Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1902)
Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

fälle nachzuweisen. Wir erlauben uns nur noch, die allgemeine Formel für die Dreiecksfläche zu bringen. Es wird

$$F_{AOB} = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{c^2 + c\sqrt{4b^2 + c^2}}{2}}. \tag{8}$$

Speziell für $c = \frac{3b}{2}$ entsteht ein gleichseitiges Dreieck; es

wird $$F = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{\frac{9b^2}{4} + \frac{3b}{2}\sqrt{4b^2 + \frac{9b^2}{4}}}{2}} = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}.$$

III.

§ 8. *Dritte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkelhöhe und dem an die Spitze angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $h_s \pm n = \pm c =$ konstant.

Bedingungen: 1. $h_s + n \geqq \frac{b}{2}$;

2. $h_s - n \overline{\gtrless} + \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Die Summe $h_s + n$ wird ein Mimimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; denn da ist $h_s = 0$ und $n = \frac{b}{2}$, also $h_s + n = \frac{b}{2}$.

Die Differenz $h_s - n$ erreicht das Maximum bei einem rechtwinkligen Dreieck, bei welchen $h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2}$ und $n = 0$, also $h_s - n = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

§ 9. *Erstes Lösungsverfahren: Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 6, Tafel II) OA die gegebene Basis b. Ziehe den Grundkreis. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius $r = AH = c$ ist. Lege durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf diesen Strahl, das durch Q gehen muss und das den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Trage nun auf dem Strahl OQ von Q aus die Strecke QH nach der entgegengesetzten Seite von O, die Strecke QH_1 nach der gleichen Seite ab und erhalte so 2 Punkte P und P_1, so dass

$$AQ + QP = AQ + QH = AH = c$$
$$\text{und } QP_1 - QA = QH_1 - QA = AH_1 = c.$$

Lässt man den Strahl OQ um O sich drehen, so beschreiben die Punkte P und P_1 die gesuchte Kurve. Ziehen wir also in einem Kreise durch den einen Endpunkt O eines Durchmessers Strahlen, die den Kreis in Q schneiden, so ist unsere Kurve der geometrische Ort solcher Strahlpunkte, für die die Summe oder Differenz der Abstände des Punktes Q vom Kurvenpunkt P einerseits und andererseits vom andern Endpunkt A des Durchmessers eine Konstante ist.

Die Summe der Abstände entspricht der Relation:

$$h_s + n = c,$$

die Differenz dagegen der Bedingung:

$$h_s - n = \pm c.$$

Fällt ein Kurvenpunkt P auf die Mittelsenkrechte MM_1, so wird $QP = n$ und $QA = h_s$; folglich haben wir in den Schnittpunkten der Kurve mit der Mittelsenkrechten die gesuchten Punkte B, d. h. die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Lage des rechtwinkligen Koordinatensystems wie früher. x und y seien die Koordinaten des Punktes P; dann ist

$$(OQ + QP)^2 = x^2 + y^2; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} OQ &= b\cos\varphi; \\ QP &= c - QA = c - b\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$(b\cos\varphi + c - b\sin\varphi)^2 = x^2 + y^2;$$

$$\frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + c - \frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$[x^2 + y^2 + b(y - x)]^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0. \qquad (1)$$

$$\text{Polargleichung: } r = b(\cos\varphi - \sin\varphi) \pm c. \qquad (2)$$

Gleichung (1) ist die Gleichung einer Kreiskonchoide, deren Symmetrieaxe mit der positiven x-Axe einen Winkel von -45^0 bildet.

$c < b\sqrt{2}$; der Nullpunkt ist Doppelpunkt;
$c = b\sqrt{2}$; » » » Spitze;
$c > b\sqrt{2}$; » » » isolierter Punkt.

Ist $c = 0$, so lautet die Kurvengleichung:

$$(x^2 + y^2 + by - bx)^2 = 0.$$

Die Kurve zerfällt in zwei aufeinanderfallende Kreise. Die Gleichung eines Kreises in Normalform heisst

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2}.$$

Die Mittelpunktskoordinaten sind $\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, und der Radius des Kreises ist $r = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

Um die Gleichung der Kurve in normaler Form zu erhalten, führen wir eine negative Drehung der Axen um 45^0 aus. Es ergeben sich daher folgende Transformationsformeln:

1. $x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi$;
2. $y = - x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$.

Weil $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} &3.\quad y - x = - x'\sqrt{2}, \\ &4.\quad x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2, \end{aligned}\right\} \text{ sub in der Kurvengleichung (1);}$$

es resultiert:

$$(x'^2 + y'^2 - bx'\sqrt{2})^2 - c^2(x'^2 + y'^2) = 0. \tag{4}$$

Der Durchmesser des erzeugenden festen Kreises ist also $b\sqrt{2}$. Ziehen wir durch O Strahlen, welche den festen Kreis in V schneiden, so liegen auf jedem Strahl zwei Kurvenpunkte U und W, welche von V den konstanten Abstand c haben.

c) Die Lösungen der Aufgabe.

Wir ziehen die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$; denn ihre Schnittpunkte mit der Kurve liefern die Spitzen B der gesuchten gleichschenkligen Dreiecke. Alle diese Schnittpunkte haben die Abscisse $x = \frac{b}{2}$; es bleibt daher nur noch die Bestimmung der Ordinaten der Punkte B übrig. Zu diesem Zweck setzen wir den Wert für $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (1) ein und erhalten

$$\left(y^2 + b\,y - \frac{b^2}{4}\right)^2 - c^2 y^2 - \frac{b^2 c^2}{4} = 0. \tag{5}$$

Die Gleichung 4. Grades liefert 4 Wurzeln; somit erhalten wir 4 Schnittpunkte, was richtig ist, da eine Gerade eine Kurve 4. Ordnung in 4 Punkten schneiden kann.

Wir bringen (5) auf die Form

$$y^4 + 2b y^3 + \frac{b^2 - 2c^2}{2} y^2 - \frac{b^3}{2} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{16} = 0,$$

setzen $y = z - \frac{b}{2}$, setzen ein und erhalten

$$z^4 - (b^2 + c^2) z^2 + b c^2 z + \frac{b^4 - 2b^2c^2}{4} = 0. \tag{α}$$

Wir zerlegen die linke Seite in 2 Faktoren, wobei wir unbestimmte Koeffizienten anwenden, und setzen

$$(z^2 + pz + t)(z^2 - pz + u) = 0, \tag{β}$$

führen die angedeutete Multiplikation aus, vergleichen die Koeffizienten von (α) und (β), leiten eine Gleichung in p ab, setzen $p^2 = v + \frac{2}{3}(b^2 + c^2)$ und erhalten schliesslich folgende kubische Hilfsgleichung:

$$v^3 - \frac{4b^4 - 4b^2c^2 + c^4}{3} v - \frac{16b^6 - 24b^4c^2 - 15b^2c^4 - 2c^6}{27} = 0. \tag{6}$$

Die Diskriminante dieser Gleichung lautet:

$$\Delta = Q^2 - \frac{4P^3}{27} = \frac{b^2c^4}{27}(4c^6 + 3b^2c^4 + 48b^4c^2 - 32b^6).$$

Diese Diskriminante verschwindet für folgende Werte von c:

$$\left.\begin{aligned} &1.\quad c = 0 \\ &2.\quad c = \frac{b}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{13 + 16\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{13 - 16\sqrt{2}} - 1} \\ &\qquad = 0{,}787996\cdots\cdots b \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Demnach bekommen wir 3 Hauptfälle für unsere Lösungen:

A. $c > 0{,}787996\cdots\cdot b$; $\Delta = \text{pos.}$

Die kubische Hilfsgleichung in v (6) besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; folglich werden bei der biquadratischen Gleichung (5) in y 2 Wurzeln reell und 2 Wurzeln imaginär. Wir erhalten zwei reelle, verschiedene Lösungen. Laut Konstruktion sind die Dreiecke spitzwinklig.

B. $c = 0{,}787996\cdots\cdot b$; $\Delta = 0$.

Die kubische Hilfsgleichung hat 3 reelle Wurzeln, wovon 2 gleiche. In diesem Fall besitzt die biquadratische Gleichung 4 reelle Wurzeln, wovon auch 2 gleiche. Wir bekommen 4 reelle Lösungen, wovon 2 zusammenfallen. Die ungleichen Dreiecke sind laut Konstruktion spitzwinklig, die zwei gleichen stumpfwinklig.

C. $c < 0{,}787996 \cdots b$

$\Delta = \text{neg.}$, wenn wir $c = 0$ ausschliessen.

Die Wurzeln der Gleichung (6) sind alle reell und positiv. Die Gleichung (5) hat folglich ebenfalls lauter reelle Wurzeln und damit unsere Aufgabe 4 wirkliche Lösungen.

Spezialfälle:

1. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}.$

Die Gleichung (6) bekommt die Form

$$v^3 - \frac{9}{12} b^4 v = 0; \text{ die Wurzeln sind}$$

$$v_1 = 0.$$

$$v_2 = \frac{b^2}{2}\sqrt{3}.$$

$$v_3 = -\frac{b^2}{2}\sqrt{3}.$$

Die Gleichung (β) lautet in diesem Fall

$$\left(z^2 + bz - \frac{b^2}{2}\right)(z^2 - bz + 0) = 0.$$

Subtrahieren wir von den Wurzeln dieser Gleichung $\frac{b}{2}$, so erhalten wir schliesslich folgende Werte für y:

1. $y_1 = \frac{b}{2}$, bedingt ein rechtwinkliges Dreieck.
2. $y_2 = -\frac{b}{2}$, » » » »
3. $y_3 = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$, bedingt ein stumpfwinkliges Dreieck.
4. $y_4 = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$, » » spitzwinkliges »

2. $c = 0$; $\Delta = 0$.

Gleichung (6) nimmt die Form an

$$v^3 - \frac{4b^4}{3} v - \frac{16b^6}{27} = 0.$$

Die Wurzeln sind:

$$v_1 = \frac{4}{3} b^2; \qquad v_2 = v_3 = -\frac{2}{3} b^2.$$

Gleichung (β) bekommt die Form

$$\left(z^2 + b\sqrt{2} \cdot z + \frac{b^2}{2}\right)\left(z^2 + b\sqrt{2} \cdot z + \frac{b^2}{2}\right) = 0.$$

Subtrahieren wir wieder von den Wurzeln dieser Gleichung $\frac{b}{2}$, so finden wir für y folgende Werte:

1. $y_1 = y_2 = \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$, bedingt ein doppeltgelegtes stumpfwinkliges Dreieck.

2. $y_3 = y_4 = -\frac{b}{2}(\sqrt{2} + 1)$, bedingt 2 zusammenfallende spitzwinklige Dreiecke.

Die Dreiecke, die wir für $c = 0$ erhalten haben, besitzen folgende zum teil schon aus der Konstruktion hervorgehende Eigenschaften:

1. In jedem der beiden Dreiecke ist die Schenkelhöhe h_s gleich dem äussern Schenkelabschnitt n.

2. Die Schenkelhöhe h_s des einen Dreiecks ist gleich dem innern Schenkelabschnitt m des andern und umgekehrt.

3. Die Basiswinkel dieser Dreiecke messen $22\,{}^1\!/_2{}^0$, resp. $67\,{}^1\!/_2{}^0$.

Satz (1) folgt aus der Konstruktion. Satz (2) soll analytisch bewiesen werden. Zu dem Zweck berechnen wir im spitzwinkligen Dreieck OAB die drei Grössen s, h_s und m. Wir finden:

$$1.\quad s = \frac{b}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}};$$

$$2.\quad h_s = \frac{b}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}};$$

$$3.\quad m = \frac{b}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Es muss nun im spitzwinkligen Dreieck das von den 3 Stücken b, h_s und m begrenzte Dreieck OAD_1 gleich dem stumpfwinkligen $\triangle$ OAB sein, vermehrt um das von den 3 Stücken s, h_s und n gebildete rechtwinklige $\triangle$ ABD; also $\triangle$ OAD_1 = $\triangle$ OAB + $\triangle$ ABD, sofern Satz (2) bestehen soll. Wir schreiben für die Flächen dieser Dreiecke die halben Produkte aus Grundlinie und Höhe, multiplizieren das 2 im Nenner weg und erhalten:

$$\frac{b}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{b^2}{2}(\sqrt{2}-1)+\left(\frac{b}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{b^2}{4}\sqrt{2}=\frac{b^2}{4}\sqrt{2};$$ die Gleichung ist identisch richtig, somit unsere Behauptung bewiesen.

Die Wahrheit von Satz (3) kann trigonometrisch leicht dargethan werden.

Für die Flächeninhalte dieser zwei Dreiecke erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} F_{OAB} &= \frac{b^2}{4}(\sqrt{2}-1) \\ F_{OAB_1} &= \frac{b^2}{4}(\sqrt{2}+1) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

3. $c = \frac{b}{2}$; siehe Figur 6, Tafel II.

Eine Lösung wird unendlich klein; denn die Gleichung (5) wird für $c = \frac{b}{2}$ und $y = 0$ erfüllt.

§ 10. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Fusspunkte D der Schenkelhöhe.* Voraussetzungen wie in § 8.

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Fig. 7, Taf. II) OA = b die gegebene Basis. Ziehe den Grundkreis und die Mittelsenkrechte MM_1. Schlage ferner um A einen Hilfskreis, dessen Radius r = AH = c ist. Ziehe nun durch O einen Strahl, welcher den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Fälle von A aus ein Lot auf den Strahl, welches durch Q gehen muss und den Hilfskreis in H und H_1 schneidet. Jetzt trägt man auf dem Strahl OQ von R aus die Strecke QH nach der gleichen, die Strecke QH_1 nach der entgegengesetzten Seite von O ab, macht also

1. $RP_1 = QH$, so dass die Relation gilt
$RP_1 + AQ = QH + AQ = AH = c$.
2. $RP_2 = QH_1$, so dass die Bedingung erfüllt wird
$RP_2 - AQ = QH_1 - AQ = AH_1 = c$.

Der geometrische Ort aller Punkte P bei sich drehendem Strahl ist die Kurve. Die verschiedenen Punkte dieser Kurve genügen einer der Relationen $h_s \pm n = c$.

Fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so wird
$RP = BD = n$ und
$QA = DA = h_s$; wir haben eine Lösung der Aufgabe. Die Schnittpunkte der Kurve mit dem Grundkreis liefern die Fusspunkte D der Schenkelhöhe der gesuchten Dreiecke.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Es seien in Fig. 7, Taf. II x und y die rechtwinkligen Koordinaten des Kurvenpunktes P_2. Es besteht nun die Proportion:

$$OP_2 : OK = RP_2 : CK;$$

die bezüglichen Werte eingesetzt,

$$\sqrt{x^2+y^2} : x = RP_2 : \frac{2x-b}{2}; \qquad (\alpha)$$

$$RP_2 = c + AQ = c + b\sin\varphi, \text{ sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$\sqrt{x^2+y^2} : 2x = (c+b\sin\varphi) : (2x-b);$$

$$(x^2+y^2) : 2x = (c\sqrt{x^2+y^2} + by) : (2x-b);$$

$$[(x^2+y^2)(b-2x) + 2bxy]^2 - 4c^2x^2(x^2+y^2) = 0. \qquad (9)$$

Polargleichung:

$$r = b\sin\varphi + \frac{b}{2\cos\varphi} \pm c. \qquad (10)$$

c) Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve ist von der 6. Ordnung. Sie besteht aus zwei unendlichen Ästen, von denen der eine eine Schleife mit Doppelpunkt in O besitzt. Der Nullpunkt ist 4facher Punkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 4. Grades.

Als *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* erhalten wir:

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{6b^2-4c^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + \frac{b^2-4c^2}{b^2} = 0. \qquad (11)$$

Wir können diese Gleichung nur für Spezialfälle auflösen.

1. $c = 0$.

Gleichung (11) bekommt die Form

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{6y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} + 1 = 0.$$

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right)^4 = 0.$$

$y = -x$ ist 4fach gelegte Tangente im Nullpunkt.

Für $c = 0$ lautet nun die Kurvengleichung:

$$[(x^2 + y^2)(b - 2x) + 2bxy]^2 = 0. \qquad (12)$$

Die Kurve zerfällt somit in zwei zusammenfallende Kurven 3. Ordnung. Die Gleichung eines Astes lautet

$$(b - 2x)(x^2 + y^2) + 2bxy = 0. \qquad (12a)$$

Die Gerade $y = -x$ ist für jede der beiden Kurven 3. Ordnung Rückkehrtangente; denn setzen wir in Gleichung (12a) für y den Wert $-x$ ein, so erhalten wir:

$x^3 = 0$; der Nullpunkt ist also Spitze.

2. $c = \frac{b}{2}$.

Gleichung (11) nimmt die Form an

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{5y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} = 0. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y}{x} = 0;$$

die x-Axe ist Tangente.

Dividieren wir in (α) den Faktor $\frac{y}{x}$ weg, so bleibt

$$\frac{y^3}{x^3} + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{5y}{x} + 4 = 0. \qquad (\beta)$$

Setze $\frac{y}{x} = w - \frac{4}{3}$.

Die transformierte Gleichung lautet:

$$w^3 - \frac{w}{3} + \frac{56}{27} = 0. \qquad (\gamma)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung wird Δ = pos.; somit besitzt Gleichung (β) eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln und Gleichung (α) im ganzen 2 reelle und 2 imaginäre Werte für $\frac{y}{x}$. Für $c = \frac{b}{2}$ sind also 2 Nullpunktstangenten der Kurve reell und 2 imaginär.

3. $c = b$.

Gleichung (11) erhält die Form

$$\frac{y^4}{x^4} + \frac{4y^3}{x^3} + \frac{2y^2}{x^2} + \frac{4y}{x} - 3 = 0. \tag{δ}$$

Die kubische Hilfsgleichung, die wir ableiten können, hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln; folglich besitzt Gleichung (δ) 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln. Die Nullpunktstangenten sind wieder zur Hälfte reell und zur Hälfte imaginär.

Überhaupt hat die Kurve, wie schon die Konstruktion ergiebt, im Nullpunkt stets 2 reelle und 2 imaginäre Tangenten mit Ausnahme des Falles, da $c = 0$ ist.

Um die Schnittpunkte mit der y-Axe zu erhalten, setzen wir in der Kurvengleichung (9) $x = 0$ und erhalten

$$b^2 y^4 = 0;$$

somit schneidet die y-Axe die Kurve 4mal im Nullpunkt und, da die Koeffizienten von y^6 und $y^5 = 0$ sind, noch 2mal im Unendlichen.

Setzen wir $y = 0$, so bekommen wir die Abschnitte auf der x-Axe. Wir erhalten die Gleichung:

$$[x^2(b-2x)]^2 - 4c^2x^4 = 0.$$

1. $x^4 = 0$; $x = 0$ 4mal;
2. $(b - 2x)^2 = c^2$; $x = \frac{b}{2} \pm c$.

Die x-Axe schneidet die Kurve 6mal im Endlichen, worunter 4mal im Nullpunkt.

Zur Bestimmung der Asymptotenrichtungen machen wir die Kurvengleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$4x^2(x^2 + y^2)^2 = 0;$$

1. $x = 0$ 2mal;
2. $y = \pm ix$ 2mal.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind also Doppelpunkte der Kurve. Ferner haben wir in

$$x = \frac{b}{2} \tag{13}$$

2 zusammenfallende reelle Asymptoten. Um dies zu zeigen,

machen wir die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$ zur y-Axe vermittelst der Transformationsformeln:

$$x = x' + \frac{b}{2},$$
$$y = y'.$$

Die Gleichung der Kurve wird:

$$\left[-2x'\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4} + y'^2\right) + 2by'\left(x' + \frac{b}{2}\right)\right]^2 - 4c^2\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4}\right)\left(x'^2 + bx' + \frac{b^2}{4} + y'^2\right) = 0. \quad (14)$$

Wir projizieren die unendlich fernen Punkte in der Richtung der y'-Axe auf die x'-Axe und setzen

$$y' = \frac{1}{y''}$$
$$\text{und} \quad x' = \frac{x''}{y''}.$$

Wir erhalten, wenn wir noch die Gleichung mit y''^6 multiplizieren,

$$\left[-2x''\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) + 2by''\left(x'' + \frac{by''}{2}\right)\right]^2 - 4c^2y''^2\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4}\right)\left(x''^2 + bx''y'' + \frac{b^2y''^2}{4} + 1\right) = 0. \quad (15)$$

Die Schnittpunkte mit der y''-Axe: Setze $x'' = 0$, erhalte

$$b^4y''^4 - b^2c^2y''^4\left(\frac{b^2}{4}y''^2 + 1\right) = 0,$$

woraus 1. $y''^4 = 0$; $y'' = 0$ 4mal.

2. $y'' = \pm\frac{2}{bc}\sqrt{b^2 - c^2}$. (ε)

Der Nullpunkt der projizierten Kurve ist Doppelpunkt, dessen Tangenten in $x'' = 0$ zusammenfallen, und da für $x'' = 0$ $y''^4 = 0$ wird, so ist derselbe und damit auch der unendlich ferne Punkt der Asymptote $x = \frac{b}{2}$ ein *Selbstberührungspunkt.* Die Kurve hat also im Unendlichen einen *Selbstberührungspunkt,* und die Mittelsenkrechte $x = \frac{b}{2}$ ist *Selbstberührungsasymptote.*

Aus (ε) folgt ferner, dass die Gerade $x = \frac{b}{2}$ die Kurve im Endlichen im allgemeinen in 2 Punkten schneidet, deren Ordinaten

$$y = \pm \frac{bc}{2} \sqrt{\frac{1}{b^2 - c^2}} \text{ sind.}$$

Die Schnittpunkte sind reell, wenn $c < b$,
imaginär, wenn $c > b$
und liegen im Unendlichen, wenn $c = b$.

Im letztern Fall ist der unendlich ferne Punkt der Kurve ein Selbstberührungspunkt, in welchem die Mittelsenkrechte als Asymptote die Kurve in 6 zusammenfallenden Punkten berührt, also Inflexionsknoten zugleich.

Unsere Kurve ist also rational; denn sie besitzt

einen 4fachen Punkt im Nullpunkt	=	6 Doppelpunkte,
einen Selbstberührungspunkt	=	2 »
2 Doppelpunkte in den imaginären Kreispunkten	=	2 »
also das Maximum von		10 Doppelpunkten.

Die Kurve hat, wie sich aus der Konstruktion ergiebt, *Wendepunkte* und zwar, wenn

1. $c \geqq b$ 2 WP im rechten Ast;
2. $b > c > 0$ 4 WP, nämlich 3 im rechten Ast und einen im obern linken Ast;
3. $c = 0$ 1 WP im aufsteigenden Ast der doppelt gelegten Kurve 3. Ordnung.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der doppelt gelegten y-Axe und der unendlich fernen Geraden (linker Ast) und aus der unendlich fernen Geraden samt dem Nullpunkt als isoliertem Punkt (rechter Ast), zusammen also aus der doppelt gelegten y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden und dem Nullpunkt als isoliertem Punkt.

Negative c erzeugen die gleichen Kurven wie positive c, weil c quadratisch vorkommt.

d) Die Lösungen der Aufgabe.

Es handelt sich um die Schnittpunkte D der Kurve mit dem Grundkreis. Die Koordinaten dieser Punkte D sind die Wurzeln des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & [(b-2x)(x^2+y^2)+2bxy]^2-4c^2x^2(x^2+y^2)=0, \text{ Kurve.} \\ 2. & x^2-bx+y^2=0, \text{ Grundkreis.} \end{array}\right\} (\alpha)$$

Da die Kurve von 6. Ordnung ist, so wird sie vom Kreis in 12 Punkten geschnitten. Von diesen Schnittpunkten absorbiert der Nullpunkt 4, da er ein 4facher Punkt der Kurve ist. Weitere 4 werden absorbiert durch die imaginären Kreispunkte der Ebene, welche der Kurve je doppelt angehören. Es bleiben somit 4 Schnittpunkte übrig; folglich kann unsere Aufgabe im Maximum 4 reelle Lösungen aufweisen. Wir erhalten mithin das gleiche Ergebnis wie beim ersten Lösungsverfahren. Wir wollen die Übereinstimmung in zwei Spezialfällen zeigen.

1. $c = 0$, Taf. II, Fig. 7.

Das Gleichungssystem (α) heisst nun:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & (b-2x)(x^2+y^2)+2bxy=0 \\ 2. & x^2-bx+y^2=0 \end{array}\right\} (\beta)$$

Wir lösen (2) nach y auf, setzen den Wert in (1) ein und erhalten zur Bestimmung der Abscissen von D' folgende Gleichung in x: $4b^2x^2(bx-x^2)=(b-2x)^2b^2x^2$, woraus

$$x=\frac{b}{4}(2\pm\sqrt{2}).$$

Für y erhalten wir den Ausdruck:

$$y=\pm\frac{b}{4}\sqrt{2}.$$

Da die Koordinaten doppelwertig auftreten, so müssen wir 2 Schnittpunkte haben. Den positiven Zeichen in den Wurzeln entspricht der eine, den negativen der andere. Die beiden Schnittpunkte sind somit

$$D'\left[\frac{b}{4}(2+\sqrt{2}), \frac{b}{4}\sqrt{2}\right] \text{ und } D'_1\left[\frac{b}{4}(2-\sqrt{2}), -\frac{b}{4}\sqrt{2}\right].$$

Jeder der beiden Schnittpunkte ist indes noch doppelt zu zählen, weil die Kurve 3. Ordnung doppelt gelegt ist.

Die Basishöhen der beiden Dreiecke werden aus der Proportion bestimmt:

$$\frac{b}{4}(2\pm\sqrt{2}) : \frac{b}{2} = \pm\frac{b}{4}\sqrt{2} : h_b;$$

$$h_{b1}=\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1), \quad \triangle\ OAB^1;$$

$$h_{b2}=-\frac{b}{2}(\sqrt{2}+1), \quad \triangle\ OAB^1_1.$$

Diese Werte stimmen mit denjenigen auf pag. 114 vollständig überein.

2. $c = \frac{b}{2}\sqrt{2}$. Taf. II, Fig. 7.

Die Gleichung in x, deren Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte D sind, bekommt folgende Form

$$64x^4 - 128bx^3 + 84b^2x^2 - 20b^3x + b^4 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

1. $x_1 = 0 + \frac{b}{2}$, 3. $x_3 = \frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$,

2. $x_2 = 0 + \frac{b}{2}$, 4. $x_4 = -\frac{b}{4}\sqrt{3} + \frac{b}{2}$;

dann wird

1. $y_1 = \frac{b}{2}$, 3. $y_3 = -\frac{b}{4}$,

2. $y_2 = -\frac{b}{2}$, 4. $y_4 = -\frac{b}{4}$.

Dies sind die Koordinaten der Schnittpunkte D.

Als Basishöhe für die 4 Lösungen erhalten wir:

1. $h_b = \frac{b}{2}$ für $\triangle$ OAB_1;

2. $h_b = -\frac{b}{2}$ » $\triangle$ OAB_3;

3. $h_b = b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right)$ für $\triangle$ OAB_2;

4. $h_b = -b\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right)$ » $\triangle$ OAB_4.

Diese Werte stimmen vollständig überein mit denjenigen auf Seite 113.

IV.

§ 11. *Vierte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz der durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte gegeben sind.*

Gegeben: 1. b;

2. $m \pm n = \pm c =$ konstant.