Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1902)
Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung
Autor: Krebs, A.
Kapitel: [Zusammenfassung]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

Die beiden Teilkurven sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf beide Axen. Wir haben es daher im Grund nur mit einer Kurve 4. Ordnung zu tun. Sie ist uns in der Form begegnet in $IX_{(10)}$, pag. 85, und wurde beschrieben im V. Abschnitt. Die Lösungen lassen sich ebenfalls nicht allgemein bestimmen. Man kann nur für Spezialdreiecke die zugehörigen Werte von c berechnen. Man findet ganz dieselben Resultate wie oben. Zu jeder Teilkurve gehören zwei ungleiche Lösungen mit Ausnahme des Falles, da $c = o$ ist, wo dieselben zusammenfallen. Die Dreiecke, die zu den zwei Teilkurven gehören, sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die x-Axe.

In allen Fällen, da $c < b$ ist, entsprechen die Dreiecke der Relation: $h_b - m = \pm c$. Ist $c = b$, so gilt $h_b \pm m = \pm c$. Ist $c > b$, so finden wir die Bedingung erfüllt: $h_b \pm m = + c$ (vergleiche § 29).

§ 32. *Uebersichtliche Zusammenstellung der Resultate.*

I.

Gegeben: b und $h_b \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$; 1 reelles Dreieck;
2. $c \overline{\overline{<}} \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$; 3 reelle Dreiecke.

II.

Gegeben: b und $s \pm n = c$.

Lösungen:

Für jeden Wert von $c \neq 0$ 2 reelle, symmetrische Dreiecke. Für $c = 0$ 4 reelle, zusammenfallende Dreiecke, die unendlich klein sind.

III.

Gegeben: b und $h_s \pm n = c$.

Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13+16\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{13-16\sqrt{2}} - 1}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;

2. $c \overline{\overline{<}} \frac{b}{2}\sqrt{\qquad\text{obiger Ausdruck}\qquad}$; 4 reelle, verschiedene Dreiecke.

IV.

Gegeben: b und $m \pm n = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{3b}{2}$; 2 reelle symmetrische Dreiecke;
2. $c \overline{\overline{<}} \frac{3b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

V.

Gegeben: b und $h_b \pm h_s = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3(1 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})}$; 2 reelle verschiedene Dreiecke.
2. $c \overline{\overline{<}}$ do. 4 do.

VI.

Gegeben: b und $s \pm h_s = c$.
Lösungen:

1. $c > 0$; 2 reelle verschiedene Dreiecke;
2. $c = 0$; 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke.

VII.

Gegeben: b und $s \pm m = c$.
Lösungen:

1. $c > \frac{3b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke;
2. $\frac{3b}{2} \overline{\overline{>}} c \geqq b\sqrt{2}$; 6 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke;
3. $b\sqrt{2} > c > \frac{b}{2}$; 2 reelle, symmetrische Dreiecke;
4. $c \overline{\overline{<}} \frac{b}{2}$; 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

VIII.

Gegeben: b und $h_s \pm m = c$.
Lösungen:
1. $c > b\sqrt{2}$; keine reellen Dreiecke;
2. $c \overline{\overline{<}} b\sqrt{2}$; 2 reelle Dreiecke.

IX.

Gegeben: b und $s \pm h_b = c$.
Lösungen: Für jeden Wert von c 1 reelles Dreieck.

X.

Gegeben: b und $h_b \pm m = c$.
Lösungen: Für jeden Wert von c 4 reelle, paarweise symmetrische Dreiecke.

Nur bei einem Fall (VIII) kann es vorkommen, dass keine reelle Lösung möglich ist. Als Bestimmungsgrösse tritt hier $h_s \pm m = c$ auf. h_s und m sind nun gerade die Dreiecksgrössen, die bei endlicher Basis nicht unendlich werden können; das Maximum für beide ist b.

Für *Spezialdreiecke* giebt es folgende Wertetafel für c:

Fälle	unendlich kleines △	rechtwinkliges △	gleichseitiges △	unendlich grosses △
I. $h_b \pm n = c$	$c = \frac{b}{2}$	$c = \frac{b}{2}$	$c = \frac{b}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$	$c = \infty$
II. $s \pm n = c$	$= 0$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= \frac{3b}{2}$	$= \infty$
III. $h_s \pm n = c$	$= \frac{b}{2}$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3} + 1)$	$= \infty$
IV. $m \pm n = c$	$= \frac{3b}{2}$	$= \frac{b}{2}\sqrt{2}$	$= 0$	$= \infty$
V. $h_b \pm h_s = c$	$= 0$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2} \pm 1)$	$= 0$ od. $= b\sqrt{3}$	$= \infty$
VI. $s \pm h_s = c$	$= \frac{b}{2}$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(2 \pm \sqrt{3})$	$= \infty$
VII. $s \pm m = c$	$= \frac{b}{2}$ od. $= \frac{3b}{2}$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}$ od. $= \frac{3b}{2}$	$= \infty$
VIII. $h_s \pm m = c$	$= b$	$= 0$ od. $= b\sqrt{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3} \pm 1)$	$= b$
IX. $s \pm h_b = c$	$= \frac{b}{2}$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2} \pm 1)$	$= \frac{b}{2}(2 \pm \sqrt{3})$	$= 0$ od. $= \infty$
X. $h_b \pm m = c$	$= b$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{2} \pm 1)$	$= \frac{b}{2}(\sqrt{3} + 1)$	$= \infty$

Unter den 13 Kurven 4. Ordnung, die als Hilfskurven auftreten, finden wir 6mal die Kreiskonchoide, 3mal die Konchoide des Nikomedes und 3mal die Kurve, die bei V (D gesucht) zum erstenmal auftaucht; siehe Tafel III, Fig. 10. Als Spezialfall für $c = 0$ erscheint 2mal die Strophoide, nämlich bei I und IV (D gesucht). Andere Spezialfälle für $c = 0$ sind strophoidenähnlich wie I und VIII (B gesucht). Für $c = 0$ zerfallen alle Kurven mit Ausnahme von I (B gesucht), welche für den Wert $c = \frac{b}{2}$ degeneriert. Beim Zerfallen treten Kreise auf ausser bei den Konchoiden noch bei V und I (B gesucht).

Im festen Eckpunkt O des Dreiecks besitzen alle Kurven einen mehrfachen Punkt mit Ausnahme von I_2 und V_7. Bei I_2 bewegt sich der mehrfache Punkt auf der Mittelsenkrechten, bei V_7 ist er konstant in A.

Als ein kleines Nebenresultat meiner Arbeit, die ich hiemit abbreche, betrachte ich das, dass es mir gelungen ist, für die zwei bekanntern Konchoiden neue Konstruktionsverfahren zu finden.

Es bleibt mir nur noch die angenehme Pflicht, meinen hochgeehrten Lehrern, den Herren Prof. Dr. Graf, Prof. Dr. Huber, dessen freundliche Ratschläge mir bei Fertigstellung dieser Arbeit sehr wertvoll gewesen, Prof. Dr. Forster, Prof. Dr. Moser und PD Dr. Gruner für das mir während meiner Studienzeit stets entgegengebrachte Wohlwollen den herzlichsten Dank auszusprechen.