Zu den logarithmischen Reihen

G. Sidler.

Zu den logarithmischen Reihen.

(Eingereicht den 3. Oktober 1904.)

Bei meiner Vorbereitung auf die bernischen Maturitätsprüfungen vom Herbst 1904 haben sich mir die folgenden Kleinigkeiten ergeben, die ich mir erlaube, der Tit. Naturforschenden Gesellschaft vorzulegen.

1. In der Reihe

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\cdots\cdot$$

setzen wir $z=\cos x$, so kommt

$$\log \operatorname{cotg}\frac{x}{2}=\cos x+\frac{1}{3}(\cos x)^3+\frac{1}{5}(\cos x)^5+\cdots \qquad (1)$$

Auf der rechten Seite wollen wir die Potenzen von $\cos x$ durch Cosinusse der Vielfachen von x ausdrücken. Erheben wir hiezu die Relation $2\cos x=e^{xi}+e^{-xi}$ in die Potenz $2n+1$, so ergibt sich

$$2^{2n}\cdot(\cos x)^{2n+1}=\cos(2n+1)x+\binom{2n+1}{1}\cos(2n-1)x+$$
$$+\binom{2n+1}{2}\cos(2n-3)x+\binom{2n+1}{3}\cos(2n-5)x\cdots+$$
$$+\binom{2n+1}{n}\cos x.$$

Durch diese Substitutionen geht die Reihe (1) über in

$$\log \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \cos x +$$
$$+ \frac{1}{3 \cdot 2^2} \left\{ \binom{3}{1} \cos x + \cos 3x \right\} +$$
$$+ \frac{1}{5 \cdot 2^4} \left\{ \binom{5}{2} \cos x + \binom{5}{1} \cos 3x + \cos 5x \right\} +$$
$$+ \frac{1}{7 \cdot 2^6} \left\{ \binom{7}{3} \cos x + \binom{7}{2} \cos 3x + \binom{7}{1} \cos 5x + \cos 7x \right\} +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

d. h. wenn wir schreiben

$$\log \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \underset{1}{A} \cos x + \underset{3}{A} \cos 3x + \underset{5}{A} \cos 5x + \cdots, \tag{2}$$

so erhalten wir

$$\underset{1}{A} = \frac{1}{2^0} \left\{ \frac{\binom{1}{0}}{1 \cdot 2^0} + \frac{\binom{3}{1}}{3 \cdot 2^2} + \frac{\binom{5}{2}}{5 \cdot 2^4} + \frac{\binom{7}{3}}{7 \cdot 2^6} + \cdots \right\}$$
$$\underset{3}{A} = \frac{1}{2^2} \left\{ \frac{\binom{3}{0}}{3 \cdot 2^0} + \frac{\binom{5}{1}}{5 \cdot 2^2} + \frac{\binom{7}{2}}{7 \cdot 2^4} + \frac{\binom{9}{3}}{9 \cdot 2^6} + \cdots \right\}$$
$$\underset{5}{A} = \frac{1}{2^4} \left\{ \frac{\binom{5}{0}}{5 \cdot 2^0} + \frac{\binom{7}{1}}{7 \cdot 2^2} + \frac{\binom{9}{2}}{9 \cdot 2^4} + \frac{\binom{11}{3}}{11 \cdot 2^6} + \cdots \right\}$$

oder allgemein

$$2^{2k} \cdot A_{2k+1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\binom{2k+2n+1}{n}}{(2k+2n+1) \cdot 2^{2n}}, \tag{3}$$

was wir auch schreiben können

$$2^{2k} \cdot A_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\binom{2k+2n}{n-1}}{n \cdot 2^{2n}}. \tag{3'}$$

Untersuchen wir die für A_{2k+1} erhaltene Reihe (3) oder (3′) auf ihre Konvergenz. Der Quotient irgend eines Gliedes durch das vorhergehende ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2k+2n)(2k+2n-1)}{4n(2k+n+1)} =$$
$$= \frac{n^2 + (2k - 1/2) \cdot n + k(k - 1/2)}{n^2 + (2k+1)n}.$$

Nun zeigt Gauss in seiner Abhandlung über die Hypergeometrische Reihe: Wenn bei irgend einer Reihe mit positiven Gliedern der Quotient der Form ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + C_1 n^{h-1} + C_2 n^{h-2} + \cdots}{n^h + D_1 n^{h-1} + D_2 n^{h-2} + \cdots},$$

so ist die Reihe dann und nur dann konvergent, wenn $D_1 - C_1 > 1$. Bei der Reihe für A_{2k+1} ist nun $D_1 - C_1 = (2k+1) - (2k - {}^1/_2) = {}^3/_2$. Somit ist die für A_{2k+1} erhaltene Reihe (3) oder (3′) konvergent.

2. Um nun den Koeffizienten A_{2k+1} in geschlossener Form darzustellen, differenzieren wir die Entwicklung (2), so kommt

$$\frac{1}{\sin x} = A_1 \sin x + 3 A_3 \sin 3x + 5 A_5 \sin 5x + \cdots \qquad (4)$$

Jetzt bieten sich uns verschiedene Wege dar, den Koeffizienten A_{2k+1} zu bestimmen.

Wir können (4) beiderseits mit $2 \sin (2h+1) x \cdot dx$ multiplizieren, und von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$ integrieren.

Nun ist, wenn k und k′ irgend zwei ganze Zahlen, inklusive 0, darstellen

$$\int_0^{\pi/2} 2 \sin (2k'+1) x \cdot \sin (2k+1) x \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \{ \cos 2 (k - k') x - \cos 2 (k + k' + 1) x \} dx =$$

$$\begin{cases} = 0, & \text{wenn } k' \lesseqgtr k \\ = \pi/2, & \text{»} \quad k' = k. \end{cases}$$

Somit kommt aus (4)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin (2k+1) x}{\sin x} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot (2k+1) A_{2k+1}. \qquad (\alpha)$$

Um das Integral linker Hand zu werten, schreiben wir

$$J_k = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin (2k+1) x}{\sin x} \cdot dx,$$

so kommt

$$J_k - J_{k-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin x \cdot \cos 2kx}{\sin x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos 2kx\,dx = 0.$$

Somit $J_k = J_0 = \frac{\pi}{2}$, d. h. wir finden

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \tag{β}$$

und

$$A_{2k+1} = \frac{2}{2k+1}. \tag{5}$$

Oder aber, um (β) zu gewinnen, haben wir

$$\frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} = \frac{e^{(2k+1)xi} - e^{-(2k+1)xi}}{e^{xi} - e^{-xt}} =$$

$$\begin{aligned} = e^{2kxf} + e^{(2k-2)xi} + e^{(2k-4)xi} \cdots \\ + e^{-2kxi} + e^{-(2k-2)xi} + e^{-(2k-4)xi} \cdots \end{aligned} + e^{(2k-2k)xi} =$$

$$= 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x \cdots + 2\cos 2kx.$$

Somit $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k+1)x}{\sin x} \cdot dx = \frac{\pi}{2}$$ wie oben.

3. Den Wert von A_{2k+1} können wir aber auch auf ganz elementarem Wege aus der Entwicklung (4) gewinnen. Wir multiplizieren hiezu (4) mit $2\sin x$, so kommt

$$2 = \sum_{k=0}^{k=\infty} (2k+1) A_{2k+1} \cdot \left\{ \cos 2kx - \cos(2k+2)x \right\},$$

d. h.:

$$\begin{aligned} 2 = A_1 + (3A_3 - A_1)\cos 2x + (5A_5 - 3A_3)\cos 4x + \\ + (7A_7 - 5A_5)\cos 6x + (9A_9 - 7A_7)\cos 8x + \cdots \end{aligned}$$

Dieses wird zur Identität, wenn

$$A_1 = 2$$
$$3A_3 = A_1$$
$$5A_5 = 3A_3$$
$$7A_7 = 5A_5$$
$$\text{— — — —}$$

$$(2k+1)\,A_{2k+1} = (2k-1)\,A_{2k-1}.$$

Hieraus durch Multiplikation $(2k+1)\,A_{2k+1} = 2$, also

$$A_{2k+1} = \frac{2}{2k+1}, \qquad \text{wie oben.}$$

4. Führen wir den für A_{2k+1} gewonnenen Wert in (2) ein, so finden wir schliesslich

$$\frac{1}{2}\log\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \tag{6}$$
$$= \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x + \cdots \text{ in inf.}$$

Diese Reihe ist konvergent. Denn fassen wir rechter Hand die Gruppen aufeinanderfolgender gleichzeichiger Terme je zu einem einzigen Terme zusammen, so haben wir eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen, und die absoluten Werte der betreffenden Terme werden schliesslich unendlich klein.

Vergleichen wir (6) mit (1)

$$\log\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \tag{1}$$
$$= \cos x + \frac{1}{3}(\cos x)^3 + \frac{1}{5}(\cos x)^5 + \frac{1}{7}(\cos x)^7 + \cdots,$$

so ist interessant, dass in der Entwicklung von $\log\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ nach ungeraden Potenzen von $\cos x$ und in der Entwicklung von $\frac{1}{2}\log\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ nach Cosinussen der ungeraden Vielfachen von x je die nämlichen Koeffizienten auftreten.

Setzen wir in (6) und in (1) x in $\frac{\pi}{2} - x$ um, so erhalten wir

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \tag{1'}$$
$$= \sin x + \frac{1}{3}(\sin x)^3 + \frac{1}{5}(\sin x)^5 + \frac{1}{7}(\sin x)^7 + \cdots$$

und

$$\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \tag{6'}$$
$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots$$

In (6) sei $x = \frac{\pi}{4}$, so haben cos x, cos 3 x, cos 5 x u. s. w. denselben absoluten Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und zwar ist cos x positiv, cos 3 x und cos 5 x sind negativ, cos 7 x und cos 9 x positiv u. s. f. Wir erhalten also

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \log \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots$$

Sei nun $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = z$, so ist $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2z}{1-z^2}$, also

$$1 = \frac{2z}{1-z^2} \text{ oder } z^2 + 2z - 1 = 0, \text{ also } \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

und $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$. Wir erhalten also aus (6)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} \log \text{nat.} (1 + \sqrt{2}) = \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Aus der Entwicklung (1) aber ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \cdot \log \text{nat.} (1 + \sqrt{2}) = \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1}{7 \cdot 2^3} + \frac{1}{9 \cdot 2^4} + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

5. Den für A_{2k+1} erhaltenen Wert führen wir auch in (3′) ein, so kommt:

$$\frac{2^{2k+1} - 1}{2k+1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\binom{2k+2n}{n-1}}{n \cdot 2^{2n}}, \tag{9}$$

d. h.

$$\frac{2^{2k+1} - 1}{2k+1} = \frac{1}{1!\,2^2} + \frac{2k+4}{2!\,2^4} + \frac{(2k+6)(2k+5)}{3!\,2^6} + \tag{9′}$$

$$+ \frac{(2k+8)(2k+7)(2k+6)}{4!\,2^8} + \frac{(2k+10)(2k+9)(2k+8)(2k+7)}{5!\,2^{10}} +$$

$+ \cdots$ in inf.

6. Die obigen Resultate können wir auch, wie folgt, gewinnen und verallgemeinern. In der Reihe

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\cdots \tag{a}$$

setzen wir $z=\alpha e^{ix}$, wo α absolut <1, so erhalten wir

$$\alpha\cos x+\frac{1}{3}\alpha^3\cos 3x+\frac{1}{5}\alpha^5\cos 5x+\cdots=\frac{1}{2}R\left\{\log\frac{1+\alpha e^{ix}}{1-\alpha e^{ix}}\right\}$$

$$\alpha\sin x+\frac{1}{3}\alpha^3\sin 3x+\frac{1}{5}\alpha^5\sin 5x+\cdots=\frac{1}{2i}J\left\{\log\frac{1+\alpha e^{ix}}{1-\alpha e^{ix}}\right\},$$

wo R die reelle und J die imaginäre Komponente des rechts neben R oder J stehenden Ausdrucks bezeichnet.

Multiplizieren wir in $\frac{1+\alpha e^{ix}}{1-\alpha e^{ix}}$ Zähler und Nenner mit $1-\alpha e^{-ix}$, so kommt

$$\frac{1+\alpha e^{ix}}{1-\alpha e^{ix}}=\frac{1+2i\alpha\sin x-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2},$$

und wir erhalten daher

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2k+1}\cos(2k+1)x}{2k+1}= \tag{b}$$
$$=\frac{1}{2}R\log(1+2i\alpha\sin x-\alpha^2)-\frac{1}{2}\log(1-2\alpha\cos x+\alpha^2),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2k+1}\sin(2k+1)x}{2k+1}=\frac{1}{2i}J\log(1+2i\alpha\sin x-\alpha^2). \tag{c}$$

Aber $\log(u+iv)=\frac{1}{2}\log(u^2+v^2)+i\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{v}{u}$, woraus

$$\log(1+2i\alpha\sin x-\alpha^2)=\frac{1}{2}\log\left\{(1-\alpha^2)^2+4\alpha^2\sin x^2\right\}+$$
$$+i\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{2\alpha\sin x}{1-\alpha^2}\right).$$

Hier können wir rechter Hand die reelle Komponente schreiben $\frac{1}{2}\log\left\{(1+\alpha^2)^2-4\alpha^2\cos x^2\right\}$, und wir finden daher

$$R \log(1 + 2 i \alpha \sin x - \alpha^2) = \frac{1}{2} \log(1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2)$$
$$+ \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2),$$

$$J \log(1 + 2 i \alpha \sin x - \alpha^2) = i \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2\alpha \sin x}{1 - \alpha^2}\right).$$

Die Relationen (b) und (c) ergeben somit schliesslich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1} \cdot \cos(2k+1)x}{2k+1} = \frac{1}{4} \log\left(\frac{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}\right), \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1} \cdot \sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2\alpha \sin x}{1 - \alpha^2}\right). \tag{11}$$

In (10) dürfen wir $\alpha = 1$ setzen, und erhalten dann rechts $\frac{1}{4} \log\left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right) = \frac{1}{2} \log \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$. So gewinnen wir wieder unser früheres Resultat

$$\frac{1}{2} \log \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \cos(2k+1)x, \tag{6}$$

während aus (a) die Substitution $z = \cos x$ gibt

$$\log \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (\cos x)^{2k+1}. \tag{1}$$

Setzen wir ferner in (11) $x = \frac{\pi}{2}$, so kommt

$$\sum (-1)^k \cdot \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}\right) = \operatorname{Arc\,tg} \alpha.$$

Die bekannte Arc tg Reihe:

$$\operatorname{Arc\,tg} \alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1} \tag{11'}$$

ist also ein spezieller Fall von (11).