Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: VI

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d) Die Lösungen.

Die Koordinaten der zunächst gesuchten Schnittpunkte D sind die Wurzeln des Systems

1. $4y^2[(b-x)^2+y^2]-[2cy-(b-x)b]^2=0$, Kurve.

und 2. $x^2-bx+y^2=0$, Grundkreis.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe stösst auf bedeutende Schwierigkeiten. Wir können die Übereinstimmung mit dem ersten Verfahren nur in Spezialfällen nachweisen.

1. Für ein gleichseitiges Dreieck besitzt der Punkt D die Koordinaten $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$.

Setzen wir diese Werte für x und y in Gleichung (1) unseres Systems oben ein, so wird

$$c_1 = b\sqrt{3} \quad \text{und} \quad c_2 = 0.$$

Vergleiche damit die Fälle A_1 und C, pag. 136.

2. Bei einem rechtwinkligen Dreieck sind die Koordinaten von $D = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$. Setzt man diese Werte gleichen Orts wieder ein, so wird $c = \frac{b}{2}(1+\sqrt{2})$. Fig. 10.

Vergleiche damit A_2, pag. 136.

3. Für ein unendlich kleines Dreieck hat Punkt D die Koordinaten (b, 0). Die Einsetzung dieser Werte liefert $c = 0$, vergleiche damit C, pag. 136; siehe Fig. 10.

VI.

§ 17. *Sechste Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Schenkelhöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b.
2. $s \pm h_s = c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $s + h_s \gtreqless \frac{b}{2}$,
2. $s - h_s \gtreqless 0$.

Bei einem unendlich kleinen, auf die Basis reduzierten Dreieck ist $s + h_s = \frac{b}{2} =$ Minimum; denn $s = \frac{b}{2}$ und $h_s = 0$.

Ist das gleichschenklige Dreieck rechtwinklig, so ist $s - h_s = 0$. In jedem andern Fall ist s als Hypotenuse grösser als h_s (Kathete).

§ 18. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Dreiecksspitzen B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. III, Fig. 11.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und um A den Hilfskreis mit dem Radius $r = c$. Ferner ziehen wir einen Strahl durch O, der den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungslinie AQ endlich schneide den Hilfskreis in H und H_1. Liegt nun Q innerhalb des Hilfskreises, dann trägt man die beiden Strecken QH und QH_1 von O aus auf dem zugehörigen Strahl nach entgegengesetzten Seiten ab und zwar die Strecke nach Q hin, welche den Punkt A nicht enthält. Man macht also

$$OP_1 = QH \quad \text{und} \quad OP_2 = QH_1.$$

Beziehungen: 1. $OP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c$;

2. $OP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c$.

Liegt der Punkt Q ausserhalb des Hilfskreises, so trägt man beide Strecken nach Q hin ab. In diesem Fall gelten dann die Relationen:

1. $AQ' - OP_1' = AQ' - Q'H' = AH' = c$;
2. $OP_2' - AQ' = Q'H_1' - AQ' = AH_1' = c$.

Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve. Fällt ein Kurvenpunkt P in die Mittelsenkrechte, so wird $OP = OB = s$ und $AQ = AD = h$, und man kann, wenn diese Werte in den Relationen oben eingesetzt werden, eine Lösung konstatieren. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ ergeben somit die zunächst gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien für das gewohnte Koordinatensystem x und y die Koordinaten eines Punktes P'_2; dann kann gesetzt werden:

$$OP_2' = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (\alpha)$$

Nun ist $OP_2' = c + AQ' = c + b \sin\varphi$, eingesetzt in ($\alpha$), und man hat $c + b \sin\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$, umgeformt

$$(x^2 + y^2 + by)^2 - c^2 (x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Polargleichung: $$r = -b \sin\varphi \pm c. \qquad (2)$$

Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide.* Die y-Axe ist Symmetrieaxe.

$c < b$, O ist Knotenpunkt; die Konchoide besitzt eine Schleife;

$c = b$, O ist Spitze und die negative y-Axe Rückkehrtangente;

$c > b$, O ist konjugierter Punkt.

Für $c = 0$ reduziert sich die Kurve auf den doppelt gelegten Kreis $x^2 + y^2 + by = 0$.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Ordinaten der Schnittpunkte B. Wir führen zu diesem Zweck den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten:

$$\left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten von B. Die Auflösung vorliegender Gleichung führt auf eine kubische Hilfsgleichung von der Form

$$v^3 + \frac{6b^2c^2 - c^4}{3}v + \frac{9b^2c^4 + 2c^6}{27} = 0.$$

Die Diskriminante dieser kubischen Gleichung wird

$$\Delta = \frac{bc^3\sqrt{3}}{18}\sqrt{32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4}.$$

Es ist nun $\Delta = 0$ nur in dem einen Fall, wenn

$$c = 0. \tag{3}$$

Wir erhalten daher 2 Hauptfälle für die Lösungen:

A. $\Delta = 0$ für $c = 0$.

Wir bekommen für y 4 zusammenfallende Wurzeln, nämlich $y = -\frac{b}{2}$ als Ordinate der Spitze. Damit erhalten wir auch 4 zusammenfallende Dreiecke, welche rechtwinklig sind.

B. $\Delta =$ pos. für $c \neq 0$.

Die kubische Hilfsgleichung besitzt nur eine und infolge dessen die biquadratische Gleichung nur 2 reelle Wurzeln. Wir

erhalten somit für jeden Wert von c, 0 ausgenommen, nur 2 wirkliche Dreiecke.

Wie schon erwähnt, treten für $c=0$ 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke auf, welche auf der negativen Seite der y-Axe liegen. Fängt nun c zu wachsen an, so verschwinden erstens 2 Dreiecke. Die andern 2 verwandeln sich in ein spitzwinkliges und in ein stumpfwinkliges, und zwar wird für ein wachsendes c das spitzwinklige immer spitzwinkliger.

Für $c=\frac{b}{2}(2-\sqrt{3})$ wird es gleichseitig. Das stumpfwinklige wird auch stumpfwinkliger und erreicht für $c=\frac{b}{2}$ das Maximum. Der Winkel an der Spitze wird 180°. Das Dreieck reduziert sich auf die Basis. Wird $c>\frac{b}{2}$, so nimmt der Winkel an der Spitze stetig ab. Für $c=b\sqrt{2}$ wird das Dreieck rechtwinklig natürlich auf der positiven Seite der y-Axe. Für jeden Wert von $c>b\sqrt{2}$ ist dann auch das auf der positiven Seite der y-Axe liegende Dreieck spitzwinklig. Gleichseitig ist dieses spitzwinklige Dreieck für den Spezialwert von $c=\frac{b}{2}(2+\sqrt{3})$.

§ 19. *Zweites Lösungsverfahren: Bestimmung der Punkte D.*

Bedingungen wie in § 17.

a) Konstruktion der Kurve. Ohne Figur.

Es sei $OA=b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um A mit dem Radius $r=c$. Ein durch A gezogener Strahl schneide nun den Grundkreis in Q, die Mittelsenkrechte in R und den Hilfskreis in H und H_1. Schliesslich wird noch durch O ein Strahl gezogen, der auch durch Q geht. Nun trägt man auf dem Strahl OQ von O aus die Strecken RH und RH_1 nach entgegengesetzten Seiten ab, macht also

$OP_1=RH$ und $OP_2=RH_1$, so dass also

1. $AR+OP_1=AR+RH=AH=c$ und ebenso
2. $OP_2-AR=RH_1-AR=AH_1=c$.

So darf es aber nur gemacht werden, wenn Q innerhalb des Hilfskreises liegt. Liegt Q ausserhalb des Hilfskreises, so

trägt man beide Strecken RH und RH_1 nach der gleichen Seite und zwar nach Q hin ab. Der geometrische Ort aller Punkte P ist die Hilfskurve.

Fällt ein Punkt derselben in den Grundkreis, so wird $OP = OQ = h_s$ und da $AR = s$ ist, so wird nach den oben stehenden Relationen

1. $s + h_s = c$ oder 2. $h_s - s = c$; somit ist der Punkt P zu einem Punkt D geworden; wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis sind wieder die zunächst gesuchten Punkte D.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir erhalten nach analoger Methode wie früher

$$(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0. \qquad (4)$$

$$\text{Polargleichung:} \quad r = -\frac{b}{2 \sin \varphi} \pm c. \qquad (4a)$$

Die Hilfskurve ist die *Konchoide des Nikomedes.* Die y-Axe ist die Symmetrieaxe derselben und die Gerade $y = -\frac{b}{2}$ die Leitlinie. c ist der auf einem Strahl durch O gemessene konstante Abstand zweier Kurvenpunkte von der Leitlinie.

Für $c > \frac{b}{2}$ besitzt die Konchoide eine Schleife.

für $c = \frac{b}{2}$ tritt sie mit Spitze auf in O;

» $c < \frac{b}{2}$ wird O zum konjugierten Punkt;

» $c = 0$ zerfällt die Kurve in die doppelte Leitlinie und den konjugierten Punkt O.

c) Die Lösungen.

Es handelt sich um die Bestimmung der Koordinaten der Schnittpunkte D. Diese Koordinaten sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

1. $(x^2 + y^2)\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - c^2 y^2 = 0$, ... Kurve.

2. $x^2 - bx + y^2 = 0$, ... Grundkreis.

Wir führen den Wert von x aus (2) in (1) ein und erhalten

$$y^4 + 2by^3 + \frac{3b^4 - 2b^2c^2 + 2c^4}{2b^2} y^2 + \frac{b^3 - 2bc^2}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0. \quad (5)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung 4. Grades in y sind die Ordinaten der Schnittpunkte D. Die kubische Hilfsgleichung dazu erscheint in der Form

$$v^3 - \frac{c^4(4b^4 - 2b^2c^2 + c^4)}{3b^4} v - \frac{c^6(16b^6 + 15b^4c^2 - 6b^2c^4 + 2c^6)}{27b^6} = 0.$$

Als Diskriminante erhält man

$$\Delta = \frac{c^{14}(32b^4 - 13b^2c^2 + 4c^4)}{27b^6}.$$

Es wird $\Delta = 0$ nur für $c = 0$ wie beim ersten Verfahren. Auch hier giebt es die beiden gleichen Hauptfälle, nämlich

A. $\Delta = 0$ für $c = 0$.

Wir erhalten wie beim ersten Verfahren 4 zusammenfallende rechtwinklige Dreiecke; denn in Gleichung (5) wird $y = -\frac{b}{2}$ 4mal.

B. $\Delta =$ pos. für $c \neq 0$.

Für jeden von 0 verschiedenen Wert von c liefert Gleichung (5) 2 reelle Wurzeln und damit 2 reelle Dreiecke, also dasselbe Ergebnis wie beim ersten Verfahren. Setzt man in Gleichung (5) Spezialwerte ein

$y = 0$ für das unendlich kleine Dreieck,

$y = \pm \frac{b}{2}$ » » rechtwinklige »

$y = \pm \frac{b}{4}$ » » gleichseitige »

so erhält man die nämlichen Werte für c wie auf Seite 143.

VII.

§ 20. *Siebente Aufgabe: Konstruktion des gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b,
2. $s \pm m = \pm c$.