Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: VIII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 - 3b^2 \pm 2c\sqrt{c^2 - 2b^2}}. \qquad (11)$$

Für das negative Zeichen im Ausdruck $\left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$ erlangt die Abscisse x von D den Wert

$$x = \frac{c^2 + b^2 \pm c\sqrt{c^2 + 2b^2}}{2b} \qquad (12)$$

und die Ordinate y den Wert

$$y = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{b^4 - 2b^2c^2 - 2c^4 \mp 2c^3\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \qquad (13)$$

Alle diesbezüglichen Lösungen erfüllen die Bedingung:

$$s - m = \pm c.$$

Für die Basishöhe dieser Dreiecke finden wir auf ähnliche Weise wie oben den Wert

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{c^2 + 2b^2}}. \qquad (14)$$

Vergleichen wir (11) mit (4) und (14) mit (5), so finden wir vollkommene Übereinstimmung in den Ergebnissen beider Auflösungsmethoden.

VIII.

§ 23. *Achte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem der Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,

2. $h_s \pm m = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $b\sqrt{2} \overline{\gtrless} (h_s + m) \geqq b$;

2. $b \overline{\gtrless} (h_s - m) \geqq -b$.

Im rechtwinkligen Dreieck ist $h_s + m = b\sqrt{2} =$ Maximum; denn da ist $h_s = m = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. In diesem Fall ist nun $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right\}$. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so ist $h_s + m = \sqrt{b}\left\{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right\}$. Es ist aber bekanntlich $\left(\sqrt{\frac{b}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right) > \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2} + a\right)} + \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)}\right)$.

Bei einem unendlich grossen Dreieck ist $h_s - m = b - 0 = b = \text{Max.}$ und bei einem unendlich kleinen Dreieck $= 0 - b = - b = \text{Min.}$ Bei einem spitzwinkligen Dreieck ist $h_s - m$ — pos., bei einem rechtwinkligen $= 0$ und bei einem stumpfwinkligen $=$ neg.

§ 24. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. IV, Fig. 13.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Durch O werde nun ein Strahl gezogen, der den Grundkreis in Q schneidet. Ferner werde durch A und Q eine Gerade gelegt, welche den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Jetzt tragen wir auf dem Strahl OQ die Strecken QH und QH_1 von O aus in gleicher oder ungleicher Richtung ab und erhalten die Punkte T_1 und T_2. Gleiche Richtung ist nötig, wenn Q ausserhalb des Hilfskreises liegt. Hat Q negative Ordinate, so sind die Strecken nach Q hin abzutragen, im andern Fall nach der entgegengesetzten Seite. Endlich trägt man noch die Strecken QT_1 und QT_2 von R aus auf den Strahl OQ ab in der Richtung, wie T von Q aus liegt, und bekommt die Punkte P_1 und P_2. Bei sich drehendem Strahl beschreiben die Punkte P die Kurve. Die Schnittpunkte derselben mit der Mittelsenkrechten sind die Spitzen B; denn in diesem Fall ist $RP = 0$, also auch $QT = 0$; folglich fällt T auf Q; damit ist $OT = OQ = m$, QA ist $= h_s$, und eine der Relationen ist erfüllt:

$$h_s \pm m = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien $(-x, -y)$ die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_2 im gewohnten System; dann ist

$$OP_2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nun ist $OP_2 = P_2R - OR = T_2Q - OR = T_2O + OQ - OR$,

somit $\sqrt{x^2 + y^2} = T_2O + OQ - OR. \qquad (\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} \text{Ferner ist } T_2O &= QH_1 = AQ + AH_1 = b\sin\varphi + c, \\ OQ &= b\cos\varphi, \\ OR &= \frac{b}{2x}\sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}\right\} \text{ sub in } (\alpha),$$

es giebt $\sqrt{x^2+y^2} = b\sin\varphi + c + b\cos\varphi - \frac{b}{2x}\sqrt{x^2+y^2}$, umgeformt

$$\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x+y)\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \quad (1)$$

$$\text{Polargleichung:}\quad r = \frac{b}{2\cos\varphi} - b(\cos\varphi+\sin\varphi) \pm c. \quad (2)$$

c) Eigenschaften der Kurve.

Vorliegende Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie hat im Nullpunkt einen 4fachen Punkt. Die *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* lautet:

$$y^4 - 4xy^3 + \frac{2b^2-4c^2}{b^2}x^2y^2 + 4x^3y + \frac{b^2-4c^2}{b^2}x^4 = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle: 1. $c = 0$.

$y^4 - 4xy^3 + 2x^2y^2 + 4x^3y + x^4 = 0$, aufgelöst

$y = (1 \pm \sqrt{2})x$ je 2mal.

Die Tangenten müssen paarweise zusammenfallen, da die Kurve in 2 zusammenfallende Kurven 3. Ordnung zerfällt, deren Gleichung $(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x+y) = 0$ ist. (4)

Diese Kurve ist strophoidenartig, siehe Fig. 13, Kurve II.

2. $c = \frac{b}{2}$.

$$y^4 - 4xy^3 + x^2y^2 + 4x^3y = 0.$$

$y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

Die Gleichung der übrigen 3 reellen Tangenten lautet:

$$y^3 - 4xy^2 + x^2y + 4x^3 = 0.$$

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

$$y^4 - 4xy^3 + 4x^3y - x^4 = 0.$$

Da $y = x$ der Gleichung genügt, so ist $y = x$ Tangente.

Die Gleichung der übrigen 3 reellen Tangenten lautet:

$$y^3 - 3xy^2 + x^3 = 0.$$

4. $c = \infty$.

Die Kurve besteht aus der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und der doppelt gelegten y-Axe und dem konjugierten Punkt in O. Die y-Axe ist doppelt gelegte Tangente; die 2 andern Nullpunktstangenten sind imaginär.

Die x-Axe schneidet die Kurve im Nullpunkt 4mal; die andern 2 Schnittpunkte liegen in den Punkten $\left(-\frac{b}{2} \pm c\right)$. Die y-Axe schneidet die Kurve 4mal im Nullpunkt und 2mal im Unendlichen.

Aus der Form der Gleichung geht hervor, dass die imaginären Kreispunkte der Ebene Doppelpunkte der Kurve sind. Ebenso sagt uns die Gleichung, dass die Gerade $x = \frac{b}{2}$ doppelt gelegte Asymptote ist. Die Natur des unendlich fernen Punktes der Kurve wird durch Transformation bestimmt. Wir setzen $x = x' + \frac{b}{2}$ und $y = y'$ und erhalten

$$\left\{\left[\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2 + y'^2\right] x' + b\left(x' + \frac{b}{2}\right)\left(x' + \frac{b}{2} + y'\right)\right\}^2$$
$$- c^2\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2\left[\left(x' + \frac{b}{2}\right)^2 + y'^2\right] = 0.$$

Nun projizieren wir den unendlich fernen Punkt der Kurve auf die x-Axe, indem wir setzen

$$y' = \frac{1}{y''} \text{ und } x' = \frac{x''}{y''} \text{ und erhalten:}$$

$$\left[\left(x''^2 + by''x'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right)x''\right.$$
$$\left. + by''\left(x'' + \frac{by''}{2}\right)\left(x'' + \frac{by''}{2} + 1\right)\right]^2 - c^2y''^2\left(x''^2 + bx''y''\right.$$
$$\left. + \frac{b^2}{4}y''^2\right)\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2}{4}y''^2 + 1\right) = 0. \quad (5)$$

Der Nullpunkt der projizierten Kurve ist Doppelpunkt. Die Gleichung der Doppelpunktstangenten lautet:

$x''^2 = 0$; folglich fallen die beiden Tangenten mit der y'-Axe zusammen. Da ferner für $x'' = 0$ $y'' = 0$ wird und zwar 4mal, so muss der Nullpunkt Selbstberührungspunkt sein. Es ist somit auch der unendlich ferne Punkt der Kurve *Selbst-*

berührungspunkt und die Gerade $x = \frac{b}{2}$ *Selbstberührungsasymptote.* Die Kurve ist also *rational;* denn sie besitzt 10 Doppelpunkte, nämlich 6 im 4fachen Punkt O, 2 im unendlich fernen Selbstberührungspunkt und 2 in den imaginären Kreispunkten der Ebene.

Für $c = b$ fallen 5 Schnittpunkte der Geraden $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve ins Unendliche. In diesem Fall ist die Mittelsenkrechte *Selbstberührungswendeasymptote* und der unendlich ferne Punkt der Kurve ein Selbstberührungspunkt mit *einfachem Inflexionsknoten.*

Die Kurve ist keine symmetrische Kurve.

d) Die Lösungen.

Um die Schnittpunkte B zu bekommen, führen wir für x den Wert $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$y = \frac{-b^3 \pm bc\sqrt{2b^2 - c^2}}{2(b^2 - c^2)}. \qquad (6)$$

Für jeden Wert von $c \leqq b\sqrt{2}$ giebt es 2 reelle Werte für y, also 2 reelle Lösungen. Die Hauptfälle sind folgende:

A. $c > b\sqrt{2}$.

y wird imaginär; keine reellen Lösungen.

B. $c \leqq b\sqrt{2}$; 2 reelle Lösungen.

1. $c = b\sqrt{2}$.

$y_1 = y_2 = \frac{b}{2}$; 2 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke.

2. $c = b$.

$y_1 = 0$ und $y_2 = \infty$; ein unendlich kleines und ein unendlich grosses Dreieck.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$; $\quad y = -\frac{b}{2}(2 \mp \sqrt{3}.)$

4. $c = \frac{b}{2}$; $\quad y = -\frac{b}{6}(4 \mp \sqrt{7})$.

In beiden Fällen ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges Dreieck.

5. $c = 0$; $y_1 = y_2 = -\frac{b}{2}$.

2 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke OAB'. Fig. 13.

6. $c = \frac{b}{2}(\sqrt{3} \pm 1)$; $y_1 = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3}$ und $y_2 = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}$.

Das spitzwinklige Dreieck ist gleichseitig und das stumpfwinklige Dreieck hat Basiswinkel von 30° und eine Schenkelhöhe von $h_s = \frac{b}{2}$.

Lässt man c von b aus einmal wachsen bis $c = b\sqrt{2}$, das andere Mal abnehmen bis $c = 0$, so sind die Lösungen im 2. Fall symmetrisch zu denjenigen im ersten Fall.

Setzt man $y = -y$, so geht Gleichung (1) über in

$$\left[(x^2+y^2)\left(x-\frac{b}{2}\right)+bx(x-y)\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \quad (7)$$

Die Kurve ist das Spiegelbild der erstern in Bezug auf die x-Axe. Mit den Lösungen ist es dasselbe; dabei giebt es für die Basishöhe den Ausdruck

$$h_b = y = \frac{b^3 \pm bc\sqrt{2b^2-c^2}}{2(b^2-c^2)}. \quad (8)$$

Als Inhaltsformel des Dreiecks erhalten wir nach (6)

$$F = \frac{-b^4 \pm b^2c\sqrt{2b^2-c^2}}{4(b^2-c^2)}. \quad (9)$$

§ 24. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhen.* Ohne Figur.

Diese Aufgabe kann elementar gelöst werden, wenn wir aus den drei Grössen b, m und h_s zuerst ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren wollen. Will man aber direkt das gleichschenklige Dreieck gewinnen, bedarf es auch hier der Konstruktion einer Kurve höherer Ordnung. Diese Hilfskurve wird eine *Kreiskonchoide,* deren Gleichung:

$(x^2+y^2+by)^2 - c^2(x^2+y^2) = 0$ ist (vergleiche VI (1), (10) pag. 64).

Für die Koordinaten der Punkte D erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b^2 \pm c\sqrt{2b^2-c^2}}{2b} \\ \text{und } y &= \pm\frac{c^2-b^2}{2b}, \text{ wobei nur das positive} \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Zeichen verwendet werden darf. Das negative Zeichen entspricht den Lösungen der Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe.

Setzt man in der Proportion:

$$y : h_b = x : \frac{b}{2} \text{ für x und y die Werte von (11) ein,}$$

so erhält man für h_b den Wert nach Formel (6); damit ist nachgewiesen, dass beide Verfahren die gleichen Ergebnisse liefern.

Berechnen wir mit Hilfe von (11) m, denn $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ und h_s, denn $h_s = \sqrt{b^2 - m^2}$, so finden wir, dass bei jedem spitzwinkligen Dreieck die Strecke $m = OD$ gleich ist der Grösse h_s bei dem zugehörigen stumpfwinkligen Dreieck und umgekehrt. Bei allen Lösungen gilt die Relation

$$h_s + m = c, \text{ wenn } c > b,$$
$$h_s \pm m = c, \quad » \quad c = b \text{ und}$$
$$h_s - m = c, \quad » \quad c < b \text{ ist.}$$

IX.

§ 26. *Neunte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die* ***Basis*** *und die* ***Summe*** *oder* ***Differenz*** *aus* ***Schenkel*** *und* ***Basishöhe*** *gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $s \pm h_b = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_b \geqq \frac{b}{2}$,
2. $s - h_b \leqq \frac{b}{2}$.

Die Summe ist das Minimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; da ist $s = \frac{b}{2}$ und $h_b = 0$. Umgekehrt ist die Differenz bei einem unendlich kleinen Dreieck das Maximum und nimmt stetig ab bis 0, wenn das Dreieck wächst und schliesslich unendlich gross wird.

§ 27. *Erstes Verfahren.* ***Bestimmung der Fusspunkte D.***

a) ***Konstruktion der Hilfskurve.*** Taf. IV, Fig. 14.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte, auf welcher wir von C aus