Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1906)

Heft: 1609-1628

Artikel: Ueber die Integrale x^m cos nx dx und x^m sin nx dx (m und n ganze Zahlen) [mit den Integralgrenzen von 0 bis]

Autor: Bohren, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319165

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

A. Bohren.

Ueber die Integrale $\int_0^\pi x^m \cos nx\,dx$ und $\int_0^\pi x^m \sin nx\,dx$ (m und n ganze Zahlen)

(Eingereicht den 5. Juli 1906).

In Tabellen über bestimmte Integrale finden sich[1])

$$\int_0^\pi x \sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$$

$$\int_0^\pi x \cos nx\,dx = -\frac{1}{n^2}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx = \frac{2}{n^3}\left[-1 + (-1)^n\left(1 - \frac{n^2\pi^2}{2}\right)\right]$$

$$\int_0^\pi x^2 \cos nx\,dx = (-1)^n \cdot \frac{2\pi}{n^2}$$

Mit Hilfe dieser Spezialfälle lassen sich nun auch die oben angegebenen Integrale leicht ausführen.

Durch partielle Integration erhalten wir zunächst

$$F(m) = \int_0^\pi x^m \sin nx\,dx = -\left(\frac{1}{n} x^m \cos nx\right)_0^\pi + \frac{m}{n}\int_0^\pi x^{m-1}\cos nx\,dx$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n}\int_0^\pi x^{m-1}\cos nx\,dx$$

$$f(m) = \int_0^\pi x^m \cos nx\,dx = -\frac{m}{n}\int_0^\pi x^{m-1}\sin nx\,dx$$

[1]) Nouvelles tables d'intégrales définis de Bierens de Haan. Meyer, Bestimmte Integrale.

also $$F(m) = (-1)^{n+1}\frac{\pi^m}{n} + \frac{m}{n} f(m-1)$$

$$f(m) = -\frac{m}{n} F(m-1)$$

Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln gelangen wir auf $F_{(1}$ und $f_{(1)}$, mit den oben angegebenen Werten.

Es ist demnach

$F_1 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}$	$f_1 = -\left[1 + (-1)^{n+1}\right]\frac{1}{n^2}$
$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$	$f_2 = -\frac{2}{n} F_1$
$F_3 = \pi^2 F_1 + \frac{3}{n} f_2$	$f_3 = -\frac{3}{n} F_2$
$F_4 = \pi^3 F_1 + \frac{4}{n} f_3$	$f_4 = -\frac{4}{n} F_3$
. . . . .	. . . . .
$F_m = \pi^{m-1} F_1 + \frac{m}{n} f_{m-1}$	$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$

Werden die entsprechenden Werte eingesetzt, so erhalten wir für die F_1 nach geraden und ungeraden Indices geordnet:

$$F_1 = F_1$$

$$F_2 = \pi F_1 + \frac{2}{n} f_1$$

$$F_3 = \pi^2 F_1 - \frac{2.3}{n^2} F_1$$

$$F_4 = \pi^3 F_1 - \frac{3.4}{n^2}\pi F_1 - \frac{2.3.4}{n^3} f_1$$

$$F_5 = \pi^4 F_1 - \frac{4.5}{n^2}\pi^2 F_1 + \frac{2.3.4.5}{n^4} F_1$$

$$F_6 = \pi^5 F_1 - \frac{5.6}{n^2}\pi^3 F_1 + \frac{3.4.5.6}{n^4}\pi F_1 + \frac{2.3.4.5.6}{n^5} f_1$$

$$F_7 = \pi^5 F_1 - \frac{6.7}{n^2}\cdot\pi^4 F_1 + \frac{4.5.6.7}{n^4}\pi^2 F_1 - \frac{2.3.4.5.6.7}{n^6} F_1$$

— — — — — — — — — — — — — —

Für F_{2m+1} ergibt sich, wenn wir das Gesetz allgemein annehmen

$$F_{2m+1} = F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \cdot \frac{(2m+1)!}{(2\lambda+1)!} \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}}$$

$$= \frac{(2m+1)!}{n^{2m}} F_1 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{m-\lambda} \cdot \frac{(\pi n)^{2\lambda}}{(2\lambda+1)!}$$

$$F_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m+n+1-\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} \qquad \text{oder}$$

$$1.\quad F_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \cdot (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Die Σ ist die Sinusreihe von $(n\pi)$.

Für die F_{2m} ergibt sich das folgende allgemeine Bildungsgesetz

$$F_{2m} = (-1)^{m-1} 2m! \frac{f_1}{n^{2m-1}} +$$

$$+ F_1 \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m-\lambda+n+1} \frac{2m!}{2\lambda!} \cdot \frac{\pi^{2\lambda}}{n^{2(m-\lambda)}}$$

$$= (-1)^m \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[1 + (-1)^{n+1}\right] +$$

$$+ \frac{2m!}{n^{2n+1}} \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m+n-\lambda+1} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!}$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} + \sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^{m+n+1-\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!}\right]$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m+n+1-\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!}\right]$$

$$2.\quad F_{2m} = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2}}{2\lambda!}\right]$$

Die Σ ist die Cosinusreihe von $(n\pi)$.

Die Integrale f ergeben sich wie folgt

$$f_m = -\frac{m}{n} F_{m-1}$$

$m = 2m$

$$f_{2m} = -\frac{2m}{n} F_{2m-1}$$

$$= \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^{m+n+1-\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

3. $$f_{2m} = (-1)^{m+n+1} \cdot \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1} (-1)^{\lambda} \cdot \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

$m = 2m + 1$ (Σ = Sinusreihe von $n\pi$).

$$f_{2m+1} = -\frac{2m+1}{n} F_{2m}$$

4. $$f_{2m+1} = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

(Σ = Cosinusreihe von $n\pi$).

Wir haben also:

I. $$\int_0^{\pi} x^{2m+1} \sin nx = (-1)^{m+n+1} \cdot \frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

II. $$\int_0^{\pi} x^{2m} \sin nx = \frac{2m!}{n^{2m+1}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

III. $$\int_0^{\pi} x^{2m+1} \cos nx = -\frac{(2m+1)!}{n^{2m+2}} \left[(-1)^m + (-1)^{m+n+1} \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda}}{2\lambda!} \right]$$

IV. $$\int_0^{\pi} x^{2m} \cos nx = (-1)^{m+n+1} \frac{2m!}{n^{2m+1}} \sum_{\lambda=0}^{m-1} (-1)^{\lambda} \frac{(n\pi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Für $m = 1$ erhalten wir aus I x III

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin nx = (-1)^n \frac{3!}{n^4} \left[n\pi - \frac{(n\pi)^3}{3!} \right]$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos nx = \frac{3!}{n^4} \left[1 + (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{(n\pi)^2}{2!} \right) \right]$$

Für $n = 1$.

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x = \pi - \frac{3\pi}{3!}$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \cos x = 12 - 3\pi^2$$

etc.

Da die Integrale bei Entwicklungen von Funktionen nach trig. Reihen auftreten, so scheint mir ihre allgemeine Lösung von einigem Interesse zu sein.