Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1902)
Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: IV

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

Diese Werte stimmen mit denjenigen auf pag. 114 vollständig überein.

2. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. II, Fig. 7.

Die Gleichung in x, deren Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte D sind, bekommt folgende Form

$$64x^4 - 128bx^3 + 84b^2x^2 - 20b^3x + b^4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

1. $x_1 = 0 + \frac{b}{2}$, 3. $x_3 = \frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$,

2. $x_2 = 0 + \frac{b}{2}$, 4. $x_4 = -\frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$;

dann wird

1. $y_1 = \frac{b}{2}$, 3. $y_3 = -\frac{b}{4}$,

2. $y_2 = -\frac{b}{2}$, 4. $y_4 = -\frac{b}{4}$.

Dies sind die Koordinaten der Schnittpunkte D.

Als Basishöhe für die 4 Lösungen erhalten wir:

1. $h_b = \frac{b}{2}$ für $\triangle$ OAB_1;

2. $h_b = -\frac{b}{2}$ » $\triangle$ OAB_3;

3. $h_b = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$ für $\triangle$ OAB_2;

4. $h_b = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$ » $\triangle$ OAB_4.

Diese Werte stimmen vollständig überein mit denjenigen auf Seite 113.

IV.

§ 11. *Vierte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $m \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $m+n \geqq \frac{b}{2}\sqrt{2}$

2. $m-n \leqq +\frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck wird $m+n=\frac{b}{2}\sqrt{2}$, und dies ist das Minimum. Wird das Dreieck spitzwinklig, so wird $m+n=s$ grösser als $\frac{b}{2}\sqrt{2}$, und wird es stumpfwinklig, so wird m allein schon grösser. Die Differenz $m-n$ erreicht in $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ das Maximum beim rechtwinkligen Dreieck. Wird das Dreieck stumpfwinklig, so nimmt die Differenz $m-n$ an Wert ab bis zum Grenzwert $\frac{b}{2}$. Wird das Dreieck spitzwinklig, so nimmt die Differenz $m-n$ ab bis zu 0 (gleichseitiges Dreieck); dann wird sie negativ, resp. $n-m$ positiv bis zum Wert ∞.

§ 12. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Hilfskurve (ohne Figur).

Es sei $OA=b$ die gegebene Basis. Wir ziehen den Grundkreis und um O einen Hilfskreis mit der Konstanten c als Radius. Nun legen wir durch O einen Strahl, der den Grundkreis in Q und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Die Strecken QH und QH_1 tragen wir von Q aus auf dem Strahl je nach der entgegengesetzten Seite hin ab und erhalten die 2 Punkte P_1 und P_2; für diese gilt:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ OQ+QP_1=OQ+QH=OH=c; \\ 2.\ QP_2-OQ=QH_1-OQ=OH_1=c. \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die gesuchte Kurve. Wir ziehen die Mittelsenkrechte MM_1. Fällt nun ein Kurvenpunkt in diese Gerade, so wird

$$QP=BD=n \quad \text{und} \quad QO=DO=m;$$

wir haben eine Lösung. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten sind somit die gesuchten Punkte B.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Addieren wir und subtrahieren wir die Gleichungen bei (α), so erhalten wir

$$1.\quad QP_1 + QP_2 = 2c;$$

oder

$$P_1P_2 = 2c; \qquad (\beta)$$

$$2.\quad 2OQ + QP_1 - QP_2 = 0;$$

$$OQ = QP_2 - OQ - QP_1 = QP_2 - c;$$

$$2\,OQ = OP_2 - c. \qquad (\gamma)$$

Ziehen wir nun um A einen Kreis mit dem Radius $r = b$, so wird dieser Kreis vom Strahl OP_2 in V so geschnitten, dass

$$OV = 2OQ = OP_2 - c.$$

Der Punkt V hat also von P_2 den Abstand c; da aber nach (β) $P_1P_2 = 2c$ ist, so muss V auch von P_1 den Abstand c haben. Es haben somit die Kurvenpunkte jedes Strahls gleichen und konstanten Abstand von einem festen Grundkreis. Unsere Kurve ist die *Kreiskonchoide.* Die Gleichung derselben lautet:

$$(x^2 + y^2 - 2bx)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

Die x-Axe ist Symmetrieaxe.

1. $c > 2b$; Nullpunkt ist isolierter Punkt;
2. $c = 2b$; » » Spitze, die positive x-Axe Rückkehrtangente;
3. $c < 2b$; » » Doppelpunkt.

Polargleichung:

$$r = 2b\cos\varphi \pm c. \qquad (2)$$

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir bestimmen die Schnittpunkte B. Die Abscisse derselben ist $x = \frac{b}{2}$. Diesen Wert setzen wir in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$\left(y^2 - \frac{3b^2}{4}\right)^2 - c^2\left(y^2 + \frac{b^2}{4}\right) = 0,$$

eine Gleichung in y, deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte B und zugleich die Basishöhen der gesuchten Dreiecke sind. Diese Gleichung nach y aufgelöst, ergiebt

$$y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (3)$$

Dieser Ausdruck liefert für y 4 reelle oder 2 reelle und 2 imaginäre Werte. Bei variablem c erhalten wir daher entweder 4 oder 2 reelle Lösungen, welche paarweise symmetrisch sind. Für den Grenzfall erhalten wir 4 reelle Wurzeln, wovon $2 = 0$ sind. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$3b^2 + 2c^2 - 2c\sqrt{4b^2 + c^2} = 0, \text{ also}$$

$$c = \frac{3b}{2} \text{ ist.}$$

Die Inhaltsformel der Dreiecke lautet:

$$F = \frac{gh}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (4)$$

Gruppierung der Lösungen:

$$\text{A.} \quad c > \frac{3b}{2}.$$

Bei der innern Wurzel gilt nur das positive Zeichen. Wir erhalten daher nur 2 reelle Lösungen und zwar 2 spitzwinklige Dreiecke.

Für den Spezialfall $c = 2b$ wird die Basishöhe derselben

$$h_b = y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{11 + 8\sqrt{2}}.$$

$$\text{B.} \quad c = \frac{3b}{2}.$$

Die Wurzeln von (3) sind:

$$y_1 = \frac{b}{2}\sqrt{15}; \quad y_2 = -\frac{b}{2}\sqrt{15}; \quad y_3 = y_4 = 0.$$

Wir erhalten:

1. 2 symmetrische, spitzwinklige Dreiecke, bei denen $s = 2b$, $m = \frac{b}{4}$, $n = \frac{7}{4}b$ und die also die Bedingung erfüllen: $n - m = c$;
2. 2 unendlich kleine, auf die Basis reduzierte Dreiecke, für welche $m = 2n$ und $m + n = c$ ist.

$$\text{C.} \quad c < \frac{3b}{2}.$$

$$1. \quad c = b.$$

Nach Gleichung (3) wird

$$y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}};$$

für das positive Zeichen unter der Wurzel giebt es 2 symmetrische spitzwinklige Dreiecke, für welche $s = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5})$ und der Basiswinkel $= 72^0$ ist. Für das negative Zeichen sind die Dreiecke stumpfwinklig; $s = \frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$; der Basiswinkel misst 36^0.

$$2.\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$$

Es wird $y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{4 \pm 3}$.

Wir erhalten

1. 2 spitzwinklige Dreiecke mit den Grössen $s = 2c = b\sqrt{2}$, $m = \frac{b}{4}\sqrt{2}$ und $n = \frac{3b}{4}\sqrt{2}$;
2. 2 rechtwinklige Dreiecke.

$$3.\quad c = \frac{b}{2}.$$

Es wird $y = \pm \frac{b}{4}\sqrt{14 \pm 2\sqrt{17}}$;

4 spitzwinklige Dreiecke, paarweise symmetrisch.

Wird c noch kleiner als $\frac{b}{2}$, so nähern sich die ungleichen spitzwinkligen Dreiecke in der Grösse immer mehr und fallen endlich zusammen für

$$4.\quad c = 0;\quad y = \pm \frac{b}{2}\sqrt{3};$$

4 gleichseitige Dreiecke.

§ 13. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte D.*

a) Konstruktion der Hilfskurve. Taf. II. Fig. 8.

Es sei $OA = b$ die Basis des gleichschenkligen Dreieckes. Wir ziehen den Grundkreis, die Mittelsenkrechte MM_1 und endlich noch einen Hilfskreis um O mit dem Radius $r = c$. Durch O gehe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q, den Hilfskreis in H und H_1 und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Auf diesem Strahl tragen wir nun von R aus die Strecken QH und QH_1 nach derselben Seite gegen O hin ab und erhalten die 2 Punkte P_1 und P_2. Der Punkt P_1 genügt der Relation $OQ - RP_1 = OQ - QH = OH = c$, und für P_2 gilt $RP_2 - OQ = QH_1 - OQ = OH_1 = c$. Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die Kurve. Ihre Schnittpunkte mit dem Grundkreis ergeben die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QH = RP = BD = n$, und wir haben eine Lösung.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien durch OA die Abscissenaxe und durch O die Ordinatenaxe gelegt. Sind x und y die rechtwinkligen Koordinaten eines Kurvenpunktes P_1, so kann man setzen, wenn $P_1 N \perp MM_1$ gezogen wird,

$$P_1 R = \sqrt{\overline{P_1 N}^2 + \overline{NR}^2}; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 R &= HQ = OQ - OH = b\cos\varphi - c, \\ P_1 N &= \frac{b}{2} - x, \\ NR &= RC - NC = \frac{by}{2x} - y. \end{aligned}\right\} \text{ sub. in } (\alpha);$$

Es giebt

$$b\cos\varphi - c = \sqrt{\frac{(b-2x)^2}{4} + \frac{y^2(b-2x)^2}{4x^2}};$$

$$\left[(x^2+y^2)\left(\frac{b}{2} - x\right) - bx^2\right]^2 - c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \qquad (5)$$

Polargleichung:

$$r = \frac{b}{2\cos\varphi} - b\cos\varphi \mp c. \qquad (6)$$

c) Diskussion der Kurvengleichung.

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Ihre Gleichung (5) beginnt mit Gliedern 4. Grades; folglich ist der Nullpunkt 4facher Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet

$$y = \pm\frac{x}{b}\sqrt{\underbrace{b^2+2c^2}_{A} \pm \underbrace{2c\sqrt{2b^2+c^2}}_{B}}. \qquad (7)$$

Es ist nun

$$A^2 - B^2 = b^4 - 4b^2c^2 = b^2(b^2 - 4c^2).$$

So lange $b \gtreqless 2c$ ist, ist auch $A > B$, und wir erhalten 4 reelle Wurzeln für y, daher auch 4 reelle Tangenten. Ist $b < 2c$, so werden 2 Wurzeln und damit 2 Tangenten imaginär. Wir erhalten mithin 2 Hauptfälle für die Tangenten im Nullpunkt.

A. $c > \frac{b}{2}$.

2 Tangenten sind reell, 2 imaginär. Der 4fache Punkt im Nullpunkt ist daher Doppelpunkt und konjugierter Punkt zugleich; folglich muss die Kurve 2 Äste haben, was die Konstruktion

auch bestätigt. Der eine Kurvenast geht durch den Nullpunkt, der andere nicht.

B. $c \overline{\overline{<}} \frac{b}{2}$.

4 reelle Tangenten; beide Kurvenzweige gehen durch den Nullpunkt.

1. $c = \frac{b}{2}$, siehe Fig. 8, Taf. II.

Nach Gleichung (7) wird

$$y_{1,2} = \pm x\sqrt{3};\quad y_3 = y_4 = 0.$$

Die Tangenten des 1. Astes bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 60^0$; für den 2. Ast ist die x-Axe Rückkehrtangente und der Nullpunkt Spitze.

2. $\frac{b}{2} > c > 0$.

4 reelle, unter sich verschiedene Tangenten; der Nullpunkt ist Doppelpunkt für beide Kurven-Äste.

3. $c = 0$.

Wir erhalten $y = \pm x$ je 2mal.

Die beiden Äste fallen zusammen. Der Richtungswinkel der Tangenten $= \pm 45^0$. Die Kurve zerfällt in 2 zusammenfallende Kurven 3. Ordnung, deren Gleichung die Form besitzt:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{b}{2} - x\right) - b^2x^2 = 0$$

oder $$(x^2 + y^2)\,x - \frac{b}{2}(y^2 - x^2) = 0. \tag{8}$$

Diese Kurve ist die *Strophoide*. Die Achse ihrer Schleife ist gleich der halben Basis b.

Die Schnittpunkte mit der x-Axe: Setze $y = 0$, erhalte $[(b - 2x)\,x^2 - 2bx^2]^2 - 4c^2x^4 = 0$;

$$1.\ x^4 = 0;\qquad 2.\ x = -\frac{b}{2} \pm c.$$

Die Schnittpunkte mit der y-Axe: Setze $x = 0$, erhalte $$y^4 = 0.$$
4 Schnittpunkte fallen in den Nullpunkt, die andern 2 ins Unendliche; denn die Koeffizienten von y^5 und y^6 sind Null.

Da y nur im 2. und 4. Grad vorkommt, so erhalten wir, wenn wir die Gleichung nach y auflösen, einen Ausdruck von der Form

$$y = \pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$ d. h. jedem endlichen Wert von x entsprechen 4 Werte von y, die paarweise absolut gleich sind. Die Kurve liegt also symmetrisch zur x-Axe.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu gewinnen, machen wir die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten:

$$U_n = U_6 = 4x^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 0;$$ daraus folgt

$$1.\quad x^2 = 0,$$

2 reelle, mit der y-Axe zusammenfallende Asymptotenrichtungen.

$$2.\quad y = \pm ix \text{ je 2mal.}$$

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve.

$$\text{Die Gerade } x = \frac{b}{2} \tag{9}$$

ist *Selbstberührungsasymptote;* denn für $x = \frac{b}{2}$ werden 4 Werte von y unendlich gross. Transformieren wir die Gleichung vermittelst der Formeln

$$x = x' + \frac{b}{2} \text{ und } y = y',$$

projizieren nachher die unendlich ferne Gerade in der Richtung der y-Axe auf die x-Axe mit Hilfe der Formeln

$$x' = \frac{x''}{y''} \text{ und } y' = \frac{1}{y''},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Big[-2x''\Big(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\Big)\\ -2b\Big(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{by''^3}{4}\Big)\Big]^2\\ -4c^2\Big(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{b^2y''^3}{4}\Big)^2\\ -4c^2\Big(x''^2y'' + bx''y''^2 + \frac{b^2y''^3}{4}\Big)y'' = 0. \quad (10)\end{aligned}$$

Der Nullpunkt der transformierten Kurve ist Doppelpunkt. Die Nullpunktstangenten, deren Gleichung

$$x''^2 = 0 \text{ ist,}$$

fallen zusammen, und da endlich für $x'' = 0$

$$y''^4 = 0 \text{ wird,}$$

so muss der Nullpunkt und damit auch der unendlich ferne Punkt der Kurve Selbstberührungspunkt und die Gerade $x = \frac{b}{2}$ Selbstberührungsasymptote sein. Im unendlich fernen Selbstberührungspunkt hangen die Kurvenäste zusammen.

Für $c = 0$ wird die Mittelsenkrechte doppelt gelegte Wendeasymptote.

Die Kurve ist *rational;* denn sie besitzt 10 Doppelpunkte, wovon 6 im Nullpunkt (4facher Punkt), 2 im Selbstberührungspunkt und 2 in den imaginären Kreispunkten der Ebene liegen.

Die Kurve hat im rechten Ast 4 *Wendepunkte*, so lange $c > \frac{b}{2}$ ist. Für $c \leqq \frac{b}{2}$ sinkt die Zahl derselben auf 2 herab. Für $c = 0$ speziell liegen die beiden vereinigt im Unendlichen. Dem rechten Kurvenast gehört jetzt nur noch einer an, da auch der linke Ast — wie der rechte zur Strophoide geworden — einen gewinnt.

Bei unendlich grossem c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als konjugiertem Punkt.

Negative c erzeugen dieselben Kurven wie positive, da c nur quadratisch vorkommt.

d) Die Lösungen der Aufgabe.

Wie schon erwähnt, handelt es sich um die Bestimmung der Schnittpunkte D. Die Koordinaten derselben sind die Wurzeln des Systems:

1. $[(b - 2x)(x^2 + y^2) - 2bx^2]^2 - 4c^2x^2(x^2 + y^2) = 0$, Kurve;
2. $x^2 - bx + y^2 = 0$, Grundkreis.

Wir lösen dieses System zunächst nach x auf und erhalten

$$x = \frac{2b^2 + c^2 \pm c\sqrt{4b^2 + c^2}}{8b} \tag{11}$$

als Ausdruck für die Abscisse des Punktes D.

Für die Ordinate finden wir

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{8b} \sqrt{6b^4 - c^4 \pm (2b^2 - c^2)c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \tag{12}$$

x und y sind die Koordinaten von D, d. h. vom Fusspunkt der Schenkelhöhe. Es besteht nun die Proportion:

$$h_b : y = \frac{b}{2} : x.$$

Quadrieren wir die Glieder dieser Proportion, setzen hierauf für x und y die Werte von (11) und (12) ein, reduzieren, so bekommen wir, wenn wir zum Schluss die Quadratwurzel ausziehen:

$$h_b = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3b^2 + 2c^2 \pm 2c\sqrt{4b^2 + c^2}}. \qquad (13)$$

Dieser Wert stimmt vollkommen mit dem überein, den wir nach dem ersten Verfahren gefunden haben (vergleiche Formel (3), pag. 142). Beide Verfahren führen somit zu den gleichen Resultaten. Es wird nicht mehr nötig sein, auf die Lösungen noch näher einzutreten. Wir erlauben uns noch folgende Bemerkungen:

Für jede Abscisse giebt es 2 symmetrische Ordinaten, daher auch 2 symmetrische Dreiecke. Für den Grenzfall $c = \frac{3b}{2}$ wird

1. $x_1 = b$, bedingt 2 unendlich kleine Dreiecke OAC.
2. $x_2 = \frac{b}{16}$, » 2 spitzwinklige Dreiecke.

Ist $c > \frac{3b}{2}$, so wird

1. $x_1 > b$, die entsprechenden Ordinaten werden imaginär, weil die Kurve den Kreis nicht mehr schneiden kann; also liefert dieser Wert von x keine reellen Lösungen mehr.
2. $x_2 < \frac{b}{16}$. Die entsprechenden Dreiecke werden umso spitzwinkliger, je kleiner x_2 ist.

Nimmt dagegen der Wert von c successive von $\frac{3b}{2}$ bis 0 ab, so nimmt x_1 ab im Werte von b bis $\frac{b}{4}$ und x_2 zu im Werte von $\frac{b}{16}$ bis $\frac{b}{4}$. Die dem x_1 entsprechenden Lösungen sind stumpfwinklig zunächst, werden für $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ rechtwinklig und dann spitzwinklig. Die Dreiecke, die dem Wert von x_2 zugehören, werden immer weniger spitzwinklig. Für $c = 0$ ist $x_1 = x_2$ und die Dreiecke fallen als gleichseitige zusammen.

V.

§ 14. *Fünfte Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Basis und die Summe oder Differenz der beiden Dreieckshöhen gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $h_b \pm h_s = \pm c =$ konstant.

Bedingung: $\infty \geqq h_b + h_s \geqq 0$; $\infty \geqq h_b - h_s \gtreqless 0$.

Für ein unendlich kleines Dreieck verschwinden beide Höhen, also Summe und Differenz $= 0$; für ein unendlich grosses Dreieck ist $h_b = \infty$ und $h_s = b$, somit Summe und Differenz $= \infty$. Die Differenz $h_b - h_s$ wird ein zweitesmal zu Null, wenn der Basiswinkel 60^0 misst. Ist er kleiner als 60^0, so ist $h_b - h_s$ $=$ neg., ist er grösser als 60^0, so ist $h_b - h_s =$ pos.

§ 15. *Erstes Lösungsverfahren. Bestimmung der Punkte B.*

a) Konstruktion der Kurve. Taf. II, Fig. 9.

$OA = b$ sei die Basis des gleichschenkligen Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Auf MM_1 tragen wir c von C aus nach E ab. Es gehe durch O ein Strahl, der den Grundkreis in Q schneidet. Von E aus schlagen wir nun mit dem Radius $r = AQ$ einen Kreisbogen, der den Strahl OQ in P_1 und P_2 schneidet. Der geometrische Ort des Punktes P ist die Hilfskurve. Dieselbe kann daher folgendermassen definiert werden:

Zieht man durch O Strahlen, so ist die Kurve der geometrische Ort eines Strahlenpunktes, der von einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten denselben Abstand hat wie der Strahl selber vom festen Punkt A. Fällt ein Kurvenpunkt in die Mittelsenkrechte, so ist

einerseits $EC \pm PE = h$;

andererseits ist $EC \pm PE = c \pm h_s$; folglich

$h_b = c \pm h_s$, d. h. wir haben

eine Lösung vor uns. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten ergeben daher die gesuchten Punkte B.