Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Zur Theorie des Kreises, u. a.

Autor: Sidler, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319125

G. Sidler.

(Eingereicht den 15. September 1902.)

Zur Theorie des Kreises, u. a.

1. Die Paare konjugierter Durchmesser einer Ellipse bilden ein involutorisches Strahlsystem. Wird daher durch den Mittelpunkt O einer gegebenen Ellipse ein beliebiger anderer Kegelschnitt gelegt, so gehen die Sehnen dieses letztern, welche die zweiten Schnittpunkte je eines Paares konjugierter Durchmesser der gegebenen Ellipse mit diesem Kegelschnitte verbinden, durch einen nämlichen Punkt. Nimmt man für diesen zweiten Kegelschnitt einen Kreis, so lässt sich auf diesen Satz eine einfache Lösung gründen der

Aufgabe: Gegeben nach Grösse und Richtung zwei konjugierte Durchmesser AA' und BB' einer Ellipse: man finde die Richtungen der Axen.

Lösung[1]. Wir ziehen (Fig. 1) die Geraden BA' und BA, und durch den Mittelpunkt O der Ellipse parallel zu diesen Geraden die Strahlen Oγ und Oδ, so liegt auf diesen Strahlen ein zweites Paar konjugierter Durchmesser der gegebenen Ellipse. Wir legen nun durch O einen beliebigen Kreis, so werde dieser von OA und OB noch in α und β, und von Oγ und Oδ noch in γ und δ getroffen. Die Kreissehnen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ mögen sich in J schneiden, und es sei u v der durch J gehende Durchmesser des Kreises, so liegen die Axen der gegebenen Ellipse auf O u und O v.

Um auch *die Grösse der Axen* zu erhalten, ziehe man durch B zu OA eine Parallele, welche O u in T schneide, und schlage über OT als Durchmesser einen Halbkreis. Die durch B senkrecht zu O u gelegte Gerade treffe diesen Halbkreis in k, und die durch B parallel zu O u gelegte Gerade schneide O k in l, so stellen O k = a und O l = b die gesuchten Grössen der beiden Halbaxen dar.

[1] Vgl.: L. Rippert: Archiv der Math. Neue Folge III, p. 54.

2. Suchen wir den Hilfsatz, auf den die obige Lösung sich stützt, auch zu beweisen, ohne die Theorie der involutorischen Strahlbüschel heranzuziehen. Der folgende Beweis scheint mir einfach genug, um im mathematischen Unterrichte unserer Gymnasien Verwendung zu finden.

Satz: Durch den Mittelpunkt O einer gegebenen Ellipse werde ein beliebiger Kreis gelegt. Ein variables Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse schneide diesen Kreis wieder in α und β, so geht die Gerade $\alpha\beta$ durch einen festen Punkt J.

Beweis (Fig. 2): Die halben Axen der gegebenen Ellipse seien $OA = a$ und $OB = b$; wir nehmen dieselben zu Koordinatenaxen, und es sei die Gleichung irgend eines durch den Mittelpunkt O der Ellipse gehenden Kreises

$$x^2 + y^2 = ux + vy.$$

Wir betrachten zunächst zwei ausgezeichnete Paare konjugierter Durchmesser der Ellipse; 1) die beiden Axen und 2) die beiden einander gleichen konjugierten Durchmesser. Die Axen der Ellipse mögen den Kreis wieder in α und β schneiden, so hat man $O\alpha = u$, $O\beta = v$; die Kreissehne $\alpha\beta$ geht durch den Mittelpunkt M des Kreises.

Ergänzen wir nun AOB zum Rechteck AOBC, und AOB′, wo $OB' = -b$, zum Rechteck AOB′C′, so liegen auf den Strahlen OC und OC′ die zwei einander gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse; es mögen dieselben den Kreis wieder in γ und in δ schneiden, so ist Bogen $\alpha\delta = \alpha\gamma$, und daher steht die Kreissehne $\gamma\delta$ senkrecht zum Kreisdurchmesser $\alpha M \beta$.

Der Strahl $O\gamma$ hat die Gleichung $y = \frac{b}{a}x$, und die Gleichung des Kreises gibt für den Punkt γ

$$x\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = u + \frac{bv}{a}.$$ Wir finden somit:

$$\text{Punkt } \gamma \cdots x' = \frac{a(au + bv)}{a^2 + b^2}, \quad y' = \frac{b(au + bv)}{a^2 + b^2},$$

und wenn wir b in $-b$ umsetzen:

$$\text{Punkt } \delta \cdots x'' = \frac{a(au - bv)}{a^2 + b^2}, \quad y'' = -\frac{b(au - bv)}{a^2 + b^2}.$$

Der Schnittpunkt J von $\alpha\beta$ und $\gamma\partial$ ist die Mitte von $\gamma\partial$, und wir erhalten somit für die Koordinaten von J

$$\text{Punkt J}\cdots x = \frac{x'+x''}{2} = \frac{a^2 u}{a^2+b^2}, \qquad y = \frac{y'+y''}{2} = \frac{b^2 v}{a^2+b^2}.$$

Bezeichnen wir mit φ den Winkel AOC, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, und die Koordinaten von J nehmen die Form an

$$\text{Punkt J}\cdots x = u(\cos\varphi)^2, \quad y = v(\sin\varphi)^2.$$

Wir behaupten nun, jede durch den Punkt J gehende Gerade schneide den Kreis M in zwei solchen Punkten α' und β', dass auf den Strahlen $O\alpha'$ un $O\beta'$ zwei konjugierte Durchmesser der gegebenen Ellipse liegen.

In der Tat, betrachten wir zuerst eine beliebige Gerade $Ax + By = C$, so haben wir für die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreise M die Relationen

$$1+\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x}\left(u + v\frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad \frac{C}{x} = A + B\frac{y}{x}.$$

$$\text{Somit } C\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \left(A + B\frac{y}{x}\right)\left(u + v\frac{y}{x}\right), \text{ d. h.:}$$

$$(Bv - C)\frac{y^2}{x^2} + (Av + Bu)\frac{y}{x} + (Au - C) = 0.$$

Wenn somit (x', y') und (x'', y'') die beiden Schnittpunkte darstellen, so haben wir

$$\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''} = \frac{Au - C}{Bv - C}.$$

Nun soll die Gerade $Ax + By = C$ durch den obigen Punkt J gehen, so ist $C = Au\cos\varphi^2 + Bv\sin\varphi^2$, und der Ausdruck von $\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''}$ wird $\frac{(Au - Bv)\sin\varphi^2}{(Bv - Au)\cos\varphi^2} = -\operatorname{tg}\varphi^2$, d. h. wir erhalten

$$\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Die Strahlen $O\alpha'$ und $O\beta'$ haben also die Richtungen von zwei konjugierten Durchmessern der gegebenen Ellipse, w. z. z.

3. Als weitere Beispiele des Satzes, *dass wenn durch den Scheitel eines involutorischen Strahlsystems irgend ein Kegelschnitt gelegt wird, die Sehnen, welche die zweiten*

Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit je einem Strahlenpaare verbinden, durch einen festen Punkt gehen, wählen wir:

A) Ziehen wir durch irgend einen Punkt eines gegebenen Kegelschnittes Strahlen parallel zu den Paaren konjugierter Durchmesser dieses Kegelschnittes, so gehen die Verbindungsgeraden der Punkte, wo dieser Kegelschnitt durch ein solches Strahlenpaar wieder geschnitten wird, durch den Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnittes.

B) Ziehen wir durch einen Punkt P eines Kegelschnittes zwei zueinander senkrechte Strahlen, die diesen Kegelschnitt wieder in α und β schneiden, so geht die Gerade $\alpha\beta$, wenn jener rechte Winkel um den Scheitel P sich dreht, durch einen festen Punkt J.

Wir können den Beweis von *B* auch analog führen wie beim Satze in 2):

Ein Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sei $P=(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$. Legen wir durch P erst Parallele zu den Axen, welche die Ellipse wieder in P'' und P' schneiden (Fig. 3), so ist die Gerade $P'P''$ ein Durchmesser und hat die Gleichung

$$P'P'' \cdots x\,b\sin\varphi + y\,a\cos\varphi = 0.$$

Legen wir jetzt durch P die Tangente und die Normale, so fällt die entsprechende Gerade $\alpha\beta$ mit der Normalen Puv zusammen, und wir haben, wenn wir $a^2-b^2=c^2$ schreiben:

$$Puv \cdots x\,a\sin\varphi - y\,b\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Für den Schnittpunkt J von $P'P''$ und Puv erhalten wir aus diesen Gleichungen

$$J \cdots x=\frac{c^2 a\cos\varphi}{a^2+b^2}, \qquad y=-\frac{c^2 b\sin\varphi}{a^2+b^2}.$$

Verschieben wir die Koordinatenaxen parallel zu sich selber und legen dieselben durch P, so gehen die Koordinaten von J über in

$$J \cdots \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{c^2 a\cos\varphi}{a^2+b^2} - a\cos\varphi = -\frac{2ab^2\cos\varphi}{a^2+b^2} \\ y_1 &= -\frac{c^2 b\sin\varphi}{a^2+b^2} - b\sin\varphi = -\frac{2a^2 b\sin\varphi}{a^2+b^2}. \end{aligned} \right.$$

Irgend eine durch J gelegte Gerade hat jetzt die Gleichung

$$m\{(a^2+b^2)x+2ab^2\cos\varphi\}-(a^2+b^2)y-2a^2b\sin\varphi=0,$$

woraus
$$\frac{y}{x}=m+\frac{1}{x}\cdot\frac{2ab(mb\cos\varphi-a\sin\varphi)}{a^2+b^2}.$$

Die gegebene Ellipse hat in unserm neuen Koordinaten system die Gleichung

$$b^2x^2+a^2y^2+2xab^2\cos\varphi+2ya^2b\sin\varphi=0,$$

woraus
$$a^2\frac{y^2}{x^2}+\frac{2ab}{x}\left(\frac{y}{x}\cdot a\sin\varphi+b\cos\varphi\right)+b^2=0.$$

Für die Schnittpunkte α und β der Ellipse mit jener Geraden kommt also

$$a^2\frac{y^2}{x^2}+\frac{(a^2+b^2)\left(\frac{y}{x}-m\right)\left(\frac{y}{x}a\sin\varphi+b\cos\varphi\right)}{mb\cos\varphi-a\sin\varphi}+b^2=0,\text{ d. h.:}$$

$$\frac{y^2}{x^2}\cdot ab(ma\cos\varphi+b\sin\varphi)-\frac{y}{x}(a^2+b^2)(ma\sin\varphi-b\cos\varphi)$$
$$-ab(ma\cos\varphi+b\sin\varphi)=0.$$

Für die Richtungskoeffizienten $\frac{y}{x'}$ und $\frac{y''}{x''}$ der Strahlen $P\alpha$ und $P\beta$ gewinnen wir somit $\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''}=-1$. Diese Strahlen stehen also zueinander senkrecht w. z. z.

Der in B auftretende Punkt J liegt also auf der Normalen des Punktes P und ist der Schnittpunkt dieser Normalen mit dem zu O P in Bezug auf die Axen symmetrischen Durchmesser P′ P″. Oder J ist zu P harmonisch in Bezug auf die Schnittpunkte u und v der Normalen von P mit den beiden Axen des gegebenen Kegelschnittes. — Bei der Parabel ist nach Grösse und Richtung $PJ=2Pu$, wenn u der Schnittpunkt der Normalen von P mit der Axe der Parabel.

Wenn P in einen Scheitel A des Kegelschnittes fällt, so ist J zu A in Bezug auf O m harmonisch, wo m das Krümmungszentrum des Scheitels A und O den Mittelpunkt des Kegelschnittes darstellt.

Bezeichnen wir also die den Scheiteln A und B einer gegebenen Ellipse entsprechenden Punkte J mit *A* und *B* (Fig. 4), so ergibt sich uns die folgende *Konstruktion* dieser Punkte:

Wir ergänzen AOB zum Rechteck AOBC und fällen aus C auf AB das Lot Cs, so schneidet dieses die Axen in den Krümmungszentren m und n der Scheitel A und B. Ziehen wir nun durch den Fusspunkt s dieses Lotes eine Gerade parallel zu OC, so schneidet diese die Axen in den gesuchten Punkten *A* und *B*. Denn OC wird von den Strahlen s (COB*B*) harmonisch geschnitten und daher haben wir auch (mO, A*A*) = — 1 und (nO, B*B*) = — 1, w. s. s.

Zu irgend einem Punkte P der Stammellipse erhält man jetzt den zugehörigen Punkt J auch wie folgt: Die Figur AOBP klappen wir um AO in AOB′P′ um, so sind *A*J und *B*J respektive parallel zu AP′ und B′P′ und auch der Strahl OP′ geht durch J. Da PJ die Normale der Ellipse APB im Punkte P, so liegt im obigen auch eine neue Konstruktion der Normalen einer Ellipse in einem gegebenen Punkte.

Kehren wir zu den ursprünglichen durch O gehenden Koordinatenaxen zurück, so erhalten wir aus den Koordinaten von J

$$\text{Ort von J} \cdots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2,$$

und ferner, wenn ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P darstellen:

$$\text{Strahl OJ} \cdots \frac{x}{y} = -\frac{\xi}{\eta}.$$

Wenn also P die gegebene Ellipse umläuft, so beschreibt J eine konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Scheitel A und B wir oben konstruiert haben. Diese Ellipse beschreibt J mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit wie P die Stammellipse, so dass die Anomalien von J stets entgegengesetzt gleich den Anomalien von P sind.

Aus der letzten Beziehung folgt auch: *Wenn der Strahl PJ von einer Axe der Stammellipse reflektiert wird, so ist der reflektierte Strahl parallel zur Normalen der Ortsellipse von J im Punkte J.*

Wenn also auf der Stammellipse der Punkt P so liegt (Fig. 5), dass die Normale von P mit jeder Axe einen Winkel $= 45^0$ bildet (oder P ein Berührungspunkt der Stammellipse mit dem umschriebenen Quadrat ist), so ist PJ im Punkte J die Tangente der Ortsellipse von J. Wenn nun P auf der Stammellipse sich unendlich wenig bewegt, so macht J eine unendlich kleine Bewegung auf der Ortsellipse von J und beschreibt also ein Tangentenelement der letztern, d. h. ein Element der Geraden PJ. Der Punkt J ist also jetzt das Krümmungszentrum des Punktes P der Stammellipse, und wir gewinnen den Satz: *Die Ortsellipse von J ist der Evolute der Stammellipse umschrieben. Die Berührungspunkte sind zugleich die gemeinsamen Berührungspunkte beider Kurven mit dem denselben umschriebenen Quadrate und sind die Krümmungszentren derjenigen Punkte der Stammellipse, wo letztere von dem ihr umschriebenen Quadrate berührt wird.*

Um die genannten Punkte zu erhalten, ergänzen wir AOB zum Rechtecke AOBC, und es möge der um O mit dem Radius OC beschriebene Kreis die Axen in D und E schneiden, so ist die Gerade DE eine Seite des der gegebenen Ellipse umschriebenen Quadrates. Füllen wir nun von D auf OC das Lot DK, so ist Dreieck ODK kongruent Dreieck OCA und daher $OK = OA$. Es liegt somit K auf dem Hauptkreise der gegebenen Ellipse und DK ist die Tangente des Hauptkreises im Punkte K. Füllen wir also aus K das Lot KL auf OA, so trifft dieses die Gerade DE in ihrem Berührungspunkte P mit der Stammellipse. Machen wir jetzt $LP' = - LP$, so schneidet der Strahl OP′ die in P auf DE errichtete Senkrechte Puv im Krümmungszentrum J von P oder *im Berührungspunkte der Ortsellipse $\mathcal{A}\,J\,\mathcal{B}$ von J mit der Evolute m J n der Stammellipse.*

Für zwei beliebige sich entsprechende Punkte P und J ist $\frac{OJ}{OP'} = \frac{O\mathcal{A}}{OA} = \frac{O\mathcal{B}}{OB'}$. Ziehen wir also $J\mathcal{A}$ parallel zu P′A und $J\mathcal{B}$ parallel zu P′B′, so erhalten wir wieder respektive auf OA und OB *die Scheitel $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ der Ortsellipse von J.*

Bezeichnen wir mit ξ, η die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P, so sind die entsprechenden Koordinaten von J:

$$J \cdots x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \xi, \qquad y = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \eta,$$

oder $$J \cdots x = \frac{e^2}{2-e^2}\cdot\xi, \qquad y = -\frac{e^3}{2-e^2}\cdot\eta$$
wo e die Exzentrizität des Stammkegelschnittes darstellt.

Sei nun $P=(\xi, \eta)$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so stellen diese Formeln *eine Abbildung einer beliebigen Figur der Ebene in eine invers ähnliche Figur* dar. Auf dem Strahle OP sei nach Grösse und Richtung $OQ = \frac{e^2}{2-e^2}\cdot OP$, und J sei in Bezug auf die x-Axe der Symmetriepunkt von Q, so ist J das Bild des Punktes P.

Einem durch O gehenden Halbstrahle entspricht der von der Y-Axe reflektierte Halbstrahl. Der Koordinatenursprung O und die unendlich fernen Punkte der x-Axe und der Y-Axe entsprechen sich selber; die unendlich ferne Gerade und die beiden Axen entsprechen sich selber, und zwar entsprechen der positiven und der negativen x-Axe wieder je die positive und die negative x-Axe, hingegen der positiven Y-Axe die negative Y-Axe und umgekehrt.

Legen wir durch den Punkt $P=(\xi, \eta)$ einen Kegelschnitt, dessen Exzentrizität = e, und dessen Haupt- und Nebenaxe respektive auf der X- und der Y-Axe liegen, so ist der P entsprechende Punkt J der gemeinsame Punkt aller Sehnen dieses Kegelschnittes, die von P aus unter einem rechten Winkel erscheinen und wenn P diesen Kegelschnitt umläuft, so umhüllt der Strahl PJ die Evolute dieses Kegelschnittes. Die Normale im Punkte P dieses Kegelschnittes möge die Axen in u und v schneiden, so ist J harmonisch zu P in Bezug auf die Strecke uv.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn der Stammkegelschnitt eine *gleichseitige Hyperbel.* Dann fällt das Bild jedes Punktes der Ebene ins Unendliche und wir erhalten die Sätze: *Legen wir durch irgend einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel zwei zueinander senkrechte Strahlen, so ist die Verbindungsgerade der Pnnkte, wo diese die Hyperbel wieder schneiden, parallel zur Normalen des Punktes P. Die von den Axen begrenzte Strecke irgend einer Normalen einer gleichseitigen Hyperbel wird vom Fusspunkt dieser Normalen halbiert. Schlagen wir daher um einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Radius PO einen Kreis, der die Axen*

Fig. 1

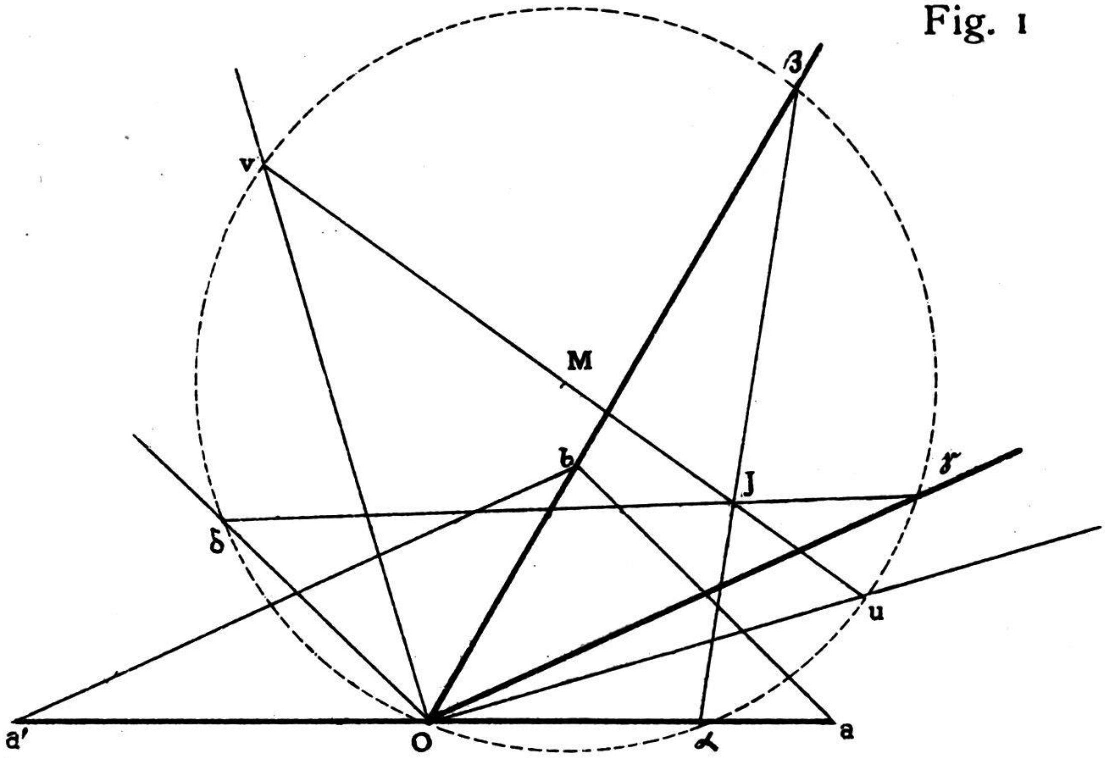
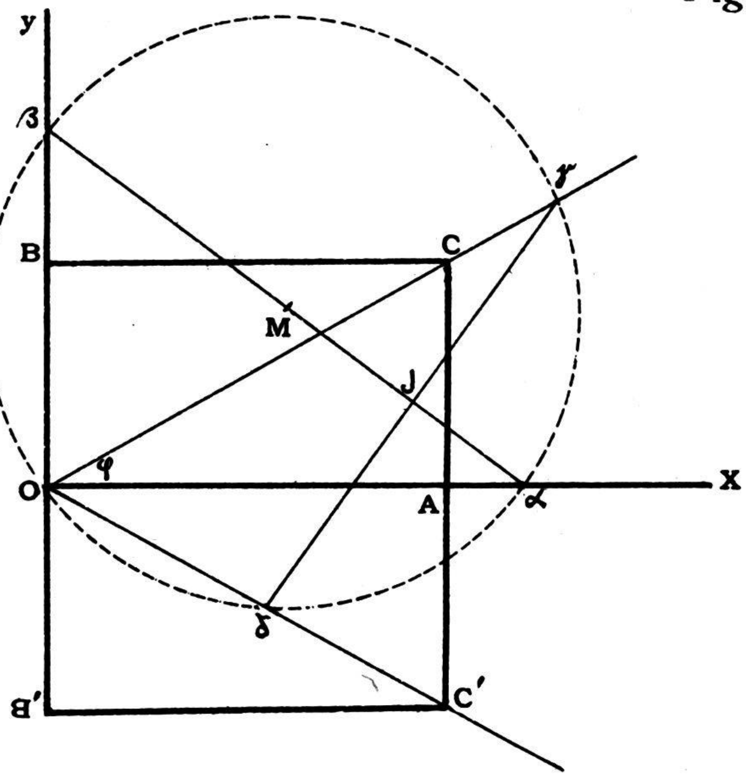


Fig. 2



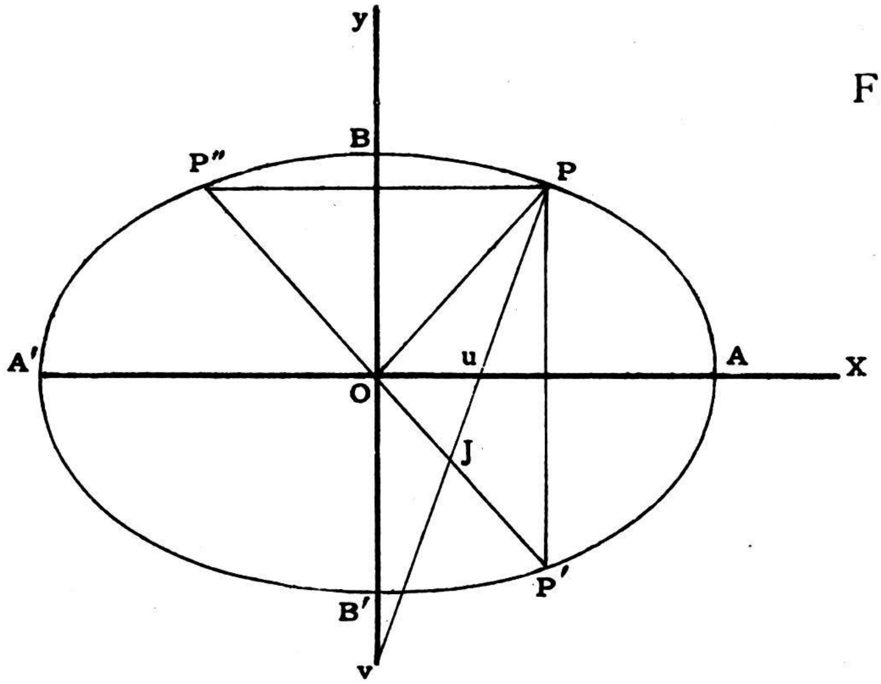
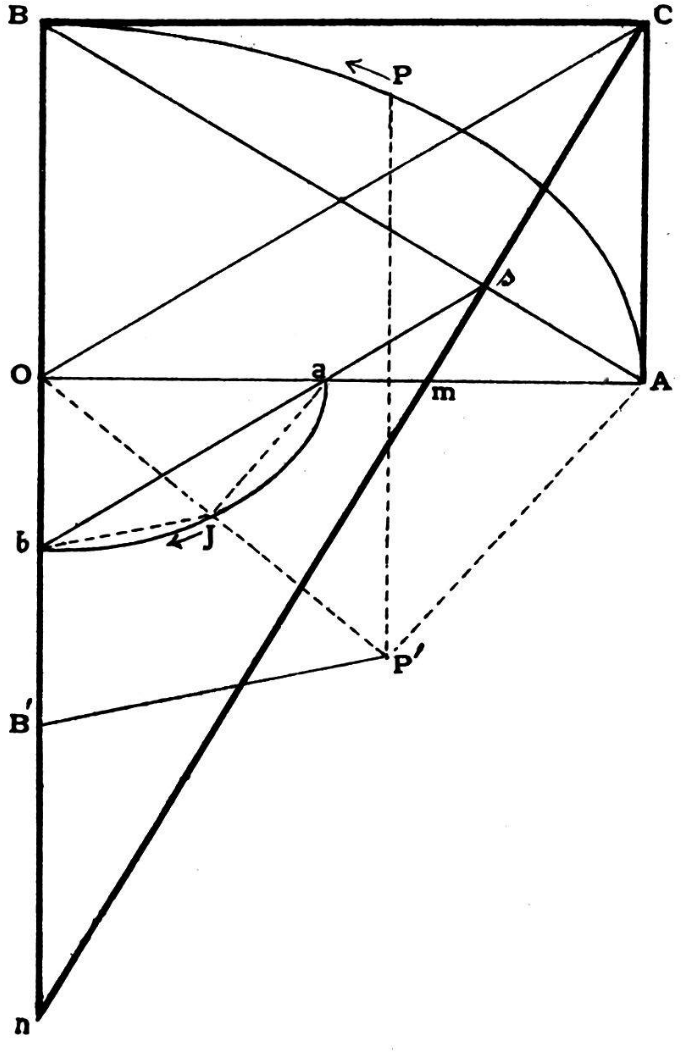


Fig. 3

Fig. 4



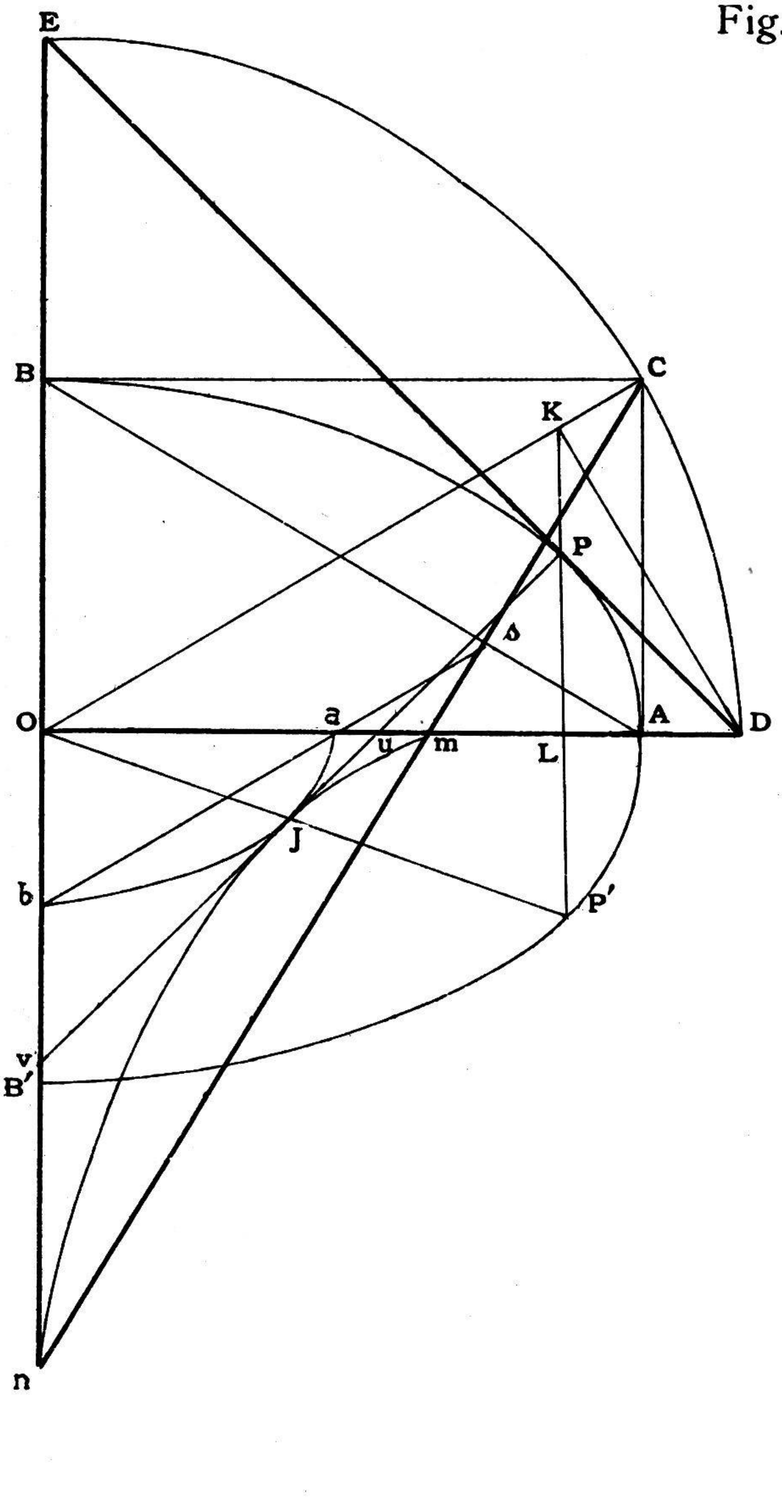


Fig. 5

wieder in u und in v schneidet, so ist die Gerade $u P v$ die Normale dieser Hyperbel im Punkte P.

In den Endpunkten P und P′ eines Durchmessers sind die Normalen einander parallel. *Ziehen wir daher in einer gleichseitigen Hyperbel parallel zu irgend einem Durchmesser, der die Hyperbel reell schneidet, ein System von Sehnen, oder ein solches System von einander parallelen Sehnen, welche je die beiden Aeste der Kurve schneiden, so erscheinen diese Sehnen von zwei reellen Punkten P und P′ aus je unter rechten Winkeln; diese Punkte P und P′ liegen auf der betreffenden Hyperbel, bilden die Endpunkte eines Durchmessers derselben, und die Normalen in diesen Punkten sind parallel zu dem bezüglichen Sehnensystem. Beschreibt man daher um jene Sehnen als Durchmesser Kreise, so bilden diese Kreise ein Kreisbüschel, das die Punkte P und P′ zu Grundpunkten hat. Betrachten wir dagegen ein System paralleler Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, welche je nur den einen Ast der Hyperbel schneiden, so sind die Punkte P und P′ imaginär, und die um diese Sehnen als Durchmesser beschriebenen Kreise bilden ein Kreisbüschel der zweiten Art, dessen Nullpunkte die Punkte S und S′ sind, wo die zu diesen Sehnen paralleler Tangenten die Hyperbel berühren.* Oder: *In einem Kreisbüschel ist der Ort der Endpunkte eines Systems von einander parallelen Durchmessern eine gleichseitige Hyperbel. Wenn das Büschel der ersten Art, so sind die Grundpunkte P und P′ des Büschels die Endpunkte eines Durchmessers dieser Hyperbel, und die Normalen in diesen Punkten sind parallel zu jenen Kreisdurchmessern; machen wir daher auf einer dieser Normalen $Pu = Pv = PO$, wo O die Mitte von PP', so gehen durch O und respektive u und v die Axen der Hyperbel. Ist aber das Kreisbüschel der zweiten Art, so sind die Nullpunkte S und S′ des Büschels die Endpunkte eines Durchmessers der betreffenden Hyperbel, und die Normalen in S und in S′ stehen senkrecht zu jenen Kreisdurchmessern; machen wir wieder auf einer dieser Normalen $Su = Sv = SO$, wo O die Mitte von SS', so gehen durch O und respektive durch u und v die Axen der Hyperbel.*