Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1901)
Heft: 1500-1518

Artikel: Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung
Autor: Spiess, O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319118

O. Spiess.

Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung.

Einleitung.

Die erste mathematische Operation, die der Mensch ausführte, war die *Addition.*

Indem die Addition wiederholt auf dieselbe Grösse angewandt wurde, entstand ein neuer Begriff, die *Multiplikation.*

Die Wiederholung oder «Iteration» der Multiplikation führte weiter zur *Exponentialfunktion,* der einfachsten Transzendenten.

Von da an verliess man den Weg, durch Iteration einer bekannten Funktion zu «höheren» Funktionen aufzusteigen, indem man in der Summen- und Integralrechnung eine ergiebige Quelle zur Auffindung neuer Funktionen entdeckte. In der That, die einfache Operation des Integrierens auf einen algebraischen Ausdruck angewandt, hat die Entstehung einer ganz neuen Funktion von merkwürdigen Eigenschaften zur Folge. Indem man dieses Prinzip auf alle bekannten und die neu gefundenen Funktionen anwandte, wurde die Analysis durch eine ungeahnte Menge neuer Funktionen bevölkert.

Nun liegt aber der Gedanke nahe, auch den alten Weg von neuem zu betreten, und zu versuchen, ob nicht die *Iteration* ganz allgemein ein Mittel zur Auffindung neuer Funktionen abgeben könne. Die Untersuchung lehrt, dass diese Operation der Integration an Fruchtbarkeit völlig ebenbürtig ist.

Wenden wir nämlich eine beliebige Funktion n-mal auf sich selbst an, so stellt der erhaltene Ausdruck in seiner Abhängigkeit von n eine neue Funktion dar, die ich die *Iteralfunktion* der ursprünglichen Funktion heisse. Diese ist allerdings zunächst nur für ganzzahlige Werte von n bestimmt. Um zu für alle Werte ihres Arguments definierten Funktionen zu gelangen, bieten sich dann zwei Wege dar.

Der erste Weg ist der historische. Man geht von der nur für ganzzahliges n abgeleiteten Formel aus und sucht an Hand einer geeigneten Definition ihre Bedeutung für den Fall, dass n negativ oder gebrochen wird. Auf diese Weise erhielt man z. B. aus der ganzzahligen Potenz die Exponentialfunktion.

Die andere Methode zieht es vor, das Unendlichkleine gleich am Anfang einzuführen. Iteriert man nämlich einen Ausdruck von der Form $\xi + \delta f(\xi)$, worin δ unendlich klein ist, n mal, und lässt dann n so ins Unendliche wachsen, dass $n \cdot \delta$ endlich bleibt, so konvergiert der erhaltene Ausdruck im allgemeinen gegen eine Funktion von $n \cdot \delta = x$, welche eben die Iteralfunktion ist. So führt z. B. die Iteration von $\xi + \delta \cdot \xi$ direkt auf

$$\lim_{n = \frac{x}{\delta}} (1 + \delta)^n \cdot \xi = \xi \cdot e^x.$$

Durch diese beiden Methoden zerfällt der Iterationscalcül in zwei ziemlich selbständige Zweige. Der eine hat mehr algebraischen, der andere mehr funktionen-theoretischen Charakter.

Es ist von Nutzen, die durch Iteration gefundenen Funktionen nach ihrer Entstehung in *Stufen* verschiedener Ordnung einzuteilen. Kennen wir bereits sämtliche Funktionen der n^{ten} Stufe, so wird der Umfang der nächst höheren Stufe folgendermassen festgelegt. Zunächst bestimmen wir zu allen Funktionen n^{ter} Stufe ihre Iteralfunktionen. Wenden wir dann diese (und ihre Inversen) auf sich selbst und auf sämtliche Funktionen der unteren Stufen in endlicher Anzahl und in allen möglichen Kombinationen an, so erhalten wir eine Gesamtheit von Funktionen, die wir in Erweiterung des bekannten, für die Algebra aufgestellten Begriffs, füglich einen «*Körper*» heissen dürfen.

Dieser Körper heisst «zur $(n+1)^{ten}$ Stufe gehörig» und enthält offenbar sämtliche zu den unteren Stufen gehörigen Körper. Nehmen wir diese letzteren alle weg, so bleiben die Funktionen der $(n+1)^{ten}$ Stufe übrig.

Die bisher bekannten Funktionen gehören höchstens den 4 ersten Stufen an.

Die erste Stufe enthält nur eine einzige Funktion von einer Variablen, nämlich $f(\xi) = \xi + a$, die Addition. Ich heisse sie hier «*Protofunktion*».

Die zweite Stufe enthält zunächst die durch Anwendung von Multiplikation und Division gebildeten rationalen Funktionen, sodann deren Inverse, die algebraischen Funktionen. Sie heissen hier zusammen *Deuterofunktionen.*

Die dritte Stufe der *Tritofunktionen* entspringt durch Iterieren der Deutero-Stufe. Dahin gehören vor allem die Abel'schen Funktionen.

Die nächst folgende *Tetra-Stufe* ist beinahe noch gar nicht untersucht. Hieher sind wohl die aus Iteration von a^{ξ} entspringende Funktion, ferner Funktionen wie $\int \frac{dx}{\log x}$, $\int e^{-x^2} dx$ etc. zu rechnen, doch existiert wohl noch kein Beweis, dass sie nicht doch noch am Ende dem Körper der Tritofunktionen angehören.

Es zeigt sich nämlich sofort eine Schwierigkeit. Gleichwie nicht jedes Integral einer algebraischen Funktion notwendig transzendent sein muss, sondern algebraisch bleiben kann, so führt auch nicht die Iteration einer jeden Funktion immer zu einer höheren Stufe. So z. B. liefert $\frac{\xi}{1+\xi}$ die Iteralfunktion $\frac{\xi}{\xi+n}$, die in Bezug auf n wiederum linear ist.

Es ist daher bei jeder Iteration zu prüfen, ob die erhaltene neue Funktion nicht etwa zur selben Stufe zurückführt. Daher ist auch gar nicht vorauszusehen, ob *Pentafunktionen* existieren oder nicht, und wir stehen so vor der interessanten Möglichkeit, dass die Mannigfaltigkeit analytischer Verhältnisse einer ähnlichen Beschränkung unterliegt, wie sie bei räumlichen Beziehungen durch den Mangel einer vierten Dimension eintritt.

Man sieht nun bald, dass die Funktionen, die wir durch Iteration erhalten können, im wesentlichen zusammenfallen mit denen, die das Integralprinzip liefert. Man findet weiter, dass der Grund dazu in einer merkwürdigen Analogie liegt, die zwischen der Summen- und Integralrechnung einerseits und dem Iterationscalcül anderseits herrscht, eine Analogie, die man füglich als *Dualismus* bezeichnen darf.

Schon äusserlich entspricht der Summenrechnung eine endliche Iterationsrechnung, dem Integrationscalcül eine infinitesimale «Iteralrechnung». Wie das Integrieren durch das Differenzieren aufgehoben wird, so steht dem Iterieren eine inverse Operation gegenüber, die ich *Revertieren* heisse. Deutlicher wird der Dualismus im Lauf dieser Arbeit hervortreten. Am klarsten tritt er bei der infinitesimalen Iteration (die hier nicht mehr behandelt werden konnte) zu

Tage. Dort lässt sich nämlich beweisen, dass die Funktion von $n \cdot \delta = x$, die man durch Iterieren von

$$\xi + \delta \cdot f(\xi)$$

in der oben geschilderten Weise erhält, genau die Inverse ist, von der Funktion, die durch Integrieren von

$$\frac{\delta x}{f(x)} \qquad \text{entsteht.}$$

So führt z. B. die Funktion $f(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2}$ beim ersten Verfahren auf den Sinus, beim zweiten auf den Arcussinus. Beide Rechnungsarten unterstützen und ergänzen sich also.

Die Iteration behandelt also die Fragen der Summen- und Integralrechnung von einer andern Seite. Indem die bekannten Probleme vom Standpunkt der Iteration aus neu zu beleuchten sind, eröffnet sich ein weites Arbeitsfeld. Es schien mir nun angemessen, vor der Behandlung der höheren Teile der Theorie die einfachen Begriffe und formalen Operationen der gewöhnlichen Iterationsrechnung in elementarer Weise darzulegen und an leichten Beispielen zu erläutern. Dies ist in vorliegender Arbeit geschehen. Da es sich hier vorläufig nur um die formalen Beziehungen handelt, so ist auf Schwierigkeiten, wie sie bei der wirklichen Ausführung durch Mehrdeutigkeit, Unstetigkeit etc. eintreten können, keine Rücksicht genommen. Dabei verbot der notwendige Rahmen der Arbeit auf einzelne Probleme näher einzugehen. Aus demselben Grunde musste auch die infinitesimale Iteration, die einer strengeren Behandlung bedarf, weggelassen werden.

Bevor ich beginne, will ich einige Bezeichnungen, die ich beständig brauchen werde, schon hier auseinandersetzen.

Sind $\varphi(\xi)$, $f(\xi)$ Funktionen, so bezeichne ich ihre Inversen durch einen über das Funktionszeichen gesetzten Strich, also mit $\overline{\varphi}(\xi), \overline{f}(\xi)$. Es ist also immer $f\overline{f}(\xi) = \overline{f}f(\xi) = \xi$. Ebenso, wenn n simultane, unabhängige Funktionen der n Variablen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ vorgelegt sind

$$y_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \qquad (k = 1, 2, \cdots n), \qquad \text{(A)}$$

so bezeichne ich die n Funktionen, die durch Auflösung dieses Systems nach den ξ entstehen, mit $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \cdots \overline{f}_n$, so dass also

$$f_1(\overline{f}_1(y_1 \cdots y_n), \overline{f}_2, \cdots \overline{f}_n) = y_1, \cdots f_k(\overline{f}_1, \cdots \overline{f}_n) = y_k \qquad \text{ist.}$$

Ein solches System von n unabhängigen Funktionen von n Variablen nenne ich kurz ein «*n-System*», und verwende für dasselbe statt der Schreibweise (A) oft auch die folgende:

$$(y_1, \cdots y_n) = (f_1 \cdots f_n)(\xi_1 \cdots \xi_n), \tag{B}$$

wo der letzte eingeklammerte Ausdruck $(\xi_1 \cdots \xi_n)$ meist weggelassen wird. Soll in dieses System ein zweites

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

substituiert werden, so deute ich dies durch einen dazwischen gestellten Strich | an, also in diesem Fall durch

$$(f_1 \cdots f_n)(\xi_1 \cdots \xi_n) \mid (\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

oder kürzer $\qquad (f_1 \cdots f_n) \mid (\varphi_1 \cdots \varphi_n).$

Die Substitution ist so auszuführen, dass an Stelle von ξ_k im ersten System $\varphi_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$ gesetzt wird. Das Resultat der Substitution wird geschrieben:

$$(f_1 \cdots f_n)(\varphi_1 \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n).$$

Diese Schreibweise ermöglicht, mehrfache Substitutionen von Funktionensystemen durch blosses Aneinanderreihen von Klammern auszudrücken. Die Grössen, in welche substituiert wird, bezeichne ich durchweg durch die Buchstaben ξ, η, ζ, so dass, wenn die f noch andere Variable enthalten, nie ein Zweifel über den Ort, wo substituiert werden soll, eintritt.

§ 1.

Es sei $f(\xi)$ eine Funktion von ξ. Indem wir $f(\xi)$ an Stelle von ξ setzen und dies n mal wiederholen, d. h. $f(\xi)$ iterieren, so erhalten wir einen Ausdruck, der den *Substituenten* ξ und die *Iterationsvariable n* enthält. Ich bezeichne ihn mit

$$J^n f(\xi).$$

Dieser Ausdruck, als Funktion von ξ betrachtet, heisst «*iterierte Funktion n^{ter} Ordnung*», als Funktion von n betrachtet aber «*Iteralfunktion*» oder kurz «*die Iterale*» von $f(\xi)$.

Beide Begriffe verhalten sich zueinander wie Potenz und Exponentialfunktion, in welche sie übergehen, wenn $f(\xi) = a \cdot \xi$ ist.

Sind allgemein ν unabhängige Funktionen $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ der Variablen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\nu$ gegeben, oder kurz ein «ν-System», und setzen wir hierin wiederholt $f_k(\xi_1 \cdots \xi_\nu)$ für ξ_k ein, so erhalten wir ν Iteralfunktionen, die ich mit

$$J_1^n(f_1 \cdots f_\nu), \quad J_2^n(f_1 \cdots f_\nu), \cdots \quad J_\nu^n(f_1 \cdots f_\nu)$$

bezeichne. Die Funktionen f selbst heissen in Bezug auf ihre Iterale «*Stammfunktionen*».

Für das Iterationszeichen J gelten die Regeln

$$J_k^a(f_1 \cdots f_n) \mid J_k^b(f_1 \cdots f_n) = J_k^{a+b}(f_1 \cdots f_n) \qquad 1.$$

$$J_k^a \mid \left(J_k^b \mid J_k^c\right) = \left(J_k^a \mid J_k^b\right) \mid J_k^c. \qquad 2.$$

Es gilt also für das Iterieren wie für das Addieren das *commutative* und das *associative* Gesetz.

Zunächst ist das Symbol J^n nur für ganzzahlige Werte von n definiert. Wir können aber die Bedeutung sofort auf beliebiges n erweitern, wenn wir $J^n f(\xi)$ als diejenige Funktion von n und ξ definieren, für welche die Beziehungen 1. und 2. gelten und welche für ganzzahlige n die n^{te} Iterierte von $f(\xi)$ ist.

Nach dieser Feststellung, die für Funktionensysteme ganz entsprechend ist, ergiebt sich leicht die Bedeutung von J^n für negative und gebrochene n. Es ist nämlich

$$J^0 f(\xi) = \xi, \quad J_k^0(f_1 \cdots f_\nu) = \xi_k, \quad J_k^{-1}(f_1 \cdots f_\nu) = \overline{f}_k, \cdots J^{-n} f(\xi) = J^n \overline{f}(\xi).$$

Weiter bedeutet $J^{\frac{1}{n}} f(\xi)$ diejenige Funktion, deren n^{te} Iterierte die gegebene Funktion $f(\xi)$ ist. Speziell für $f(\xi) = \xi$ ist $J^{\frac{1}{n}}(\xi)$ eine cyclische Funktion. So ist

$$J^{\frac{1}{3}} \frac{\xi}{1+\xi} = \frac{3\xi}{\xi+3}, \qquad J^{-\frac{1}{2}}(\xi^2) = \xi^{\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Für die Iterale von $f(\xi)$ gilt offenbar die Relation

$$J^{n+1} f(\xi) = f[J^n f(\xi)]$$

oder, wenn wir von nun an statt n x als Iterationsvariable wählen, und dieselbe nach Obigem als beliebig reelle Grösse ansehen, — falls wir noch $J^x f(\xi) = \varphi(x)$ setzen

$$\varphi(x+1) = f\varphi(x). \qquad 3.$$

Ebenso genügt $J_k^x(f_1 \cdots f_\nu) = \varphi_k(x)$ der Relation

$$\varphi_k(x) = f_k[\varphi_1(x-1), \varphi_2(x-1), \cdots \varphi_\nu(x-1)], \quad (k = 1 \cdots n). \qquad 4.$$

Umgekehrt, sind $(\varphi_1 \cdots \varphi_\nu)$ Lösungen der Gleichung (4), so sind sie zugleich die Iteralfunktionen der $(f_1 \cdots f_\nu)$. Setzen wir nämlich auf den rechten Seiten von (4) für $\varphi_k(x-1)$ den Wert ein, der aus (4) folgt, wenn x—1 für x gesetzt wird, und fahren so fort, so folgt wirklich

$$\varphi_k(x) = J_k^x(f_1 \cdots f_\nu)(\xi_1 \cdots \xi_\nu) \qquad (k = 1, 2 \cdots \nu).$$

wenn die willkürlichen Grössen $\varphi_1(o)$, $\varphi_2(o)$, $\cdots \varphi_\nu(o)$ resp. gleich $\xi_1, \cdots \xi_\nu$ gesetzt werden. Diese letzteren kann man als Konstanten oder allgemeiner als Funktionen von x mit der Periode 1 ansehen. Da aber die letztere Annahme in den wenigsten Fällen auf die weitere Rechnung einen Einfluss übt, so können wir hier davon abstrahieren und sagen:

Satz I. Die Iteralfunktionen eines ν-Systems $(f_1 \cdots f_\nu)$ sind durch dasselbe völlig bestimmt bis auf die Anfangswerte $\varphi_1(o), \cdots \varphi_\nu(o)$. Letztere können beliebigen Konstanten gleichgesetzt werden.

Das System (4) kann übrigens auch als Differenzengleichung aufgefasst werden, woraus sich ergiebt, dass die Lösung von (4) sowohl als Problem der Summen- wie der Iterationsrechnung aufgefasst werden kann. Nun kann man aber jede beliebige Differenzengleichung auf ein simultanes System von Gleichungen erster Ordnung zurückführen. *Es kann daher jedes Problem der Summenrechnung auch als Problem der Iterationsrechnung aufgefasst werden.*

Eine Gleichung $G[\varphi(x+k), \varphi(x+k-1), \cdots \varphi(x)] = 0$ (5)
wird man allerdings hauptsächlich in der Differenzenrechnung behandeln. Man kann ihr aber, dem in der Einleitung erwähnten Dualismus gemäss, eine andere Gestalt geben, in der sie speziell zu einer Aufgabe der Iterationsrechnung wird.

Wir setzen nämlich in (5) $x = \bar{\varphi}(\xi)$, wo $\bar{\varphi}$ die Inverse von φ ist. Dann wird also $\varphi\bar{\varphi}(\xi) = \xi$. Setzen wir ferner

$$\varphi(1 + \bar{\varphi}\xi) = f(\xi), \tag{6}$$

so folgt sofort:

$$\begin{aligned} ff(\xi) &= \varphi(1 + \bar{\varphi}\varphi(1 + \bar{\varphi}\xi)) = \varphi(2 + \bar{\varphi}\xi). \\ fff(\xi) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \varphi(3 + \bar{\varphi}\xi). \end{aligned}$$

Schreiben wir noch zur Bequemlichkeit $J^k f(\xi) = f^{(k)}(\xi)$, so wird unsere Gleichung (5) transformiert in

$$G[f^{(k)}(\xi), f^{(k-1)}(\xi), \cdots f(\xi), \xi]. \tag{7}$$

Diese Gleichung stellt die *Aufgabe, aus einer Relation zwischen den verschiedenen Iterierten einer Funktion diese Funktion selbst zu finden.* Aus der Gleichung (6), die man auch schreiben kann

$$\varphi(x+1) = f\varphi(x),$$

sieht man, dass $\varphi(x)$ einfach die Iteralfunktion von $f(\xi)$ ist.

Analog können wir auch simultane Differenzengleichungen, z. B.

$$\begin{aligned} G[\varphi(x+k_1),\ \psi(x+h_1), \cdots \varphi(x), \psi(x)] = 0 \\ H[\varphi(x+k_2),\ \psi(x+h_2), \cdots \varphi(x), \psi(x)] = 0 \end{aligned} \tag{7a}$$

umformen. Wir setzen nämlich $\varphi(x) = \xi$, $\psi(x) = \eta$ und bestimmen zwei Funktionen $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$ so, dass

$$\varphi(x+1) = f[\varphi(x), \psi(x)], \qquad \psi(x+1) = g[\varphi(x), \psi(x)],$$

was, wie wir sehen werden (Satz VII), auf unendlich viele Arten möglich ist. Dann ergiebt sich offenbar wieder, dass φ, ψ die Iteralen von f und g sind, d. h. es wird

$$\varphi(x+k) = J_1^k(f, g)(\xi, \eta) = f^{(k)}(\xi, \eta)$$
$$\psi(x+h) = J_2^h(f, g)(\xi, \eta) = g^{(h)}(\xi, \eta),$$

wodurch die Gleichungen 7a eine (7) analoge Gestalt annehmen.

Ist endlich eine partielle Differenzengleichung vorgelegt

$$G[\varphi(x+k, y+h), \cdots \varphi(x, y)] = 0, \tag{8}$$

so wählen wir eine beliebige Funktion $\psi(x, y)$, die etwa einer Gleichung genügt

$$H[\psi(x+k_0, y+h_0), \cdots \psi(x, y)] = 0, \tag{9}$$

setzen alsdann $\varphi(x, y) = \xi$, $\psi(x, y) = \eta$, also $x = \overline{\varphi}(\xi, \eta)$, $y = \overline{\psi}(\xi, \eta)$ und bestimmen zwei Funktionen f, g, so dass

$$\varphi(1+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = f(\xi, \eta) \qquad \varphi(\overline{\varphi}, 1+\overline{\psi}) = f_0(\xi, \eta)$$
$$\psi(1+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = g(\xi, \eta) \qquad \psi(\overline{\varphi}, 1+\overline{\psi}) = g_0(\xi, \eta).$$

Dann ergiebt sich ohne weiteres

$$\varphi(2+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = f(f, g); \qquad f_0(f_0, g_0) = \varphi(\overline{\varphi}, 2+\overline{\psi})$$
$$\psi(2+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = g(f, g); \qquad g_0(f_0, g_0) = \psi(\overline{\varphi}, 2+\overline{\psi}).$$

Allgemein erhält man für die Iterierten von (f, g), (f_0, g_0)

$$\varphi(k+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = J_1^k(f, g)(\xi, \eta) = f^{(k)}; \quad \varphi(\overline{\varphi}, h+\overline{\psi}) = J_1^h(f_0 g_0)(\xi \eta) = f_0^{(h)}$$
$$\psi(k_0+\overline{\varphi}, \overline{\psi}) = J_2^{k_0}(f, g)(\xi, \eta) = g^{(k_0)}; \quad \psi(\overline{\varphi}, h_0+\overline{\psi}) = J_2^{h_0}(f_0 g_0)(\xi \eta) = g_0^{(h_0)},$$

worin natürlich k, h, k_0, h_0 ganze Zahlen bedeuten. Es wird dann z. B.

$$\varphi(k+x, h+y) = \varphi(k+\overline{\varphi}, h+\overline{\psi}) = f^{(k)}[f_0^{(h)}(\xi, \eta), g_0^{(h)}(\xi, \eta)] \text{ etc.}$$

Setzen wir diese Werte in (8), (9) ein, so verwandeln sich diese Differenzengleichungen in Relationen zwischen den Iterierten von (f, g), $(f_0 g_0)$, und umgekehrt kann jede solche Relation durch Einführung der Funktionen φ, ψ in eine Differenzengleichung verwandelt werden.

Alle solche Relationen zwischen Iterierten verschiedener Ordnung fasse ich unter dem Namen *Iteralgleichungen* zusammen. Das Problem.

das eine Iteralgleichung stellt, ist von hohem Interesse. Da die Lösungen eine oder mehrere willkürliche Konstanten involvieren, so sind die Funktionen f oft ganz verschiedener Natur, besitzen aber trotzdem ein und dieselbe Iteralfunktion $\varphi(x)$. Sind algebraische Lösungen vorhanden, so gehören diese meistens zu einer merkwürdigen Klasse von algebraischen Funktionen, für die ich den Namen «körpertreue Funktionen» gebrauche. Ich begnüge mich, ein einfaches Beispiel zu rechnen.

Beispiel. Die Funktion $f(\xi)$ soll aus der Gleichung

$$ff(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi)^2 - \xi^2 \cdot f(\xi) + \frac{1}{2} \xi^4 \tag{10}$$

bestimmt werden.

Statt (10) können wir auch schreiben

$$2ff - f^2 = \xi^2 (2f - \xi^2),$$ woraus

$$\sqrt{2ff - f^2} = \xi\sqrt{2f - \xi^2}.$$

Hiernach erkennt man sofort die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{f + \sqrt{2ff - f^2}}{2} &= \left[\frac{(\xi + \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right]^2 \\ \frac{f - \sqrt{2ff - f^2}}{2} &= \left[\frac{(\xi - \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right]^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$\frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2})}{2}\right)}$$

sich nicht ändert, wenn $f(\xi)$ an die Stelle von ξ gesetzt wird. Definiert man daher $f(\xi)$ durch die Gleichung

$$\frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)} = \text{Const.} = C. \tag{12}$$

so ist diese Bedingung offenbar erfüllt, d. h. es gilt dann

$$\frac{\log\left(\frac{f + \sqrt{2ff - f^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{f - \sqrt{2ff - f^2}}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{\xi + \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)}{\log\left(\frac{\xi - \sqrt{2f - \xi^2}}{2}\right)}. \tag{13}$$

Wir haben dann in f eine Lösung unserer Iteralgleichung (10), sobald wir noch zeigen können, dass aus (12) rückwärts wieder (10) sich als notwendige Folge ergiebt.

Die Gleichung (12) für f wird einfacher, wenn wir die Exponenten nehmen und setzen

$$\frac{\xi-\sqrt{2f-\xi^2}}{2}=y, \text{ also } f(\xi)=(\xi-y)^2+y^2. \tag{14}$$

Es ergiebt sich dann y aus der Gleichung

$$y^C=\xi-y. \tag{15}$$

Nehmen wir $\frac{1}{C}$ statt C, so folgt $(\xi-y)^C=y$, d. h. es vertauscht sich einfach y mit $(\xi-y)$. Da aber $f(\xi)$ nach (14) in beiden symmetrisch ist, so sieht man, dass zu reciproken Werten von C dasselbe $f(\xi)$ gehört.

Für rationale Werte von C wird $f(\xi)$ algebraisch. Z. B. wird für

$$\begin{array}{lll} C=\infty, & y=1 & f(\xi)=1+(\xi-1)^2 \\ & y=0 & f(\xi)=\xi^2 \\ C=1 & y=\dfrac{\xi}{2} & f(\xi)=\dfrac{\xi^2}{2} \\ C=-1 & y=\dfrac{\xi\pm\sqrt{\xi^2-4}}{2} & f(\xi)=\xi^2-2 \\ C=2 & y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\xi}}{2} & f(\xi)=\xi^2+3\xi+1\mp(\xi+1)\sqrt{1+4\xi} \end{array} \tag{15a}$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Funktionen die Gleichung (10) befriedigen.

Es bleibt nun noch der Nachweis zu leisten, dass die Gleichung (12) oder die beiden Gleichungen (13), (15) zusammen wieder auf die Relationen (11) und somit (10) zurückführen. Aus (13) zieht man zunächst die beiden Gleichungen

$$\frac{f+\sqrt{2ff-f^2}}{2}=\left(\frac{\xi+\sqrt{2f-\xi^2}}{2}\right)^{\gamma(\xi)};$$

$$\frac{f-\sqrt{2ff-f^2}}{2}=\left(\frac{\xi-\sqrt{2f-\xi^2}}{2}\right)^{\gamma(\xi)},$$

wo $\gamma(\xi)$ konstant oder von ξ abhängig sein kann. Es ist also zu zeigen, dass $\gamma=2$ ist. Addieren wir beide Gleichungen, führen y ein und für f seinen Wert aus (14), so erhalten wir:

$$(\xi - y)^2 + y^2 = (\xi - y)^{\gamma} + y^{\gamma}. \tag{16}$$

Diese Gleichung muss für y dieselben Werte liefern wie (15). Eliminieren wir $(\xi - y)$ mit Hilfe von (15), so resultiert:

$$y^2 + y^{2C} = y^{\gamma(\xi)} + y^{\gamma(\xi) \cdot C}. \tag{16a}$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $y = 0$, $y = 1$, d. h. für $f = \xi^2$ und $f = 1 + (\xi - 1)^2$, welches beides Lösungen von (10) sind. Schliessen wir diese Werte von y aus und setzen $y^2 + y^{2^C} = \psi(y)$, so folgt

$$\psi(y) = \psi\left(y^{\frac{\gamma(\xi)}{2}}\right) = \psi\left(y^{\left[\frac{\gamma(\xi)}{2}\right]^2}\right) = \ldots . \psi\left(y^{\left[\frac{\gamma(\xi)}{2}\right]^{\pm\infty}}\right).$$

Diese Gleichung kann dann nur bestehen, wenn $\gamma(\xi) = 2$ ist.

Bestimmen wir endlich noch die gemeinsame Iteralfunktion $\varphi(x)$ aller der $f(\xi)$. Sie ist die vollständige Lösung der, (10) entsprechenden, Differenzengleichung

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x-1)^2 - \varphi(x-2) \cdot \varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(x-2)^2.$$

Man findet ohne Mühe

$$\varphi(x) = \alpha^{2^x} + \beta^{2^x}, \tag{17}$$

worin α, β willkürliche Konstanten bedeuten. Indem wir diese aus $\varphi(x)$, $\varphi(x+1)$, $\varphi(x+2)$ eliminieren, sodann $x = 0$, $\varphi(0) = \xi$, $\varphi(1) = f(\xi)$, $\varphi(2) = ff(\xi)$ setzen, erhalten wir wieder die Gleichungen (11). Zugleich ergiebt sich

$$\frac{\log \alpha}{\log \beta} = C.$$

Alle die aus (14) und (15) folgenden Funktionen $f(\xi)$ führen also durch Iteration auf dieselbe Funktion (17), wobei nur die Werte der Konstanten α, β wechseln.

Wir kehren nun zu unserer allgemeinen Theorie zurück.

§ 2.

Die Theorie der Iteration stützt sich wesentlich auf das folgende *Fundamentaltheorem.*

Ist $F(\xi) = \varphi f \overline{\varphi}(\xi)$, so folgt $J^x F(\xi) = \varphi(J^x f)\, \overline{\varphi}(\xi)$,

d. h. wenn die Iterale von f bekannt ist, so ist es auch die von F. Auf Funktionen mehrerer Variablen angewandt, lautet das Princip:

Satz II.

Ist $(F_1, F_2 \dots F_n) = (\varphi_1 \dots \varphi_n)(f_1 \dots f_n)(\overline{\varphi}_1 \dots \overline{\varphi}_n)$ *und bezeichnen wir das Iteralsystem von* $(f_1 \dots f_n)$ $(\xi_1 \dots \xi_n)$ *kurz mit* $(f_1 \dots f_n)^x$, *so gilt*

$$(F_1 \dots F_n)^x = (\varphi_1 \dots \varphi_n)(f_1 \dots f_n)^x(\overline{\varphi}_1 \dots \overline{\varphi}_n).$$

Die Iteration von $(F_1 \dots F_n)$ ist dadurch auf die von $(f_1 \dots f_n)$ zurückgeführt. Der Beweis des Satzes ergiebt sich durch den blossen Anblick.

In dem einfachsten Fall, in dem $f_1 = \xi_1 + 1,\ f_2 = \xi_2, \dots f_n = \xi_n$ ist, lautet der Satz II speziell:

«Ist $F_k = \varphi_k\left\{1 + \overline{\varphi}_1(\xi_1 \cdots \xi_n), \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\}$ $\quad (k = 1, \cdots n)$,
so ist das Iteralsystem der F_k: $\qquad$ (A)

$$J_k^x(F_1 \cdots F_n) = \varphi_k\left\{x + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} \qquad (k = 1, \cdots n)».$$

Im Fall einer einzigen Funktion F heisst dies:

«aus $F(\xi) = \varphi(1 + \overline{\varphi}(\xi))$ folgt $J^x F(\xi) = \varphi[x + \overline{\varphi}(\xi)]$».

Der Satz II nimmt im Fall der infinitesimalen Iteration eine besonders einfache Gestalt an und hat alsdann ein duales Gegenstück in einem bekannten Satz der Integralrechnung, der im Fall einer einzigen Variablen so lautet:

«Ist das Integral von $f(\xi) \cdot d\xi$ bekannt, so ist es auch das von

$$f\varphi(\xi) \cdot d\varphi(\xi) = F(\xi) \cdot d\xi.»$$

In der That spielt dieser Satz in der Integralrechnung die gleiche Rolle wie der obige Satz II im Iterationscalcül.

Die Spezialisierung (A) führt uns nun zu einem neuen wichtigen Begriff.

Ist nämlich ein n-System gegeben $(\varphi_1, \cdots \varphi_n)(\xi_1 \cdots \xi_n)$, so bilden wir die folgenden n^2 Funktionen.

$$\begin{aligned}
&\varphi_1\left\{1 + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} = f_1^{(1)},\ \varphi_1\left\{\overline{\varphi}_1, 1 + \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} = f_1^{(2)}, \\
&\qquad\qquad \cdots \varphi_1\left\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots 1 + \overline{\varphi}_n\right\} = f_1^{(n)} \\
&\varphi_2\left\{1 + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} = f_2^{(1)},\ \varphi_2\left\{\overline{\varphi}_1, 1 + \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} = f_2^{(2)}, \\
&\qquad\qquad \cdots \varphi_2\left\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots 1 + \overline{\varphi}_n\right\} = f_2^{(n)} \qquad (21) \\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\
&\varphi_n\left\{1 + \overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} = f_n^{(1)},\ \varphi_n\left\{\overline{\varphi}_1, 1 + \overline{\varphi}_2, \cdots \overline{\varphi}_n\right\} = f_n^{(2)} \\
&\qquad\qquad \cdots \varphi_n\left\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots 1 + \overline{\varphi}_n\right\} = f_n^{(n)}.
\end{aligned}$$

Alsdann liefert die Iteration der Systeme $(f_1^{(1)} \ldots f_n^{(1)})$, $(f_1^{(2)} \ldots f_n^{(2)}) \ldots$ die n^2 neuen Funktionen

$$\varphi_k\left\{x+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n\right\}, \quad \varphi_k\left\{\bar{\varphi}_1, x+\bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n\right\},$$

$$\ldots \varphi_k\left\{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots x+\bar{\varphi}_n\right\} \qquad (k=1 \cdots n), \tag{22}$$

von denen je n mit dem Index k Spezialwerte der einen Funktion von n Variablen

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad \text{sind.} \tag{23}$$

Die Gleichungen (21) lehren also eine Operation, durch welche man von den gegebenen $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ $(x_1 \ldots x_n)$ zu neuen Funktionen f gelangt, durch deren Iteration Spezialwerte der φ wieder erzeugt werden.

Im Fall einer einzigen Funktion $\varphi(x)$ giebt es nur eine solche Funktion

$$f(\xi) = \varphi(1+\bar{\varphi}\xi), \tag{24}$$

deren Iterale offenbar $\varphi(x+\bar{\varphi}\xi)$, also wieder $\varphi(x)$ selbst ist.

Diese Operation ist also der Iteration gerade entgegengesetzt und verhält sich zu ihr, wie das Differenzenbilden zum Summieren. Ich nenne sie daher *Reversion* und das Resultat der Reversionen nach den verschiedenen Variablen, die Funktionen f, *partielle Reverse.*

Es ist von Vorteil, hier einige Bezeichnungen einzuführen.

Ich nenne die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ eines n-Systems *homolog,* und dem entsprechend die partiellen Reverse nach derselben Variablen, also z. B.

$$f_1^{(1)} = \varphi_1(1+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots), \; f_2^{(1)} = \varphi_2(1+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots) \ldots$$

$$f_n^{(1)} = \varphi_n(1+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots .)$$

homologe Reverse

und ihre Iteralfunktionen

$$\varphi_1(x+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \ldots) \ldots . \qquad \varphi_n(x+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \ldots)$$

homologe Iteralfunktionen.

Dagegen sollen die Reverse ein und derselben Funktion nach den verschiedenen Variablen, als z. B.

$$f_k^{(1)} = \varphi_k(1+\bar{\varphi}_1, \varphi_2 \ldots), \quad f_k^{(2)} = \varphi_k(\bar{\varphi}_1, 1+\bar{\varphi}_2, \ldots), \ldots$$

$$f_k^{(n)} = \varphi_k(\bar{\varphi}_1, \ldots 1+\bar{\varphi}_n)$$

associerte Reverse heissen.

Alle die n^2 Iteralfunktionen in (22) heissen übrigens noch *partiell*, da sie sämtlich Spezialwerte der n Funktionen $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ $(x_1 \ldots x_n)$ in (23) sind. Diese letztern bilden das *totale Iteralsystem* zu dem *totalen Reverssystem* (21).

Ausser den in (21) definierten Funktionen f werden wir aber auch die folgenden Ausdrücke

$$\varphi_k(1+\bar{\varphi}_1, 1+\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \ldots), \qquad \varphi_k(1+\bar{\varphi}_1, 1+\bar{\varphi}_2, 1+\bar{\varphi}_3, \ldots \bar{\varphi}_n \text{ etc.}$$

als partielle Reverse bezeichnen, dieselben aber von den bisher besprochenen einfachen Reversen durch das Beiwort «*gemischt*» unterscheiden. Demgemäss werden auch die Funktionen

$$\varphi_k(x_1+\bar{\varphi}_1, x_2+\bar{\varphi}_2, \ldots), \qquad \varphi_k(x_1+\bar{\varphi}_1, x_2+\bar{\varphi}_2, x_3+\bar{\varphi}_3, \ldots) \text{ etc.}$$

gemischte Iteralfunktionen heissen.

Endlich werden wir gelegentlich auch Ausdrücke wie $\varphi(\bar{\varphi}+a)$ $\varphi_k(\bar{\varphi}_1+a, \bar{\varphi}_2+b, \ldots)$, worin a, b Konstanten sind, als Reverse von φ in etwas allgemeinerem Sinn bezeichnen, da sie von den oben definierten nicht wesentlich verschieden sind.

Nach diesen notwendigen Feststellungen wollen wir nun die Eigenschaften unseres neuen Begriffs näher untersuchen.

§ 3.

Substituieren wir von 2 associerten Revers-Systemen

$$(f_1 \ldots f_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(a+\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n);$$

$$(g_1 \ldots g_n) = (\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(\bar{\varphi}_1, b+\bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n)$$

das erste in das zweite, oder das zweite in das erste, so ist das Resultat beidemal dasselbe, nämlich

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(a+\bar{\varphi}_1, b+\bar{\varphi}_2, \ldots \bar{\varphi}_n).$$

Zwei Funktionen oder Funktionensysteme, die bei der Substitution ineinander das commutative Gesetz befolgen, heisse ich *commutativ*. Da nun also

$$f_k(g_1, \ldots g_n) = g_k(f_1 \ldots f_n) \qquad (k = 1, \ldots n), \tag{25}$$

so haben wir den

Satz III. Associerte partielle Revers-Systeme sind commutativ.

Dieser Satz entspricht dualistisch der bekannten Relation

$$\Delta_\xi \Delta_\eta F(\xi, \eta) = \Delta_\eta \Delta_\xi F(\xi, \eta).$$

Es gilt nun aber auch der umgekehrte Satz, nämlich

Satz IV. *Sind zwei n-Systeme* $(f_1 \ldots f_n)$, $(g_1 \ldots g_n)$ *kommutativ, so sind sie associerte, partielle Reverse eines und desselben Funktionensystems* $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n)$.

Beweis. Sind die beiden Systeme commutativ, so gilt

$$(f_1 \ldots f_n)(g_1 \ldots g_n) = (g_1 \ldots g_n)(f_1 \ldots f_n).$$

Substituieren wir beide Seiten in $(f_1 \ldots f_n)$ und bezeichnen allgemein ein n-fach iteriertes System mit $(f_1 \ldots f_n)^n$, so folgt successive

$$(f_1 \ldots f_n)^2 (g_1 \ldots g_n) = (f_1 \ldots f_n)(g_1 \ldots g_n)(f_1 \ldots f_n) = (g_1 \ldots g_n)(f_1 \ldots f_n)^2$$
$$(f_1 \ldots f_n)^3 (g_1 \ldots g_n) = \qquad (g_1 \ldots g_n)(f_1 \ldots f_n)^3$$

Allgemein haben wir für zwei ganze Zahlen x_1, x_2

$$(f_1 \ldots f_n)^{x_1} (g_1 \ldots g_n)^{x_2} = (g_1 \ldots g_n)^{x_2} (f_1 \ldots f_n)^{x_1}. \tag{26}$$

Bezeichnen wir diese n Funktionen von x_1, x_2 und den ξ mit

$$\Phi_1(x_1, x_2; \xi_1 \ldots \xi_n), \quad \Phi_2(x_1, x_2; \xi_1 \ldots \xi_n), \ldots \Phi_n(x_1, x_2; \xi_1 \ldots \xi_n),$$

so gelten offenbar die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1+1, x_2; \xi_1 \ldots \xi_n) &= (f_1 \ldots f_n)(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1, x_2; \xi_1 \ldots \xi_n)\\(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1, x_2+1; \xi_1 \ldots \xi_n) &= (g_1 \ldots g_n)(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1, x_2; \xi_1 \ldots \xi_n).\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Setzen wir nun für $\xi_1 \ldots \xi_n$ willkürliche Funktionen von $n-2$ neuen Grössen $x_3, x_4, \ldots x_n$, so gehen die Funktionen Φ über in Funktionen $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die beiden obigen Gleichungen werden zu den folgenden:

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1+1, x_2, \ldots x_n) = (f_1 \ldots f_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n)$$
$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1, x_2+1, \ldots x_n) = (g_1 \ldots g_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n).$$

Bei der Wahl der genannten willkürlichen Funktionen hat man nur darauf zu achten, dass die $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ von einander unabhängig werden, d. h., dass ihre Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Dann kann man nämlich das System $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n)$ umkehren und setzen:

$$x_1 = \bar{\varphi}_1(\xi_1 \ldots \xi_n), \quad x_2 = \bar{\varphi}_2(\xi_1 \ldots \xi_n), \ldots \quad x_n = \bar{\varphi}_n(\xi_1 \ldots \xi_n),$$

wodurch wir die Funktionen f und g in der That als partielle Reverse der φ dargestellt erhalten. Zugleich sieht man, dass infolge der Willkürlichkeit der in (27) eingeführten Funktionen von $x_3 \ldots x_n$ unendlich viele solcher Funktionen φ existieren, sobald $n > 2$.

Satz V. *Sind n n-Systeme* $(f_1^{(1)} \ldots f_n^{(1)}), (f_1^{(2)} \ldots f_n^{(2)}), \ldots (f_1^{(n)} \ldots f_n^{(n)})$ *gegeben, von denen je zwei zueinander kommutativ sind, so bilden die* n^2 *Funktionen f ein totales Revers-System, d. h. es lässt sich dann ein bis auf n willkürliche Konstanten völlig bestimmtes System* $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n)$ *finden, für welches die Gleichungen (21) gelten.*

Beweis. Wir bestimmen zunächst die n partiellen Iteralsysteme

$$(f'_1 \ldots f'_n)^{x_1}, \quad (f_1^{(2)} \ldots f_n^{(2)})^{x_2}, \ldots \ldots \quad (f_1^{(n)} \ldots f_n^{(n)})^{x_n}.$$

Bilden wir von diesen n Systemen das Substitutionsprodukt, so ist dieses nach der Annahme wenigstens für ganzzahlige $x_1 \ldots x_n$ von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und stellt also ein ganz bestimmtes System von n Funktionen der n Variablen $x_1 \ldots x_n$ vor, das wir schreiben

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n) = (f'_1 \ldots f'_n)^{x_1} (f_1^{(2)} \ldots f_n^{(2)})^{x_2} \ldots (f_1^{(n)} \ldots f_n^{(n)})^{x_n}. \quad (28)$$

Diese Funktionen enthalten noch die Substituenten $\xi_1 \ldots \xi_n$, welche als willkürliche Konstanten betrachtet werden können. Da allgemein $(f_1 \ldots f_n)^0 = (\xi_1 \ldots \xi_n)$ ist, so sieht man sofort, dass

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(0, 0, \ldots 0) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \text{ wird, d. h.}$$

$$\xi_1 = \varphi_1(0 \ldots 0), \quad \xi_2 = \varphi_2(0, \ldots 0), \ldots \quad \xi_n = \varphi_n(0, \ldots 0). \quad (29)$$

Es bleiben also die Anfangswerte der Funktionen φ beliebig.

Aus der Formel (28) zieht man noch die beiden folgenden

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1\, 0 \ldots 0) = (f'_1 \ldots f'_n)^{x_1}; \quad \ldots (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(0 \ldots 0\, x_n) = (f_1^{(n)} \ldots f_n^{(n)})^{x_n} \quad (30)$$

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 x_2 \ldots x_n)$$
$$= (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots 0_n) \mid (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(0\, x_2 \ldots 0) \ldots \mid (\varphi_1 \ldots \varphi_n)(0 \ldots x_n). \quad (31)$$

Es ist also das totale Iteralsystem das Substitutionsprodukt der n associerten partiellen Iteralsysteme.

Satz VI. *Zu jedem n-System* $(f_1 \ldots f_n)$ *können (falls* $n > 1$*) unendlich viele Systeme* $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ *so bestimmt werden, dass* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *homologe partielle Reverse eines jeden sind.*

Beweis. Bezeichnen wir für den Augenblick das Iteralsystem der $(f_1 \ldots f_n)$ mit $(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1; \xi_1 \ldots \xi_n)$, so gilt

$$(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1+1; \xi_1 \ldots \xi_n) = (f_1 \ldots f_n)(\Phi_1 \ldots \Phi_n)(x_1; \xi_1 \ldots \xi_n).$$

Setzen wir hierin für $\xi_1 \ldots \xi_n$ beliebige Funktionen der neuen Variablen $x_2 \ldots x_n$ ein und bezeichnen die so transformierten $(\Phi_1 \ldots \Phi_n)$ mit

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n),$$

so geht das obige Gleichungssystem über in

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1+1, x_2 \ldots x_n) = (f_1 \ldots f_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_n),$$

womit der Satz bewiesen ist. — Der Nutzen dieses Satzes ergiebt sich aus folgender Bemerkung. Bilden wir nämlich von den so gefundenen Funktionen φ die Reverse nach den Variablen $x_2, \ldots x_n$, so erhalten wir nach Satz III lauter zu $(f_1 \ldots f_n)$ kommutative Systeme. Das giebt das

Corollar: Zu jedem gegebenen n-System $(f_1 \ldots f_n)$ *kann, falls* $n > 1$ *ist, eine unendliche Anzahl kommutativer Systeme* $(g_1 \ldots g_n)$ *gefunden werden.*

Wir wollen nach dieser Methode ein *Beispiel* rechnen, indem wir die *Aufgabe* lösen, *zu den beiden linearen Funktionen*

$$f_1 = a\xi + b\eta \qquad f_2 = c\xi + d\eta \tag{32}$$

die allgemeine Form der zu ihnen kommutativen Funktionen g_1, g_2 *zu bestimmen.*

Wir suchen Grössen λ, μ, ω der Art, dass die Gleichung besteht

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = \omega(\lambda\xi + \mu\eta)$$

und zwar findet man leicht

$$\lambda = c,\ \mu = \omega - a;\ \omega^2 - (a+d)\omega + (ad - bc) = 0.$$

Nehmen wir die beiden Werte ω_1, ω_2 von ω für verschieden an, bezeichnen wir ferner die partiellen Iteralfunktionen von f_1, f_2 mit $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, so hat man die Beziehungen

$$\begin{aligned} c\Phi(x) + (\omega_1 - a)\Psi(x) &= \omega_1^x (c\xi + (\omega_1 - a)\eta) \\ c\Phi(x) + (\omega_2 - a)\Psi(x) &= \omega_2^x (c\xi + (\omega_2 - a)\eta). \end{aligned} \tag{33}$$

Wir setzen nun für ξ, η willkürliche Funktionen einer neuen Variablen y ein, setzen also etwa

$$c\xi+(\omega_1-a)\eta=P(y), \qquad c\xi+(\omega_2-a)\eta=Q(y)$$

und schreiben für Φ, Ψ jetzt $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, so gilt:

$$\begin{aligned} c\varphi(x,y)+(\omega_1-a)\psi(x,y) &= \omega_1^x \cdot P(y) \\ c\varphi(x,y)+(\omega_2-a)\psi(x,y) &= \omega_2^x\, Q(y). \end{aligned} \tag{34}$$

Wir berechnen nun die Ausdrücke

$$g_1=\varphi(\overline{\varphi},\ 1+\overline{\psi}) \qquad g_2=\psi(\overline{\varphi},\ 1+\overline{\psi}), \tag{35}$$

welches die gesuchten Funktionen sind. Zunächst bemerken wir durch Elimination von x aus (33), dass der Ausdruck

$$C(\varphi,\psi)=\frac{[c\varphi(x,y)+(\omega_1-a)\psi(x,y)]^{\frac{1}{\log\omega_1}}}{[c\varphi(x,y)+(\omega_2-a)\psi(x,y)]^{\frac{1}{\log\omega_2}}}$$

bloss Funktion von y ist, so dass wir umgekehrt y gleich einer willkürlichen Funktion $\Omega(C(\varphi, \psi))$ setzen können. Aus (34) ziehen wir dann

$$c\psi(x,y+1)+(\omega_1-a)\psi(x,y+1)$$
$$=\omega_1^x\, Py\,.\frac{P(y+1)}{Py}=\{c\psi(x,y)+(\omega_1-a)\psi(x,y)\}\frac{P(y+1)}{Py}.$$

Setzen wir in dieser und der analogen Gleichung für ω_2 Fy, G(y) an Stelle von $\frac{P(y+1)}{P(y)}$, $\frac{Q(y+1)}{Q(y)}$, machen wir ferner

$$x=\overline{\varphi}(\xi,\eta), \qquad y=\Omega C(\xi,\eta)=\overline{\psi}(\xi,\eta)$$

und bedenken die Gleichungen (35), so erhalten wir

$$\begin{aligned} cg_1+(\omega_1-a)g_2 &= \{c\xi+(\omega_1-a)\eta\}F(\overline{\psi}) \\ cg_1+(\omega_2-a)g_2 &= \{c\xi+(\omega_2-a)\eta\}G(\overline{\psi}). \end{aligned}$$

Berechnen wir hieraus g_1, g_2, und schreiben für $\frac{F\Omega(t)}{c(\omega_2-\omega_1)}$, $\frac{G\Omega(t)}{c(\omega_2-\omega_1)}$ wieder F(t), G(t), so erhalten wir endlich:

$$\begin{aligned} g_1(\xi,\eta) &= (\omega_2-a)\{c\xi+(\omega_1-a)\eta\}FC(\xi\eta) \\ &\quad -(\omega_1-a)\{c\xi+(\omega_2-a)\eta\}GC(\xi\eta) \\ g_2(\xi,\eta) &= -c\{c\xi+(\omega_1-a)\eta\}FC(\xi_1\eta) \\ &\quad +c\{c\xi+(\omega_2-a)\eta\}GC(\xi\eta), \end{aligned} \tag{36}$$

worin $$C(\xi,\eta)=\frac{[c\xi+(\omega_1-a)\eta]^{\frac{1}{\log\omega_1}}}{[c\xi+(\omega_2-a)\eta]^{\frac{1}{\log\omega_2}}}$$ bedeutet.

F, G sind völlig willkürliche Funktionen. Die Formeln (36) enthalten die vollständige Lösung unserer Aufgabe für den Fall ungleicher Wurzeln ω.

Die Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2, bilden zusammen ein totales Reverssystem, das die totalen Iteralen $\varphi(x\,y)$, $\psi(x\,y)$ hat.

Setzt man für F, G beliebige Konstanten A, B, so erhält man eine partikulare Lösung des Problems, aus der man also die allgemeine findet, indem man die Konstanten durch willkürliche Funktionen des Ausdrucks $C(\xi, \eta)$ ersetzt. Diese Funktion $C(\xi\,\eta)$ hat die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wenn man an Stelle von ξ, η resp. $f_1(\xi\,\eta)$, $f_2(\xi\,\eta)$ setzt. Da sie demnach für alle Iterierten von (f_1, f_2) sich gleich bleibt, nenne ich sie eine *Coiterante* von (f_1, f_2).

Solche Coiteranten gibt es zu jedem System $(f_1 \cdots f_n)$. Man kann sie in der angegebenen Weise erhalten, indem man aus je zwei Iteralfunktionen die Iterationsvariable eliminiert. Sie spielen in dem Problem, die kommutativen Funktionen zu finden, eine Hauptrolle, indem sie dazu dienen, aus partikularen Lösungen mit willkürlichen Konstanten allgemeinere Lösungen herzustellen.

Zum Schluss dieses Paragraphen folge noch eine Bemerkung zur Theorie der Reverse. Es gelte nämlich zwischen den Funktionen $(f_1 \cdots f_n)$ eines n-Systems und den n Funktionen $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ der r Variablen $x_1 \cdots x_r$ ein Gleichungssystem der Form

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1+1, x_2, \ldots x_r) = (f_1 \ldots f_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_r) \quad (37)$$

Ist nun $r = n$, so sind, wie wir gesehen haben, $f_1 \cdots f_n$ durch diese Gleichungen als partielle Reverse der $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ eindeutig bestimmt und können durch Einführung der Inversen der φ aus diesen leicht dargestellt werden.

Ist aber $r < n$, so sind die $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ nicht von einander unabhängig, es existieren vielmehr $n - r$ Relationen zwischen ihnen, die wir etwa schreiben können

$$\varphi_1 = G_1(\varphi_1 \ldots \varphi_n), \quad \varphi_2 = G_2(\varphi_1 \ldots \varphi_n), \ldots \varphi_{n-r} = G_{n-r}(\varphi_1 \ldots \varphi_n).$$

Führen wir diese Ausdrücke für $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-r}$ in die rechte Seite von (37) ein, so nimmt dieselbe die Gestalt an

$$(f'_1 \ldots f'_n)(\varphi_1 \ldots \varphi_n)(x_1 \ldots x_r).$$

Die Gleichung (37) bleibt also bestehen, wenn wir die f' durch die f ersetzen, d. h. es gilt der Satz:

Satz VII. Besteht ein Gleichungssystem der Form (36), worin die φ gegebene Funktionen von weniger Variablen, als ihre Anzahl beträgt, sind, so giebt es im Allgemeinen noch unendlich viele Funktionen $f'_1 \cdots f'_n$, die für $f_1 \cdots f_n$ eingesetzt, das Gleichungssystem befriedigen.

§ 4.

Mit den Reversen sind gewisse andere Funktionen von $2n$ Variablen $\xi_1 \cdots \xi_n \; \eta_1 \cdots \eta_n$ nahe verwandt, die wir durch folgende Gleichungen definieren

$$\varphi(\bar{\varphi}(\xi) + \bar{\varphi}(\eta)) = \lambda(\xi, \eta) \tag{38}$$

$$\varphi_k\{\bar{\varphi}_1(\xi_1 \ldots \xi_n) + \bar{\varphi}_1(\eta_1 \ldots \eta_n); \ldots \bar{\varphi}_n(\xi_1 \ldots \xi_n) + \bar{\varphi}_n(\eta_1 \ldots \eta_n)\}$$
$$= \lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n \\ \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n \end{Bmatrix} \quad (k = 1 \ldots n) \tag{39}$$

Es folgen hieraus sofort die andern

$$\varphi(x+y) = \lambda(\varphi(x), \varphi(y)). \tag{40}$$

$$\varphi_k\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n\}$$
$$= \lambda_k \begin{Bmatrix} \varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_n(x_1 \ldots x_n) \\ \varphi_1(y_1 \ldots y_n), \ldots \varphi_n(y_1 \ldots y_n) \end{Bmatrix} \quad (k = 1 \ldots n). \tag{41}$$

Den Inhalt solcher Gleichungen nennt man bekanntlich ein *Additionstheorem*. Die Funktionen λ, λ_k, welche n Paare von Funktionen gewissermassen zu n Funktionen derselben Art (mit neuen Argumenten) zusammenbinden, heisse ich *Liganten*.

Die Liganten, nur als Funktionen der ξ betrachtet, sind partielle Reverse in weiterem Sinne, und als solche für jedes n-System völlig bestimmt. Wir haben so den Satz:

Satz VIII. Zu jedem n-System gehört ein bestimmtes Ligantensystem. Die ligierten Funktionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ sind die Iteralfunktionen ihrer Liganten.

Trotz der Analogie mit den Reversen spielen doch die Liganten eine besondere Rolle. Ein Revers kann z. B. algebraisch sein, während es die zugehörige Ligante nicht ist. So ist der Revers von b^{a^x} gleich ξ^a, hingegen die Ligante $e^{\log \xi . \log \eta}$. Es kann daher eine Funktion Iterale einer algebraischen Funktion sein und doch kein algebraisches Additionstheorem besitzen.

Die Liganten zeichnen sich durch gewisse Eigenschaften aus, auf denen ihre Wichtigkeit beruht.

I. Setzen wir in (41) $y_1 = y_2 = \cdots y_n = 0$.

$$\varphi_1(0, \ldots 0) = \omega_1 \quad \ldots \quad \varphi_n(0, \ldots 0) = \omega_n$$

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_n) = \xi_1 \quad \ldots \quad \varphi_n(x_1 \ldots x_n) = \xi_n,$$

so erhalten wir

$$\xi_k = \lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \omega_1 \ldots \omega_n \end{Bmatrix} \qquad (k = 1 \ldots n),$$

d. h. es giebt immer n von den ξ unabhängige Konstanten, $\omega_1 \ldots \omega_n$, welche, in $\lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{Bmatrix}$ für $\eta_1 \ldots \eta_n$ eingesetzt, $\lambda_k = \xi_k$ machen.

II. Aus dem Anblick von (38), (39) ergiebt sich sofort

$$\lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{Bmatrix} = \lambda_k \begin{Bmatrix} \eta_1 \ldots \eta_n \\ \xi_1 \ldots \xi_n \end{Bmatrix}.$$

III. Substituieren wir das System $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}$ in das andere $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{pmatrix}$ an Stelle der $\xi_1 \ldots \xi_n$, so resultiert

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n) \left[\overline{\varphi}_1 (\xi_1 \ldots \xi_n) + \overline{\varphi}_1 (\eta_1 \ldots \eta_n) + \overline{\varphi}_1 (y_1 \ldots y_n); \ldots \right],$$

d. h. ein in den 3 Wertsystemen $(\xi_1 \ldots \xi_n)$, $(\eta_1 \ldots \eta_n)$, $(y_1 \ldots y_n)$ symmetrisches Funktionsystem.

Infolge der obigen drei Eigenschaften ist es möglich, für die Liganten die folgende, handlichere Schreibweise einzuführen. Ich setze nämlich

$$\lambda_k \begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{Bmatrix} = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown_k (\eta_1 \ldots \eta_n) \qquad (k = 1 \ldots n)$$

und fasse diese n Gleichungen in die eine symboliscbe zusammen:

$$(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{Bmatrix} \xi_1 \ldots \xi_n \\ \eta_1 \ldots \eta_n \end{Bmatrix} = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n).$$

Wenn also das Ligantenzeichen $\frown$ keinen Index hat, bedeutet es das ganze System. Die Relationen I, II, III lassen sich dann so darstellen.

$$\text{I.}\quad (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\omega_1 \ldots \omega_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n).$$

$$\text{II.}\quad (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\xi_1 \ldots \xi_n).$$

$$\begin{aligned}\text{III.}\quad & [(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (y_1 \ldots y_n)] \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \\ &= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown [(y_1 \ldots y_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)] \\ &= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (y_1 \ldots y_n).\end{aligned} \tag{42}$$

Man sieht, dass man mit dem Zeichen $\frown$ gerade so operiert, wie mit dem Zeichen $+$ der Addition, die ja auch eine Ligante ist.

Die genannten drei Eigenschaften sind nun aber für die Liganten definitorisch und darin liegt auch ihre Wichtigkeit. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz IX. *Alle Funktionen oder Funktionensysteme von 2 n Variablen, denen die Eigenschaften I, II, III zukommen, sind Liganten eines Systems von n Funktionen mit n Variablen.*

Beweis: Genügt das System $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Gleichungen I, II, III, so findet man zunächst mit Hilfe von II, III

$$J^2(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown \{(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)\}$$

$$J^3(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$$
$$= (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown \{(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)\}.$$

Bezeichnen wir allgemein den Ausdruck $(\eta_1 \ldots \eta_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) \frown \ldots\ldots \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$, worin $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ k mal vorkommt, mit $(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown k}$, so findet man für das Iteralsystem von $(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)$ den Ausdruck

$$J^x(\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \frown (\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown x}. \tag{43}$$

Für $x = o$ ergiebt sich daraus mit Hilfe von I die Bedeutung des Symbols $(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown o}$, nämlich

$$(\eta_1 \ldots \eta_n)^{\frown o} = (\omega_1 \ldots \omega_n). \tag{44}$$

Setzen wir nun in (43) $\xi_1 = \omega_1,\ \xi_2 = \omega_2, \ldots \xi_n = \omega_n$, so dass also $\quad J^o = (\omega_1 \ldots \omega_n), \quad J^1 = (\eta \ldots \eta_n)\quad$ wird, setzen dann für $(\eta_1 \ldots \eta_n)$ der Reihe nach die Wertsysteme

$$(\eta'_1 \ldots \eta'_n), \quad (\eta_1^{(2)} \ldots \eta_n^{(2)}), \ldots (\eta_1^{(n)} \ldots \eta_n^{(n)})$$

ein und für x entsprechend $x_1, x_2, \ldots x_n$, verbinden endlich die so erhaltenen n Iteralsysteme durch das Zeichen $\frown$, so ist das Resultat offenbar das n-System

$$(\eta_1 \ldots \varphi_n)\,(x_1 \ldots x_n)$$
$$= (\eta'_1 \ldots \eta'_n)^{x_1} \frown (\eta_1^{(2)} \ldots \eta_n^{(2)})^{x_2} \frown \ldots (\eta_1^{(n)} \ldots \eta_n^{(n)})^{x_n}. \tag{45}$$

Setzt man hierin $x_k + y_k$ an Stelle von x_k, und ordnet die Glieder rechts passend um, was wegen II, III möglich ist, so erhält man sofort die Formel

$$(\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(x_1 + y_1, \ldots x_n + y_n)$$
$$= (\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(x_1 \ldots x_n) \frown (\varphi_1 \ldots \varphi_n)\,(y_1 \ldots y_n), \tag{46}$$

welche von (41) nur durch die Schreibweise verschieden ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Eine genauere Betrachtung zeigt übrigens, dass die Relationen I, II, schon in der dritten enthalten sind, so dass also die Eigenschaft III allein zur Definition der Liganten ausreicht.

Für $n = 1$ hat Abel zuerst den obigen Satz (aus der Annahme III) auf anderm Wege hergeleitet.

Bedenkt man, dass aus (45) folgt

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(x_1\, 0 \cdots 0) = (\eta'_1 \cdots \eta'_n)^{x_1} \quad \text{etc.},$$

so sieht man, dass sich (45) auch in der Form schreiben lässt:

$$(\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(x_1 \cdots x_n)$$
$$= (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(x_1 \cdots 0) \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(0\, x_2 \cdots 0) \frown \cdots \frown (\varphi_1 \cdots \varphi_n)\,(0 \cdots x_n), \tag{47}$$

d. h. in Worten:

Satz X. Alle Funktionen eines n-Systems lassen sich mit Hilfe der Liganten durch die n^2 Funktionen $(\varphi_1 \cdots \varphi_n)$ $(x_1\, 0 \cdots 0)$ etc. von je nur einer Variablen ausdrücken.

Sind die Liganten algebraisch, so ist also auch diese Zurückführung algebraisch ausführbar. Den Satz X hat zuerst *Jacobi* am Beispiel der Abelschen Funktionen nachgewiesen.

Wir sind zu dem Begriff einer Ligante gelangt durch die Aufgabe, die Funktion einer Summe durch die Funktionen der einzelnen Summanden auszudrücken. Diesem Problem steht offenbar dual das andere gegenüber, eine Summe von Funktionswerten durch einen einzigen Funktionswert darzustellen. Es ist bekannt, dass auch dieses Problem durch dieselben Liganten gelöst wird, und in diesem Umstand tritt der in der Einleitung erwähnte Dualismus besonders stark ans Licht.

Nimmt man nämlich auf beiden Seiten der Gleichungen (45) die Inversen $(\overline{\varphi}_1 \cdots \overline{\varphi}_n)$ und setzt $x_k = \overline{\varphi}_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$, $y_k = \overline{\varphi}_k(\eta_1 \cdots \eta_n)$, so erhält man die gesuchte Darstellung

$$\overline{\varphi}_k(\xi_1 \cdots \xi_n) + \overline{\varphi}_k(\eta_1 \cdots \eta_n) = \overline{\varphi}_k(\lambda_1, \cdots \lambda_n) \qquad (k = 1 \cdots n),$$

worin der Kürze halber $(\lambda_1 \cdots \lambda_n) = (\xi_1 \cdots \xi_n) \frown (\eta_1 \cdots \eta_n)$ gesetzt ist.

Die Wichtigkeit der Liganten beruht nun zum grossen Teil darin, dass sie sich leichter iterieren lassen als andere, oft scheinbar einfachere Funktionen; wenigstens gilt dies von den bisher allein in Betracht gezogenen algebraischen Liganten. Da man durch ihre Iteration direkt die ligierten Funktionen erhält, wie dies bereits *Abel* bei den elliptischen Funktionen ausgeführt hat, so erklärt sich, weshalb die Funktionen, welche algebraische Additionstheoreme besitzen, verhältnismässig leicht zugänglich sind.

§ 5.

Nachdem im Vorhergehenden die Grundoperationen der Iterationsrechnung, die Transformation (Satz II), die Reversion und die Ligantenbildung, in formaler Weise besprochen worden sind, ohne Rücksicht auf die spezielle Natur der Funktionen, werfen wir nun zum Schluss einen kurzen Blick auf das Verhalten der einzelnen Funktionen gegenüber der Iteration.

Indem man sich an das in der Einleitung auseinandergesetzte Schema von 4 Stufen erinnert, leuchtet ein, dass wir uns auf die Untersuchung der (algebraischen) Deuterofunktionen beschränken müssen, indem ja erst aus diesen die Tritofunktionen erschlossen werden sollen, was bisher nur unvollständig gelungen ist. Dabei zeigt sich gleich, dass die algebraischen Funktionen sich in gewisse Klassen sondern lassen, die bei der Iteration ein wesentlich verschiedenes Verhalten aufweisen. Darauf soll im Folgenden etwas eingegangen werden.

Die einfachsten Deuterofunktionen sind offenbar die *linearen,* da sie am nächsten der Protofunktion verwandt sind. Jedes Gleichungssystem von der Form:

$$f_k = A_o^{(k)} + A_1^{(k)}\xi_1 + A_2^{(k)}\xi_2 + \cdots A_n^{(k)}\xi_n \qquad (k = 1 \cdots n)$$

führt bekanntlich im allgemeinen auf Exponentialfunktionen, in speziellen Fällen auf ganze rationale Funktionen. Setzt man $A_o^{(k)} = 0$ und führt ein

$$\frac{f_k}{f_n} = g_k \qquad \frac{\xi_k}{\xi_n} = \eta_k,$$

so liefert die Iteration des Systems gebrochener Funktionen mit gleichen Nennern:

$$g_k = \frac{A_1^{(k)}\eta_1 + A_2^{(k)}\eta_2 + \cdots A_n^{(k)}\eta_n}{A_1^{(n)}\eta_1 + A_2^{(n)}\eta_2 + \cdots A_n^{(n)}\cdot\eta_n} \qquad (k = 1, \cdots n) \qquad (49)$$

Quotienten solcher Exponentialfunktionen resp. gebrochene rationale Funktionen. Die Formeln für die Iteralfunktionen sind leicht herzuleiten, ich begnüge mich mit dem einfachsten, oft gebrauchten Fall einer einzigen Variablen. Es ist:

$$J^x\left(\frac{A\xi+B}{C\xi+D}\right) = \frac{[Q(x)+(A-D)P(x)]\,\xi+2P(x)\cdot B}{2P(x)\cdot C\cdot\xi+[Q(x)-(A-D)P(x)]}, \qquad (50)$$

worin $P(x) = \dfrac{(u+w)^x-(u-w)^x}{2w}, \qquad Q(x) = \dfrac{(u+w)^x+(u-w)^x}{2}$

$$u = \frac{A+D}{2}, \qquad w = \frac{1}{2}\sqrt{\varDelta} = \frac{1}{2}\sqrt{(A-D)^2+4BC}.$$

Spezielle Fälle, die häufig vorkommen, sind:

$(A = D)$ $\quad J^x\left(\dfrac{A\xi+B}{C\xi+A}\right) = \dfrac{Q(x)\cdot\xi+2P(x)\cdot B}{2P(x)\cdot C\cdot\xi+Q(x)},$ z. B.:

$$J^x\left(\frac{\xi+a}{1-a\xi}\right) = \frac{\dfrac{(1+ia)^x+(1-ia)^x}{2}\,\xi+\dfrac{(1+ia)^x-(1-ia)^x}{2}}{\dfrac{(1+ia)^x+(1-ia)^x}{2}-\dfrac{(1-ia)^x-(1-ia)^x}{2i}\cdot\xi}$$

$w = 0$ $\quad J^x\left(\dfrac{A\xi+B}{C\xi+D}\right) = \dfrac{[(x+1)A-(x-1)D]\,\xi+2xB}{2xC\cdot\xi+[(x+1)D-(x-1)A]}$ (rational).

Für die Funktionen $P(x)$, $Q(x)$ und ihr Verhältnis $T(x)$ gelten die Formeln

$$P(x+y) = P(x)\cdot Q(y) + P(y)Qx \qquad T(x+y) = \frac{T(x)+T(y)}{1+\Delta\cdot T(x)T(y)}$$
$$Q(x+y) = Q(x)\cdot Q(y) + \Delta P(x)\cdot Py$$

Je nach den verschiedenen Werten von $J^0 = \xi$ modifizieren sich die Formeln. Für die Liganten der Iteralfunktion (50) finden wir, falls $J^0 = \infty$ genommen wird

$$\mathrm{Lig}\ J^x\left(\frac{A\xi+B}{C\xi+D}\right) = \frac{C\eta\zeta+B}{C(\eta+\zeta)-(A-D)}. \tag{51}$$

Wenn der Grad der rationalen Funktionen den ersten übertrifft, so stösst die allgemeine Iteration auf grosse Schwierigkeiten. Nur in speziellen Fällen lässt sich die Iteration ausführen und liefert dann die Exponentialfunktionen a^x oder a^{b^x}. Dazu gehört vor allen die bemerkenswerte Klasse der *isobaren* Funktionen. Ist nämlich $f_k = \varphi_k(1)$ eine isobare Funktion der Variablen $\xi_1 \cdots \xi_k$, wobei ξ_k das Gewicht k besitzt, so ist das System

$$\begin{aligned}
\varphi_1(1) &= A\cdot\xi_1 \\
\varphi_2(1) &= B\cdot\xi_1^2 + B_1\xi_2 \\
\varphi_3(1) &= C\cdot\xi_1^3 + C_1\xi_1\cdot\xi_2 + C_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_k(1) &= \cdots M\xi_1^k + M_1\xi_1^{k-2}\cdot\xi_2 + M_2\cdot\xi_1^{k-3}\cdot\xi_3 + \cdots M_{\tau_k}
\end{aligned} \tag{52}$$

leicht zu iterieren. Ein solches isobares System hat die Eigenschaft, dass das inverse System wiederum isobar ist, ebenso alle Iterierten, wie man leicht einsieht. Man kann für die Iteralfunktionen $\varphi(x)$ daher ansetzen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= A(x)\cdot\xi_1 \\
\varphi_2(x) &= B(x)\cdot\xi_1^2 + B_1(x) \\
\varphi_3(x) &= C(x)\cdot\xi_1^3 + C_1(x)\cdot\xi_1\cdot\xi_2 + C_2(x) \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Durch Rekursionsformeln erhält man so

$$A(x) = A^x; \quad B(x) = B\cdot\frac{B_1^x - A^{2x}}{B_1 - A^2}; \qquad B_1(x) = B_1^x$$

$$C(x) = \frac{CC_2 + A(BC_1 - B_1C)}{C_2 - A\cdot B_1}\cdot\frac{C_2^x - A^{3x}}{C_2 - A^3} - \frac{ABC_1}{C_2 - AB_1}\cdot\frac{(AB_1)^x - A^{3x}}{AB_1 - A^3}$$

$$C_1(x) = C_1 \frac{C_2^x - (AB_1)^x}{C_2 - AB_1}; \qquad C_2(x) = C_2^x \quad \text{etc.}$$

Man überzeugt sich leicht, dass allgemein $\varphi_k(x)$ aus Exponentialfunktionen, eventuell auch aus rationalen Funktionen zusammengesetzt ist.

Wenden wir uns zu den algebraischen Funktionen überhaupt, so ist klar, dass hier die Schwierigkeit der Iteration noch grösser ist, als bei den rationalen Funktionen. Indessen giebt es doch viele und allgemeine Fälle, in denen diese Schwierigkeiten zum Teil gehoben sind, so dass man zu Resultaten gelangen kann.

So giebt es z. B. unzählige Funktionen, die nach Art des Satzes II durch algebraische Transformation aus linearen oder isobaren Funktionen entstanden sind und natürlich durch Iteration auf Exponentialfunktionen führen. Dahin gehören ferner alle algebraischen Funktionen, die etwa einer linearen Iteralgleichung

$$f^{(k)} = a_1 f^{(k-1)} + a_2 f^{(k-2)} + \cdots a_{k-2} f f(\xi) + a_{k-1} f(\xi) + a_k \cdot \xi$$
$$(f^{(k)} = J^{(k)} f)$$

genügen, so z. B. die Funktionen f in dem Beispiel pag. 116, die rationalen Werten der Konstanten C entsprechen.

Zwei Klassen algebraischer Funktionen sind dadurch interessant, dass sich bei ihnen die Iteration durch *rationale* Rechnung bewältigen lässt.

Es seien $f_1, \cdots f_n$ n unabhängige algebraische Funktionen der Variablen $\xi_1 \cdots \xi_n$ und es sei Ω der Körper aller rationalen Funktionen der ξ. Der durch Adjunktion von $f_1, \cdots f_n$ entstandene Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n)$ heisse dann kurz «der Körper von $(f_1 \cdots f_n)$».

Iterieren wir $f_1 \cdots f_n$, so werden die Ausdrücke $f_1(f_1 \cdots f_n)$, $\cdots f_n(f_1 \cdots f_n)$ im allgemeinen nicht mehr dem Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n)$ angehören. Es giebt indes eine grosse Zahl von Funktionen, für welche dieser Fall eintritt, für welche also

$f_1(f_1 \cdots f_n), \cdots f_n(f_1 \cdots f_n) =$ rationalen Funktionen von $(f_1 \cdot\cdot f_n, \xi_1 \cdot \xi_n)$ sind. Ebenso sind dann auch die Iterierten höherer Ordnung Funktionen in $\Omega(f_1 \cdot\cdot f_n)$. Solche Funktionen $f_1 \cdot\cdot f_n$, die in ihrem eigenen Körper iterierbar sind, heisse ich «*körpertreu*».

Man kann die Aufgabe zu gegebenen Irrationalitäten $\varrho_1(\xi_1 \cdot\cdot \xi_n)$, $\varrho_2, \cdots \varrho_n$ alle körpertreuen Funktionen zu finden, leicht auf eine Aufgabe der Gleichungslehre zurückführen. Bezeichnen $R_1, \cdots R_n$ rationale Funktionen der Variablen $x_1 \cdots x_n$ mit vorläufig willkürlichen Koeffizienten und bilden wir von dem Ausdruck

$$\varrho_k(x_1, \cdots x_n) - R_k(x_1, \cdots x_n) \qquad (k = 1 \cdots n)$$

das Produkt über alle Konjugierten von ϱ_k, so erhalten wir das folgende System rationaler Gleichungen

$$G_k = \Pi \varrho_k(x_1, \cdots x_n) - R_k(x_1, \cdots x_n) = 0 \qquad k = 1, \cdot\cdot n), \tag{53}$$

wodurch $x_1, \cdot\cdot x_n$ als Funktionen der Koeffizienten der R bestimmt sind. Unsere Aufgabe läuft nun darauf hinaus, diese Koeffizienten der sonst willkürlichen rationalen Funktionen R als Grössen aus $\Omega(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n)$ so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (53) ein System rationaler Lösungen erhält:

$$x_1 = f_1 = R_1(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n, \xi_1 \cdot\cdot \xi_n), \cdots x_n = f_n = R_n(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n \, \xi_1 \cdot\cdot \xi_n). \tag{54}$$

Dabei hat man noch zu achten, dass die f auch primitive Grössen des Körpers $\Omega(\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n)$ sind, d. h., dass sich auch die $\varrho_1 \cdot\cdot \varrho_n$ umgekehrt durch die $f_1 \cdot\cdot f_n$ ausdrücken lassen.

In jeder der Gleichungen (53) muss ferner ein Faktor verschwinden, also für jedes k gelten:

$$\varrho'_k(f_1 \cdot\cdot f_n) = R_k(f_1, \cdot\cdot f_n) \qquad (k = 1 \cdot\cdot n) \tag{55}$$

wo ϱ'_k irgend eine der Konjugierten von ϱ_k oder ϱ_k selbst vorstellen soll. Sind nun noch $\Omega(\varrho_1)$, $\Omega(\varrho_2)$, $\cdot\cdot$ $\Omega(\varrho_n)$ lauter Galois'sche Körper, die mit ihren conjugierten Körpern zusammenfallen, so folgt aus (55), dass auch $\varrho_k(f_1 \cdot\cdot f_n)$ und somit auch $f_k(f_1 \cdot\cdot f_n)$ sich rational durch $\varrho_1 \cdots \varrho_n$ resp. $f_1 \cdots f_n$ darstellen lassen, *d. h. die Lösungen $f_1 \cdots f_n$ sind körpertreue Funktionen.*

Statt der n Funktionen $\varrho_1 \cdots \varrho_n$ kann man auch eine einzige primitive Grösse ϱ des Körpers $\Omega(\varrho_1 \cdots \varrho_n)$ einführen.

Hat man so ein körpertreues Funktionensystem gefunden, so kann man sich die Iterierten verschiedener Ordnung durch bloss rationale Rechnung successive darstellen. Damit bleibt allerdings die Schwierigkeit, die allgemeine Iteralfunktion zu finden, noch dieselbe, wie für die rationalen Funktionen. Indes ist die Lösung des obigen Problems auch so schon wichtig, zumal sie einer interessanten Anwendung auf die *Zahlentheorie* fähig ist.

Ist nämlich $F(x, x_1, \ldots x_n)$ eine rationale Form der Variabeln $x, x_1 \cdots x_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so stellt die Zahlentheorie die Aufgabe, solche *rationale* Werte der $x, x_1, \cdots x_n$ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$F = 0$$

Genüge thun.

Angenommen nun, wir kennten ein Lösungssystem $x = a$, $x_1 = a_1, \cdots x_n = a_n$, so liefert das folgende Verfahren ein Mittel, um etwaige weitere Lösungen zu finden.

Lösen wir die Gleichung $F = 0$ nach einer der Variablen, z. B. nach x auf, so erhalten wir

$$x = \varrho(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

wo ϱ algebraisch ist. Nun suchen wir, wenn dies überhaupt möglich ist, ein körpertreues System $f_1 \cdots f_n$ zu $\Omega(\varrho)$. Setzen wir alsdann

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 = R_1(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n = R_n(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)), \end{aligned} \tag{56}$$

so gilt auch wegen der Körpertreue der $f_1 \cdots f_n$

$$x = \varrho(f_1 \cdots f_n) = R(\xi_1 \cdots \xi_n,\ \varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)).$$

Für $\xi_1 = a_1$, $\xi_2 = a_2, \ldots \xi_n = a_n$ geht dann $\varrho(\xi_1 \cdots \xi_n)$ in eine rationale Zahl a über, $x, x_1, \cdots x_n$ werden daher ebenfalls rational und stellen ein neues Lösungssystem vor. Iterieren wir successive das System $(f_1 \cdots f_n)$, so erhalten wir in den Iterierten beliebiger Ordnung

$$x_1^{(\nu)} = J_1^{\nu}(f_1 \cdots f_n),\ x_2^{(\nu)} = J_2^{\nu}(f_1 \cdots f_n),\ \cdots\cdots\ x_n^{(\nu)} = J_n^{(\nu)}(f_1 \cdots f_n)$$

verbunden mit $x^{(\nu)} = \varrho(J_1^{\nu}, J_2^{\nu}, \cdots J_n^{\nu})$ neue rationale Lösungssysteme, sobald nach der Iteration $\xi = a$, $\xi_1 = a_1, \cdots \xi_n = a_n$ gesetzt wird.

Die so erhaltenen Lösungen brauchen nicht alle von einander verschieden zu sein. Sobald das System $(f_1 \cdots f_n)$ für die speziellen Werte $\xi_1 = a_1, \cdots \xi_n = a_n$ cyclisch wird, wiederholen sich von einer gewissen Ordnung an die Lösungen wieder.

Ist also ein einziges Lösungssystem bekannt, so liefert uns die Iteration gewisser körpertreuer Funktionen eine endliche bis unendliche Anzahl neuer.

Diese Methode ist die Verallgemeinerung des bei der Pell'schen Gleichung längst bekannten Verfahrens.

Beispiel einer körpertreuen Funktion ist

$$f = \xi \cdot \frac{(\xi^4 - 6\xi^2 + 1) + 4(1-\xi^2)\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi^2};$$

$$\sqrt{1-f^2} = \frac{4\xi^2(1-\xi^2) - (\xi^4 - 6\xi^2 + 1)\sqrt{1-\xi^2}}{1+\xi^2}.$$

Von nicht geringerem Interesse als die körpertreuen Funktionen ist eine andere nah verwandte Klasse.

Die körpertreuen Funktionen sind dadurch charakterisiert, dass ihre Iterierten sämtlich dem gleichen Körper $\Omega(f_1 \cdots f_n) = \Omega(\varrho)$ angehören. Lassen wir diese Bedingung fallen, nehmen also an, dass die Funktionen $(f_1, \cdots f_n)$ und ihre Iterierten J^2, J^3, etc. der Reihe nach den verschiedenen Körpern $\Omega(\varrho_1)$, $\Omega(\varrho_2)$, $\Omega(\varrho_3) \ldots$ angehören, so kann der Fall eintreten, dass diese Körper wenigstens alle den gleichen Grad ν besitzen. Genügt also etwa $f_k(\xi_1 \cdots \xi_n)$ einer rationalen Gleichung vom Grade ν_k

$$f_k^{\nu_k} + A_1 f_k^{\nu_k - 1} + A_2 f_k^{\nu_k - 2} + \cdots A_{\nu_k} = 0,$$

worin $A_1 \ldots A_{\nu_k}$ rationale Funktionen der ξ vorstellen, so erfüllt dann ihre erste Iterierte $f_k(f_1 \ldots f_n)$ eine analoge Gleichung vom selben Grade mit Koeffizienten, die rational aus den Grössen $A_1 \ldots A_{\nu_k}$ zusammengesetzt sind. Dasselbe gilt von den höheren Iterierten. Das Problem der Iteration von $(f_1 \ldots f_n)$ kann als gelöst betrachtet werden, wenn die Koeffizienten der Gleichungen für $J^x(f_1 \ldots f_n)$ allgemein bestimmt sind, was auf die Iteration eines bloss rationalen n-Systems herausläuft.

Solche Funktionen $f_1 \ldots f_n$, deren Iterierte sämtlich Körpern vom gleichen Grad angehören, heisse ich «*gradtreu*».

Beispiel einer solchen gradtreuen Funktion ist

$$f = \sqrt{\xi^2 - a^2 - 2a\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad ff = \sqrt{\xi^2 - 4a^2 - 4a\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Die gradtreuen und körpertreuen Funktionen haben beide die Eigenschaft, dass der Grad der in ihnen vorkommenden Irrationalität bei der Iteration erhalten bleibt, oder dass die rationalen, irreduciblen Gleichungen, denen die verschiedenen Iterierten $J_k^x(f_1 \ldots f_n) = \varphi_k(x)$ für ganzzahlige x genügen

$$R_0(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)} \varphi_k^{\nu}(x) + R_1(\xi_1 \ldots \xi_n)^{(x)} \varphi_k^{\nu-1}(x) + \cdots R_n(\xi_1 \cdots \xi_n)^{(x)} = 0$$

für alle diese Werte von x denselben Grad besitzen in Bezug auf $\varphi_k(x)$.

Indessen wird der Grad der ganzen rationalen Funktionen von $\xi_1 \dots \xi_n$ im allgemeinen mit wachsendem x rasch zunehmen, wodurch der Iteration praktisch bald eine Grenze gesteckt wird.

Nun enthalten aber beide Klassen noch eine unendliche Anzahl algebraischer Funktionen, bei deren Iteration selbst die Funktionen $R(\xi_1 \dots \xi_n)^{(x)}$ in Bezug auf alle ξ denselben Grad behalten. Diese Funktionen $f_1 \dots f_n$ unterscheiden sich daher von ihren Iterierten nur durch die wechselnden Werte der in ihnen vorkommenden Konstanten, *d. h. die Form der Funktionen bleibt bei der Iteration erhalten.*

Solche Funktionen nenne ich nun «*formtreu*» und zwar «*eigentlich*» oder «*uneigentlich*», je nachdem sie zugleich körpertreu oder nur gradtreu sind.

Beispiel einer eigentlich formtreuen Funktion ist

$$f f = \frac{5\xi + 6\sqrt{1+2\xi^2-8\xi^4}}{9+32\xi^2} \qquad f f = \frac{12540\sqrt{1+2\xi^2-8\xi^4}-46031.\xi}{43681+28800\xi^2}$$

während die Funktion

$$f = \sqrt{a+\xi^2}$$

uneigentlich formtreu ist.

Zu den formtreuen Funktionen gehören auch vor allem die linearen und isobaren Funktionen, deren leichte Iterierbarkeit zumeist auf ihrer Formtreue beruht. Überhaupt erscheinen die formtreuen Funktionen gewissermassen als «algebraisch lineare» Funktionen und sind daher in Bezug auf Iteration als die einfachste Klasse der algebraischen Funktionen zu betrachten. Dies tritt auch zu Tag in ihrer nahen Beziehung zu den Funktionen von 2 n Variablen $\xi_1 \dots \xi_n\ \eta_1 \dots \eta_n$, die wir oben (§ 4) Liganten genannt haben.

Ist nämlich $(\xi_1 \dots \xi_n) \frown (\eta_1 \dots \eta_n)$ ein Ligantensystem, so ist das iterierte System gleich

$$\{(\xi_1 \dots \xi_n) \frown (\eta_1 \dots \eta_n)\} \frown (\eta_1 \dots \eta_n) = (\xi_1 \dots \xi_n) \frown (\eta_1 \dots \eta_n)^2.$$

Man erhält also die Iterierten der Liganten, indem man an Stelle von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ resp. die Ausdrücke

$$(\eta_1 \dots \eta_n) \frown_1 (\eta_1 \dots \eta_n), \dots\dots (\eta_1 \dots \eta_n) \frown_n (\eta_1 \dots \eta_n)$$

setzt, *d. h. die Liganten sind formtreue Funktionen von $\xi_1 \dots \xi_n$.*

Wir kommen somit wieder zur Erkenntnis, dass die nächste Aufgabe der endlichen Iterationsrechnung darin besteht, sämtliche algebraische Liganten etwa auf Grund der Definition in Satz IX mit rein algebraischen Mitteln herzustellen und sodann ihre Iteralfunktionen zu untersuchen. In der That sind diese letzteren Funktionen (und die aus ihnen zusammengesetzten) die einzigen Tritofunktionen, die bisher erhalten worden sind, und es ist das grosse Abel'sche Theorem in seiner ursprünglichen Form nichts anderes, als die dualistische Behandlung und teilweise Lösung des soeben aufgestellten Problems.

Zum Schluss mag noch eine allgemeine Bemerkung folgen. Wir verstanden in dieser Arbeit unter Iterieren durchweg, dass eine Funktion oder ein Funktionensystem *unverändert* und fortgesetzt in sich selbst substituiert wird. Wir können nun aber den Begriff des Iterierens dadurch erweitern, dass wir die Funktionen bei jeder Substitution etwas abändern. Ist z. B. $f(\xi, \alpha)$ eine Funktion von ξ mit einem Parameter α, so bilden wir die Reihe

$$f(\xi, \alpha_1), \quad f(\xi, \alpha_2), \quad f(\xi, \alpha_3), \ldots\ldots f(\xi, \alpha_n), \ldots\ldots$$

und substituieren das zweite Glied in das erste, das dritte in das zweite u. s. f. Wir erhalten so einen Ausdruck, den ich eine *Funktionenkette* heisse. Unterliegen die Grössen α_n einem bekannten Gesetz, bilden sie z. B. eine arithmetische Reihe, so kann man nach der Funktion von n fragen, welche diese Kette allgemein als Funktion ihrer Gliederzahl darstellt. Eine solche «Iteralfunktion» ist z. B. die *Fakultät* $(a, +1)^n$ nach Crelles Bezeichnung.

Diese «erweiterte Iterationsrechnung» lässt sich formal zum Teil ganz ähnlich behandeln wie die gewöhnliche, spielt indes keine solche Rolle. Übrigens kann sie ganz auf die letztere zurückgeführt werden, so dass keine neuen Funktionen dadurch zustande kommen. Sie ist hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt worden, und weil es oft nützlich ist, gewisse Probleme unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten.