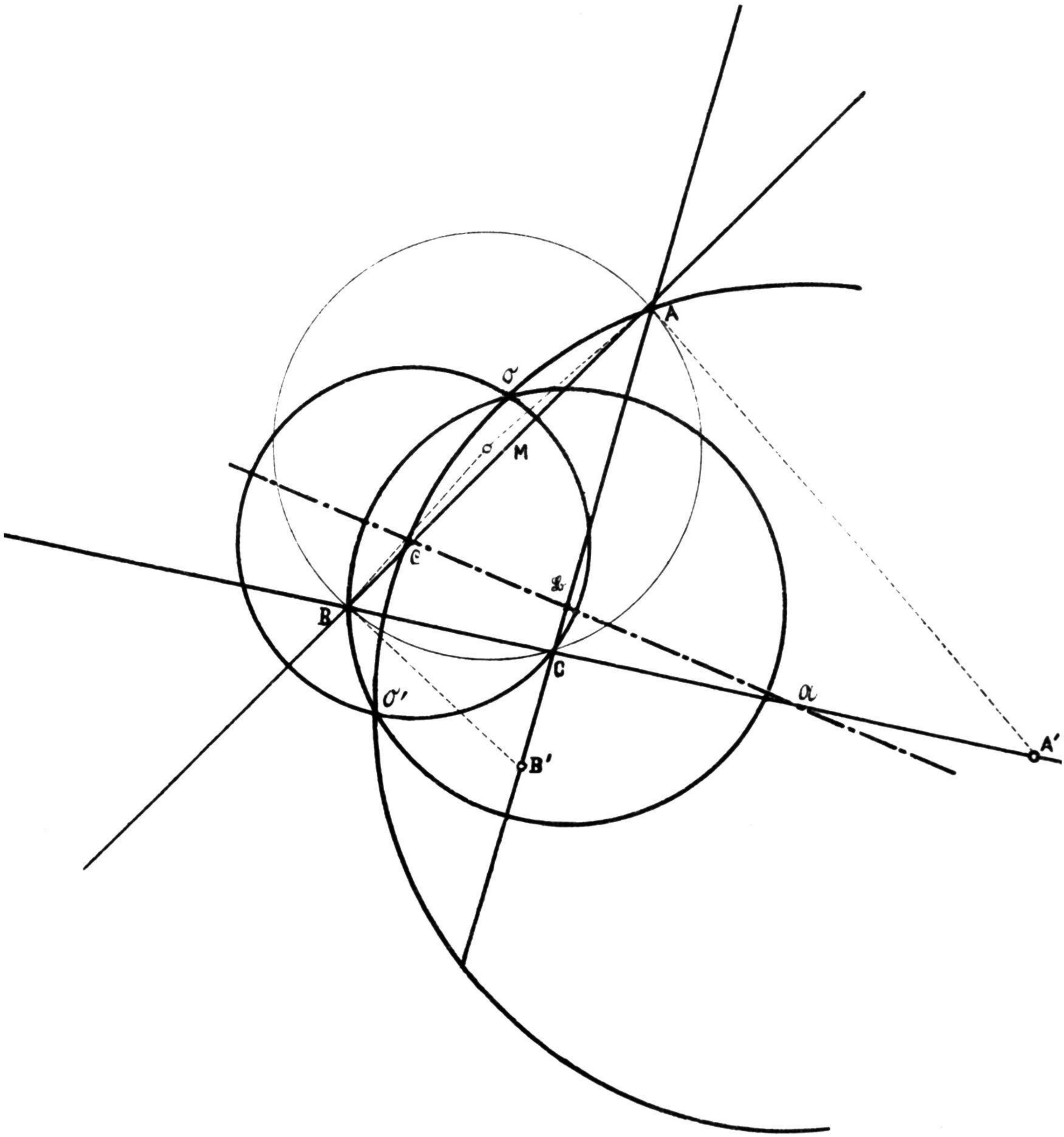
Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1909)
Heft: 1701-1739

Artikel: Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel
Autor: Schenker, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319198



A
M
B
C
A'
B'

O. Schenker.

Über eine dem ebenen Dreieck eingeschriebene Parabel.

(Eingereicht den 31. Oktober 1908).

Die Seiten eines Dreiecks (ABC) umhüllen mit der Zentralen (A′B′C′) der Apollonischen Kreise eine Parabel, der die folgende Eigenschaft zukommt: Bestimmt man von irgend einer ihrer Tangenten die Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$) mit den resp. Dreiecksseiten (BC CA, AB), so treffen sich die Kreise mit diesen Schnittpunkten zu Zentren, durch die resp. Dreiecksecken (A, B, C) in zwei Punkten O und O′.

Beweis: M sei der Mittelpunkt des Umkreises (siehe Figur), A′, B′ und C′ seien die Zentren der Apollonischen Kreise, so stehen bekanntlich AA′, BB′ und CC′ bezw. senkrecht zu AM, BM und CM. Die Seite AB bestimmt mit A′B′ auf den Seiten CA und CB zwei ähnliche Punktreihen ($\mathfrak{B}$... und $\mathfrak{A}$...). Und die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte ($\mathfrak{B}$... und $\mathfrak{A}$...) umhüllen unsere Parabel. Zwei Paare entsprechender Punkte sind A, A′ und B, B′ und sei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein beliebiges drittes Paar, so besteht die Relation:

$$\frac{BA'}{AB'} = \frac{B\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} \tag{1}$$

Wenn wir in trimetrischen Koordinaten rechnen und das Dreieck ABC zum Grunddreieck wählen (also einen beliebigen Punkt P durch seine Abstände x_1, x_2 und x_3 von den bezw. Dreiecksseiten bestimmen), so müssen wir zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zunächst die Strecken berechnen: $B\mathfrak{A}$, $C\mathfrak{A}$, $A\mathfrak{B}$ und $C\mathfrak{B}$. Setzt man $\mathfrak{B}B' = p$, so ist $\underline{A\mathfrak{B}} = AB' - p$,

$\underline{\mathfrak{B}C} = \sin B - A\mathfrak{B}$ (Der Kreis um ABC hat hiebei den Durchmesser 1), $\underline{B\mathfrak{A}} = \frac{BA'}{AB'} \cdot A\mathfrak{B}$ nach (1) und $\underline{C\mathfrak{A}} = B\mathfrak{A} - \sin A$.

Man findet aber leicht für AB' und $A'B$:

$$AB' = \frac{\sin^2 C}{\sin(C - A)}\,; \qquad BA' = \frac{\sin^2 C}{\sin(C - B)}$$

somit wird:

$$\underline{A\mathfrak{B}} = \underline{\frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)}}$$

$$\underline{\mathfrak{B}C} = \frac{\sin B \cdot \sin(C - A) - \sin^2 C + p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)}$$

$$= \frac{\frac{\cos 2A - \cos 2C}{2} - \sin^2 C + p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)}$$

$$= \frac{\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 C + p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)} \qquad \text{oder}$$

$$\underline{\mathfrak{B}C} = \underline{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A : \sin(C - A)}$$

$$B\mathfrak{A} = \frac{\sin(C - A)}{\sin(C - B)} \cdot \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - A)} \qquad \text{oder}$$

$$\underline{B\mathfrak{A}} = \underline{\frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - B)}}$$

$$C\mathfrak{A} = \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - B)} - \sin A$$

$$= \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A) - \sin A \cdot \sin(C - B)}{\sin(C - B)}$$

$$= \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A) + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin(C - B)} \qquad \text{oder}$$

$$C\mathfrak{A} = \sin^2 B - p \cdot \sin(C - A) : \sin(C - B).$$

Die Strecken $B\mathfrak{C}$ und $A\mathfrak{C}$ ergeben sich nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{A\mathfrak{B} \cdot}{C\mathfrak{B} \cdot} \left(\frac{B\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} \right) \frac{\cdot\, C\mathfrak{A}}{\cdot\, B\mathfrak{A}} = 1, \qquad \text{woraus}$$

$$\frac{B\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}} = \frac{C\mathfrak{B}}{A\mathfrak{B}} \cdot \frac{B\mathfrak{A}}{C\mathfrak{A}} = \frac{p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A}{\sin(C - A)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin(C - A)}{\sin^2 C - p \sin(C - A)}$$

$$\cdot \frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C - A)}{\sin(C - B)} \cdot \frac{\sin(C - B)}{\sin^2 B - p \cdot \sin(C - A)}$$

$$= p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A : \sin^2 B - p \cdot \sin(C - A)$$

Also ist

$$B\mathfrak{C} = k\left[p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A\right]$$

$$A\mathfrak{C} = k\left[\sin^2 B - p \cdot \sin(C - A)\right]:$$

da aber $B\mathfrak{C} + A\mathfrak{C} = \sin C$ ist, so wird

$$k = \sin C : \sin^2 B - \sin^2 A$$

$$= \sin C : (\sin B + \sin A)(\sin B - \sin A)$$

$$= \sin C : 4 \sin \frac{B + A}{2} \cdot \cos \frac{B - A}{2} \cdot \cos \frac{B + A}{2} \cdot \sin \frac{B - A}{2}$$

$$= \sin C : \sin C \cdot \sin(B - A) = 1 : \sin(B - A)$$

also wird:

$$B\mathfrak{C} = p \cdot \sin(C - A) - \sin^2 A : \sin(B - A)$$

$$A\mathfrak{C} = \sin^2 B - p \cdot \sin(C - A) : \sin(B - A)$$

Kommt man überein, dass für einen Punkt im Innern des Dreiecks alle drei Koordinaten positiv seien, so sind nach dem vorigen die Koordinaten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$:

	x_1	x_2	x_3
𝔄	0	$\frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 B}{\sin(C-B)} \cdot \sin C$	$\frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-B)} \cdot \sin B$
𝔅	$\frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A}{\sin(C-A)} \sin C$	0	$\frac{\sin^2 C - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(C-A)} \cdot \sin A$
ℭ	$\frac{p \cdot \sin(C-A) - \sin^2 A}{\sin(B-A)} \cdot \sin B$	$\frac{\sin^2 B - p \cdot \sin(C-A)}{\sin(B-A)} \cdot \sin A$	0

Nunmehr kann man die Gleichungen der Kreise aus 𝔄, 𝔅, und ℭ durch A bezw. B bezw. C aufstellen, wenn man berücksichtigt, dass der Abstand zweier Punkte P' und P'' mit den Koordinaten x_1', x_2', x_3' und x_1'', x_2'', x_3'' gegeben ist durch:

$$\overline{P'P''}^2 = (x_1' - x_1'')^2 \sin^2 A + (x_2' - x_2'')^2 \cdot \sin 2B + (x_3' - x_3'')^2 \sin 2C$$
$$: 2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$$

(siehe die Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1906),
und dass die Koordinaten der Ecken A, B und C sind:

	x_1	x_2	x_3
A	sin B . sin C	0	0
B	0	sin C . sin A	0
C	0	0	sin A . sin B

Gleichung des Kreises aus $\mathfrak{A}$:

$$\sin 2A \,.\, (\sin B \,.\, \sin C)^2 + \sin 2B \,.\, \left[\frac{p \,.\, \sin (C - A) - \sin^2 B}{\sin (C - B)} \cdot \sin C\right]^2$$
$$+ \sin 2C \left[\frac{\sin^2 C - p \,.\, \sin (C - A)}{\sin (C - B)} \cdot \sin B\right]^2$$
$$= \sin 2A \,.\, x_1^2 + \sin 2B \left[x_2 - \frac{p \,.\, \sin (C - A) - \sin^2 B}{\sin (C - B)} \cdot \sin C\right]^2$$
$$+ \sin 2C \left[x_3 - \frac{\sin^2 C - p \,.\, \sin (C - A)}{\sin (C - B)} \cdot \sin B\right]^2 \qquad (2)$$

Gleichung des Kreises aus $\mathfrak{B}$:

$$\sin 2A \left[\frac{p \,.\, \sin (C - A) - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \sin C\right]^2 + \sin 2B \,.\, (\sin A \,.\, \sin C)^2$$
$$+ \sin 2C \,.\, \left[\frac{\sin^2 C - p \,.\, \sin (C - A)}{\sin (C - A)} \cdot \sin A\right]^2 \qquad (3)$$
$$= \sin 2A \left[x_1 - \frac{p \,.\, \sin (C - A) - \sin^2 A}{\sin (C - A)} \cdot \sin C\right]^2 + \sin 2B \cdot x_2^2$$
$$+ \sin 2C \left[x_3 - \frac{\sin^2 C - p \,.\, \sin (C - A)}{\sin (C - A)} \cdot \sin A\right]^2$$

Die gemeinsame Sehne dieser beiden Kreise hat deshalb (2) — (3) = 0 zur Gleichung oder:

$$\sin 2A . \sin^2 B . \sin^2 C - \sin 2B . \sin^2 A . \sin^2 C$$
$$= \sin 2A . 2x_1 . \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 A}{\sin(C - A)} . \sin C$$
$$- \sin 2B . 2x_2 . \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 B}{\sin(C - B)} . \sin C$$
$$+ \sin 2C . 2x_3 \left[\sin^2 C - p . \sin(C - A)\right] \left[\frac{\sin A . \sin(C - B) - \sin B . \sin(C - A)}{\sin(C - A) . \sin(C - B)}\right]$$

oder da $\sin A . \sin(C - B) - \sin B . \sin(C - A)$

$$= \frac{\cos 2B - \cos 2C}{2} + \frac{\cos 2C - \cos 2A}{2}$$
$$= \cos 2B - \cos 2A : 2 = \sin C . \sin(A - B)$$ ist

und:

$$\sin 2A \sin^2 B . \sin^2 C - \sin 2B . \sin^2 A . \sin^2 C$$
$$= 2 \sin A . \sin B . \sin C [\cos A \sin B . \sin C - \cos B . \sin A . \sin C]$$
$$= 2 \sin A . \sin B . \sin C \sin C . \sin(B - A),$$

so erhält man daher für (2) — (3):

$$2 . \sin A . \sin B . \sin C . \sin C . \sin(B - A)$$
$$= \sin 2A . 2x_1 \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 A}{\sin(C - A)} . \sin C$$
$$- \sin 2B . 2x_2 \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 B}{\sin(C - B)} . \sin C$$
$$+ \sin 2C . 2x_3 \left[\sin^2 C - p . \sin(C - A)\right] \frac{\sin C . \sin(A - B)}{\sin(C - A) . \sin(C - B)}$$

Dividiert man noch beiderseits durch $2 . \sin C . \sin(A - B)$, so gewinnt man die Gleichung:

$$\begin{aligned} - \sin A . \sin B . \sin C = \sin 2A . x_1 & \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 A}{\sin(A - B) . \sin(C - A)} \\ + \sin 2B . x_2 & \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 B}{\sin(B - C) . \sin(A - B)} \quad (4) \\ + \sin 2C . x_3 & \frac{p . \sin(C - A) - \sin^2 C}{\sin(C - A) . \sin(B - C)} \end{aligned}$$

[Zur Abkürzung kann noch $p . \sin(C - A) = P$ gesetzt werden].

welche Gleichung durch Vorrücken der Buchstaben und Indices unverändert bleibt, womit der vorangestellte Satz bewiesen ist.

Es erübrigt, noch die Gleichung unserer Parabel aufzustellen. Sie ist die Enveloppe der Geraden 𝔄𝔅, deren Gleichung sein möge:

$$a_1 x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{5}$$

Die Koordinaten von 𝔄 und 𝔅 müssen diese Gleichung erfüllen und dies gibt uns zur Bestimmung von a_1, a_2 und a_3 oder vielmehr ihrer Verhältnisse die beiden Gleichungen:

$$a_2 (P - \sin^2 B) . \sin C + a_3 (\sin^2 C - P) . \sin B = 0$$

$$a_1 (P - \sin^2 A) \sin C + a_3 (\sin^2 C - P) . \sin A = 0, \quad \text{so dass}$$

$$a_2 = a_3 (P - \sin^2 C) . \sin B : (P - \sin^2 B) . \sin C$$

$$a_1 = a_3 (P - \sin^2 C) . \sin A : (P - \sin^2 A) . \sin C$$

Substituiert man diese Werte von a_1 und a_2 in Gleichung (5), so bleibt:

$$(P - \sin^2 C) . (P - \sin^2 B) . \sin A\, x_1 + (P - \sin^2 A)(P - \sin^2 C)\, x_2$$
$$+ (P - \sin^2 B) . (P - \sin^2 A)\, x_3 = 0, \quad \text{oder}$$

$$P^2 \Big[x_1 . \sin A + x_2 . \sin B + x_3 . \sin C\Big] - 2P\Big[\frac{(\sin^2 B + \sin^2 C) \sin A\, x_1}{2}$$
$$+ \frac{(\sin^2 C + \sin^2 A) . \sin B\, x_2}{2} + \frac{(\sin^2 A + \sin^2 B) \sin C . x_3}{2}\Big] \tag{6a}$$
$$+ \sin^2 B . \sin^2 C . \sin A . x_1 + \sin^2 C . \sin^2 A . \sin B . x_2$$
$$+ \sin^2 A . \sin^2 B . \sin C . x_3 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in P, d. h. durch jeden Punkt (x_1, x_2, x_3) der Ebene gehen 2 Tangenten an die gesuchte Kurve; für einen Punkt der Kurve selbst fallen diese zusammen, und die Bedingung hiefür ist:

$$\Big[(\sin^2 B + \sin^2 C) . \sin A\, x_1 + (\sin^2 C + \sin^2 A) . \sin B\, x_2$$
$$+ (\sin^2 A + \sin^2 B) . \sin C . x_3\Big]^2$$
$$= 4 (x_1 . \sin A + x_2 . \sin B + x_3 . \sin C). \tag{6b}$$
$$. (\sin^2 B . \sin^2 C . \sin A . x_1 + \sin^2 C . \sin^2 A . \sin B\, x_2$$
$$+ \sin^2 A . \sin^2 B . \sin C . x_3)$$

welches die Gleichung unserer Parabel vorstellt. Dieselbe kann auch in der Form geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
& x_1{}^2 . \sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C)^2 + x_2{}^2 . \sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)^2 \\
& + x_3{}^2 . \sin^2 C (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 - 2\, x_1 . x_2 . \sin A . \sin B (\sin^2 B \\
& \qquad\qquad - \sin^2 C) . (\sin^2 C - \sin^2 A) \\
& - 2\, x_2 . x_3 . \sin B . \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) . (\sin^2 A - \sin^2 B) \qquad (6) \\
& - 2\, x_3 . x_1 \sin C . \sin A (\sin^2 A - \sin^2 B) . (\sin^2 B - \sin^2 C) = 0
\end{aligned}
$$

Um die Koordinaten des Brennpunktes ermitteln zu können, erinnern wir uns an die folgende Brennpunktseigenschaft eines Kegelschnitts:

Die Verbindungsgeraden irgend eines Punktes mit den beiden Brennpunkten bilden mit den Tangenten aus diesem Punkt bezw. gleiche Winkel.

Hieraus folgt für einen dem Grunddreieck (ABC) eingeschriebenen Kegelschnitt, dass die Koordinaten des einen Brennpunktes proportional den reziproken Werten desjenigen des andern sind.

Im Falle der Parabel ist der eine Brennpunkt (F_∞) der Berührungspunkt mit der unendlich fernen Geraden, der die Gleichung zukommt: $x_1 . \sin A + x_2 . \sin B + x_3 . \sin C = 0$. Dessen Koordinaten $x_{1F\infty}$, $x_{2F\infty}$ und $x_{3F\infty}$ ergeben sich daher aus (6^b), und

$$x_{1F\infty} . \sin A + x_{2F\infty} . \sin B + x_{3F\infty} . \sin C = 0$$

wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& x_2 \Big[\sin B . (\underline{\sin^2 C} + \sin^2 A) - \sin B (\sin^2 B + \underline{\sin^2 C}) \Big] \\
& + x_3 \Big[\sin C . (\sin^2 A + \underline{\sin^2 B}) - \sin C (\underline{\sin^2 B} + \sin^2 C) \Big] = 0
\end{aligned}
$$

$$x_2 = x_3 \frac{\sin^2 C - \sin^2 A}{\sin^2 A - \sin^2 B} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin (C - A)}{\sin (A - B)} \cdot x_3$$

und ähnlich:

$$x_1 = x_3 \cdot \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A - \sin^2 B} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin (B - C)}{\sin (A - B)} \cdot x_3$$

Somit besteht für $x_{1F\sim}$, $x_{2F\sim}$ und $x_{3F\sim}$ die Relation:

$$x_{1F\sim} : x_{2F\sim} : x_{3F\sim} = \sin(B - C) : \sin(C - A) : \sin(A - B)$$

und somit für den im Endlichen gelegenen Brennpunkt F:

$$\underline{x_{1F} : x_{2F} ; x_{3F} = \frac{1}{\sin(B - C)} : \frac{1}{\sin(C - A)} : \frac{1}{\sin(A - B)}}$$

Die Direktrix bestimmt sich als die Polare des Brennpunktes F. Die Gleichung der Polaren des durch

$$a_{11}^2 x_1^2 + a_{22}^2 . x_2^2 + a_{33}^2 x_3^2 - 2 a_{11} . a_{22} . x_1 . x_2 - 2 a_{22} . a_{33} . x_2 . x_3$$

$- 2 a_{33} . a_{11} . x_3 . x_1 = 0$ gegebenen Kegelschnitts bezogen auf den Punkt F lautet:

$$a_{11}^2 x_1 . x_{1F} + a_{22}^2 . x_2 . x_{2F} + a_{33}^2 . x_3 . x_{3F} - a_{11} . a_{22}(x_1 . x_{2F} + x_2 x_{1F})$$

$$- a_{22} . a_{33} . (x_2 . x_{3F} + x_3 . x_{2F}) - a_{33} . a_{11} (x_3 . x_{1F} + x_1 . x_{3F}) = 0 \quad (7)$$

Bemerkung: Dass die Polare eines Kegelschnitts diese Gleichungsform hat, kann man leicht bestätigen, indem man die Gleichung der Kurve durch die Gleichungen zweier Tangenten und der Berührungssehne ausdrückt.

Nun ist $a_{11} = \sin A . (\sin^2 B - \sin^2 C)$

$a_{22} = \sin B . (\sin^2 C - \sin^2 A)$

$a_{33} = \sin C . (\sin^2 A - \sin^2 B)$

x_{1F} proportional $\sin(C - A) . \sin(A - B)$

x_{2F} » $\sin(A - B) . \sin(B - C)$

x_{3F} » $\sin(B - C) . \sin(C - A)$

Also geht Gleichung (7) über in:

$$\sin^2 A (\sin^2 B - \sin^2 C)^2 . \sin(C - A) . \sin(A - B) . x_1$$

$$+ \sin^2 B (\sin^2 C - \sin^2 A)^2 . \sin(A - B) . \sin(B - C) . x_2$$

$$+ \sin^2 C (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 . \sin(B - C) . \sin(C - A) . x_3$$

$$- \sin A . \sin B (\sin^2 B - \sin^2 C) . (\sin^2 C - \sin^2 A)$$

$$\left[x_1 . \sin(A - B) . \sin(B - C) + x_2 . \sin(C - A) . \sin(A - B)\right]$$

$$- \sin B . \sin C (\sin^2 C - \sin^2 A) (. \sin^2 A - \sin^2 B)$$

$$[x_2 . \sin(B - C) . \sin(C - A) + x_3 \sin(A - B) . \sin(B - C)]$$

$$- \sin C . \sin A (. \sin^2 A - \sin^2 B) (\sin^2 B - \sin^2 C)$$

$[x_3 . \sin(C - A) . \sin(A - B) + x_1 . \sin(B - C) . \sin(C - A)] = 0$
oder indem man beide Seiten durch

$\sin(A - B) . \sin(B - C) . \sin(C - A)$ dividiert:

$$\sin^4 A . \sin(B - C) . x_1 + \sin^4 B . \sin(C - A) x_2 + \sin^4 C . \sin(A - B) x_3$$
$$- \sin^2 A . \sin^2 B [x_1 . \sin(B - C) + x_2 . \sin(C - A)]$$
$$- \sin^2 B . \sin^2 C [x_2 . \sin(C - A) + x_3 . \sin(A - B)]$$
$$- \sin^2 C . \sin^2 A [x_3 . \sin(A - B) + x_1 . \sin(B - C)] = 0,$$ oder

$$x_1 \sin^2 A \sin(B - C) [\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C]$$
$$+ x_2 . \sin^2 B . \sin(C - A) [\sin^2 B - \sin^2 C - \sin^2 A] \qquad (8)$$
$$+ x_3 . \sin^2 C . \sin(A - B) [\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B] = 0$$

Nun ist aber:

$$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \frac{1}{2}\Big[1 - \cos 2A - 1 + \cos 2B - 1 + \cos 2C\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-1 + \cos 2B + \cos 2C - \cos 2A\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\Big[-2 \cos A . \cos(B - C) - 2 \cos^2 A\Big]$$
$$= -\frac{4}{2} \cos A . \sin B . \sin C$$ und ähnlich

$$\sin^2 B - \sin^2 C - \sin^2 A = - 2 . \cos B . \sin C . \sin A$$
$$\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B = - 2 . \cos C . \sin A . \sin B$$

Führt man diese Werte in (8) ein und dividiert man sodann beide Seiten der so erhaltenen Gleichung durch $-\sin A . \sin B . \sin C$, so bleibt:

$$\underline{x_1 . \sin A . \cos A . \sin(B - C) + x_2 . \sin B . \cos B . \sin(C - A)}$$
$$\underline{+ x_3 . \sin C . \cos C . \sin(A - B) = 0} \qquad (8^a)$$

für die Gleichung der Direktrix. Dieselbe geht aber durch den Höhenpunkt des Dreiecks ABC (mit den Koordinaten $\cos B . \cos C$, $\cos C . \cos A$, $\cos A \cos B$) hindurch, weil (8^a) durch dieselben identisch erfüllt wird, wie es auch sein soll.