

$$k = \frac{q}{r} = \frac{\text{gerade Zahl}}{\text{ungerade Zahl}} = \frac{2}{3}$$

angeführt. Setzt man den Wert von k in der C-Gleichung ein, so erhält man

$$x = \frac{y^{\frac{3+2}{3}}}{2\left(\frac{3+2}{3}\right)a^{\frac{2}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3-2}{3}}}{2 \cdot \left(\frac{3-2}{2}\right)} = \frac{3\,y^{\frac{5}{3}}}{10\,a^{\frac{2}{3}}} - \frac{3\,a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{2}, \quad \text{oder}$$

$3\,y^{\frac{1}{3}}\left[y^{\frac{4}{3}} - 5\,a^{\frac{4}{3}}\right] = 10\,a^{\frac{2}{3}}x$. Wir erheben diese Gleichung in die 3. Potenz und bekommen

$$27\,y\left[y^4 - 15\,a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{3}} + 75\,a^{\frac{8}{3}}y^{\frac{4}{3}} - 125\,a^4\right] = 1000\,a^2x^3$$

$$27\,y^5 - 405\,a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{11}{3}} + 2025\,a^{\frac{8}{3}}y^{\frac{7}{3}} - 3375\,a^4y - 1000\,a^2x^3 = 0$$

$$27\,y^5 - 135\,a^{\frac{4}{3}}y^2 \cdot \left[3\,y^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{4}{3}} - 5\,a^{\frac{4}{3}}\right)\right] - 3375\,a^4y - 1000\,a^2x^3 = 0.$$

Der eingeklammerte Faktor des 2. Gliedes stimmt aber vollständig mit der linken Seite der Ausgangsgleichung überein; wir erhalten somit als C-Gleichung den Ausdruck

$$27\,y^5 - 1350\,a^2y^2x - 3375\,a^4y - 1000\,a^2x^3 = 0.$$

Die Gleichung ist von der 5. Ordnung und beginnt mit Gliedern ersten Grades; die Kurve geht deshalb einfach durch den 0-Punkt und die x-Achse berührt sie als Tangente in drei zusammenfallenden Punkten. Unsere Kurve besitzt somit im Ursprung einen Inflexionspunkt; die x-Achse ist zugehörige Wendetangente. Ausser im Punkte $y = 0$ schneidet die y-Achse die Kurve noch in den Punkten $y = \pm\left(\frac{r+q}{r-q}\right)^{\frac{r}{2q}} \cdot a = \pm 5^{\frac{3}{4}}\,a = \pm\,3{,}34\,a$. Die Scheitelpunkte haben die Koordinaten $y = \pm a$, $x = \mp\frac{r \cdot q}{r^2 - q^2} \cdot a$ $= \mp\frac{6}{5}\,a = \mp\,1{,}2\,a$ und ihre zugehörigen Scheiteltangenten besitzen die Gleichungen $x = \mp\frac{6}{5}\,a$. Der ∞ ferne Punkt der Kurve ist ein Doppelpunkt und zwar speziell eine Spitze mit der $g\infty$ als zugehörige Spitzentangente. Die Kurve hat die Parameterdarstellung

$$y = \lambda\,a, \quad x = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right] = \frac{3}{10}\,a\left[\lambda^{\frac{5}{3}} - 5\,\lambda^{\frac{1}{3}}\right].$$

Wir bestimmen einige Kurvenpunkte und erhalten:

Für $\lambda = \pm 0$	2	3	4	∞	wird
$y = \pm 0$	2a	3a	4a	∞	und
$x = \ 0$	$\mp 0{,}94\,a$	$\mp 0{,}29\,a$	$\pm 0{,}64\,a$	$\pm \infty$.	

Die Kurve (Fig. 8) besteht aus einem Kurvenaste, der sich von $+\infty$ durch den I., II., IV. und III. Quadranten nach $-\infty$ erstreckt. Der 0-Punkt ist ein Wendepunkt und die x-Achse Wendetangente.

Die Länge des Bogens ODE beträgt

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=5^{\frac{3}{4}}} = 3 \cdot \sqrt[4]{5}\,a = 4{,}49\,a.$$

Er schliesst mit der y-Achse eine Fläche ein vom Inhalte

$$F_x = \frac{a^2}{2} \cdot \left[\frac{\lambda^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=5^{\frac{3}{4}}} = \frac{45}{16}\,a^2 = 2{,}81\,a^2.$$

Rotiert dieser Bogen um die x-Achse, so beschreibt er eine Oberfläche vom Inhalt

$$O_x = \pi\,a^2\left[\frac{\lambda^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + \frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=5^{\frac{3}{4}}} = \frac{105}{8}\,\pi \cdot a^2 = 41{,}23\,a^2$$

und schliesst einen Körper ein vom Volumen

$$V_x = \frac{\pi\,a^3}{2}\left[\frac{\lambda^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} - \frac{\lambda^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=5^{\frac{3}{4}}} = \frac{180}{77} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot \pi \cdot a^3 = 20{,}85\,a^3.$$

Rotiert dagegen der Bogen ODE um die y-Achse, so beschreibt er eine Oberfläche vom Inhalt

$O_y = 8{,}43\,a^2$ und schliesst einen Körper ein vom Volumen

$$V_y = 8{,}67\,a^3.$$

Ersetzt man in der Kurvengleichung dieses Unterfalles k durch kleinere Werte als $\frac{2}{3}$, so nähern sich auch hier die Scheitel und die Scheiteltangenten der y-Achse und die jeweiligen Schnittpunkte E und E′ der Kurve mit der y-Achse den Punkten $y = \pm a$ derselben. Für den untern Grenzfall, nämlich für $k = \frac{2}{\infty \text{ (ungerade)}} = 0$, fallen die Scheitelpunkte und die 2. Schnittpunkte der Kurven-Halbäste mit der y-Achse in die Punkte $y = a$, bezw. $y = -a$, der y-Achse, in welch letztere auch gleichzeitig die beiden Scheiteltangenten übergehen. Unsere Kurve reduziert sich dabei auf die einfache y-Achse von $+\infty$ bis $-\infty$.

Nimmt dagegen k von $\frac{2}{3}$ an immer zu, so entfernen sich Scheitel und Scheiteltangenten, wie auch die jeweiligen Schnittpunkte E und E′ der Kurve mit der y-Achse und fallen für den obern Grenzfall $k = 1$ unendlich fern. Die Kurve drängt sich dabei im endlichen Gebiete in die x-Achse.

Die Verfolgungsbewegung auf der Nordseite der x-Achse geschieht hier in analoger Weise, wie in den beiden vorigen Fällen. Während aber im vorigen Unterfalle die beiden Punkte A und B im Ursprunge plötzlich zur Ruhe kamen, bewegt sich der Punkt A nach dem Zusammentreffen weiter über den 0-Punkt hinaus nach $+\infty$, und B entflieht in einer der Verfolgungskurve kongruenten Bahn, der Fluchtbahn, durch den IV. und III. Quadranten nach $-\infty$.

III. Hauptfall $k = 1$.

Ist die Geschwindigkeit des Punktes A gleich derjenigen des verfolgenden Punktes B, also $k = 1$, so findet man für die Verfolgungskurve die Gleichung

$$y^2 - 2a^2 \log \text{nat} \frac{y}{a} - 4ax - a^2 = 0,$$

die eine transzendente, speziell eine logarithmische Linie darstellt. Lösen wir diese Gleichung nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{y^2 - 2a^2 \log \frac{y}{a} - a^2}{4a} = \frac{y^2 - a^2 \log \left(\frac{y}{a}\right)^2 - a^2}{4a}.$$

Diese C-Gleichung liefert für dieselben pos. und neg. Werte von y nur ein pos. x. Die Kurve liegt somit symmetrisch zur x-Achse und ganz auf der Ostseite der y-Achse.

Nach dieser letzten Gleichung berechnen wir einige Kurvenpunkte, indem wir dem y aufeinanderfolgende Werte erteilen, und erhalten:

Für	$y = \pm 0$	0,1 a	0,2 a	0,5 a	a	2 a	∞	wird
	$x = +\infty$	0,91 a	0,56 a	0,16 a	0	0,41 a	∞.	

Die Kurve (Fig. 9) besteht auch hier aus zwei kongruenten Ästen, von denen der eine ganz im I., der andere ganz im IV. Quadranten liegt. Beide Äste berühren die y-Achse, die gemeinschaftliche Scheiteltangente und Doppeltangente, in den Punkten $x = \pm a$ und nähern sich sehr rasch asymptotisch der pos. x-Achse.

Aus der obigen C-Gleichung folgt

$$x = \frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2}\log y + \frac{a}{2}\log a - \frac{a}{4}.$$ Wir differentieren diese Gleichung und erhalten

$$dx = \frac{dy}{2ay}\left(y^2 - a^2\right),$$ also

$$dy = \frac{2ay}{y^2 - a^2}\,dx;$$ ferner ist

$$ds = dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = dy \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - a^2}{2ay}\right)^2}$$

$$= dy \cdot \sqrt{\frac{4a^2y^2 + y^4 - 2a^2y^2 + a^4}{4a^2y^2}} = \frac{y^2 + a^2}{2ay} \cdot dy.$$

Rektifikation: Bezeichnet man den Kurvenbogen mit s, so folgt

$$s = \int_{y1}^{y2}\left(\frac{y}{2a} + \frac{a}{2y}\right)dy;$$ integriert, liefert

$$s = \left[\frac{y^2}{4a} + \frac{a}{2}\log y\right]_{y1}^{y2} = \frac{a}{2}\left[\frac{y^2}{2a^2} + \log y\right]_{y1}^{y2}.$$

So hat z. B. der Bogen DC eine Länge von

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{y^2}{2a^2} + \log y\right]_{y=a}^{y=2a} = \frac{a}{2}\left[\frac{4a^2}{2a^2} + \log 2a - \frac{a^2}{2a^2} - \log a\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[1{,}5 + \log 2\right] = \frac{a}{2}\left[1{,}5 + 0{,}69\right] = 1{,}09\,a.$$

Quadratur: Bezeichnen wir die von dem Kurvenbogen, der y-Achse und zwei Abszissen eingeschlossene Fläche mit F_y, so wird diese

$$F_y = \int_{y1}^{y2} x \cdot dy = \int_{y1}^{y2}\left[\frac{y^2}{4a} - \frac{a}{2}\log\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{a}{4}\right] dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{12a} - \frac{a}{4}\,y\right]_{y1}^{y2} - \int_{y1}^{y2}\frac{a}{2}\log\left(\frac{y}{a}\right) dy \quad .$$

Nun ist aber

$$\int \frac{a}{2}\log\left(\frac{y}{a}\right) dy = \frac{a}{2}\,y \cdot \log\frac{y}{a} - \frac{a}{2}\,y\,, \qquad \text{also}$$

$$F_y = \left[\frac{y^3}{12a} + \frac{a}{2}\,y - \frac{a}{2}\,y \cdot \log\frac{y}{a} - \frac{a}{4}\,y\right]_{y1}^{y}.$$ Für die Grenzen $y_1 = 0$ und $y_2 = a$ wird

$$F_y = \left[\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{a}{a} - \frac{a^2}{4}\right] = \frac{a^2}{3},$$ und dies ist der Inhalt des ∞ langen Flächenstreifens, der vom Kurvenaste DE $+\infty$ und der pos. x-Achse eingeschlossen wird; er hat also einen endlichen Inhalt.

Kubatur: Den durch Rotation der Fläche F_y um die y-Achse entstehende Körper habe das Volumen V_y; dann ist

$$V_y = \int_{y1}^{y2} x^2 \cdot \pi \cdot dy = \pi \cdot \int_{y1}^{y2}\left[\frac{y^2 - 2a^2\log\left(\frac{y}{a}\right) - a^2}{4a}\right]^2 \cdot dy$$

$$= \frac{\pi}{16a^2} \cdot \int_{y1}^{y2}\left[y^4 - 4a^2y^2\log\left(\frac{y}{a}\right) + 4a^4\left(\log\frac{y}{a}\right)^2 - 2a^2y^2 + 4a^4\log\frac{y}{a} + a^4\right] dy$$

$$= \frac{\pi}{16a^2}\left\{\left[\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3}\,a^2y^3 + a^4y\right]_{y1}^{y2} - \underbrace{\int_{y1}^{y2} 4a^2y^2\log\left(\frac{y}{a}\right) dy}_{A}\right.$$

$$\left. + \underbrace{\int_{y1}^{y2} 4a^4\left(\log\frac{y}{a}\right)^2 dy}_{B} + \underbrace{\int_{y1}^{y2} 4a^4\log\left(\frac{y}{a}\right) dy}_{C}\right\}.$$ Es ist nun

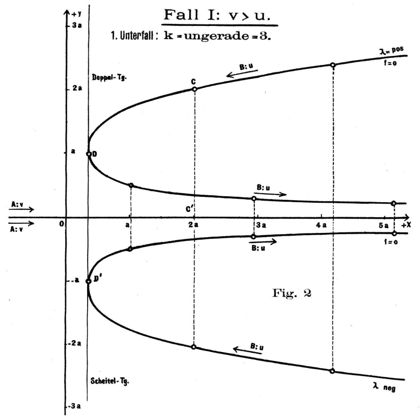

Fig. 2

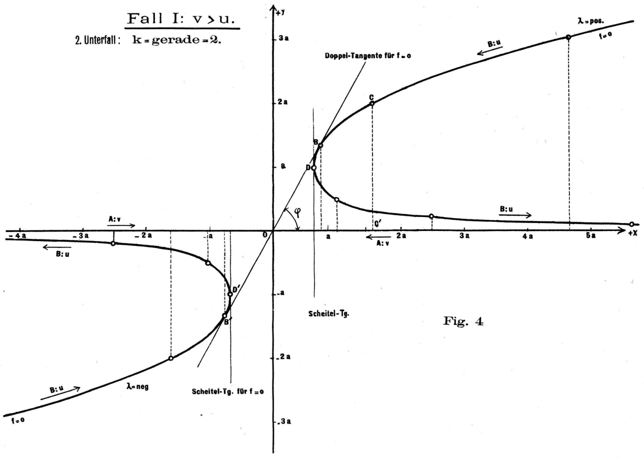

Fig. 4

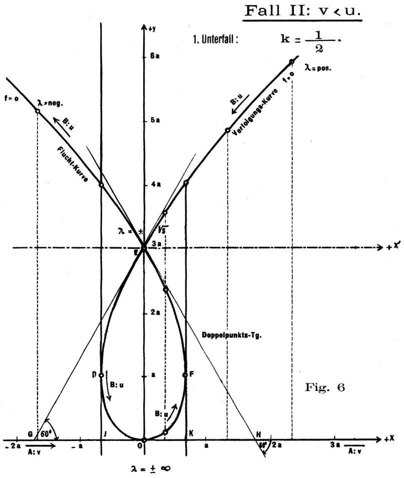

Fig. 6

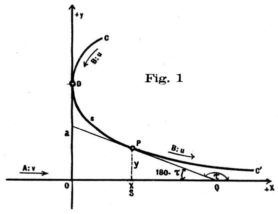

Fig. 1

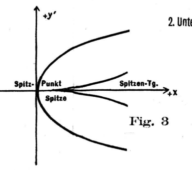

Fig. 3

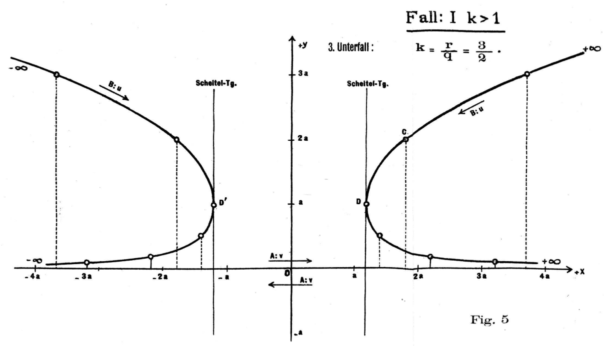

Fig. 5

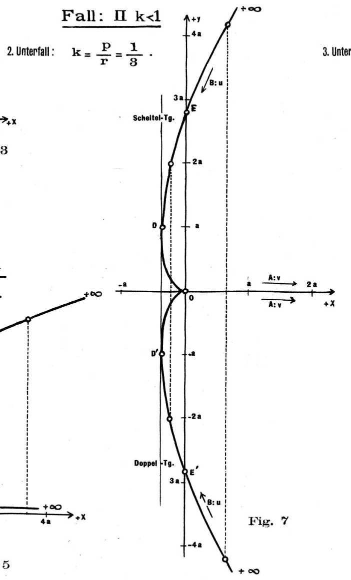

Fig. 7

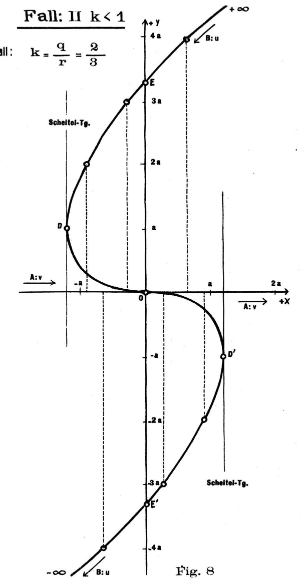

Fig. 8

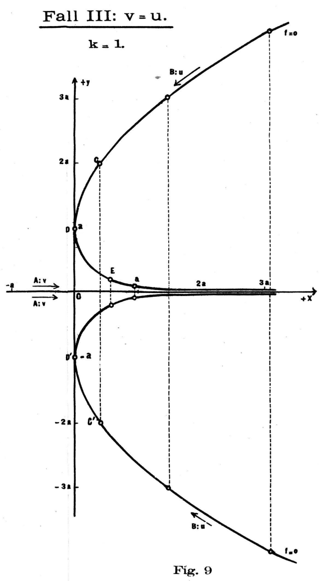

Fig. 9

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$u = \log \frac{y}{a} \qquad du = \frac{dy}{y} \qquad u \cdot v = \frac{4}{3} a^2 y^3 \log \frac{y}{a}$$

$$dv = 4 a^2 y^2 dv \quad v = \frac{4}{3} a^2 y^3 \quad \int v \cdot du = \int \frac{4}{3} a^2 y^2 \, dy = \frac{4}{9} a^2 y^3$$

$$A = \int 4 a^2 y^2 \log \frac{y}{a} \, dy = \frac{4}{3} a^2 y^3 \log \frac{y}{a} - \frac{4}{9} a^2 y^3 \quad ;$$

auf gleiche Weise gibt

$$B = \int 4 a^4 \left(\log \frac{y}{a}\right)^2 dy = 4 a^4 y \left(\log \frac{y}{a}\right)^2 - 2 \cdot \int 4 a^4 \log \frac{y}{a} \cdot dy$$

und

$$C = \int 4 a^4 \log \frac{y}{a} \, dy = 4 a^4 y \log \frac{y}{a} - 4 a^4 y \; ;$$ es wird somit

$$V_y = \frac{\pi}{16 a^2} \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} a^2 y^3 + a^4 y - \frac{4}{3} a^2 y^3 \log \frac{y}{a} + \frac{4}{9} a^2 y^3 + 4 a^4 y \left(\log \frac{y}{a}\right)^2 - 4 a^4 y \log \frac{y}{a} + 4 a^4 y \right]_{y1}^{y2} .$$

Für die Grenzen $y_1 = 0$ und $y_2 = a$ wird

$$V_y = \frac{\pi}{16 a^2} \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2}{9} a^2 y^3 + 5 a^4 y - \left(\log \frac{y}{a}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} a^2 y^3 - 4 a^4 y \log \frac{y}{a} + 4 a^4 y \right) \right]_{y=0}^{y=a}$$

$$= \frac{\pi}{16 a^2} \left[\frac{a^5}{5} - \frac{2}{9} a^5 + 5 a^5 \right] = \frac{14}{45} \pi \cdot a^3 = 0{,}98 a^3 \; ;$$ dies ist der Inhalt des Körpers, der durch Rotation der Fläche DO ∞ um die y-Achse entsteht.

Die Verfolgungsbewegung für $k = 1$ kommt derjenigen des 1. Unterfalles von Hauptfall I ziemlich nahe und kann hier wie dort im I. oder IV. Quadranten stattfinden.

Benutzte Literatur:

Kollegienhefte der Seminarvorträge des Herrn Prof. Dr. G. Huber in Bern vom S. S. 1902.

Gino-Loria, Ebene Kurven, Leipzig, 1902.

Nouvelles annales de Math. VIII. 1849.

Mathesis VI.

M. v. Prittwitz, Leipzig, 1816.

Klügel, Wörterbuch der Mathematik.