Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1902)

Heft: 1519-1550

Artikel: Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung

Autor: Krebs, A.

Kapitel: I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319122

A. Krebs.

Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit Hilfe von Kurven höherer Ordnung.

EINLEITUNG.

§ 1. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch zwei Stücke bestimmt. Als Bestimmungsstücke sollen in Betracht fallen (Fig. 1):

1. Die Basis $OA = b$.
2. Der Schenkel $OB = AB = s$.
3. Die Basishöhe $BC = h_b$.
4. Die Schenkelhöhe $AD = h_s$.
5. Die durch die Schenkelhöhe erzeugten Schenkelabschnitte $OD = m$ und $DB = n$.

Im ganzen haben wir also sechs Bestimmungsstücke. In allen Konstruktionsaufgaben, die wir lösen werden, soll die Basis b das erste gegebene Stück sein. Als Zweites fügen wir die Summe oder Differenz aus je zweien der übrigen fünf Bestimmungsgrössen hinzu.

Ein gleichschenkliges Dreieck hat für uns jetzt vier Fundamentalpunkte. Zwei davon sind stets durch die Basis gegeben. Ist von den andern zweien — es betrifft dies noch die Spitze B und den Fusspunkt D der Schenkelhöhe — der eine bestimmt, so ist das Problem gelöst. Jede Aufgabe gestattet daher eine doppelte Lösungsart. Die Bestimmung des dritten festen Punktes erfordert, wie wir bald sehen werden, die Konstruktion einer Kurve höherer Ordnung. Sollte eine solche Hilfskurve nicht näher bekannt sein, so erlauben wir uns, dieselbe nebenbei einer mehr oder weniger eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

I.

§ 2. *Erste Aufgabe: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, wenn die Basis b und die Summe oder Differenz aus der Basishöhe und dem an die Spitze grenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.*

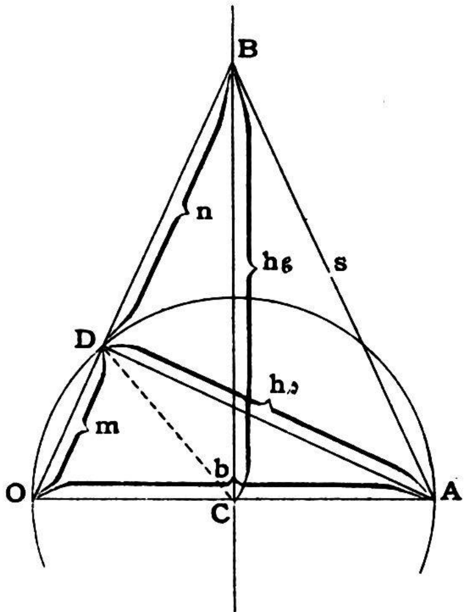


Fig. 1

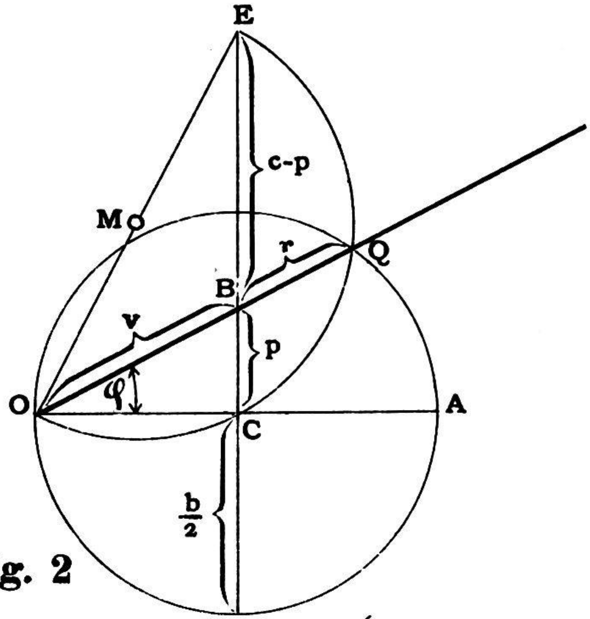


Fig. 2

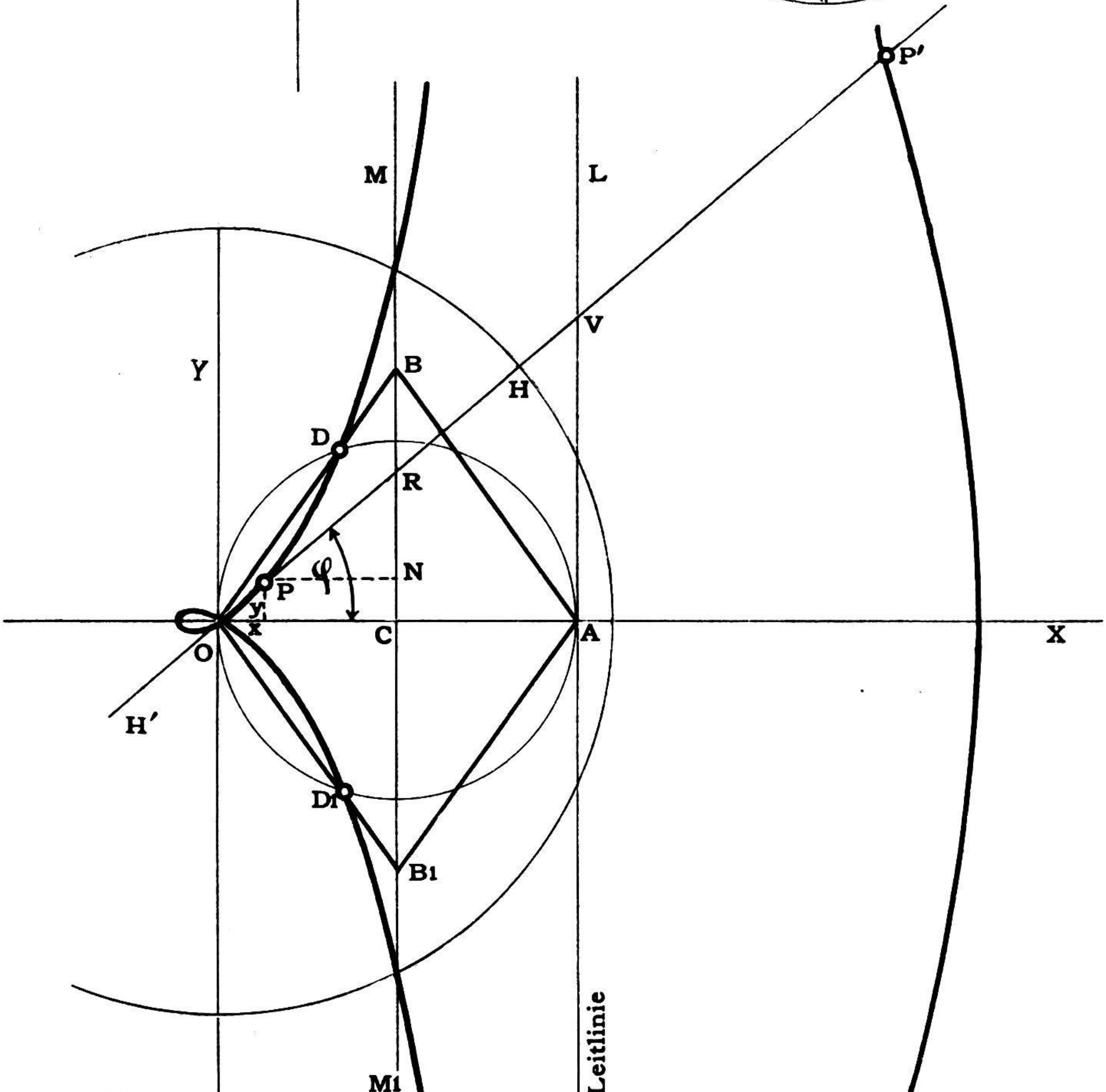


Fig. 4

$$\frac{3b}{2} > c > \frac{b}{2}\sqrt{2}$$

Tafel I

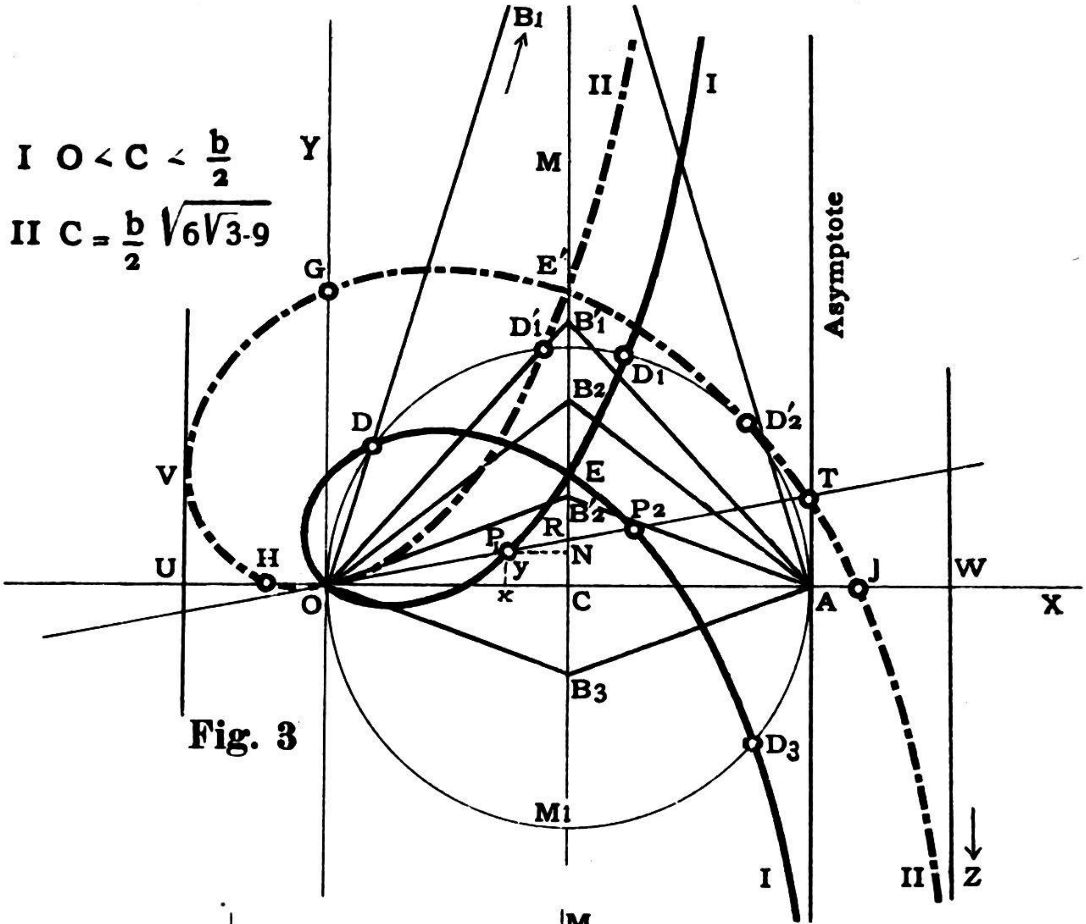


Fig. 3

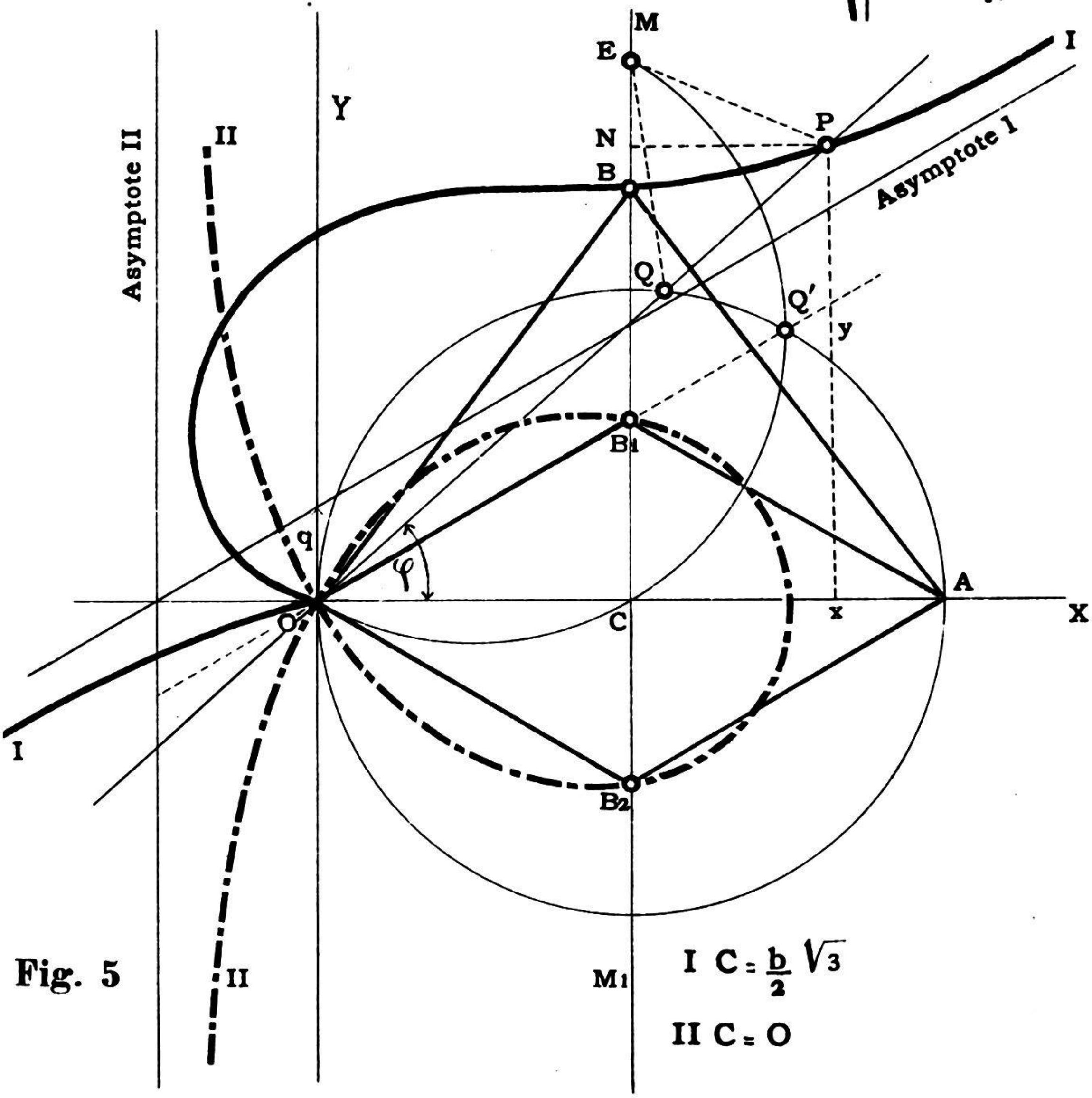
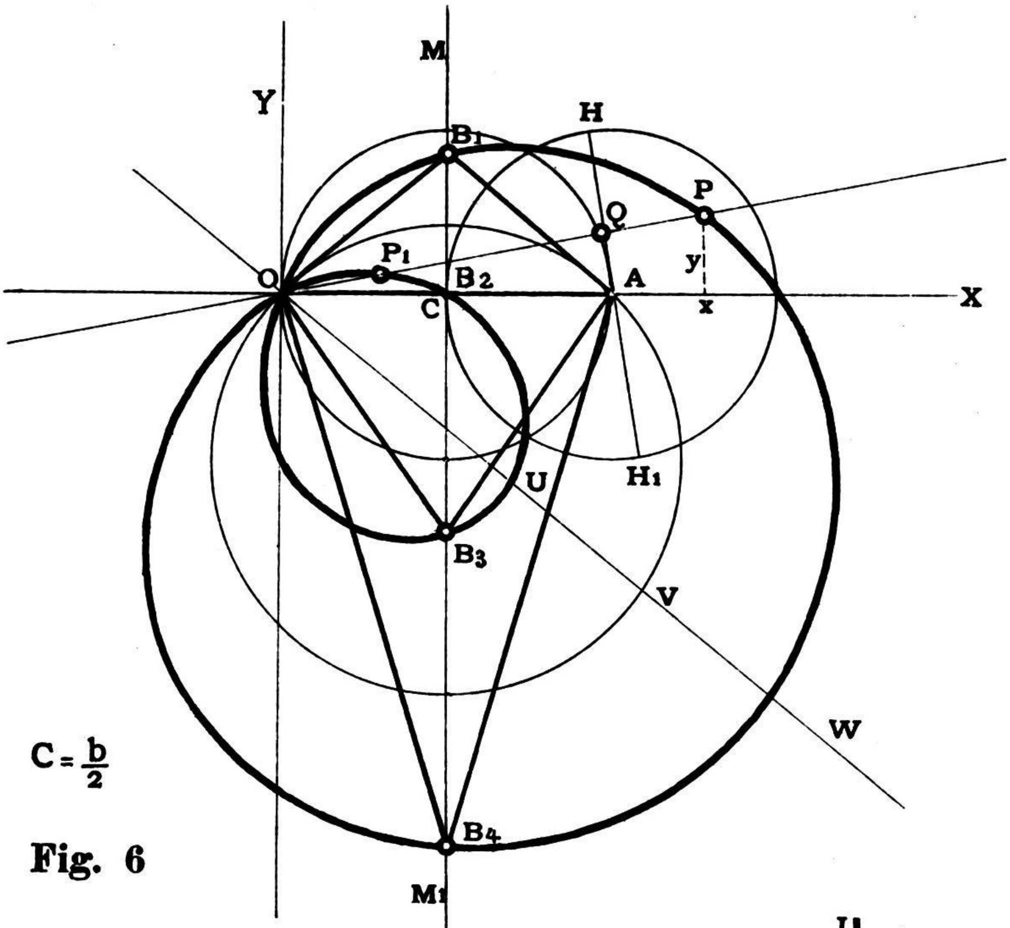
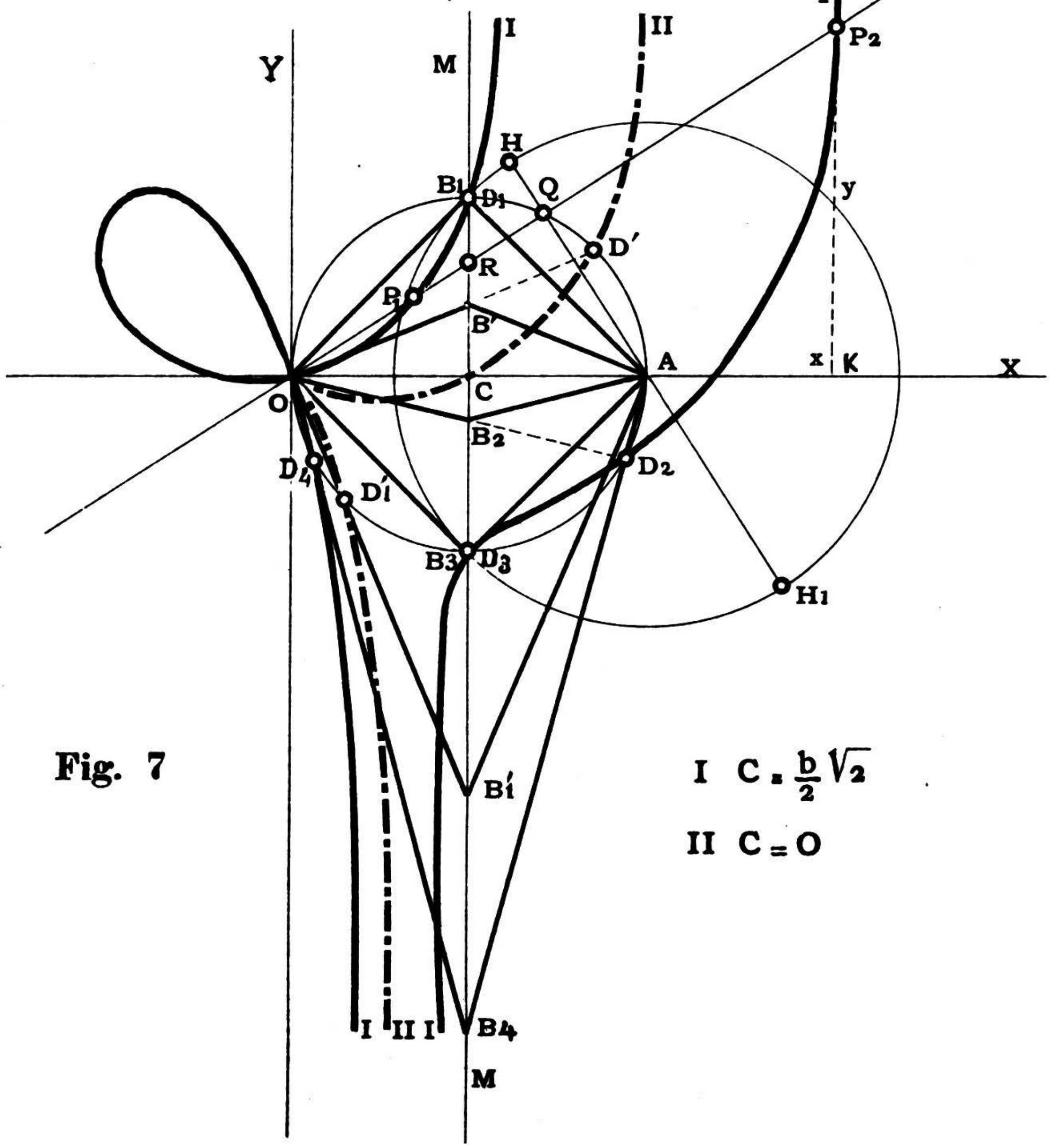


Fig. 5



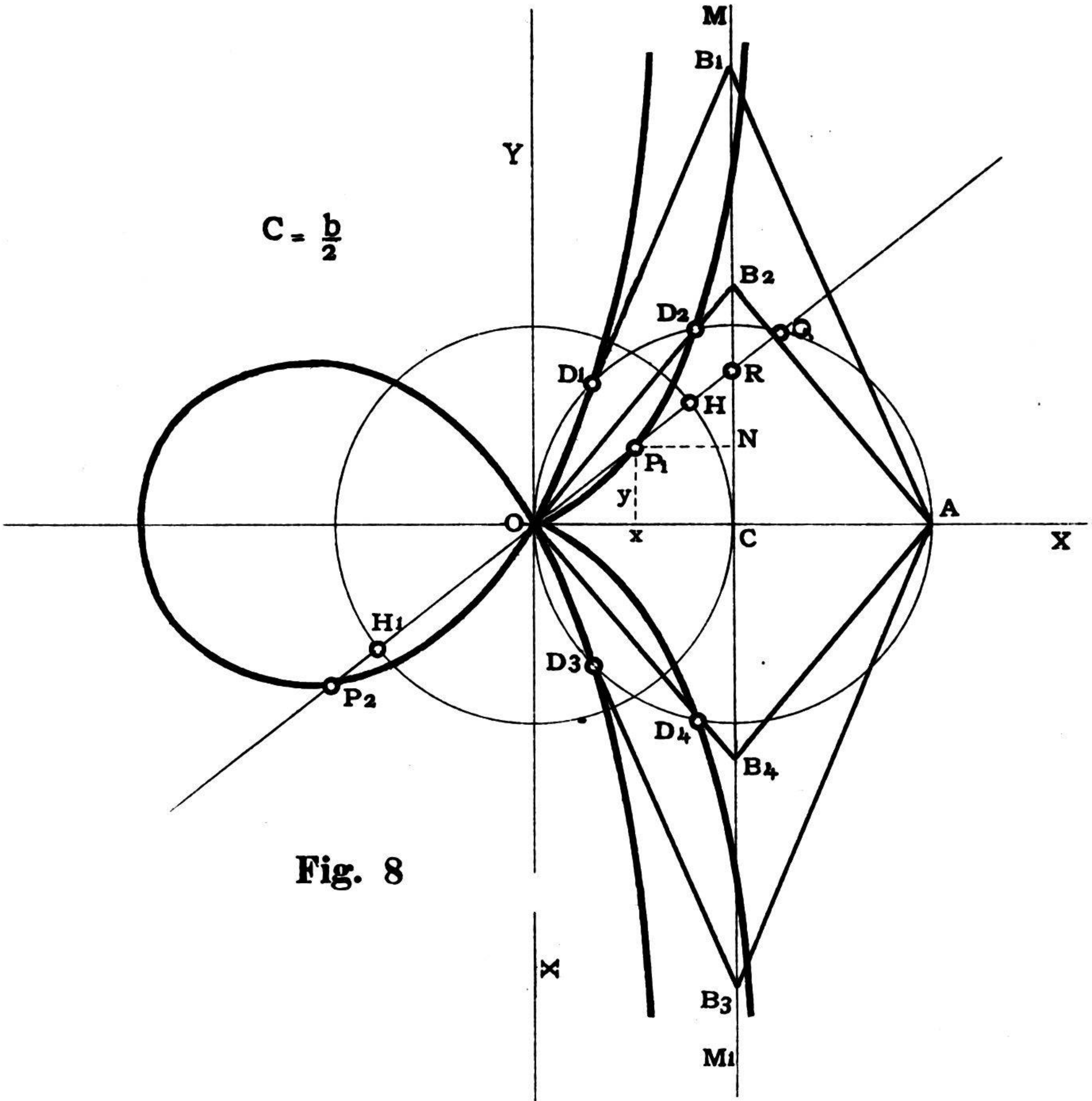
M
Y
H
B1
P
Q
P1
O
B2
A
X
y
x
C
U
H1
B3
V
W
C = b/2
B4
M1

Fig. 6



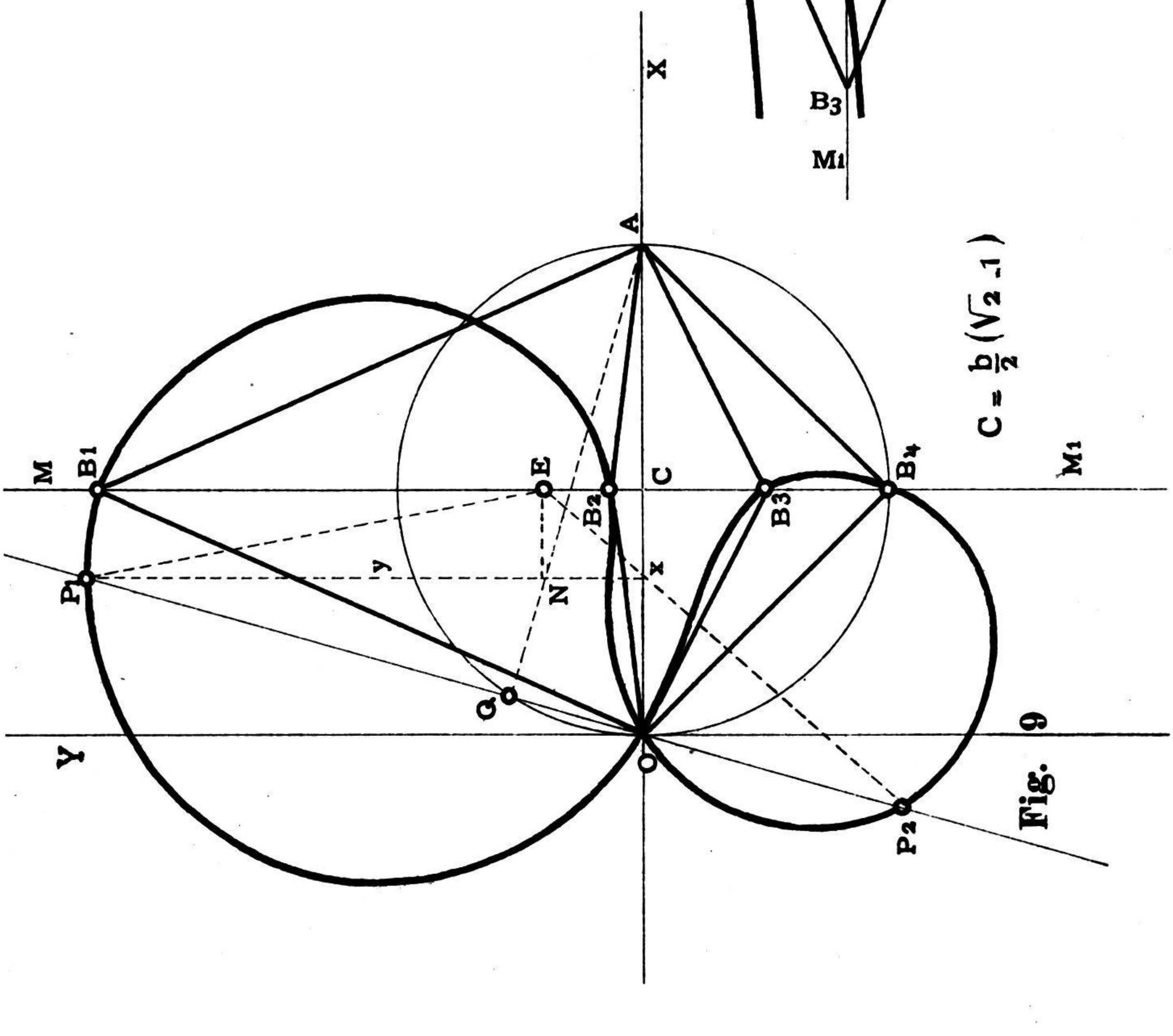
I
II
I
P2
Y
M
H
B1
D1
Q
y
D′
R
P
B′
A
X
x
K
O
C
B2
D4
D2
D1′
B3
D3
H1
B1′
I C = b/2 √2
II C = O
I
II
I
B4
M

Fig. 7



$C = \frac{b}{2}$
M
B_1
Y
B_2
D_2
Q
D_1
R
H
N
P_1
y
O
x
C
A
X
H_1
P_2
D_3
D_4
B_4
B_3
M_1

Fig. 8



X
A
$C = \frac{b}{2}(\sqrt{2} - 1)$
M
B_1
E
B_2
C
B_3
B_4
M_1
P_1
y
N
x
Q
Y
O
P_2

Fig. 9

Gegeben 1. b;

2. $h_b \pm n = \pm c =$ konstant.

Die Lösung ist möglich unter der Bedingung, dass

$$1.\quad h_b + n \geqq \frac{b}{2},$$

$$2.\quad \frac{b}{2} \geqq h_b - n \geqq -\frac{b}{2}.$$

Die Summe $h_b + n$ erreicht das Minimum $\frac{b}{2}$ bei einem unendlich kleinen und bei einem rechtwinkligen Dreieck. Die Differenz $h_b - n$ wird bei einem unendlich kleinen Dreieck zum Minimum $= -\frac{b}{2}$ und beim rechtwinkligen Dreieck zum Maximum $= \frac{b}{2}$. Bei jedem andern Dreieck wird $h_b - n$ abs. $< \frac{b}{2}$, was nach einem planimetrischen Satze sofort ersichtlich ist, wenn wir in Figur (1) D mit C verbinden.

§ 3. *Erste Lösung. Bestimmung des Fusspunktes D der Schenkelhöhe.*

a) Wir konstruieren zu diesem Zweck folgenderweise eine Hilfskurve. Es sei (siehe Fig. 3 I, Tafel I) $OA = b$ die gegebene Basis. Wir ziehen durch ihre Mitte C die Mittelsenkrechte MM_1. Auf derselben wählen wir den festen Punkt E so, dass $CE = c =$ der gegebenen Summe oder Differenz ist. Wir ziehen nun durch O einen Strahl, der die Mittelsenkrechte in R schneidet. Auf diesem Strahl tragen wir von R aus nach beiden Seiten die Strecke RE ab und bezeichnen die so gewonnenen Punkte mit P_1 und P_2. Wird nun der Strahl OR um O gedreht, so beschreiben die Punkte P_1 und P_2 die gesuchte Kurve. Dieselbe muss nach Konstruktion in E einen Doppelpunkt haben. Für die Kurvenpunkte P auf Strahlen, welche die Mittelsenkrechte zwischen Doppelpunkt E und der Basis OA schneiden, gilt die Relation:

$$P_1R + RC = P_2R + RC = CE = c.$$

Schneiden die Strahlen die Mittelsenkrechte oberhalb des Doppelpunktes E, so entsprechen die darauf liegenden Kurvenpunkte der Bedingung:

$$RC - RP_1 = RC - RP_2 = CE = c.$$

Kurvenpunkte endlich, deren Strahlen die Mittelsenkrechte unterhalb der Basis O A schneiden, genügen der Relation:

$$RP_1 - RC = RP_2 - RC = EC = c.$$

Die drei Relationen entsprechen den drei Bedingungen:

1. $h_b + n = c$;
2. $h_b - n = c$;
3. $n - h_b = c$.

Wir denken uns nun auf der Basis O A ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert. Ist dasselbe das gesuchte, d. h. entspricht es den gestellten Bedingungen, so muss der Schnittpunkt des Schenkels O B mit der Kurve Fusspunkt der Schenkelhöhe sein. Nach Fig. 1 liegt der Fusspunkt D der Schenkelhöhe auf einem um O A als Durchmesser gezogenen Kreise. Um unsere Aufgabe mit Hilfe der konstruierten Kurve zu lösen, haben wir also noch um O A als Durchmesser den besagten Kreis zu ziehen, den wir fortan in allen unsern Konstruktionen den Grundkreis nennen wollen. Die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Hilfskurve liefern die gesuchten Fusspunkte D der Schenkelhöhe.

b) Ableitung der Kurvengleichung.

Wir verwenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wählen O zum Nullpunkt desselben und legen durch O A die positive x-Axe. Es seien x und y die Koordinaten des Punktes P_1. Ferner erinnern wir daran, dass $P_1R + RC = c$ und dass $OC = \frac{b}{2}$ ist.

Es ist nun
$$\overline{P_1R}^2 = \overline{P_1N}^2 + \overline{NR}^2; \qquad (\alpha)$$
$$P_1R = c - RC \text{ nach Konstruktion;}$$
$$P_1N = \frac{b}{2} - x;$$
$$NR = RC - y.$$

Nun verhält sich $RC : y = \frac{b}{2} : x$, woraus folgt, dass

$$RC = \frac{by}{2x}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte alle in (α) ein, so erhalten wir

$$\left(c - \frac{by}{2x}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{by}{2x} - y\right)^2,$$

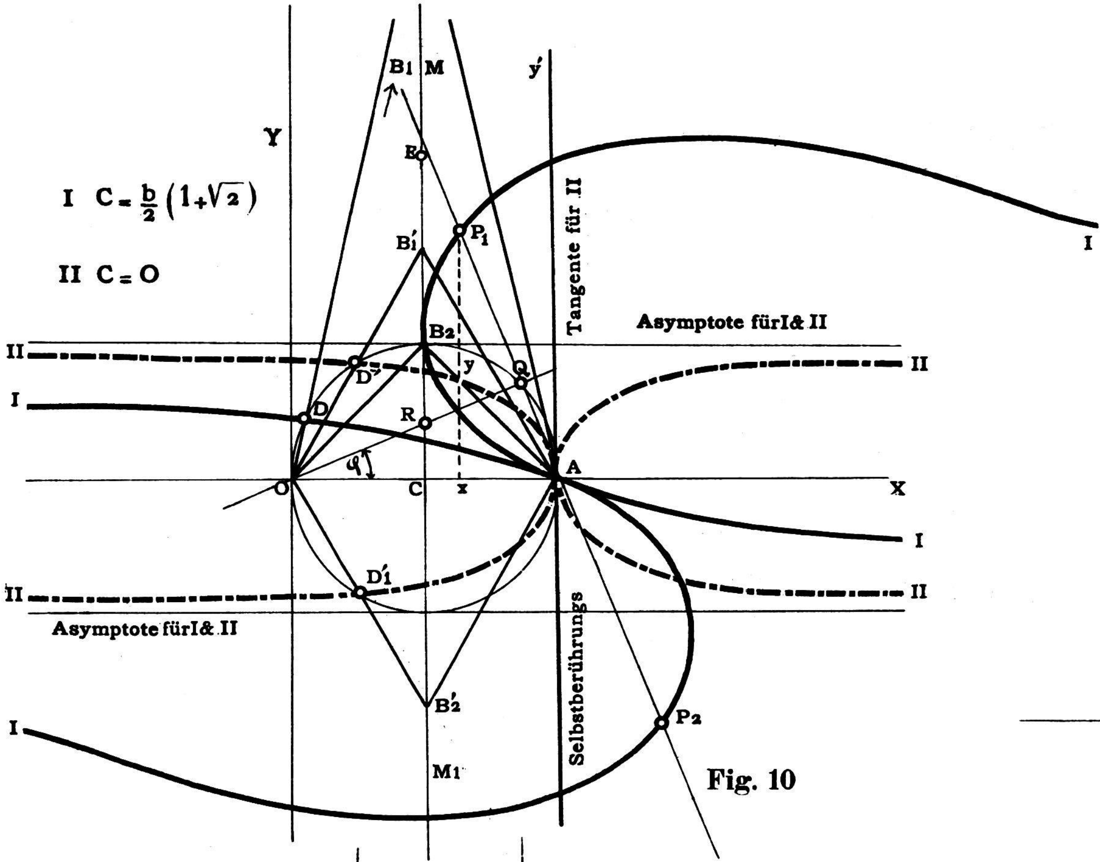


Fig. 10

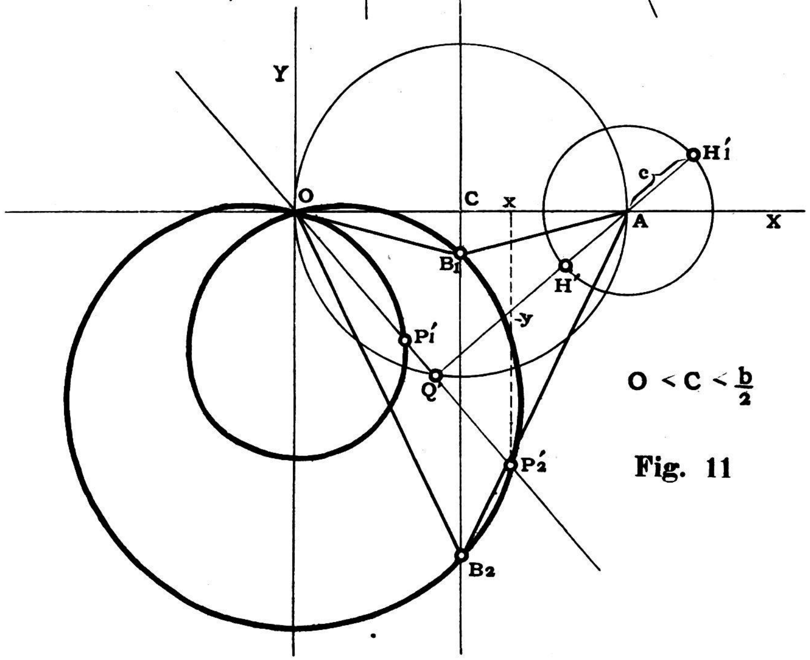


Fig. 11

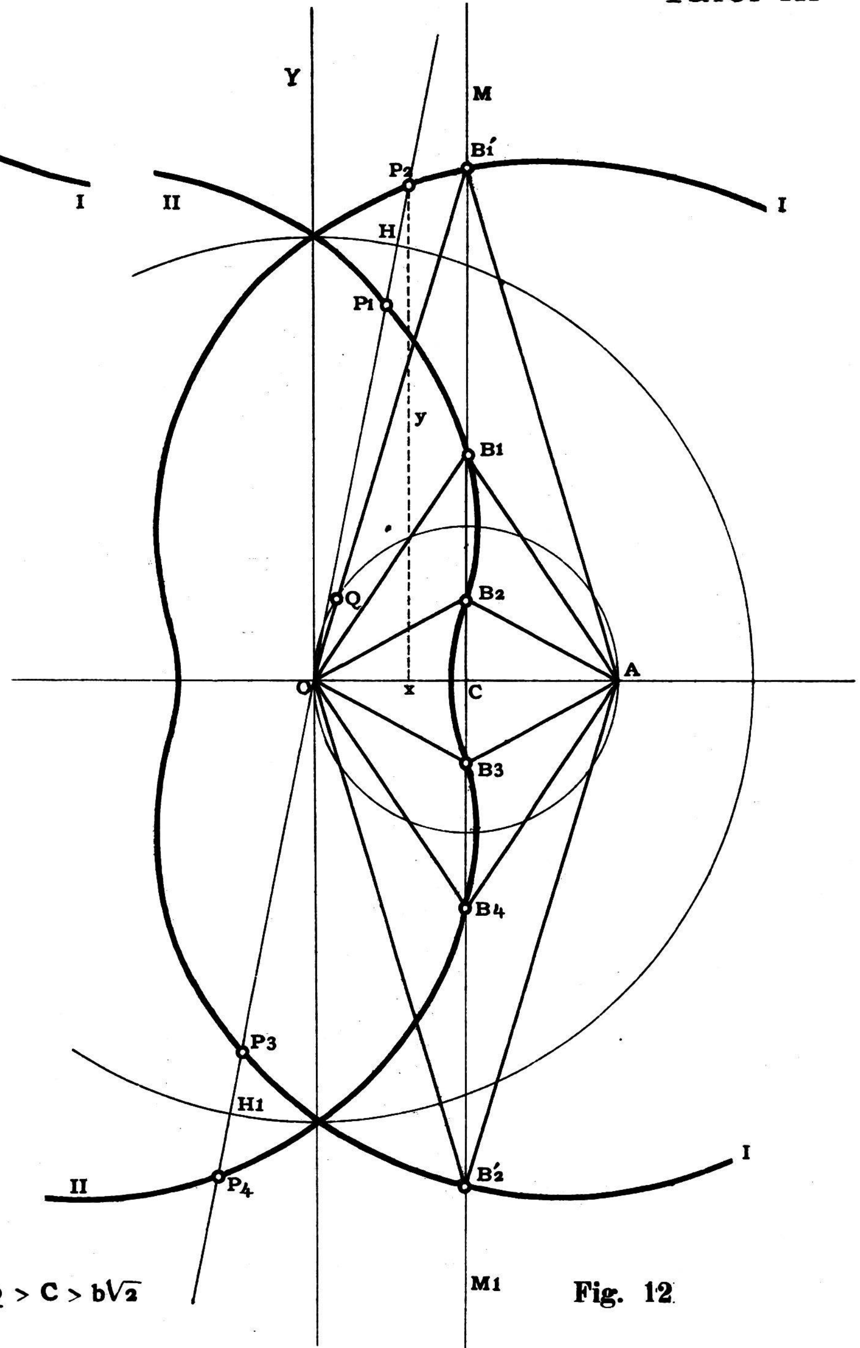


Fig. 12

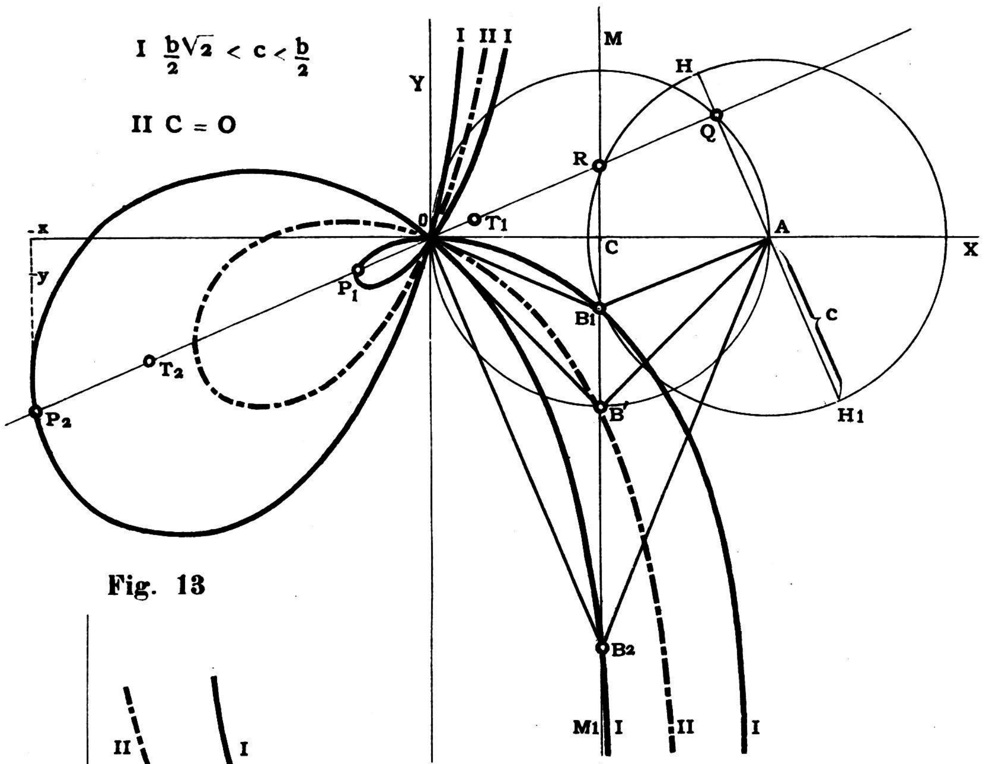


Fig. 13

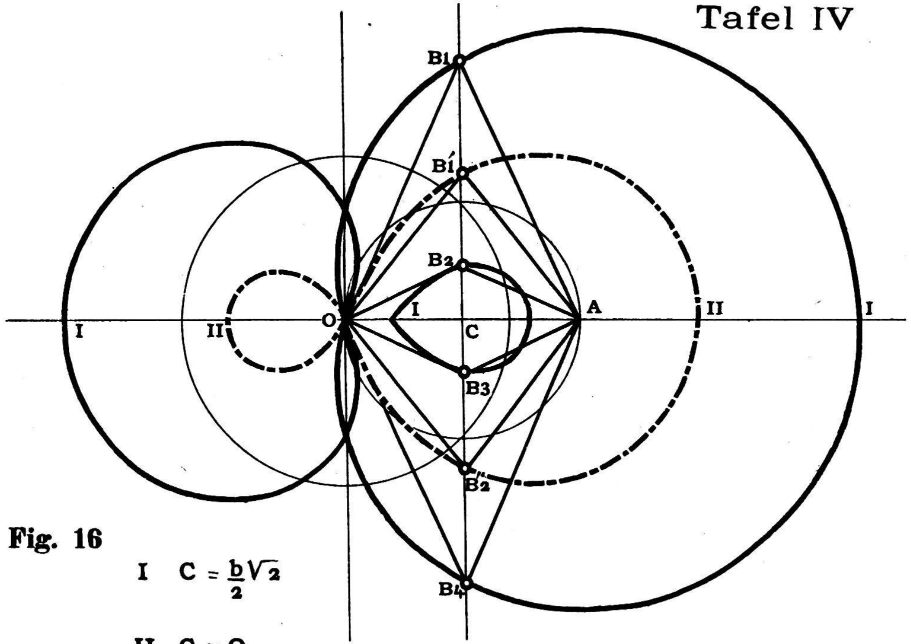


Fig. 16

I $C = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

II $C = O$

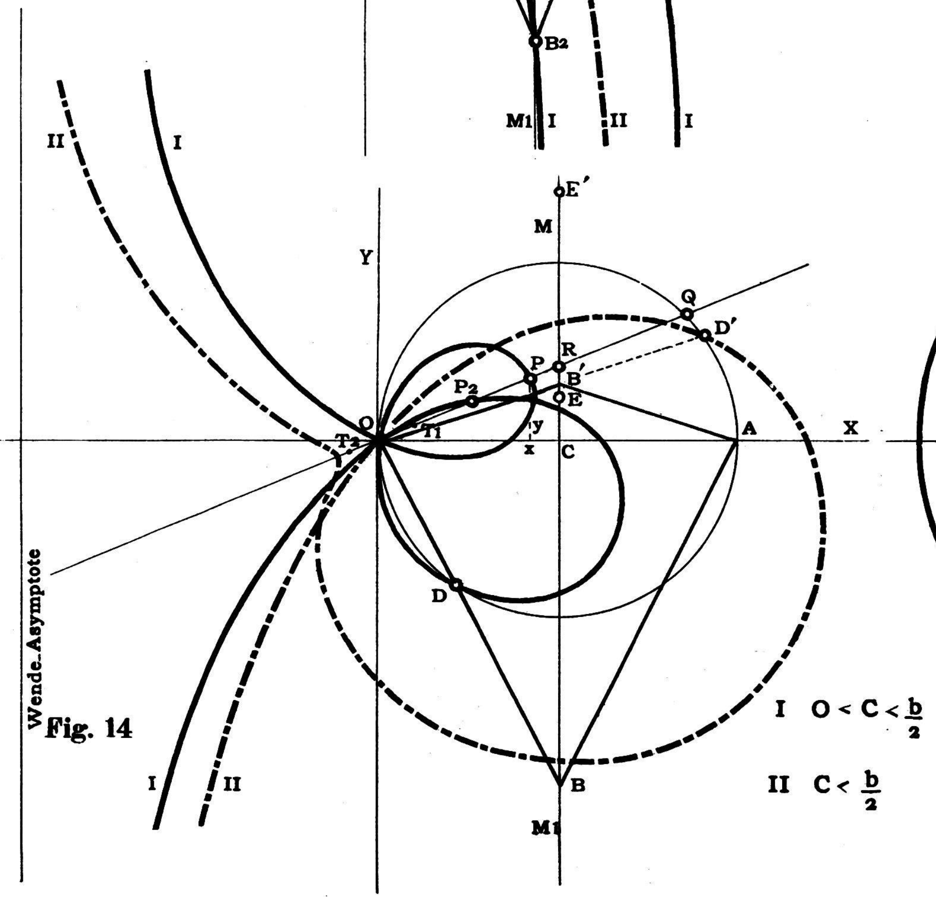


Fig. 14

I $O < C < \frac{b}{2}$

II $C < \frac{b}{2}$

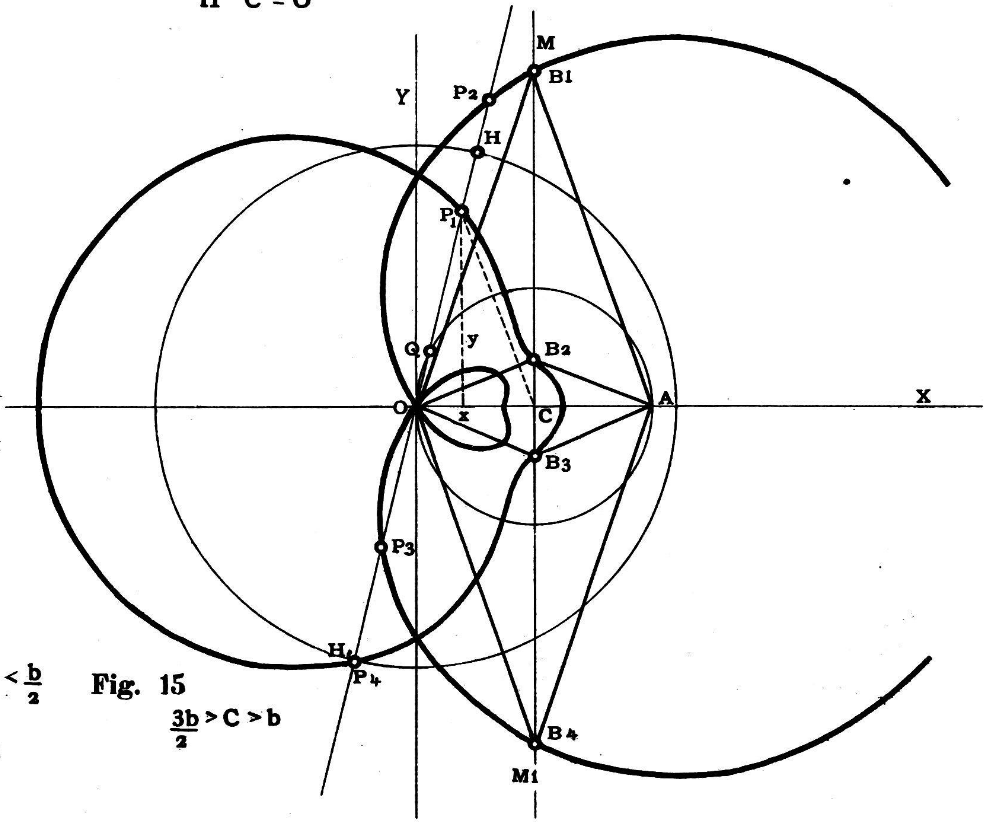


Fig. 15

$\frac{3b}{2} > C > b$

vereinfacht

$$(x^2 + y^2)(b - 2x)^2 - (2cx - by)^2 = 0. \tag{1}$$

Die Gleichung (1) stellt eine Kurve 4. Ordnung dar, die im Nullpunkt einen Doppelpunkt hat. Sie ist aber keine ächte Kurve 4. Ordnung; denn sie zerfällt in eine Kurve 3. Ordnung und in eine Gerade. Es lässt sich nämlich der Faktor x absondern und wegdividieren. Die y-Axe ist somit die Gerade.

Um den Faktor x wegdividieren zu können, bringen wir (1) auf die Form

$$(2cx - by)^2 - y^2(b - 2x)^2 = x^2(b - 2x)^2.$$

Wir zerlegen die linke Seite in zwei Faktoren, worauf wir ohne weiteres die Gleichung durch $4x$ dividieren können. Wir erhalten schliesslich für unsere Kurve 3. Ordnung die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x - b) - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) + bcy = 0. \tag{2}$$

c) Die Eigenschaften der Kurve.

Die Kurve geht durch den Nullpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern ersten Grades.

Setzen wir $U_1 = bcy - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0$, so erhalten wir

$$y = \frac{4c^2 - b^2}{4bc}\, x \text{ als Gleichung der} \tag{3}$$

Tangente im Nullpunkt.

Für $c = \frac{b}{2}$ wird $y = 0$; die Tangente fällt mit der x-Axe zusammen.

Für $c = 0$ wird $x = 0$; die Tangente fällt mit der y-Axe zusammen.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe zu bekommen, setzen wir $y = 0$ und erhalten

$$x^3 - bx^2 - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = 0, \text{ woraus}$$

$x_1 = 0$, Punkt O (Kurve II);

$x_2 = \frac{b}{2} + c$, Punkt J;

$x_3 = \frac{b}{2} - c$, » H.

Die Punkte J und H sind gleich weit von C, dem Mittelpunkt der Basis, entfernt.

Setzen wir $x = 0$, so erhalten wir die Schnittpunkte der Kurve mit der y-Axe:

$$b y^2 - b c y = 0;$$
$$y_1 = 0, \text{ Punkt } O;$$
$$y_2 = c, \quad » \quad G.$$

Der 3. Schnittpunkt der Kurve mit der y-Axe liegt im Unendlichen; denn der Koeffizient des Gliedes y^3 ist $= 0$.

Um die Schnittpunkte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden zu bestimmen, machen wir die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$U_3 = (x^2 + y^2)\, x = 0;$$
$$1. \quad x = 0;$$
$$2. \quad y = \pm i x.$$

Wir finden somit, dass die Kurve durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte der Ebene geht und dass sie in der Richtung der y-Axe eine reelle Asymptote hat. Die Gleichung dieser reellen Asymptote lautet, wie aus der Kurvengleichung leicht zu ersehen ist,

$$x = b; \tag{4}$$

denn bestimmen wir die Schnittpunkte der Geraden $x = b$ mit der Kurve, so erhalten wir in y nur eine Gleichung ersten Grades, nämlich

$$y = \frac{4c^2 - b^2}{4c}, \quad \text{Punkt } T;$$

folglich schneidet die Gerade $x = b$ im Endlichen die Kurve nur in einem Punkt. Die übrigen zwei Schnittpunkte müssen, da die Koeffizienten von y^2 und $y^3 = 0$ sind, im Unendlichen liegen.

Wir lösen die Gleichung nach y auf und erhalten

$$y = \frac{bc \pm \sqrt{c^2(2x-b)^2 + (b-x)\,[4x^2(x-b) + b^2 x]}}{2(b-x)},$$

vereinfacht

$$y = \frac{bc \pm (2x-b)\sqrt{c^2 + bx - x^2}}{2(b-x)}.$$

Aus diesem Ausdruck für y resultiert, dass die Kurve nicht symmetrisch zur x-Axe liegt. Die Kurve ist überhaupt, vom Spezialfall $c = 0$ abgesehen, keine symmetrische Kurve; sie kann durch keine Transformation symmetrisch gemacht werden.

So lange $c^2 + bx - x^2$ positiv ist, erhalten wir für y zwei reelle und verschiedene Werte. Für einen negativen Radikanden wird y imaginär. Für den Grenzfall verschwindet der Wurzelausdruck; die beiden Werte von y fallen zusammen, und die Ordinate wird zur Tangente an die Kurve, wenn

$$c^2 + bx - x^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2};$$

für das positive Zeichen erhalten wir die Tangente WZ. Ordinate im Berührungspunkt Z:

$$y = -\frac{b(b + \sqrt{b^2 + 4c^2})}{4c} = \text{neg.}$$

Für das neg. Zeichen im Ausdruck für x bekommen wir die Tangente UV. Ordinate im Berührungspunkt V:

$$y = \frac{b(\sqrt{b^2 + 4c^2} - b)}{4c} = \text{pos.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x > \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \\ x < \dfrac{b - \sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} \end{array}\right\}, \text{ so wird y imaginär.}$$

Der absteigende Ast der Kurve, welcher die Asymptote $x = b$ im Punkt T schneidet, kehrt dieser die konkave Seite zu. Es muss daher die Kurve unterhalb des Berührungspunktes Z der äussersten Tangente WZ einen *Wendepunkt* besitzen, von dem aus sie der Asymptote wieder die konvexe Seite zuwendet.

Die Kurve hat in E einen Doppelpunkt, was nicht nur aus der Konstruktion folgt, sondern auch analytisch ersichtlich wird, wenn wir den Nullpunkt nach E verschieben vermittelst der Transformationsformeln

$$x = x' + \frac{b}{2}.$$

$$y = y' + c.$$

Die Gleichung der Kurve nach der Transformation lautet:

$$(x'^2 + y'^2)x' + \frac{b}{2}(x'^2 - y'^2) + 2cx'y' = 0. \qquad (5)$$

Der Nullpunkt ist nun Doppelpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern zweiten Grades.

Für die Tangenten im Doppelpunkt erhalten wir die Gleichung

$$y' = \frac{2c \pm \sqrt{b^2 + 4c^2}}{b} x'. \tag{6}$$

Die beiden Tangenten stehen senkrecht aufeinander; denn es ist

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Unsere Kurve ist eine *rationale* Kurve; denn sie besitzt einen Doppelpunkt, also das mögliche Maximum. Wir können daher die Koordinaten eines Punktes als rationale Funktionen eines Parameters λ darstellen. Wählen wir trigonometrische Funktionen als Parameter, so erhalten wir, wenn wir Gleichung (5) zu Grunde legen,

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\left(c \sin 2\varphi + \frac{b}{2} \cos 2\varphi\right); \\ y' &= -\left(c \sin 2\varphi + \frac{b}{2} \cos 2\varphi\right) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

φ bedeutet den Winkel, den der Leitstrahl mit der positiven x-Axe bildet.

Wir wollen nun untersuchen, welche Modifikationen die Kurve erleidet, wenn wir c variieren lassen.

1. $c = \frac{b}{2}$.

Die Gleichung (2) bekommt die Form

$$(x^2 + y^2)(x - b) + \frac{b^2}{2} y = 0. \tag{8}$$

Die Kurve schneidet sowohl die x-Axe als auch die Asymptote $x = b$ im Punkte $A(b, 0)$.

Die x-Axe ist, wie schon oben erwähnt, im Nullpunkt Tangente.

Die Gleichung nach y aufgelöst, ergiebt

$$y = \frac{b^2 \pm (2x - b)\sqrt{b^2 + 4bx - 4x^2}}{4(b - x)}.$$

y wird reell, wenn x zwischen $\frac{b}{2}(1 - \sqrt{2})$ und $\frac{b}{2}(1 + \sqrt{2})$ variiert.

$$x = \frac{b}{2}(1 - \sqrt{2}) \text{ ist Tangente im Punkt V,}$$

$$\text{und } x = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{2}) \text{ ist Tangente im Punkt Z.}$$

Der Doppelpunkt E rückt in den Grundkreis. Wird E zum Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt, so erhalten wir, wenn wir in (5) $c = \frac{b}{2}$ setzen, als Gleichung der Kurve:

$$(x'^2 + y'^2)\,x' + \frac{b}{2}(x'^2 + 2x'y' - y'^2) = 0. \tag{9}$$

Die Gleichung der Doppelpunktstangenten lautet

$$y' = (1 \pm \sqrt{2})\,x'. \tag{10}$$

Gleichung (7) nimmt die Form an

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{b}{2}\sqrt{2}\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right); \\ y' &= -\frac{b}{2}\sqrt{2}\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

2. $c = 0$.

Die Gleichung der Kurve lautet

$$(x^2 + y^2)(x - b) + \frac{b^2 x}{4} = 0. \tag{12}$$

Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Doppelpunkt E und erhalten als Kurvengleichung, wenn wir in (5) $c = 0$ setzen

$$(x'^2 + y'^2)\,x' + \frac{b}{2}(x'^2 - y'^2) = 0. \tag{13}$$

Dies ist die Gleichung der *Strophoide*. Es ist der einzige Spezialfall, in welchem die Kurve, wie schon angedeutet, symmetrisch wird. Der Wendepunkt rückt ins Unendliche hinaus und fällt in die Asymptote. Letztere ist ja wie bekannt eine Wendetangente.

3. $c = \infty$.

Der Doppelpunkt liegt im Unendlichen in der Richtung der y-Axe. Die Kurve selber besteht aus der y-Axe und der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden.

4. $c =$ negativ.

Setzen wir für c negative Werte ein, so erhalten wir der Reihe nach dieselben Kurven wie für positive c; nur sind dieselben immer Spiegelbilder der erstern in Bezug auf die x-Axe. Die Kurven für positive und negative c liegen daher paarweise symmetrisch zur x-Axe. Alle besitzen die gemeinschaftliche Asymptote $x = b$.

d. Die Lösungen der Konstruktionsaufgabe.

Wir suchen die Punkte D, die Fusspunkte der Schenkelhöhe. Dieselben sind, wie wir schon gezeigt haben, die Schnittpunkte des Grundkreises mit der Kurve. Ein Kreis schneidet eine Kurve dritter Ordnung in 6 Punkten. Da nun beide Kurven durch den Nullpunkt und durch die imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, so fallen von vorneherein 3 Schnittpunkte ausser Betracht. Es bleiben also noch 3 Schnittpunkte zu bestimmen übrig. Als Gleichung der Kurve haben wir

$$(x^2 + y^2)(x - b) - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) + bcy = 0 \qquad (\alpha)$$

und als Gleichung des Kreises

$$x^2 - bx + y^2 = 0. \qquad (\beta)$$

Wir lösen Gleichung (β) nach y auf und erhalten

$$y = \sqrt{bx - x^2}.$$

Diesen Wert setzen wir in (α) ein; es giebt

$$bx(x - b) - x\left(c^2 - \frac{b^2}{4}\right) = -bc\sqrt{bx - x^2}.$$

Quadriert, auf Null gebracht und den Faktor x wegdividiert

$$x^3 - \frac{3b^2 + 4c^2}{2b}x^2 + \frac{9b^4 + 40b^2c^2 + 16c^4}{16b^2}x - bc^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser kubischen Gleichung sind die Abscissen der Schnittpunkte D. Als Diskriminante der Gleichung erhalten wir den Ausdruck:

$$\Delta = \frac{c^2}{108 \cdot 64\, b^4}(-27b^8 + 288b^6c^2 - 992b^4c^4 + 1024b^2c^6 + 256c^8).$$

Δ = positiv; die Gleichung besitzt eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

$\Delta = 0$; alle drei Wurzeln sind reell und zwei fallen zusammen.

Δ = negativ; drei reelle und unter sich verschiedene Wurzeln.

Wir behandeln zuerst den mittlern Fall und untersuchen, für welche Werte von c die Diskriminante verschwindet. Wir setzen:

$4c^2 = \xi$ und $b^2 = \eta$ und führen diese Werte im Ausdruck für Δ ein. Bestimmen wir hierauf die Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$, so finden wir, dass sich die Diskriminante folgendermassen in Faktoren zerlegen lässt:

$$\Delta = \frac{c^2}{108 \cdot 64 b^4} (4c^2 - b^2)^2 (16 c^4 + 72 b^2 c^2 - 27 b^4).$$

Es wird somit $\Delta = 0$, wenn

1. $c = 0$;
2. $c = \frac{b}{2}$;
3. $c = \frac{b}{2} \sqrt{6\sqrt{3} - 9}$.

In Bezug auf die Löungen unserer Aufgabe können wir folgende drei Hauptfälle unterscheiden:

A. $c > \frac{b}{2}$.

Für sämtliche Dreiecke, die sich als Lösung ergeben, gilt die Relation

$$h_b + n = c.$$

B. $c = \frac{b}{2}$.

Die Dreiecke entsprechen der Bedingung

$$h_b \pm n = \pm c = \pm \frac{b}{2}.$$

Von den beiden Grössen h_b und n ist die eine $= 0$.

C. $c < \frac{b}{2}$.

Für die Dreiecke gilt $h_b - n = \pm c$.

A. $c > \frac{b}{2}$.

1. $c > \frac{b}{2} \sqrt{6\sqrt{3} - 9}$.

Die Diskriminante ist positiv; wir erhalten nur eine reelle Wurzel als Abscisse, d. h. der Grundkreis schneidet die Kurve nur in einem reellen Punkt. Dieser Schnittpunkt liefert ein *spitzwinkliges Dreieck.*

2. $c = \frac{b}{2} \sqrt{6\sqrt{3} - 9}$. Taf. I, Fig. 3.

Die Diskriminante verschwindet. Es giebt 3 reelle Wurzeln, wovon 2 zusammenfallen. Grundkreis und Kurve schneiden sich in D_1' und berühren sich in D_2'. Es ist nun

$$Q = \frac{27\,b^6 - 324\,b^4\,c^2 + 720\,b^2\,c^4 + 64\,c^6}{864\,b^3};$$

Für x_1 bekommen wir demnach den Ausdruck

$$x_1 = \frac{3\,b^2 + 4\,c^2}{6\,b} + 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} \quad \text{oder}$$

$$x_1 = \frac{3\,b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9)}{6\,b} - b\,(2 - \sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 3)\,b,$$

wenn wir für c obigen Wert einsetzen.

$$x_2 = x_3 = \frac{3\,b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9)}{6\,b} + \frac{b}{2}(2 - \sqrt{3}) = \frac{b}{2}\sqrt{3}.$$

Setzen wir diese Werte in der Kreisgleichung ein, so erhalten wir

$$y_1 = b\sqrt{14\sqrt{3} - 24};$$

$$y_2 = y_3 = \frac{b}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3}.$$

Dem Schnittpunkt $D_1'(x_1 y_1)$ entspricht das *spitzwinklige Dreieck* OAB_1' und dem Berührungspunkt $D_2'(x_2 y_2)$ das doppelt gelegte *stumpfwinklige Dreieck* OAB_2'.

Um zu untersuchen, ob letzteres Dreieck eine besondere Eigenschaft besitze, wie zu vermuten ist, berechnen wir zunächst seine Basishöhe.

Wir können die Proportion aufstellen:

$$h_b : \frac{b}{2}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} = \frac{b}{2} : \frac{b}{2}\sqrt{3};$$

$$h_b = \frac{b}{6}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

Nun ist $h_b + n = c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}$; folglich ist

$$h_b = \frac{c}{3} = \frac{n}{2}.$$

Das Dreieck besitzt also die Eigentümlichkeit, dass der äussere Schenkelabschnitt n das Doppelte der Basishöhe beträgt. Für seine Fläche erhalten wir den Ausdruck

$$F_{OAB_2'} = \frac{b}{12}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}. \qquad (14)$$

Die Basishöhe des spitzwinkligen Dreiecks OAB_1' lässt sich aus der Proportion berechnen

$$h_b : b\sqrt{14\sqrt{3}-24} = \frac{b}{2} : (2\sqrt{3}-3)\,b,$$

woraus
$$h_b = \frac{b}{3}\sqrt{42\sqrt{3}-72} + \frac{b}{2}\sqrt{14\sqrt{3}-24}$$
$$= 0{,}53728 \cdots b.$$

Es wird demnach
$$F_{OAB_1'} = 0{,}26864 \cdots b^2. \tag{15}$$

3. $\frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9} > c > \frac{b}{2}.$

Die Diskriminante ist negativ. Wir erhalten 3 reelle und unter sich verschiedene Wurzeln, daher auch 3 reelle Schnittpunkte D und 3 reelle Lösungen. Der Schnittpunkt des aufsteigenden Kurvenastes erzeugt *ein spitzwinkliges Dreieck*, in welchem $h_b + n = c$. Die zwei Schnittpunkte des absteigenden Astes liefern *zwei stumpfwinklige Dreiecke*.

Im ersten ist $h_b > n$, $c =$ pos.
Im zweiten ist $h_b < n$, $c =$ neg.

B. $c = \frac{b}{2}$.

Der Grundkreis schneidet die Kurve im Doppelpunkt $E\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ und im Punkt $A(b, 0)$. In E fallen 2 Schnittpunkte zusammen, was der Fall sein muss, da die Diskriminante $\Delta = 0$ wird. Dieser Spezialfall liefert 3 reelle Lösungen:

1. Ein *doppelt gelegtes rechtwinkliges Dreieck*, für welches $n = 0$ wird und $h_b = \frac{b}{2}$.
2. Ein *unendlich kleines, auf die Basis reduziertes Dreieck* OCA, weil der Fusspunkt der Schenkelhöhe auf A, also in die Basis fällt, wodurch die Höhe $h_b = 0$ werden muss.

C. $c < \frac{b}{2}$; Taf. I, Fig. 3.

Die Lösungen sind dieselben wie in Fall A_3 mit dem Unterschied, dass das zweite stumpfwinklige Dreieck seine Spitze nach unten kehrt.

Ist speziell $c = 0$, so verschwindet die Diskriminante. Die Kurve ist die Strophoide. Wir bekommen 3 Schnittpunkte, von denen zwei D_1 und D_2 symmetrisch zur x-Axe liegen. Der Schnittpunkt D_3 und damit der Fusspunkt der Schenkelhöhe des bedingten Dreiecks fällt in den Nullpunkt. Der Schenkel muss somit senkrecht auf der Basis stehen. Wir erhalten *ein unendlich grosses Dreieck,* in welchem $h_b = n = \infty$ ist.

Die Schnittpunkte $D_1\left(\frac{3b}{4}, \frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ und $D_2\left(\frac{3b}{4}, -\frac{b}{4}\sqrt{3}\right)$ erzeugen *2 kongruente,* symmetrisch zur x-Axe gelegene *stumpfwinklige Dreiecke* OAB. Im $\triangle$ OAB ist $h_b = n = \frac{s}{2}$; somit ist

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^0.$$

Der Basiswinkel misst also 30^0.

Aus der Proportion

$$h_b : \frac{b}{4}\sqrt{3} = \frac{b}{2} : \frac{3b}{4}$$

finden wir

$$h_b = \frac{b}{6}\sqrt{3};$$

somit wird

$$F_{OAB} = F_{OAB_1} = \frac{b^2}{12}\sqrt{3}. \tag{16}$$

Für negative c gewinnen wir keine neuen Lösungen. Die Dreiecke werden einfach in Bezug auf die x-Axe Spiegelbilder derjenigen, die wir für positive c erhalten haben.

§ 4. *Zweites Lösungsverfahren. Bestimmung der Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks.*

Es gelten natürlich auch hier die Voraussetzungen des § 2.

a) Konstruktion der Hilfskurve.

Es sei (siehe Figur 5, Taf. I) $OA = b$ die gegebene Basis. Wir ziehen durch C die Mittelsenkrechte MM_1 dazu und tragen auf derselben von C aus $h_b \pm n = c$ ab und erhalten den festen Punkt E. Über OA schlagen wir ferner den Grundkreis. Nun ziehen wir durch O Strahlen, die den Grundkreis in Q schneiden. Für jeden Strahl bestimmen wir nach den Gesetzen des gleichschenkligen Dreiecks einen Punkt P so, dass

$$PQ = PE.$$

Die Verbindungslinie aller Punkte P ist die gesuchte Kurve. Sie ist also der geometrische Ort eines Strahlpunktes, der vom Schnittpunkt Q des Strahls mit dem Grundkreis und einem festen Punkt E der Mittelsenkrechten gleichen Abstand hat. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Mittelsenkrechten, also mit der Geraden $x = \frac{b}{2}$ sind die gesuchten Dreiecksspitzen B; denn

$$EB = BQ = n \quad \text{nach Konstruktion;}$$
$$BC = h_b; \text{ also}$$
$$h_b + n = BC + BE = CE = c \text{ nach Voraussetzung.}$$

Liegt der Schnittpunkt B der Kurve mit der Mittelsenkrechten zwischen C und E, so gilt beim Dreieck die Relation

$$h_b + n = c.$$

Fällt B auf E, so haben wir

$$h_b \pm n = c.$$

Liegt endlich B ausserhalb E, so gilt

$$h_b - n = c.$$

b) Ableitung der Kurvengleichuug.

Zu diesem Zweck legen wir das rechtwinklige Koordinatensystem so, dass der Punkt O zum Nullpunkt und die Basis OA samt deren Verlängerung zur positiven x-Axe wird. Die Koordinaten des Punktes P seien x und y. Es ist nun

$$OQ + QP = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} OQ &= b\cos\varphi; \\ QP = PE &= \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c - y)^2}; \end{aligned}\right\} \text{sub. in } (\alpha);$$

wir erhalten

$$b\cos\varphi + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c - y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (c - y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

quadriert man noch und bringt auf Null, so ist das Resultat

$$(x^2 + y^2)(bx - 2cy) + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right)x^2 + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right)y^2 = 0. \qquad (17)$$

c) Diskussion der Kurve.

Die Kurve hat im Nullpunkt einen Doppelpunkt; denn die Gleichung beginnt mit Gliedern 2. Grades. Als *Gleichung der Tangenten im Nullpunkt* erhalten wir

$$y = \pm x \sqrt{\frac{3b^2 - 4c^2}{b^2 + 4c^2}}. \tag{18}$$

Spezialwerte: 1. Für $c = 0$ wird

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Die Doppelpunktstangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 60^0$.

2. Für $c = \frac{b}{2}$ wird

$$y = \pm x.$$

Die beiden Tangenten bilden mit der x-Axe Winkel von $\pm 45^0$.

3. Für $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ wird

$y = 0$, d. h. die beiden Doppelpunkts-angenten fallen zusammen; die x-Axe wird Rückkehrtangente tund der Nullpunkt Spitze.

4. Für $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$ wird $y =$ imaginär, d. h. der Doppelpunkt wird zum isolierten Punkt.

Wir setzen $y = 0$ und erhalten die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe

$$b x^3 + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right) x^2 = 0;$$

$$x_1 = x_2 = 0;$$

$$x_3 = \frac{3b^2 - 4c^2}{4b}.$$

Die 3. Abscisse bleibt positiv, so lange $c \leqq \frac{b}{2}\sqrt{3}$. Sie wird also negativ, wenn der Doppelpunkt isolierter Punkt wird.

$x = 0$ gesetzt, ergiebt die Schnittpunkte mit der y-Axe:

$$-2cy^3 + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right) y^2 = 0;$$

$$y_1 = y_2 = 0;$$

$$y_3 = \frac{b^2 + 4c^2}{8c}.$$

Die dritte Ordinate hat das Vorzeichen von c.

Wir machen die Gleichung mit z homogen, setzen dann $z = 0$ und erhalten

$$U_n = U_3 = (x^2 + y^2)(bx - 2cy) = 0;$$

daraus folgt:

1. $y = \frac{bx}{2c}$;
2. $y = \pm ix$.

Wir erhalten somit eine reelle und 2 imaginäre Asymptotenrichtungen. Die Kurve geht durch die imaginären Kreispunkte der Ebene.

Die reelle Asymptotenrichtung lässt sich konstruktiv leicht bestimmen. Wir errichten über O E als Durchmesser einen Kreis, welcher durch C gehen muss und den Grundkreis in Q schneidet. Die Verbindungsgerade O Q ist die gesuchte Asymptotenrichtung. Ist φ der Richtungswinkel derselben, so ist zu beweisen, dass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{b/2} = \frac{b}{2c}; \text{ siehe Fig. 2.} \qquad (\alpha)$$

Nach dem Sehnensatz ist im Kreis über O E:

$$p(c - p) = rv$$

und im Grundkreis:

$$\left(\frac{b}{2} + p\right)\left(\frac{b}{2} - p\right) = rv; \text{ folglich}$$

$$cp - p^2 = \frac{b^2}{4} - p^2, \text{ woraus}$$

$$p = \frac{b^2}{4c}.$$

Setzen wir diesen Wert in (α) ein, so wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{4c} : \frac{b}{2} = \frac{b}{2c}.$$

Die reelle Asymptotenrichtung ist identisch mit dem Strahl, für welchen der Punkt P ins Unendliche fällt; dies geschieht, wenn

$$EQ \perp \text{Strahl } OQ.$$

Die Gleichung der Asymptote selbst wird

$$bx - 2cy + \frac{(b^2 - 4c^2)^2}{4(b^2 + 4c^2)} = 0;$$

$$y = \frac{b}{2c}x + \frac{(b^2 - 4c^2)^2}{8c(b^2 + 4c^2)}. \qquad (19)$$

Die Asymptote schneidet die y-Axe bei positivem c auf der positiven, bei negativem c auf der negativen Seite. Um sie zu konstruieren, bestimmen wir zuerst den Abschnitt auf der y-Axe. Ist der Schnittpunkt mit der y-Axe gefunden, so zieht man durch denselben eine Parallele zu OQ' (siehe Fig. 5, Taf. I). Der Abschnitt auf der y-Axe ist konstruktiv leicht zu gewinnen, wenn wir dem konstanten Glied in der Asymptotengleichung die Form geben:

$$\frac{(b^2-4c^2)^2}{8c(b^2+4c^2)} = \frac{1}{8c} \cdot \left(\frac{b^2-4c^2}{\sqrt{b^2+4c^2}}\right)^2.$$

Spezialwerte: 1. Für $c = 0$ nimmt die Gleichung der Asymptote die Form an

$$x = -\frac{b}{4}.$$

Die Asymptote steht senkrecht auf der x-Axe.

2. $c = \frac{b}{2}$;

Asymptote: $y = x$.

Sie geht in diesem Spezialfall durch den Nullpunkt und bildet mit der x-Axe einen Winkel von 45°.

3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$;

Asymptote: $y = \frac{1}{3} x \sqrt{3} + \frac{b}{12}\sqrt{3}.$

Die Asymptote bildet mit der x-Axe einen Winkel von 30°

4. $c = \infty$; dann wird auch $y = \infty$, d. h. die Asymptote verläuft parallel der x-Axe im Unendlichen.

Durchläuft c alle Werte von 0 bis ∞, so dreht sich die Asymptote um 90° von der Richtung der y-Axe zur Richtung der x-Axe.

So lange der Nullpunkt Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt ist, besitzt die Kurve *einen reellen Wendepunkt.* Sie hat deren *drei*, wenn der Nullpunkt isolierter Punkt wird.

Wir weisen noch darauf hin, dass die Kurve ebenfalls *rational* ist.

Wir betrachten nun noch die verschiedenen Kurven, die einem veränderlichen c entsprechen; ihre Doppelpunktstangenten haben wir bereits untersucht.

Ist $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$, so wird der Nullpunkt isolierter Punkt.

Ist $c < \frac{b}{2}\sqrt{3}$, » » » » Doppelpunkt.

Ist $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, » » » » Rückkehrpunkt.

Im letztern Fall wird die Gleichung der Kurve:

$$(x^2 + y^2)(x - \sqrt{3}\, y) + b y^2 = 0 \tag{20}$$

$y = 0$ ist, wie wir schon gesehen haben, Rückkehrtangente.

Wenn $c = \frac{b}{2}$, so lautet die Kurvengleichung:

$$(x^2 + y^2)(x - y) - \frac{b}{2}(x^2 - y^2) = 0$$

oder

$$\left[x^2 + y^2 - \frac{b}{2}(x + y)\right](x - y) = 0; \tag{21}$$

daraus folgt:

1. $y = x$;
2. $x^2 + y^2 - \frac{b}{2} x - \frac{b}{2} y = 0$.

Die Kurve zerfällt also in einen Kreis und in eine Gerade, welche diametral den Kreis schneidet. Die Gerade ist zugleich noch Asymptote der Kurve.

Die Kreisgleichung in der Normalform lautet:

$$\left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{4}\right)^2 = \frac{b^2}{8}.$$

Die Koordinaten des Kreismittelpunktes G sind somit $\left(\frac{b}{4}, \frac{b}{4}\right)$. Der Punkt G fällt also in die Gerade $y = x$ und liegt in der Mitte zwischen O und E. Der Radius des Kreises ist $r = \frac{b}{4}\sqrt{2}$.

Wenn $c = 0$, so heisst die Gleichung der Kurve:

$$(x^2 + y^2)\, x - \frac{b}{4}(3x^2 - y^2) = 0. \tag{22}$$

Die Kurve gleicht der Strophoide. Ihre Asymptote $x = -\frac{b}{4}$ ist ebenfalls Wendetangente. Von der eigentlichen Strophoide weicht sie darin ab, dass ihre Doppelpunktstangenten nicht senkrecht aufeinander stehen; siehe Fig. 5.

Für negative c bekommen wir die gleichen Kurven wie für positive c. Nur sind sie wieder Spiegelbilder der letztern in Bezug auf die x-Axe. Durchläuft daher C alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, so liegen die entstehenden Kurven paarweise symmetrisch zur x-Axe. Die Grenzkurve, für welche $c = 0$, steht zwischen den Paaren.

Kurven-Schema:

1. $c = \infty$.	Die Kurve besteht aus dem Nullpunkt O und der zur x-Axe parallelen unendlich fernen Geraden.
2. $c > \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Der Nullpunkt ist solierter Punkt, 3 reelle Wendepunkte, Asymptotenrichtungswinkel $< 30^0$.
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Nullpunkt ist Spitze, ein reeller Wendepunkt, Asymptotenrichtungswinkel $= 30^0$; siehe Fig. 5.
4. $c < \frac{b}{2}\sqrt{3}$.	Nullpunkt ist Doppelpunkt, ein reeller Wendepunkt, Asymptotenrichtungswinkel $> 30^0$.
aa) $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.	Schleife reicht nicht bis an die Mittelsenkrechte.
bb) $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$.	Schleife berührt die Mittelsenkrechte.
cc) $\frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9} > c > \frac{b}{2}$.	Schleife schneidet die Mittelsenkrechte. Beide Schnittpunkte liegen oberhalb der Basis OA.
dd) $c = \frac{b}{2}$.	Kurve zerfällt in einen Kreis und in eine Gerade, welche mit der Asymptote zusammenfällt. Die Asymptote bildet mit der x-Axe einen Winkel von 45^0.

ee) $\frac{b}{2} > c > 0.$ Wie cc, nur liegt ein Schnittpunkt unterhalb der Basis. Asymptotenrichtungswinkel zwischen 45° und 90°.

ff) $c = 0.$ Kurve eine Art von Strophoide, liegt symmetrisch zur x-Axe. Asymptotenrichtungswinkel$=90^0$.

d) Die Lösungen der Konstruktionsaufgabe.

Wir haben die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten mit der Kurve zu bestimmen. Wir bekommen im Maximum 3 Schnittpunkte, also auch 3 Lösungen. Führen wir den Wert für x aus der Gleichung der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ in der Kurvengleichung (17) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{b^2}{4} + y^2\right)\left(\frac{b^2}{2} - 2cy\right) + \left(c^2 - \frac{3b^2}{4}\right)\frac{b^2}{4} + \left(c^2 + \frac{b^2}{4}\right) y^2 = 0,$$

reduziert:

$$y^3 - \frac{3b^2 + 4c^2}{8c} y^2 + \frac{b^2}{4} y + \frac{b^4 - 4b^2c^2}{32c} = 0. \qquad (23)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Ordinaten der Schnittpunkte B.

Die Diskriminante Δ dieser kubischen Gleichung lautet

$$\Delta = \frac{b^2}{27 \cdot 64^2 c^4}(-27b^8 + 288b^6c^2 - 992b^4c^4 + 1024b^2c^6 + 256c^8).$$

$$= \frac{b^2}{27 \cdot 64^2 c^4}(4c^2 - b^2)^2 (16c^4 + 72b^2c^2 - 27b^4).$$

Die Diskriminante verschwindet somit, wenn

1. $b = 0,$
2. $c = \frac{b}{2}$ und
3. $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$

Fall (1) $b = 0$ fällt ausser Betracht, da b nicht variieren soll. Die Diskriminante wird demnach für 2 Spezialwerte von c zu Null. Wir stossen somit auf das ganz gleiche Resultat wie beim ersten Lösungsverfahren. Nach beiden Verfahren bekommen wir zusammenfallende Schnittpunkte und Lösungen für die Werte $c = \frac{b}{2}$ und $c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$. Allerdings verschwand die Diskriminante im ersten Fall auch für den Wert $c=0$ (siehe pag. 89); allein dort fielen bloss die Abscissen zweier Schnittpunkte zusammen, die Ordinaten nicht; diese differierten im Vorzeichen; daher gab es keinen Berührungspunkt. Im vorliegenden Fall, wo wir die Ordinaten der Schnittpunkte B der Kurve mit der Mittelsenkrechten suchen, kann daher für $c = 0$ Δ nicht $= 0$ werden.

Für $b = 0$ zerfällt überdies die Kurve in die reelle Gerade

$$y = \frac{c}{2}$$

und in die Geraden absoluter Richtung.

Was nun die Lösungen betrifft, so haben wir die nämlichen Hauptfälle mit denselben Unterfällen wie beim ersten Verfahren.

Ist $\Delta > 0$, wobei $c > \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}$ sein muss, so erhalten wir eine reelle Lösung.

Ist $\Delta < 0$, so giebt es 3 reelle und unter sich verschiedene Lösungen.

Wenn $\Delta = 0$ ist, was zweimal eintrifft, so fallen 2 von den 3 reellen Lösungen zusammen.

Wir verzichten auf eine ausführliche Darstellung der Lösungen. Wir wollen nur noch an einigen Spezialfällen zeigen, dass die beiden Verfahren in ihren Ergebnissen übereinstimmen.

$$A_2 \quad c = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3}-9}.$$

Berechnen wir den zugehörigen Wert von y, so erhalten wir:

$$y_1 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3}-9) + (2-\sqrt{3})\,12b^2}{12b\sqrt{6\sqrt{3}-9}}$$

$$= b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\sqrt{2\sqrt{3}+3} = 0{,}53728\cdots b$$

$$y_2 = y_3 = \frac{3b^2 + b^2(6\sqrt{3} - 9) + (2 - \sqrt{3})6b^2}{12b\sqrt{6\sqrt{3} - 9}}$$

$$= b\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2\sqrt{3} + 3}.$$

Nun ist $y_2 = y_3 = \frac{c}{3}$; denn

$$b\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2\sqrt{3} + 3} = \frac{b}{2}\sqrt{6\sqrt{3} - 9}.$$

Das spitzwinklige Dreieck hat also die Basishöhe $h_b = 0{,}53728 \cdots b$ und das doppelt gelegte stumpfwinklige Dreieck die Basishöhe $h_b = \frac{c}{3}$; somit herrscht Übereinstimmung mit den Resultaten nach den ersten Verfahren (vergl. pag. 13)

B. $c = \frac{b}{2}$.

Wir bekommen als Ordinaten der Schnittpunkte B, d. h. als Basishöhe der entsprechenden Dreiecke, folgende Werte:

1. y_1 im $\triangle$ OAC $= \frac{4b^2}{12b} - \frac{b}{3} = 0$;

2. $y_2 = y_3$ für das doppelt gelegte rechtwinklige $\triangle$

$$OAE = EC = \frac{4b^2}{12b} + \frac{b}{6} = \frac{b}{2} \text{ (vergl. damit pag. 91).}$$

C_2. $c = 0$; Taf. I, Fig. 5.

Wir gehen aus von der Gleichung (23), multiplizieren c im Nenner weg, setzen hierauf $c = 0$ und erhalten

$$-y^2 \cdot \frac{3b^2}{8} + \frac{b^4}{32} = 0$$

$$y = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}.$$

Der dritte Wert von y ist unendlich gross, da der Koeffizient von $y^3 = 0$ geworden ist. Wir bekommen daher auch hier für das unendlich grosse Dreieck die Basishöhe $h_b = \infty$ und für die 2 stumpfwinkligen Dreiecke OAB_1 und OAB_2 die Basishöhe $h_b = \pm \frac{b}{6}\sqrt{3}$ wie beim ersten Verfahren (siehe pag. 92).