Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1909)
Heft: 1701-1739

Artikel: Die Riccatische Gleichung
Autor: Iseli, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319196

Fritz Iseli.

Die Riccatische Gleichung.

Einleitung.

Am Ende des 17. Jahrhunderts und im Anfang des 18. beschäftigten sich die hervorragendsten Mathematiker jener Zeit mit dem Problem der Trajektorien. Hiebei gelangten Niklaus I. Bernoulli, Niklaus II. Bernoulli, Johann Bernoulli, Taylor und andere zu Differentialgleichungen 2ter Ordnung, und da und dort findet man Versuche, dieselben zu integrieren. Mit einer Differentialgleichung 2ter Ordnung beschäftigte sich auch Graf Jacopo Riccati (1676—1754). In Venedig geboren, wurde der mit 10 Jahren vaterlose Knabe dem Jesuitenkollegium in Brescia anvertraut, wo er überraschende Fortschritte machte. Von 1693—1696 studierte er in Padua und kehrte dann nach Venedig zurück. Von hier aus lehnte er Berufungen nach Padua, Wien und Petersburg ab. Ziemlich spät, 1747, siedelte er nach Treviso über, wo er starb. Er stand mit zahlreichen Gelehrten aller Länder in so regem Verkehr, dass er sich der Mithülfe seiner beiden Söhne Vincenzo und Giordano bedienen musste.

Von 1720—22 war Niklaus II. Bernoulli Hauslehrer in einer Adelsfamilie in Venedig und erneuerte während dieser Zeit die Bekanntschaft mit Riccati, die er schon bei einem frühern Aufenthalt 1706 gemacht hatte. Von Riccatti erhielt er einen Aufsatz, damit er ihn seinem Vater Johann I. Bernoulli zur Begutachtung einsende; von dieser sollte die Veröffentlichung abhängen. Sie muss günstig gelautet haben; denn die Abhandlung erschien in der Zeitschrift «Acta Eruditorum» im Jahr 1724 (Supplementa VIII, 66—73), nachdem sie wahrscheinlich schon früher in die Öffentlichkeit gelangt war, da in derselben Zeitschrift schon im November 1723 von ihr die Rede ist.

Wir wollen den Gedankengang Riccati's an der Gleichung

$$x^n d^2x = d^2y + (dy)^2 \tag{1}$$

verfolgen, wo x und y zwei abhängige Variable sein sollen. Zum bessern Verständnis fügen wir eine unabhängige Variable p bei, die sich Riccati nur hinzu dachte. Unsere Gleichung lautet daher:

$$x^n \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 \tag{2}$$

Wie aber x, y und p zusammenhängen, ist unbekannt. Um irgendwelche Beziehung zwischen den drei Grössen zu erhalten, setzen wir im Sinne Riccati's: $\frac{dx}{q} = dp$, (α), wo $\frac{dx}{q}$ konstant ist. Also ist auch dp konstant. Ferner sei $u\,dp = dy$, (β), wo nach (α) dp auch hier unveränderlich ist.

Durch Differentiation nach p erhält man aus (α) und (β):

$$\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{dq}{dp};\ \frac{d^2y}{dp^2} = \frac{du}{dp}$$

und Gleichung (2) geht über in:

$$x^n \frac{dq}{dp} = \frac{du}{dp} + u^2 \tag{3}$$

Da aber $\frac{dq}{dp} = \frac{dq}{dx} \cdot \frac{dx}{dp}$ und

$\frac{du}{dp} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dp}$ ist, so folgt, wenn

für $\frac{dx}{dp} = q$ gesetzt wird:

$$x^n \cdot q \cdot \frac{dq}{dx} = q \cdot \frac{du}{dx} + u^2$$

$$x^n \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q} \tag{4}$$

Diese Gleichung von Riccati ist zwar von der 1ten Ordnung; aber eine Trennung der Variablen ist trotzdem unmöglich, wenn q von u und x abhängig ist. Riccati fügte daher die Bedingung bei, dass q nur von x allein abhangen solle, und zwar so, dass $q = x^m$ sei. Unter dieser Annahme schliesst Riccati seinen Aufsatz mit der Aufgabe, Werte von m so zu bestimmen, dass eine Trennung der Variablen möglich werde, während der Exponent n keiner Beschränkung unterworfen sei. Wir werden uns im folgenden mehrfach mit der Aufsuchung solcher Werte beschäftigen.

Unmittelbar hinter Riccati's Aufsatz sind Bemerkungen von Daniel Bernoulli abgedruckt, aus welchen hervorgeht, dass sich die Mathematiker Niklaus I., Niklaus II., Johann I. und Daniel I. Bernoulli mit diesem Problem befasst haben und dass sie alle unabhängig von einander zu denselben Werten von m gelangt sind, die die Trennung der Variablen ermöglichen.

Wenn $q = x^m$ so ist

$$\frac{dq}{dx} = m x^{m-1}$$

und Gleichung (4) geht über in:

$$x^n \cdot m x^{m-1} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{x^m}$$

$$x^m \frac{du}{dx} + u^2 = m x^{n+2m-1} \tag{5}$$

Dies ist wieder die Riccatische Gleichung.

Im Novemberheft der Acta Eruditorum (pag. 502—510) kam Riccati auf seinen früheren Aufsatz zurück. Er gab der Gleichung hier eine etwas andere Form, nämlich

$$x^m dx = du + \frac{u^2 dx}{x^n}, \tag{6}$$

fügte aber die von ihm selbst ermittelten, die Trennung der Variablen ermöglichenden Bedingungen für n nicht bei.

Daniel Bernoulli veröffentlichte im November 1725 in obgenannter Zeitschrift seine Methode, die Werte von n in der Riccatischen Gleichung, wie unsere Gleichung nun schon genannt wurde, zu finden. Er schrieb die Gleichung in der Form

$$a x^n dx + u^2 dx = b du \tag{7}$$

und behauptet, wenn $n = m$, wo m vorderhand noch unbekannt ist, eine Trennung der Variablen gestatte, so müsse dies auch möglich sein

1) für $n = -\frac{m}{m+1}$

2) für $n = -m - 4$

Die Richtigkeit der ersten Behauptung kann wie folgt bewiesen werden. Man substituiere in (7)

$u = \frac{1}{y}$; $du = -\frac{1}{y^2}dy$, so dass dieselbe die folgende Form annimmt

$$dx + ax^n y^2 dx = -b\,dy$$

Hierin setzen wir $x = s^{\frac{1}{n+1}}$; $dx = \frac{s^{-\frac{n}{n+1}}ds}{n+1}$, so dass wir erhalten:

$$s^{-\frac{n}{n+1}}ds + y^2 ds = -\frac{n+1}{a}b\,dy \tag{8}$$

Dies ist eine Gleichung, die mit (7) sehr grosse Ähnlichkeit hat. Wenn in letzterer die Variablen für n = m separierbar sind, so ist dies in (8) möglich, wenn $n = -\frac{m}{m+1}$ ist.

Um den Beweis für die zweite Behauptung zu erbringen, setzen wir in Gleichung (7)

$$u = -\frac{b}{x} + \frac{y}{x^2}$$

$$du = \frac{b}{x^2}dx - \frac{2y}{x^3}dx + \frac{1}{x^2}dy$$

$$u^2 = \frac{b^2}{x^2} - \frac{2by}{x^3} + \frac{y^2}{x^4}$$ und es folgt:

$$ax^n dx + \frac{b^2}{x^2}dx - \frac{2by}{x^3}dx + \frac{y^2}{x^4}dx = \frac{b^2}{x^2}dx - \frac{2by}{x^3}dx + \frac{b}{x^2}dy$$

oder
$$ax^n dx + \frac{y^2}{x^4}dx = \frac{b}{x^2}dy$$

$$ax^{n+2}dx + \frac{y^2}{x^2}dx = b\,dy$$

Nun werde $x = \frac{1}{s}$, $dx = -\frac{1}{s^2}ds$ gesetzt,

$$-as^{-n-4}ds - y^2 ds = b\,dy \tag{9}$$

Durch Vergleichung von (9) mit (7) ergibt sich, dass $n = -m - 4$ die Trennung der Variablen ermöglicht, sobald dies für $n = m$ zutrifft.

Es muss nun vorerst ein bestimmtes m gefunden werden, damit sich die Variablen ein erstes Mal trennen lassen. Dies trifft zu für $n = m = 0$; dann wird (7) zu:

$$a\,dx + u^2 dx = b\,du$$

$$dx = \frac{b\,du}{a + u^2}$$

Wenn also eine Trennung der Variablen möglich ist für $m = 0$, so muss sie auch durchgeführt werden können für $n = m - 4 = -4$ (nach Gleichung 9) und für $n = -\frac{m}{m+1} = -\frac{-4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$ (nach Gleichung 8). Setzt man die Werte, die man für n sukzessive erhält, abwechselnd in (9) und (8) ein, so erhält man dadurch alle Werte von n, die eine Trennung der Veränderlichen ermöglichen. Zu denselben Resultaten gelangt man aber auch durch wiederholte Anwendung der Relation

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$$

wo λ eine ganze Zahl bedeutet. Diese Beziehung bewies allerdings Daniel Bernoulli nicht allgemein. Man kann sich aber von deren Richtigkeit leicht überzeugen.

Da die Riccatische Gleichung für $m = 0$ eine Trennung der Variablen zulässt, so ist dies zufolge der Gleichung (9) ebenfalls möglich für $n = -m - 4 = -\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 1}$. Dies in (8) substituiert, ergibt:

$$n = -\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1}$$

Durch analoge weitere Überlegungen erhält man folgende Ausdrücke, die die Trennung der Variablen gestatten:

$$n = -\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 1}\,; \quad n = -\frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1}$$

$$n = -\frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 1}\,; \quad n = -\frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1}$$

$$n = -\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 1}; \quad n = -\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 1}$$

. . . .

. . . .

$$n = -\frac{4 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda - 1}; \quad n = -\frac{4 \cdot \lambda}{2 \lambda + 1}$$

Vereinigt man die beiden letzten Werte, so erhält man die oben genannte Relation

$$n = -\frac{4 \lambda}{2 \lambda \pm 1}$$

Daniel Bernoulli fügte noch einige Bemerkungen bei. Er sagt, alle Werte für $n = -\frac{4 \lambda}{2 \lambda \pm 1}$ seien zwischen 0 und —4 gelegen. Für $\lambda = \infty$ entstehe $n = -2$, ein Fall, der besonderer Betrachtung wert sei. Dann geht (7) über in

$$\frac{a\,dx}{x^2} + u^2\,dx = b\,du$$

Er transformierte diese Gleichung mittelst $u = \frac{1}{y}$ in

$$\frac{a\,dx}{x^2} + \frac{dx}{y^2} = -\frac{b\,dy}{y^2}$$

und bemerkte, dass diese Gleichung eine Trennung der Variablen zulasse, weil alle Glieder derselben eine gleiche Exponentensumme besitzen, was wir jetzt dadurch ausdrücken, dass wir sagen, die Differentialgleichung sei eine homogene.

Riccati selber kannte die Werte, die die Variablen seiner Gleichung zu trennen erlauben, genau, was aus dem Briefwechsel zwischen Christian Goldbach, Akademiker in Petersburg (1690—1764), und Niklaus II Bernoulli (1695—1726) hervorgeht.

Seit Riccati und seinen Zeitgenossen haben sich mehrere Analytiker mit unserer Gleichung befasst, in neuerer Zeit unter andern: Cayley, Lommel, Schläfli, Spitzer, Winkler, Glaisher, Catalan, Feldblume, Riccardi, Serret, Sturm.

In den zwei ersten der nun folgenden Abschnitte sollen bekannte Lösungen mittels Reihen und symbolischen Ausdrücken besprochen werden. Im dritten Abschnitt werden wir mit Hülfe der Methode der Integration durch bestimmte Integrale Lösungen herleiten, die neu sein dürften.

I. Integration der Gleichung durch Reihen.

§ 1.

Wir geben der Gleichung folgende Gestalt:

$$\frac{du}{dx} + b u^2 = c x^n \qquad (1)[1]$$

Sie ist von der ersten Ordnung, aber nicht linear. Deshalb wenden wir nachstehende Transformation an:

$$u = \frac{1}{b v} \cdot \frac{dv}{dx}; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{b v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{b v}\frac{d^2 v}{dx^2}$$

$$u^2 = \frac{1}{b^2 v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

und erhalten:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - b c x^n v = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung kann als eine der Riccatischen Gleichung entsprechende Hauptform genommen werden.

Haben b und c dasselbe Vorzeichen, so kann man sie in der Form schreiben:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - a^2 x^n v = 0. \qquad (3)$$

Haben b und c entgegengesetzte Vorzeichen, so erhält man:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + a^2 x^n v = 0. \qquad (4)$$

Jede derselben ist in endlicher Form integrierbar, wenn der betreffende Parameter n auch für die Riccatische Gleichung einen geschlossenen Ausdruck als Stammgleichung liefert.

Wir substituieren nun in (2) die Reihe:

$$v = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + + \ldots\ldots [2]$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 S_0}{dx^2} + \frac{d^2 S_1}{dx^2} + \frac{d^2 S_2}{dx^2} + \frac{d^2 S_3}{dx^2} + + \ldots\ldots$$

---

[1]) Siehe Lehrbuch der Differentialgleichungen v. A. R. Forsyth, S. 199 u. ff.

[2]) Siehe Forsyth, Differentialgleichungen, S. 124.

und erhalten als neue Differentialgleichung:

$$\frac{d^2S_0}{dx^2}+\frac{d^2S_1}{dx^2}+\frac{d^2S_2}{dx^2}+\frac{d^2S_3}{dx^2}++\cdots=bcx^nS_0+bcx^nS_1+bcx^nS_2$$
$$+bcx^nS_3++\cdots$$

Derselben wird genügt, wenn man setzt

$$\frac{d^2S_0}{dx^2}=0;\quad \frac{d^2S_1}{dx^2}=+bcx^nS_0;\quad \frac{d^2S_2}{dx^2}=+bcx^nS_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Bedingungsgleichungen liefern der Reihe nach

$$S_0=Ax+B$$

$$S_1=+A\frac{bcx^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+B\frac{bcx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_2=A\frac{b^2c^2x^{2n+5}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}+B\frac{b^2c^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

Daher lautet das allgemeine Integral, wenn man die Terme, die mit A und B behaftet sind, von einander trennt

$$v=Ax\left[1+\frac{bcx^{n+2}}{(n+2)(n+3)}+\frac{b^2c^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)}++\cdots\right]$$
$$+B\left[1+\frac{bcx^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{b^2c^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)}++\cdots\right]$$

Für $n=0$ und $bc=+1$ erhält man

$$v=Ax\left[1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots\cdot\right]$$
$$+B\left[1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdot\right]$$

Durch Addition und Subtraktion der zwei Reihen bekommt man

$$v=A'e^x+B'e^{-x}$$

Analog erhält man für $n=0$ und $bc=-1$

$$v=Ax\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\cdots\right]$$
$$+B\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots\right]$$

oder $$v=A\sin x+B\cos x.$$

§ 2.

Wir gehen aus von Gleichung (2) des vorigen §.

$$\frac{d^2v}{dx^2} - bc\,x^n v = 0 \tag{1}$$

und ersetzen die unabhängige Variable x mittelst der Relation

$$qz = x^q \tag{2}$$

Um die Substitution durchführen zu können, hat man die Formeln anzuwenden:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^2v}{dz^2}$$

Aus (2) wird:

$$\frac{dz}{dx} = x^{q-1}\,; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = (q-1)\,x^{q-2} \quad ; \; x = (qz)^{\frac{1}{q}}$$

Gleichung (1) geht über in:

$$(qz)^{\frac{2q-2}{q}} \frac{d^2v}{dz^2} + (q-1)(qz)^{\frac{q-2}{q}} \frac{dv}{dz} - bc(qz)^{\frac{m}{q}} v = 0$$

$$(qz)^2 \frac{d^2v}{dz^2} + (q-1)qz\frac{dv}{dz} - bc\,(qz)^{\frac{n+2}{q}} v = 0$$

Wir bestimmen die bisher noch unbestimmte Grösse q durch die Relation

$$q = \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{m} \tag{3}$$

so dass wir als Differentialgleichung bekommen:

$$\left(\frac{z}{m}\right)^2 \frac{d^2v}{dz^2} + \left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{z}{m}\frac{dv}{dz} - bc\left(\frac{z}{m}\right)^2 v = 0$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{m-1}{z}\frac{dv}{dz} - bc\,v = 0 \tag{4}$$

Es sei

$$m - 1 = 2p \tag{5}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} - \frac{2p}{z}\frac{dv}{dz} - bc\,v = 0 \tag{6}$$

Nun verändern wir die abhängige Variable durch

$$v = w z^p$$

$$\frac{dv}{dz} = w p \cdot z^{p-1} + z^p \frac{dw}{dz}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = w \cdot p(p-1) z^{p-2} + 2 p z^{p-1} \frac{dw}{dz} + z^p \frac{d^2w}{dz^2}$$

Die Gleichung für w wird

$$\frac{d^2w}{dz^2} - bc\,w = \frac{p(p+1)}{z^2} w. \tag{7}$$

Schliesslich ändern wir die abhängige Variable w durch die Relation

$$w = z^{\frac{1}{2}} \cdot t$$

und erhalten:

$$\frac{d^2t}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dt}{dz} - bct - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{t}{z^2} = 0$$

oder

$$\frac{d^2t}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dt}{dz} + \left[\left\{(-bc)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 z^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2\right] \frac{t}{z^2} = 0 \tag{8}$$

Nun vergleichen wir hiemit die Bessel'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dt}{dx} + (x^2 - a^2)\frac{t}{x^2} = 0 \tag{9}$$

und deren Lösung:

$$t = A J^a(x) + B J^{-a}(x). \tag{10}$$

Wird durch die Relation $x = (-bc)^{\frac{1}{2}} z$ die unabhängige Variable in z umgeändert, so lautet die aus (9) hervorgehende Gleichung:

$$\frac{d^2t}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dt}{dz} + \left[\left\{(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right\}^2 - a^2\right] \frac{t}{z^2} = 0 \tag{11}$$

Ihre Lösung ist:

$$t = A J^a\left[(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right] + B J^{-a}\left[(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right] \tag{12}$$

Nun verifiziert man leicht, dass die zu (8) gehörende Integralgleichung die folgende ist:

$$t = A J^{p+\frac{1}{2}}\left[(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right] + B J^{-\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left[(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right] \qquad (13)$$

Ist $\left(p + \frac{1}{2}\right)$ eine ganze Zahl, so hört (13) auf, die Stammgleichung zu sein, und wir setzen in diesem Fall

$$t = A J^{p+\frac{1}{2}}\left[(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right] + B K^{p+\frac{1}{2}}\left[(-bc)^{\frac{1}{2}} z\right] \qquad (14)$$

Um zu untersuchen, ob und wann (14) der Gleichung (8) nicht mehr genügt, suchen wir die Lösung der Gleichung (1) und verwenden dazu der Reihe nach die früher verwendeten Substitutionen:

$$w = z^{\frac{1}{2}} t; \quad v = z^p w; \quad 2p = m - 1$$

$$q = \frac{n}{2} + 1 = \frac{1}{m}; \quad \frac{1}{m} z = x^{\frac{1}{m}}$$

und finden so, dass die Parameter der Bessel'schen Reihen, die als Lösungen von (1) zu betrachten sind, lauten:

$$\pm \frac{1}{n+2}.$$

Der einzige Fall, wo diese Art der Darstellung versagt, ist also der, in welchem $n + 2 = 0$, d. h. $n = -2$ ist. Die noch zu lösende Gleichung ist:

$$x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - bc\, v = 0, \qquad (15)$$

welche mittelst der Substitution $y = A x^\lambda$ gelöst werden kann.[1])

$$\frac{dy}{dx} = A \lambda x^{\lambda - 1}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = A \lambda (\lambda - 1) x^{\lambda - 2}$$

Die unbekannte Grösse λ bestimmt sich aus

$$\lambda^2 - \lambda - bc = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\,bc}$$

Daher sind die beiden partikulären Integrale:

$$y_1 = A x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\,bc}}; \quad y_2 = B x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\,bc}}$$

---

[1]) Siehe eine Arbeit von E. Lommel, Math. Annalen, Band III, 1871, S. 475.

und das allgemeine Integral:

$$y = A x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\,bc}} + B x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\,bc}}$$

§ 3.

Wir gehen wiederum aus von:

$$\frac{d^2v}{dx^2} - bc\,x^n v = 0 \qquad (1)^{1)}$$

und substituieren

$$v = y\,x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} y\,x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} - = \frac{1}{4} y\,x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} + x^{\frac{1}{2}} \frac{d^2y}{dx^2}$$

woraus wir erhalten:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \left[\frac{1}{4} + bc\,x^{n+2}\right] y = 0 \qquad (2)$$

Hierin möge die unabhängige Veränderliche x in z umgeändert werden mit Hülfe der Beziehung

$$x^{n+2} = z^2 \qquad \text{oder} \qquad z = x^{\frac{n+2}{2}}$$

Dann bekommt man:

$$z^{\frac{4}{n+2}} \left[\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 z^{\frac{2n}{n+2}} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2} z^{\frac{n-2}{n+2}} \frac{dy}{dz} \right]$$

$$+ z^{\frac{2}{n+2}} \frac{n+2}{2} z^{\frac{n}{n+2}} \frac{dy}{dz} - \left[\frac{1}{4} + bc\,z^2\right] y = 0,$$

woraus man nach Multiplikation mit $\left(\frac{2}{n+2}\right)^2$ erhält:

$$z^2 \frac{d^2y}{dx^2} + z\frac{dy}{dz} - \left[\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{4\,bc}{(n+2)^2} z^2\right] y = 0$$

oder $$z^2 \frac{d^2y}{dx^2} + z\frac{dy}{dx} + \left[\left\{\frac{2\,i\sqrt{bc}}{n+2}\right\}^2 z^2 - \frac{1}{(n+2)^2}\right] y = 0. \qquad (3)$$

---

1) Siehe G. Greenhill, Quart. J. Band XVI., S. 294.

Durch Substitution von $x = \frac{2i\sqrt{bc}}{n+2} z$ in die Bessel'sche Differentialgleichung erkennt man, dass die zu (3) gehörende Stammgleichung die folgende ist:

$$y = A J^{\frac{1}{n+2}} \left[\frac{2i\sqrt{bc}}{n+2} z \right] + B J^{-\frac{1}{n+2}} \left[\frac{2i\sqrt{bc}}{n+2} z \right] \tag{4}$$

Sie ist unbrauchbar, wenn $n = -2$ ist; dann verwende man die entsprechende Lösung des vorigen §.

§ 4.

Die Aufgabe dieses § soll darin bestehen, die Werte des Parameters n zu bestimmen, welche erlauben, die Riccatische Gleichung in geschlossener Form zu integrieren, d. h. es soll die Relation

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$$

abgeleitet werden.

Dazu gehen wir von Gleichung (7) des § 2 aus:

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} - bc\, z^2 y - p(p+1)\, y = 0 \tag{1}$$

Hierin sind in Bezug auf die Vorzeichen von b und c zwei Fälle zu unterscheiden:

1. b und c haben dasselbe Vorzeichen. Dann nimmt die transformierte Riccatische Gleichung die Form der Gleichung (1) an.

2. b und c haben entgegengesetzte Vorzeichen. Dann lautet die zu lösende Gleichung

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + bc\, z^2 y - p(p+1)\, y = 0. \tag{2}$$

Es soll zuerst Gleichung (1) behandelt werden. Wir substituieren:

$$y = e^{az} w \ (3), \text{ wo } a^2 = bc \text{ sein soll.}$$

$$\frac{dy}{dz} = e^{az} \frac{dw}{dz} + a e^{az} w$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = e^{az}\frac{d^2w}{dz^2} + 2a\,e^{az}\frac{dw}{dz} + a^2 e^{az} w$$

und es folgt:

$$e^{az} z^2\left[\frac{d^2w}{dz^2} + 2a\frac{dw}{dz} + a^2 w\right] - a^2 z^2 e^{az} w - p(p+1)\,e^{az} w = 0$$

$$z^2\frac{d^2w}{dz} + 2a z^2\frac{dw}{dz} - p(p+1)\,w = 0 \qquad (4)$$

Diese lösen wir durch Substitution folgender Reihen:

$$w = A_0 z^m + A_1 z^{m+1} + A_2 z^{m+2} + A_3 z^{m+3} + \cdots$$

$$\frac{dw}{dz} = A_0 m z^{m-1} + A_1(m+1)z^m + A_2(m+2)z^{m+1} + A_3(m+3)2^{m+2} + \cdots$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = A_0(m-1)m z^{m-2} + A_1 m(m+1)z^{m-1} + A_2(m+1)(m+2)z^m + A_3(m+2)(m+3)z^{m+1} + \cdots$$

Wir setzen diese Werte nun in (4) ein und addieren die Glieder gleich hoher Potenzen von z:

$$A_0(m-1)m z^m + A_1 m(m+1)z^{m+1} + A_2(m+1)(m+2)z^{m+2} + A_3(m+2)(m+3)z^{m+3} + \cdots$$
$$+ A_0\cdot 2am z^{m+1} + A_1\cdot 2a(m+1)z^{m+2} + A_2\cdot 2a\cdot(m+2)z^{m+3} + \cdots$$
$$- A_0 p(p+1)z^m - A_1 p(p+1)z^{m+1} - A_2 p(p+1)2^{m+2} - A_3 p(p+1)z^{m+3} + \cdots$$

Diese Werte müssen addiert identisch verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn dies auch für die einzelnen Koeffizienten gleich hoher Potenzen von z gilt. Daher gilt:

$$A_0[m^2 - m - p^2 - p] = 0.$$

Da A_0 nicht null werden darf, weil sonst die ganze Reihe verschwinden würde, so muss

$$m^2 - m - p^2 - p = 0 \quad \text{sein,}$$

woraus folgt: $\quad m_1 = -p \qquad m_2 = p + 1$

Für $m_1 = -p$ erhält man sukzessive

$$A_1 = -A_0 \cdot a \cdot \frac{p}{p} \; ; \quad A_2 = A_0 \frac{p(p-1)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)} \frac{a^2}{2!} z^2$$

$$A_3 = -A_0 \frac{p(p-1)(p-2)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)} \frac{a^3}{3!} z^3 \; ;$$

$$A_4 = -A_0 \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)\left(p-\frac{3}{2}\right)} \frac{a^4}{4!} z^4$$

Das erste partikuläre Integral der Gleichung (1) lautet:

$$y_1 = A_0 e^{az} z^{-p} \left[1 - \frac{p}{p} az + \frac{p(p-1)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)} \frac{a^2}{2!} z^2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{p\left(p-\frac{1}{2}\right)(p-1)} \frac{a^3}{3!} z^3 + - \cdots \right] \tag{5}$$

und das zweite wird gefunden, wenn $-p$ durch $p+1$ ersetzt wird

$$y_2 = B_0 e^{az} z^{p+1} \left[1 - \frac{p+1}{p+1} az + \frac{(p+1)(p+2)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)} \frac{a^2}{2!} z^2 - \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)(p+2)} \frac{a^3}{3!} z^3 + - \cdots \right] \tag{6}$$

Die erste dieser Reihen bricht ab, wenn p null oder positiv ganz wird, d. h. es wird irgend ein Glied geben, das zu null wird. Alle auf dieses Glied folgenden Glieder der Reihe nehmen die Form $\frac{0}{0} \cdot f(p)$ an. $\frac{0}{0}$ aber ist ein unbestimmter, vieldeutiger Wert, und man darf hiefür einen willkürlich gewählten, bestimmten setzen. Das partikuläre Integral y_1 zerfällt mithin in zwei Teile, in einen ersten völlig bestimmten und in einen zweiten, der mit der Unbestimmtheit $\frac{0}{0}$ multipliziert ist, welche wir nun zu null werden lassen. Dann fällt dieser zweite Teil weg, und nun ist das partikuläre Integral auf eine von der ganzzahligen Grösse p abhängige endliche Zahl von Gliedern reduziert.

Analog wird y_2 aus einer endlichen Zahl von Gliedern bestehen, wenn p negativ ganz wird.

Wir betrachten nun Gleichung (2). Diese wird durch die Substitution $y = e^{iaz} w$ verwandelt in

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + 2\,ia\,z^2 \frac{dw}{dz} - p\,(p+1)\,w = 0 \tag{7}$$

und ihre Integrale sind:

$$y_1 = A_0 e^{iaz} z^{-p} \left[1 - \frac{p}{p}(ia)\,z + \frac{p\,(p-1)}{p\left(p - \frac{1}{2}\right)} \frac{(ia)^2}{2!} z^2 - + \cdots \right] \tag{8}$$

und

$$y_2 = B_0\, e^{iaz} z^{p+1} \left[1 - \frac{p+1}{p+1}(ia)\,z + \frac{(p+1)(p+2)}{(p+1)\left(p+\frac{3}{2}\right)} \frac{(ia)^2}{2!} z^2 - + \cdots \right] \tag{9}$$

Das erste partikuläre Integral kann auf eine endliche Zahl von Gliedern reduziert werden, wenn p null oder positiv ganz ist, das zweite, wenn p negativ ganz ist.

Wenn also p eine ganze Zahl ist, so besteht stets eines der vier partikulären Integrale (5), (6), (8) oder (9) aus einer endlichen Zahl von Gliedern.

Nun zeigt § 2, dass p durch folgende Relationen mit dem Parameter n der Riccatischen Gleichung verknüpft ist:

$$2p = m - 1\,; \quad \frac{1}{m} = \frac{n}{2} + 1.$$

Setzt man darin für p die Laufzahl λ ein und löst nach n auf, so findet man als Bedingung, dass die Riccatische Gleichung in endlicher Form integrierbar sei, die Beziehung

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}.$$

II. Symbolische Lösungen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Gleichungen (1) und (2) des vorigen §.

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} - bcz^2 y - p(p+1)y = 0. \qquad (1)^{1)}$$

und

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + bcz^2 y - p(p+1)y = 0 \qquad (2)$$

Der variable Parameter p ist mit demjenigen der Riccatischen Gleichung durch die Relation

$$n = -\frac{4p}{2p \pm 1}$$ verbunden.

Durch Anwendung der Substitution $y = u z^{p+1}$ erhält man aus (1) und (2):

$$\frac{d^2u}{dz^2} + 2(p+1)\frac{1}{z}\frac{du}{dz} - a^2 u = 0 \qquad (3)$$

und

$$\frac{d^2u}{dz^2} + 2(p+1)\frac{1}{z}\frac{du}{dz} + a^2 u = 0 \qquad (4)$$

wo $a^2 = bc$.

Um Gleichung (3) zu lösen, betrachten wir vorerst

$$\frac{d^2v}{dz^2} - a^2 v = 0 \qquad (5)$$

oder, was dasselbe ist:

$$(D - a^2)v = (D + a)(D - a)v = 0$$

wo $D = \frac{d}{dz}$ bedeutet.

Es ist $$D[e^{az} f(z)] = e^{az}[D + a] f(z).$$

Mit Hülfe dieser Symbole findet man die zu (5) gehörende Stammgleichung:

$$v = A e^{az} + B e^{-az} \qquad (6)$$

Mittelst der Substitution $x = \frac{1}{2} z^2$ erhält man aus (5):

---

[1]) Siehe Forsyth, Differentialgleichungen, S. 202 u. f.

$$2x\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}-a^2v=0 \tag{7}$$

Nun differentiieren wir (7) $(p+1)$ mal nach x und erhalten dabei sukzessive:

$$2x\frac{d^3v}{dx^3}+(2\cdot 0+3)\frac{d^2v}{dx^2}-a^2\frac{dv}{dx}=0$$

$$2x\frac{d^4v}{dx^4}+(2\cdot 1+3)\frac{d^3v}{dx^3}-a^2\frac{d^2v}{dx^2}=0$$

$$2x\frac{d^5v}{dx^5}+(2\cdot 2+3)\frac{d^4v}{dx^4}-a^2\frac{d^3v}{dx^3}=0$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$2x\frac{d^{p+3}v}{dx^{p+3}}+(2\cdot p+3)\frac{d^{p+2}v}{dx^{p+2}}-a^2\frac{d^{p+1}v}{dx^{p+1}}=0. \tag{8}$$

Für $\frac{d^{p+1}v}{dx^{p+1}}$ setzen wir t und erhalten:

$$2x\frac{d^2t}{dx^2}+(2\cdot p+3)\frac{dt}{dx}-a^2t=0. \tag{9}$$

Wird nun die unabhängige Variable aus x wieder zurück in z transformiert mittelst der oben gebrauchten Beziehung $x=\frac{1}{2}z^2$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{d^2t}{dz^2}+\frac{2(p+1)}{z}\frac{dt}{dz}-a^2t=0 \tag{10}$$

Aus (3) und (10) geht hervor, dass

$$u=t=\frac{d^{p+1}v}{dx^{p+1}}$$

Setzt man für v aus (6) seinen Wert, so resultiert als Lösung von (3):

$$u=\left[\frac{1}{z}D\right]^{p+1}\left[A\,e^{az}+B\,e^{-az}\right].$$

Das vollständige Integral für Gleichung (1) ist:

$$y = z^{p+1} \left[\frac{1}{z} D\right]^{p+1} \cdot [A e^{az} + B e^{-az}] \tag{11}$$

wo $a^2 = bc$ bedeutet.

Um Gleichung (4) zu lösen, gehen wir aus von

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + a^2 u = 0, \tag{12}$$

woraus man durch symbolisches Rechnen erhält:

$$v_1 = A e^{iaz} = A[\cos az + i \sin az]$$
$$v_2 = B e^{-iaz} = B[\cos az - i \sin az].$$

Durch Addition und Subtraktion dieser zwei Gleichungen findet man als Stammgleichung

$$v = A' \cos az + B' \sin az \tag{13}$$

Übt man auf (12) dieselben Operationen aus wie auf (5), so erhält man als Lösung der Gleichung (2):

$$y = z^{p+1} \left[\frac{1}{z} D\right]^{p+1} \cdot [A' \cos az + B' \sin az] \tag{14}$$

Da die Differentialgleichungen (1) und (2) ungeändert bleiben, wenn man $-(p+1)$ für p setzt, so können ihre vollständigen Integrale auch dargestellt werden in den neuen Formen:

$$y = z^{-p} \left[\frac{1}{z} D\right]^{-p} \cdot [A e^{az} + B e^{-az}] \tag{15}$$

$$y = z^{-p} \left[\frac{1}{z} D\right]^{-p} \cdot [A' \cos az + B' \sin az]. \tag{16}$$

Die Integrale (11), (14), (15) und (16) haben nur Sinn, wenn p ganzzahlig ist. Die zwei ersten kann man verwenden, wenn $p = -1, 0, 1, 2 \ldots$ ist, die zwei letzten, wenn $p = 0, -1, -2, \ldots$ Werden die Symbole durch Differentiieren identifiziert, so wird das Resultat stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, woraus wieder die Richtigkeit der Relation

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$$

als Bedingung für die Integration der Riccatischen Gleichung in endlicher Form hervorgeht.

III. Lösung der Gleichung durch bestimmte Integrale.

§ 1.

Wir wählen als Ausgang der folgenden Betrachtung

$$\frac{du}{dx} + bu^2 = cx^n \tag{1}$$

aus welcher wir durch Anwendung der schon früher gebrauchten Transformation $u = \frac{1}{by}\frac{dy}{dx}$ erhalten:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - bc\,x^n y = 0 \tag{2}$$

Nun substituieren wir

$$y = \int e^{ipt} P\,dp \tag{3}$$

wo P eine Funktion von p allein und t eine solche von x allein sein soll. Diese beiden Funktionen und deren Grenzen sollen so bestimmt werden, dass dann (3) der Gleichung (2) genügt.

Wir differentiieren (3) zweimal nach x

$$\frac{dy}{dx} = i\int p\,e^{ipt}\frac{dt}{dx}P\,dp$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\int p^2 e^{ipt}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 P\,dp + i\int p\,e^{ipt}\frac{d^2t}{dx^2}P\,dp$$

Gleichung (2) geht über in:

$$-\int e^{ipt}\left[p^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + bc\,x^n\right]P\,dp + i\int e^{ipt}p\frac{d^2t}{dx^2}P\,dp = 0$$

$$-\int e^{ipt}\left[p^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - \left\{i(bc)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 x^n\right]P\,dp + i\int e^{ipt}p\frac{d^2t}{dx^2}P\,dp = 0 \tag{4}$$

Nun soll die bisher unbekannte Funktion t so definiert werden, dass sie der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \left\{i(bc)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 x^n$$

Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{dt}{dx} = i(bc)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{n}{2}}$$

$$t = i(bc)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}$$

Es sei $\quad i(bc)^{\frac{1}{2}} = \beta \; ; \; \frac{n}{2} + 1 = m,$ so dass

$$t = \frac{\beta x^m}{m} \; ; \quad dt = \beta \cdot x^{m-1} \tag{5}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \beta(m-1)\, x^{m-2}$$

Um eine einfache Gleichung zu erhalten, werde (4) mit $\frac{x^2}{mt}$ multipliziert. Dann ist

$$\frac{x^2}{m \cdot t}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{m \cdot t}\, \beta^2 x^{2m-2} = \frac{\beta^2 x^{2m}}{m \cdot t} = m \cdot t.$$

$$\frac{x^2}{m \cdot t} \cdot \beta \cdot x^{2m-2} = \frac{\beta^2 x^{2m}}{m \cdot t} = m \cdot t$$

$$\frac{x^2}{m \cdot t} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{x^2}{m \cdot t} \cdot \beta(m-1) \cdot x^{m-2} = \frac{\beta(m-1)}{m \cdot t}\, x^m = m-1$$

Somit erhalten wir aus (4):

$$-m \int e^{ipt}[p^2 - 1]\, t P\, dp + (m-1)\, i \int e^{ipt}\, p P\, dp = 0$$

Das erste Glied soll partiell integriert werden nach der Formel:

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

Wir setzen

$$u = (p^2 - 1) P \quad ; \quad du = \frac{d}{dp}(p^2 - 1) P\, dp$$

$$dv = e^{ipt} t\, dp \quad ; \quad v = -i e^{ipt}$$

so dass wir erhalten:

$$m e^{ipt}(p^2 - 1) P - m \int e^{ipt} \frac{d}{dp}(p^2 - 1) P\, dp +$$

$$+ (m-1) \int e^{ipt} p P\, dp = 0 \tag{6}$$

Gleichung (6) wird erfüllt, wenn gleichzeitig:

$$-m \frac{d}{dp}(p^2 - 1) P + (m - 1) p P = 0 \qquad (7)$$

und

$$e^{ipt}(p^2 - 1) P = 0 \qquad (8)$$

Aus (7) folgt:

$$m(p^2 - 1)\frac{dP}{dp} + 2 m p P = (m - 1) p P$$

$$m(p^2 - 1)\frac{dP}{P} = -(m + 1) p \, dp$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{(m+1)}{m} \cdot \frac{p}{(p^2 - 1)} dp$$

$$\operatorname{Log} P = \operatorname{Log} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2 \cdot m}} + \operatorname{Log} A$$

$$P = A (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2 \cdot m}} \qquad (9)$$

Dies in Gleichung (8) substituiert, gibt:

$$e^{ipt}(p^2 - 1)^{\frac{m-1}{2 \cdot m}} = 0 \qquad (10)$$

Diese letzte Gleichung liefert die Grenzen, innerhalb welchen das substituierte Integral (3) gilt. Ihr wird durch einen lemniscatenartigen Weg um die Punkte $+1$ und -1 genügt. Denn bei einem rechtläufigen Umlauf um $+1$ gewinnt der Integrand die Phase

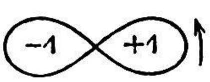
$$e^{-2 i \pi \left(\frac{m-1}{2 \cdot m}\right)}$$

und bei einem rückläufigen um -1 diejenige von

$$e^{2 i \pi \left(\frac{m-1}{2 \cdot m}\right)}$$

Das Produkt beider ist 1. Es kehrt also der Integrand auf seinen ursprünglichen Wert zurück. Die Integrationskurve ist eine geschlossene. Unser substituiertes Integral (3) ist nun völlig bestimmt:

$$y = \int e^{ipt}(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2 \cdot m}} dp \qquad (11)$$

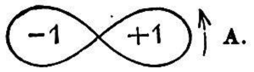


A.

Im Punkte A, der auf der Realitätsgeraden liegt, soll das Integral die Phase Null haben.

Nach der Theorie der Bessel'schen Funktionen (siehe Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen von Prof. Dr. Graf, Band I, Seite 67) ist:

$$\int e^{ipt}(p^2 - 1)^{a-\frac{1}{2}}\,dp = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{t}{2}\right)^2} J^a(t).$$



In unserem Falle ist $a - \frac{1}{2} = -\frac{m+1}{2m}$. Somit

$$y = \frac{A \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2i\pi}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2m}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2m}}} \cdot J^{-\frac{1}{2m}}(t)$$

wo A eine beigefügte Integrationskonstante bedeutet. Nach den Gleichungen (5) ist:

$$t = \frac{\beta x^m}{m};\ \beta = i(bc)^{\frac{1}{2}};\ m = \frac{n}{2} + 1;\ \frac{m+1}{2m} = \frac{\frac{n}{2}+2}{n+2};\ \frac{1}{2m} = \frac{1}{n+2}$$

$$y = A \cdot \frac{2i\pi \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{i(bc)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n}{2}+1} x^{\frac{n}{2}+1}\right]^{\frac{1}{n+2}}}{\Gamma\left(\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}\right)} J^{-\frac{1}{n+2}}\left[\frac{i(bc)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n}{2}+1} x^{\frac{n}{2}+1}\right]$$

Für $A \cdot \dfrac{2i\pi \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+2}}}{\Gamma\left(\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}\right)}$ setzen wir eine neue Konstante

A_1 und für

$$\frac{i(bc)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n}{2}+1}\, x^{\frac{n}{2}+1} = X,$$

so dass die Lösung folgende Form annimmt:

$$y = A_1 \cdot X^{\frac{1}{n+2}}\, \overset{-\frac{1}{n+2}}{J}(X) \tag{12}$$

Es ist nach einer eingangs gebrauchten Substitution

$$u = \frac{1}{by} \cdot \frac{dy}{dx}$$

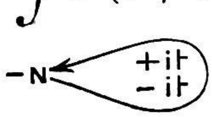
Aus dem ersten partikulären Integral (12) der Differentialgleichung (2) könnte man mit Hülfe derselben eine Lösung der Gleichung (1) bestimmen.

Wir wollen nun ein zweites partikuläres Integral der Gleichung (2) suchen. Der Gleichung (10) wird auch genügt, wenn sich die Variable aus iN rechtläufig um $+1$ nach iN zurück bewegt. Das substituierte Integral wird daher:

$$y = \int e^{ipt}\, (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}}\, dp \tag{13}$$

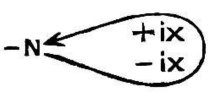
Substituiert man hierin $ipt = s$, so geht der Weg aus $-N \cdot t = -N$ um $+it$ herum nach $-N$ zurück, und es wird

$$y = \frac{(-1)^{-\frac{m+1}{2m}}}{it} \cdot t^{\frac{m+1}{m}} \int e^{s}\, (s^2 + t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}\, ds \tag{14}$$



Nun ist

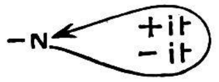
$$\int e^{u}\, (u^2 + x^2)^{a - \frac{1}{2}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2\, i\, \pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)(2x)^{-a}}\, \overset{-a}{J}(x)$$



(Siehe Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen von Prof. Dr. Graf, Heft I, Seite 73.)

Somit wird

$$\int e^{s}\,(s^2+t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\,i\,\pi}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2m}\right)(2\,t)^{\frac{1}{2\,m}}}\cdot \overset{\frac{1}{2\,m}}{J}(t)$$



$$y = B\cdot\frac{(-1)^{\frac{m+1}{2\,m}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\,i\,\pi\,t^{\frac{m+1}{m}}}{i\,t\;\Gamma\left(\frac{m+1}{2\,m}\right)(2\,t)^{\frac{1}{2\,m}}}\;\overset{\frac{1}{2\cdot m}}{J}(t)$$

Verwendet man nun die Gleichung (5) wie beim ersten partikulären Integral und setzt man

$$B\cdot\frac{(-1)^{\frac{-\frac{n}{2}+2}{n+2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\,i\,\pi}{\Gamma\left(\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}\right)\,2^{\frac{1}{n+2}}} = B_1$$

$$\frac{i\,(bc)^{\frac{1}{2}}}{\frac{n}{2}+1}\,x^{\frac{n}{2}+1} = X$$

so nimmt das zweite partikuläre Integral die Form an

$$y = B_1\,X^{\frac{1}{n+2}}\,\overset{\frac{1}{n+2}}{J}(X) \tag{15}$$

und die Stammgleichung der Differentialgleichung (2) wird

$$y = A_1\,X^{\frac{1}{n+2}}\,\overset{-\frac{1}{n+2}}{J}(X) + B_1\,X^{\frac{1}{n+2}}\,\overset{\frac{1}{n+2}}{J}(X) \tag{16}$$

Diese Lösung wird unbrauchbar für $n = -2$. Die diesem Werte entsprechende Gleichung

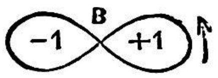
$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} - bc\,y = 0$$

ist gelöst in Abschnitt I, § 2.

Wir wollen nun die Fälle aufsuchen, in denen die Riccatische Gleichung in endlicher Form integrierbar ist. Dazu benutzen wir die Integrale (11) und (13). In beiden tritt $-\frac{m+1}{2m}$ als Potenzexponent auf. Setzt man für m nach (5) $\frac{n}{2}+1$, so geht $-\frac{m+1}{2m}$ über in $-\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}$, welcher Ausdruck nun eine ganze Zahl λ sein kann. Wir unterscheiden zwei Fälle, erstens $\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}=+\lambda$, zweitens $\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}=-\lambda$.

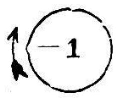
1. $\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2}=\lambda$. Das Integral (11) lautet nun

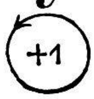
$$y=\int e^{ipt}(p^2-1)^{-\lambda}\,dp$$



Da λ eine ganze Zahl ist, so bildet der Integrationsweg bei B einen Doppelpunkt, so dass er in zwei geschlossene Kurven um die Pole $+1$ und -1 zerlegt werden kann.

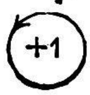
$$y=\int e^{ipt}(p^2-1)^{-\lambda}\,dp+\int e^{ipt}(p^2-1)^{-\lambda}\,dp$$





Gleichung (10) lässt aber erkennen, dass schon eines dieser Integrale eine partikuläre Lösung darstellt. Wir betrachten daher nur

$$y_1=\int\frac{e^{ipt}}{(p+1)^{\lambda}}\cdot\frac{dp}{(p-1)^{\lambda}}$$



Auf dieses Integral wenden wir die erweiterte Formel von Cauchy an:

$$\int_{a} f(x) \frac{dx}{(x-a)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{n!} f^{n}(a) = \frac{2i\pi}{n!} D_{a}^{n}(f[x])$$

Mithin ist:

$$y_1 = \int_{+1} \frac{e^{ipt}}{(p+1)^{\lambda}} \frac{dp}{(p-1)^{\lambda}} \frac{2i\pi}{(\lambda-1)!} D_{1}^{\lambda-1}\left[\frac{e^{ipt}}{(p+1)^{\lambda}}\right]$$

Werden die Differentiationen ausgeführt, so setzt sich der entstehende Ausdruck immer aus einer endlichen Zahl von Gliedern zusammen, d. h. Gleichung (2) ist in endlicher Form integrierbar, wenn:

$$\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2} = \lambda \text{ ist.} \tag{17}$$

2. $\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2} = -\lambda$. In Integral (13) schliesst sich der Integrationsweg, und er kann ins Endliche um die Pole ± 1 zusammengezogen werden. Derselbe Weg umgibt aber rückläufig den Pol ∞. Daher ist unter der gemachten Bedingung Integral (13) identisch mit

$$\int_{\infty} e^{ipt}(p^2-1)^{\lambda}\, dp$$

Für $p = \frac{1}{v}$ gesetzt, ergibt

$$= -\int_{0} \frac{e^{\frac{it}{v}}(1-v^2)^{\lambda}}{v^{2\lambda+2}}\, dv$$

Da $e^{\frac{it}{v}}$ für $v = 0$ gesetzt, nicht unendlich gross wird, so kann das letzte Integral mit der erweiterten Formel von Cauchy ausgemittelt werden, d. h. Gleichung (2) ist in endlicher Form integrierbar, wenn

$$\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2} = -\lambda \quad \text{ist.} \tag{18}$$

Vereinigt ergeben (17) und (18) als Bedingung für eine Integration der Gleichung (2) in endlicher Form

$$\frac{\frac{n}{2}+2}{n+2} = \pm\lambda,$$

woraus folgt:

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$$

Da durch die eingangs gebrauchte Substitution $u = \frac{1}{by}\frac{dy}{dx}$ der Parameter ungeändert blieb, so gilt letztere Relation auch für die Riccatische Gleichung.

Bis jetzt haben wir ausschliesslich Integrale mit freiem Integrationsweg ausgewertet. Die Riccatische Gleichung kann aber durch Integrale mit geradlinigem Wege gelöst werden. Diese Fälle müssen aber, wie das in der Natur der Sache liegt, als Spezialfälle in jenen enthalten sein. Wenn die Punkte ± 1 betreten werden dürfen, so genügen der Gleichung (10) die geradlinigen Wege -1 bis $+1$, $+1$ bis iN, -1 bis iN. Um zu erfahren, unter welcher Bedingung in Gleichung (13) die Punkte ± 1 zugänglich seien, untersuchen wir

$$\int_{-1} (1+p)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

Es sei $1 + p = \frac{1}{z}$. Dem Punkt $p = -1$ entspricht $z = \infty$

$$\int_{\infty} z^{\frac{1-3m}{2m}} dz = -\frac{z^{\frac{1-m}{2m}}}{\frac{1-m}{2m}}$$

Hieraus geht hervor, dass m absolut > 1 sein muss.

Unter dieser Voraussetzung erhält man aus Integral (13) folgende drei partikuläre Integrale:

$$y_1 = \int_{-1}^{+1} e^{ipt}(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp \qquad (19)$$

$$y_2 = \int_{iN}^{+1} e^{ipt}(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp \qquad (20)$$

$$y_3 = \int_{iN}^{-1} e^{ipt}(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp \qquad (21)$$

Allen drei Integralen darf eine multiplikative Integrationskonstante beigefügt werden.

Nun ist

$$\int_{-1}^{+1} e^{ixu}(1 - u^2)^{a-\frac{1}{2}} du = \frac{\overline{\left|\left(\frac{1}{2}\right)\right.} \; \overline{\left|\left(\frac{1}{2} + a\right)\right.}}{\left(\frac{x}{2}\right)^a} \overset{a}{J}(x).$$
$$\left(\operatorname{recp} a > \frac{1}{2}\right)$$

(Siehe Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen von Prof. Dr. Graf, Band I, S. 69.)

Wendet man diese Formel auf das mit $(-1)^{-\frac{m+1}{2m}}$ multiplizierte Integral (19) an, setzt für m und t die bezüglichen Werte, fasst die konstanten Grössen in A_1 zusammen und benützt die schon früher angewendeten Abkürzungen, so erhält man als erste partikuläre Lösung der Gleichung (2)

$$y_1 = A_1 X^{\frac{1}{n+2}} \overset{-\frac{1}{n+2}}{J}(X) \qquad (22)$$

Wir wollen (19) noch auf eine andere Art lösen. Wir zerlegen dieses Integral in

$$\int_{-1}^{0} e^{ipt}(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp + \int_{0}^{+1} e^{ipt}(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

Im ersten Integral werde p durch $-p$ ersetzt, und es folgt

$$y_1 = \int^{1} (e^{ipt} + e^{-ipt})(p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} dp$$

$$= 2 \int \cos pt \, (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} \, dp$$

$$= 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{t^{2\lambda}}{(2\lambda)!} \int_0^1 p^{2\lambda} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} \, dp$$

Für $p^2 = z$ gesetzt, wird hieraus:

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\gamma} \frac{t^{2\lambda}}{(2\lambda)!} (-1)^{\frac{m+1}{2m}} \int_0^1 z^{\lambda - \frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{m+1}{2m}} \, dz$$

Durch Anwendung des Euler'schen Integrals I. Art, 1. Form wird

$$\int_0^1 z^{\lambda - \frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{m+1}{2m}} \, dz = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m\lambda + 2m - 1}{2m}\right)}$$

Für $(-1)^{-\frac{m+1}{2m}} \cdot \Gamma\left(\frac{m-1}{2m}\right)$ darf A_1 gesetzt werden, so dass die partikuläre Lösung ist

$$y_1 = A \int_0^1 e^{ipt} (p^2 - 1)^{-\frac{m+1}{2m}} \, dp$$

$$= A_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{t^{2\lambda}}{(2\lambda)!} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m\lambda + 2m - 1}{2m}\right)} \tag{22}$$

Durch die Substitution $ipt = s$ transformieren sich (20) und (21) in:

$$y_2 = (-1)^{-\frac{m+1}{2m}} \cdot i \cdot t^{\frac{1}{m}} \cdot \int_{-N}^{+it} e^s (s^2 + t^2)^{-\frac{m+1}{2m}} \, ds \tag{23}$$

$$y_3 = (-1)^{-\frac{m+1}{2m}} \cdot i \cdot t^{\frac{1}{m}} \cdot \int_{-N}^{-it} e^s (s^2 + t^2)^{-\frac{m+1}{2m}} \, ds \tag{24}$$

Beide Integrale ändern ihre Werte nicht, wenn die untere Grenze $-N$ ersetzt wird durch $-N + it$ oder $-N - it$, weil sie längs des westlichen Horizonts verschwinden.

Nun aber gilt :

$$\int_{-N+ix}^{ix} e^{u}(u^2+x^2)^{a-\frac{1}{2}}\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)e^{-i(a-1)\frac{\pi}{2}}}{(2x)^{-a}}\overset{a}{P}(x)$$

(Siehe Einleitung . . . Band I, Seite 80).

Die Definitionsformel für

$$\overset{a}{P}(x) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{ia\pi}{2}}\left[\overset{a}{J}(x) + i\,\overset{a}{K}(x)\right]$$

Man erhält schliesslich

$$y_2 = A_2 X^{\frac{1}{n+2}} \overset{-\frac{1}{n+2}}{P}(X) \tag{25}$$

Auf Seite 81 des schon mehrmals zitierten Bandes findet man

$$\int_{-N-ix}^{-ix} e^{u}(u^2+x^2)^{a-\frac{1}{2}}\,du = e^{i(a-1)\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{(2x)^{-a}}\overset{a}{Q}(x)$$

worin bedeutet $\overset{a}{Q}(x) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{i\pi a}{2}}\left[\overset{a}{J}(x) - i\,\overset{a}{K}(x)\right]$

Mit Hülfe dieser Formel erhält man aus (24)

$$y_3 = A_3 X^{\frac{1}{n+2}} \overset{-\frac{1}{n+2}}{Q}(X) \tag{26}$$

§ 2.

Wir gehen von Gleichung (2) des vorigen § aus.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - bc\,x^n\,y = 0 \tag{1}$$

Hieraus geht durch die Substitutionen

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)z = x^{\frac{n}{2}+1}\ ;\quad \frac{n}{2}+1 = \frac{1}{m} \qquad \text{hervor}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{m-1}{z}\frac{dy}{dz} - bc\,y = 0$$

und für $m-1 = a$; $bc = \beta^2$ gesetzt resultiert

$$z\frac{d^2y}{dz^2} - a\frac{dy}{dz} - \beta^2 z\,y = 0 \tag{2}$$

Diese Gleichung soll durch die Methode der Substitution bestimmter Integrale gelöst werden.

Es sei $$y = \int e^{zt}\,T\,dt, \quad \text{wo } T = f(t) \tag{3}$$

Dann ist:

$$\int z \cdot e^{zt} T\,[t^2 - \beta^2]\,dt - a \int t\,e^{zt} T\,dt = 0 \tag{4}$$

Erstes Glied partiell integriert:

$$u = (t^2 - \beta^2)T \;;\; du = \frac{d}{dt}\,[(t^2 - \beta^2)T]\,dt$$

$$dv = e^{zt} z\,dt \quad ; \quad v = e^{zt}$$

Demnach verwandelt sich (4) in

$$e^{zt}(t^2 - \beta^2)T - \int e^{zt}\left[\frac{d}{dt}\{(t^2 - \beta^2)T\} + a\,t\,T\right]dt = 0 \tag{5}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn:

$$\frac{d}{dt}\{(t^2 - \beta^2)T\} + a\,t\,T = 0 \tag{6}$$

und $$e^{zt}(t^2 - \beta^2)T = 0 \tag{7}$$

Aus Gleichung (6) folgt

$$\frac{dT}{T} + \frac{2t}{t^2 - \beta^2}\,dt + \frac{a\,t}{t^2 - \beta^2}\,dt = 0$$

$$\operatorname{Log} T + \operatorname{Log}(t^2 - \beta^2) + \operatorname{Log}(t^2 - \beta^2)^{\frac{a}{2}} = 0$$

$$T = (t^2 - \beta^2)^{-\left(\frac{a}{2}+1\right)}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (7) ein, so erhält man als Gleichung, die die Grenzen des substituierten Integrals (3) liefert

$$e^{zt}(t - \beta)^{-\frac{a}{2}}(t + \beta)^{-\frac{a}{2}} = 0,$$

welche ein erstes Mal erfüllt ist, wenn t aus $-\infty$ kommend eine Schlinge um $\pm\beta$ beschreibt. Daher lautet das substituierte Integral (3) nun:

$$y = \int_{-\infty \;\; -\beta+\beta} e^{zt}(t^2 - \beta^2)^{-\frac{a}{2}-1}\,dt$$

woraus, für $zt = u$ gesetzt, wird

$$y = z^{a+1} \int\limits_{-\infty \, (-\beta z + \beta z)} e^{u} (u^2 - \beta^2 z^2)^{-\frac{a}{2}-1} du \qquad (8)$$

Aus der Theorie der Bessel'schen Funktionen ist bekannt

$$\int\limits_{-\infty \, (+ix, -ix)} e^{u} (u^2 + x^2)^{b - \frac{1}{2}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2 i \pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - b\right) (2x)^{-b}} \overset{-b}{J}(x)$$

$$\text{wo} \quad \frac{x^2}{n^2} < 1$$

(Siehe Einleitung etc. Band I, S. 73).

Substituiert man $x = i \cdot \beta \cdot z$, so wird daraus

$$\int\limits_{-\infty \, (-\beta z + \beta z)} e^{u} (u^2 - \beta^2 z^2)^{b - \frac{1}{2}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2 i \pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - b\right) (2 i \beta z)^{-b}} \cdot \overset{-b}{J}(i\beta z) \qquad (9)$$

Die Integrale in (8) und (9) stimmen bis auf die Parameter miteinander überein.

Es ist $\qquad b - \frac{1}{2} = -\frac{a}{2} - 1 \qquad$ und

$$\int\limits_{-\infty \, (-\beta z + \beta z)} e^{u} (u^2 - \beta^2 z^2)^{-\frac{a}{2} - 1} du = \frac{2 i \pi \, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) (2 i \beta z)^{\frac{a+1}{2}}} \overset{\frac{a+1}{2}}{J}(i\beta z) \qquad (10)$$

Verwendet man die eingangs gebrauchten Substitutionen

$$a = m - 1; \ \frac{1}{m} = \frac{n}{2} + 1 \ ; \ bc = \beta^2; \ z = \frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2} + 1},$$

setzt abkürzend

$$i (bc)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2} + 1} = X \qquad (11)$$

und vereinigt mehrere konstante Werte der Gleichung (10) in einer beizufügenden Integrationskonstanten, so kann ein erstes partikuläres Integral folgende Form annehmen:

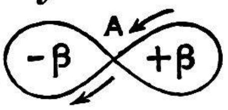
$$y_1 = A X^{\frac{1}{n+2}} \overset{\frac{1}{n+2}}{J}(X) \tag{12}$$

Wir bestimmen nun das zweite partikuläre Integral. Der Gleichung

$$e^{zt}(t-\beta)^{-\frac{a}{2}}(t+\beta)^{-\frac{a}{2}} = 0,$$

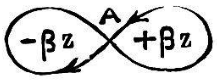
welche die Integrationsgrenzen bestimmt, wird auch genügt, wenn die Variable t eine Doppelschleife um die Pole $\pm\beta$ beschreibt, so dass das Integral das folgende ist:

$$y = \int e^{zt}\,(t^2-\beta^2)^{-\frac{a}{2}-1}\,dt \tag{13}$$



welches sich, für zt = u gesetzt, transformiert in

$$y = z^{a+1}\int e^{u}\,(u^2-\beta^2 z^2)^{-\frac{a}{2}-1}\,du \tag{14}$$



Nun ist

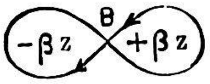
$$\int e^{u}\,(u^2+x^2)^{b-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{2 i \pi\, \Gamma\!\left(\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-i\pi b}}{\Gamma\!\left(\frac{1}{2}-b\right)(2x)^{-b}}\,\overset{b}{J}(x) \tag{15}$$

(Siehe Einleitung etc. Band I, S. 71.)

In Gleichung (14) habe $u^2-\beta^2 z^2$ die Phase null, wenn u von Osten kommend die Realitätsgerade überschreitet, also bei A, und sie sei in (15) null, wenn u absteigend beim Kreuzungspunkt B angelangt ist.

Ist in (15) $x = i\beta z$, so wird

$$\int e^u \,(u^2 - \beta z^2)^{b - \frac{1}{2}} du = - \frac{2 i \pi \,\Gamma\!\left(\frac{1}{2}\right) e^{-i\pi b}}{\Gamma\!\left(\frac{1}{2} + b\right) (2 i \beta z)^{-b}} \overset{b}{J}(i\beta z) \tag{16}$$



Jetzt sind die Integrale (14) und (16) einander bis auf die Parameter gleich. Es ist $b - \frac{1}{2} = - \frac{a}{2} - 1$, und mit Hülfe der Gleichungen (11) können wir das zweite partikuläre Integral in folgender Form geben

$$y_2 = B X^{\frac{1}{n+2}} \overset{-\frac{1}{n+2}}{J}(X) \tag{17}$$

Die Stammgleichung setzt sich aus den Integralen (12) und (17) zusammen.

Aus den Integralen (8) und (14) könnte man ohne grosse Mühe die integrablen Fälle der Riccatischen Gleichung aufsuchen, d. h. die Relation $n = - \frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$ ableiten.

§ 3.

Wir betrachten nochmals Gleichung (2) des vorigen §.

$$z \frac{d^2y}{dz^2} - a \frac{dy}{dz} - \beta^2 z y = 0 \quad \text{oder} \quad -\beta^2 = \gamma^2$$

$$z \frac{d^2y}{dz^2} - a \frac{dy}{dz} + \gamma^2 z y = 0 \tag{1}$$

Es werde in dieselbe substituiert:

$$y = \int e^{-\frac{z}{t}} T\, dt, \text{ wo } T = f(t) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dz} = - \int \frac{1}{t} e^{-\frac{z}{t}} T\, dt\,; \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \int \frac{1}{t^2} e^{-\frac{z}{t}} T\, dt$$

und wir erhalten

$$\int \frac{z}{t^2} e^{-\frac{z}{t}} T\, dt + \int e^{-\frac{z}{t}} \left(\frac{a}{t} + \gamma^2 z \right) T\, dt = 0$$

Wir integrieren das erste Glied partiell nach der Formel

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v du$$

$$u = T\;;\; du = \frac{dT}{dt}\,dt\;;\; dv = \frac{z}{t^2}\,e^{-\frac{z}{t}}dt\;;\; v = e^{-\frac{z}{t}}$$

und bekommen:

$$e^{-\frac{z}{t}}\,T + \int e^{-\frac{z}{t}}\left[\left(\frac{a}{t} + \gamma^2 z\right)T + \frac{dT}{dt}\right]dt = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn gleichzeitig

$$\left(\frac{a}{t} + \gamma^2 z\right)T - \frac{dT}{dt} = 0 \qquad (3)$$

$$e^{-\frac{z}{t}}\,T = 0 \qquad (4)$$

Aus (3) folgt:

$$\operatorname{Log} T + \operatorname{Log} t^{-a} - \gamma^2 z\,t = 0$$

$$T = e^{\gamma^2 z t}\,t^a \qquad (5)$$

Setzt man diesen Wert in (4) ein, so erhält man als Ausdruck, der die Grenzen des substituierten Integrals (2) ergibt

$$e^{-\frac{z}{t} + \gamma^2 z t}\,t^a = 0 \qquad (6)$$

Diesem wird genügt, wenn die Variable t aus $-\frac{N}{2\gamma^2 z}$ (N sehr gross gedacht) eine Schleife um Null herum durchläuft, und es ist eine partikuläre Lösung der Gleichung (1)

$$y = \int\limits_{-\frac{N}{2\gamma^2 z}\;\circlearrowleft\;0} e^{\gamma^2 z t - \frac{z}{t}}\,t^a dt$$

Für $t = \frac{w}{\gamma}$ gesetzt.

$$y = \gamma^{-a-1}\int\limits_{-\frac{N}{2\gamma z}\;\circlearrowleft\;0} e^{\gamma z\left(w - \frac{1}{w}\right)}\,w^a dw \qquad (7)$$

Zufolge der Theorie der Bessel'schen Funktionen gilt

$$\int\limits_{-\frac{N}{x}\;\circlearrowleft\;0} e^{\frac{x}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}\,w^{-b-1}\,dw = 2i\pi\overset{b}{J}(x)$$

(Siehe Einleitung ... Band I, S. 52.)

oder $\frac{x}{2} = \gamma z$ gesetzt und $-b-1 = a$

$$\int\limits_{-\frac{N}{2\gamma z}} e^{\gamma z\left(w-\frac{1}{w}\right)} w^{a}\, dw = 2\pi \overset{-a-1}{J}(2\gamma z) \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt als erste partikuläre Lösung

$$y = 2i\pi\gamma^{-a-1} \overset{-a-1}{J}(2\gamma z)$$

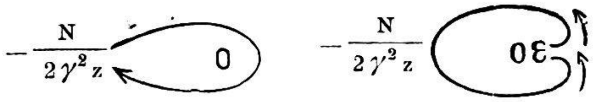
für $2i\pi \cdot \gamma^{-a-1} = A$ gesetzt

$$y = A \cdot \overset{-a-1}{J}(2\gamma z) \tag{9}$$

Wir suchen nun das zweite partikuläre Integral. Gleichung (6) wird auch erfüllt, wenn t aus ε, wo ε auf der positiven Hälfte der Realitätsgeraden sehr nahe bei Null gelegen ist, eine Schleife um Null herum beschreibt. Um dies zu beweisen, setzen wir in Gleichung (6) $t = -\frac{1}{u}$ und erhalten

$$e^{uz - \frac{\gamma^2 z}{u}} u^{-a} = 0,$$

welcher Ausdruck verschwindet, wenn die Varable aus $-\frac{N}{2\gamma^2 z}$ eine Kurve rückläufig um Null herum nach $-\frac{N}{2\gamma^2 z}$ beschreibt. Dem u — Weg entspricht ein rechtläufiger t — Weg aus $+\varepsilon$ um Null herum. Die beiden Wege haben somit folgende Form:



u — Weg t — Weg

Daher genügt unsere Differentialgleichung als zweites partikuläres Integral

$$y = \int\limits_{-\frac{N}{2\gamma^2 z}} e^{\gamma^2 z t - \frac{z}{t}} t^{a}\, dt$$

Man setze $t = \frac{w}{\gamma}$

$$y = \gamma^{-a-1} \int\limits_{-\frac{N}{2\gamma z}} e^{\gamma z\left(w-\frac{1}{w}\right)} w^{a}\, dw \tag{10}$$

Nun gilt folgende Gleichung:

$$\int\limits_{-\frac{N}{x}\;(0\varepsilon)} e^{\frac{x}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right)} w^{-b-1}\,dw = 2i\pi\cdot e^{-i\pi b}\,\overset{-b}{J}(x)$$

(Siehe Einleitung ... Band I, S. 60.)

Für $\frac{x}{2} = \gamma z$ und $-b-1 = a$ gesetzt, ergibt

$$\int\limits_{-\frac{N}{2\gamma z}\;(0\varepsilon)} e^{\gamma z\left(w-\frac{1}{w}\right)} w^{a}\,dw = 2i\pi\cdot e^{i\pi(a+1)}\,\overset{a+1}{J}(2\gamma z) \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt als zweite partikuläre Lösung, wenn $2i\pi\cdot\gamma^{-a-1}e^{i\pi(a+1)} = B$ gesetzt wird.

$$y_2 = B\cdot\overset{a+1}{J}(2\gamma z) \tag{12}$$

und die Stammgleichung heisst

$$y = A\cdot\overset{-a-1}{J}(2\gamma z) + B\,\overset{a+1}{J}(2\gamma z) \tag{13}$$

Zu bemerken wäre, dass die Integrationswege aus $+\varepsilon$ stets ins Endliche hereingezogen werden können, so dass ein solcher eine unendlich kleine Strecke um den Nullpunkt darstellt.

Die Integrale (7) und (10) können leicht auch ohne Anwendung einer Formel aus der Theorie der Bessel'schen Funktionen gelöst werden.

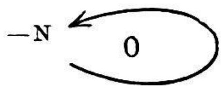
Nach Entwicklung von $e^{-\frac{\gamma z}{w}}$ erhält man aus (7)

$$y = \gamma^{-a-1}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{(\gamma z)^{\lambda}}{\lambda!}\int\limits_{-N\;(0)} e^{\gamma z w}\,w^{a-\gamma}\,dw$$

(An Stelle der Integrationsgrenze $-\frac{N}{2\gamma z}$ setzen wir $-N$, was der Grösse von wegen ohne weiteres gestattet ist.)

Für $w = \frac{s}{\gamma z}$ gesetzt, ergibt

$$y = \gamma^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{(\gamma z)^{2\lambda-a-1}}{\lambda!} \int e^{s}\, s^{a-\lambda}\, ds$$



Aber

$$\frac{1}{|\overline{(a)}} = \frac{1}{2i\pi} \int e^{s}\, s^{-a}\, ds$$

Dies ist das Integral von Weyerstrass.

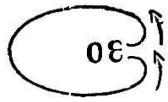
Somit

$$y = 2i\pi \cdot \gamma^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{(\gamma z)^{2\lambda-a-1}}{\lambda!\, |\overline{(\lambda-a)}}$$

$$y = 2i\pi \cdot \gamma^{-a-1} \overset{-a-1}{J}(2\gamma z) \tag{14}$$

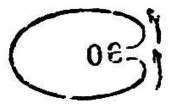
Um das Integral (10) auf ähnliche Art auszuwerten, möge $e^{\gamma z w}$ entwickelt werden, woraus resultiert:

$$y = \gamma^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\gamma z)^{\lambda}}{\lambda!} \int e^{-\frac{\gamma z}{w}}\, w^{a+\lambda}\, dw$$



Für $\frac{\gamma z}{w} = \frac{1}{s}$ substituiert:

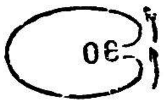
$$y = \gamma^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\gamma z)^{2\lambda+a+1}}{\lambda!} \int e^{-\frac{1}{s}}\, s^{a+\lambda}\, ds \tag{15}$$



Nun soll im Integral von Weyerstrass der Weg 

mittels $s = -\frac{1}{s}$ transformiert werden. Es zeigt sich, dass derselbe eine rückläufige Kurve aus $+\varepsilon$ um den Nullpunkt herum darstellt, wo $+\varepsilon$ eine sehr kleine positive, reelle Zahl ist, und das Integral lautet, nachdem die Integrationsrichtung positiv ist:

$$\frac{1}{|\overline{a}} = \frac{e^{-i\pi(a+1)}}{2i\pi} \int e^{-\frac{1}{s}} s^{a-2}\, ds \tag{16}$$



Aus (15) und (16) folgt:

$$y = 2i\pi \cdot e^{i\pi(a+1)} \gamma^{-a-1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{(\gamma z)^{2\lambda+a+1}}{\gamma\, |\overline{(a+\lambda+2)}}$$

$$y = 2i\pi e^{i\pi(a+1)} \gamma^{-a-1} \overset{a+1}{J}(2\gamma z) \tag{17}$$

Aus (14) und (17) erhält man wie vorhin die Stammgleichung

$$Y = A \overset{-a-1}{J}(2\gamma z) + B \overset{a+1}{J}(2\gamma z)$$

worin $\gamma^2 = -\beta^2$ bedeutet.