Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Autor: Renfer, H.

Kapitel: II: Die Bernoullische Funktion nach O. Schlömilch

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

II. Die Bernoullische Funktion nach O. Schlömilch.

§ 7. Herleitung der Definition.

Ausgangspunkt ist die Summation der uns schon bekannten Potenzreihe

$$1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \cdots\cdots\cdots + (k-1)^p.$$

Das Problem bietet uns keine Schwierigkeiten, wenn die Fälle für $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, ... successive behandelt werden, d. h., wenn man jeden Fall auf den vorhergehenden zurückführt; eine allgemeine Formel ist dagegen auf diese Weise nicht zu finden, wohl aber durch Differentialrechnung.

Obige Reihe entsteht durch p-malige Differentiation einer andern Reihe, so dass ist

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \left\{ D^p \, \frac{e^{kx}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0}.$$ [23]

Um die Differentiation auszuführen, zerlegen wir die rechte Seite in zwei Faktoren $\frac{x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{kx-1}}{x} = \varphi(x) \,.\, \psi(x)$; dann wird nach der Regel der Differentiation von Produkten

$$D^p \left\{\varphi(x)\,\psi(x)\right\}_{x=0} = \varphi(0)\,\psi^p(0) + \binom{p}{1}\varphi'(0)\,\psi^{p-1}(0)$$
$$+ \binom{p}{2}\varphi''(0)\,\psi^{p-2} + \cdots\cdots \qquad (\alpha)$$

Zur Berechnung der Werte $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... benutzen wir die bekannte Formel über Bernoullische Zahlen[24])

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{2^2 B_1}{2!}y - \frac{2^4 B_2}{4!}y^3 + \frac{2^6 B_3}{6!} - + \cdots\cdots,$$

wo $-\pi < y < \pi$.

Durch passende Umänderung, wobei noch $y = \frac{1}{2}x$ gesetzt wird, geht diese Formel über in

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_2}{4!}x^4 + \frac{B_3}{6!}x^6 - + \cdots\cdots$$

Daraus erhalten wir für $x = 0$ folgendes Wertesystem:

$$\varphi(0) = 1.$$

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2}. \qquad \varphi''(0) = B_1.$$

$$\varphi'''(0) = 0. \qquad \varphi''''(0) = -B_2.$$

$$\varphi'''''(0) = 0. \qquad \varphi''''''(0) = B_3.$$

— — — — — — — — — — — —

$$\varphi^{(2m+1)}(0) = 0. \qquad \varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m. \qquad (\beta)$$

Zur Bestimmung von $\psi^p(0)$, $\psi^{p-1}(0)$, ... dient

$$\frac{e^{kx}-1}{x} = k + \frac{k^2}{2!}x + \frac{k^3}{3!}x^2 + \frac{k^4}{4!}x^3 + \cdots\cdots$$

Für $\psi^p(0)$ verschwinden alle Ableitungen, die x enthalten, und

$$\psi^p(0) = \frac{k^{p+1}}{p+1}. \qquad (\gamma)$$

Setzen wir die Werte (β) und (γ) in Formel (α) ein, so folgt gestützt auf eine leicht einzusehende kleine Veränderung

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \frac{k^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}k^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1}B_1 k^{p-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{p}{3}B_2 k^{p-3} + \frac{1}{6}\binom{p}{5}B_3 k^{p-5} - + \cdots\cdots$$

Während die linke Seite nur Sinn hat für k als ganzen, positiven Wert, grösser als 1, kann die rechte Seite verallgemeinert werden; wir erhalten dann einen Ausdruck, der eine ganze, rationale Funktion darstellt. Um aber nicht Funktionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades betrachten zu müssen, und um der höchsten Potenz von k oder z, wie allgemein üblich, den Koeffizienten 1 zu verschaffen, ersetzt Schlömilch p durch $(n-1)$, multipliziert mit m und definiert unter Vernachlässigung der linken Seite

$$\varphi(z, n) = z^n - \frac{1}{2}n z^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 z^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 z^{n-4}$$
$$+ \binom{n}{6}B_3 z^{n-6} - + \cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

als die «*Bernoullische Funktion n^{ter} Ordnung.*»

Die Herleitung dieser Fundamentalbeziehung verlangt, dass rechter Hand kein von z freier Term vorkommen darf; es ist dies eine Eigenschaft, welche die Allgemeinheit dieser Definition wesentlich einschränkt.[25])

Durch Vergleich erhalten wir folgende Definitionsformeln, welche die Bernoullischen Funktionen als Nullwerte von Differentialquotienten darstellen

$$\varphi(z, n) = n\, D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = D_x^n\left\{x\,\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0}. \tag{2}$$

Ausgehend von diesen beiden Hauptgleichungen hat Schlömilch die verschiedenen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion genauer untersucht. Diese Definition stimmt nicht ganz mit derjenigen von Raabe überein.[25]) Die Resultate, zu denen Schlömilch gelangt, entsprechen denjenigen, die Raabe gefunden. Schlömilch ist der erste, welcher gezeigt hat, dass die Bernoullischen Funktionen Differentialquotienten sind; dass sich dadurch die Darstellung hübscher gestaltet, ist nicht zu bezweifeln; nur ist das Operieren damit hie und da ziemlich umständlich.

§ 8. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Um die Eigenschaften der Ableitungen von $\varphi(z, n)$ zu erfahren, differenzieren wir die gebrochene Funktion $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ $(m-1)$-mal nach x und einmal nach z und erinnern uns, dass die Reihenfolge der Operationen beliebig ist; demnach wird

$$D_z\, D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}\right\} = D_x^{n-1}\left\{x\,\frac{e^{zx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1}\right\}$$

$$= D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{zx}-1}{e^x-1} + \varphi(x)\right\}.$$

Dies liefert für $x = 0$ unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen (2) $\quad D_z\frac{\varphi(z,n)}{n} = \varphi(z,n-1) + \varphi^{(n-1)}(0).$

Trennen wir die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion, so folgt unter Anwendung früherer Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\varphi(z, 2m) = 2m\,.\,\varphi(z, 2m-1) \qquad \text{und} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\varphi(z, 2m+1) = (2m+1)\left\{\varphi(z, 2m) + (-1)^{m-1}\,B_m\right\}. \tag{4}$$

Diese beiden Formeln entsprechen ganz denjenigen von Raabe. Infolge der etwas andern Definitionsgleichung zeigt hier die Ableitung der ungeraden Bernoullischen Funktion den Zusatz einer Bernoullischen Zahl, während bei Raabe die gerade.

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Schlömilch gibt dieselben nicht; doch sind sie durch successive Differentiation einfach zu finden; es resultieren, ausgehend von (3) und (4), folgende Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m) &= (2\lambda)!\binom{2m}{2\lambda}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.\\
\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m) &= (2\lambda+1)!\binom{2m}{2\lambda+1}\varphi(z,2m-2\lambda-1).\\
\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m+1) &= (2\lambda)!\binom{2m+1}{2\lambda}\varphi(z,2m+1-2\lambda).\\
\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m+1) &= (2\lambda+1)!\binom{2m+1}{2\lambda+1}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)\right.\\
&\qquad\left.+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Die wiederholten Ableitungen der Bernoullischen Funktion sind wieder Bernoullische Funktionen; nur treten hier noch Faktoren und Bernoullische Zahlen dazu, welche die Darstellung etwas komplizieren.

C. Einfache Integralformen.

Multiplizieren wir die Formeln (3) und (4) mit dz und integrieren zwischen den Grenzen 0 und z, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^z \varphi(z,2m-1)\,dz &= \frac{\varphi(z,2m)}{2m};\quad m>1 \qquad \text{und}\\
\int_0^z \varphi(z,2m)\,dz &= \frac{\varphi(z,2m+1)}{2m+1}+(-1)^m B_m\,.\,z.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Die Integrale der Bernoullischen Funktion, nach Schlömilch definiert, sind wieder gleiche Funktionen, dividiert durch eine bestimmte Zahl; für die gerade Funktion tritt noch ein Produkt einer Bernoullischen Zahl mit einer Variabelen auf, das je nach dem Exponenten m entweder addiert oder subtrahiert wird.

Für die obere Grenze $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir unter Anwendung der im folgenden § 9 zu beweisenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m-1)\,dz = \frac{(-1)^m \{2^{2m}-1\}}{m\,2^{2m}} B_m \quad \text{und} \\ &\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m)\,dz = (-1)^m \frac{1}{2} B_m. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

§ 9. Die Funktion mit inversem Argument.

Wir ersetzen in $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ die Grösse z durch 1—z; dann geht durch leichte Umwandlung dieses über in $1 - \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1}$, und es wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = - D_x^n \left\{ x \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1} \right\}_{x=0}.$$

Ersetzen wir x durch $-\xi$, so wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = (-1)^n D_\xi^n \left\{ \xi \frac{e^{z\xi}-1}{e^\xi-1} \right\}_{\xi=0}.$$

Somit folgt nach Definitionsgleichung

$$\varphi(1-z, n) = (-1)^n \varphi(z, n). \qquad (8)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Bernoullische Funktion für $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ in entgegengesetzter Reihenfolge dieselben Werte annimmt, welche sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ hatte und zwar mit dem nämlichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Funktion von gerader oder ungerader Ordnung ist, was die Diskussion erleichtert.

Für die gerade Funktion folgt aus (8) und der Definitionsgleichung (1) für $x = 0$, dass

$$\varphi(1, 2m) = \varphi(0, 2m) = 0. \qquad (9)$$

Für die ungerade Funktion wird für $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$, wie leicht einzusehen ist,

$$\varphi(1, 2m+1) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = \varphi(0, 2m+1) = 0. \qquad (10)$$

Wir suchen nun einen Wert für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$. Dazu ersetzen wir in der Definitionsformel (2) n durch 2m und z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = D_x^{2m}\left\{x\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = 2D_x^{2m}\left\{\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0}.$$

Es ist identisch gleich

$$\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1} = \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}-1} - \frac{x}{e^x-1} = \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) - \varphi(x).$$

Durch 2m-malige Differentiation nach x und Multiplikation mit 2 erhalten wir für $x = 0$ unter Berücksichtigung von $\varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m$ die Formel

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^m \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_m. \qquad (11)$$

Diese Berechnungen der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion für verschiedene Argumente sind nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes, den Schlömilch wie folgt erhält. Er setzt in der Definitionsgleichung (2) für das Argument z der Reihe nach z, $\left(z+\frac{1}{k}\right)$, $\left(z+\frac{2}{k}\right), \ldots\ldots, \left(z+\frac{k-1}{k}\right)$, addiert die so erhaltenen Ausdrücke, nimmt $\varphi(x) = \frac{x}{e^x-1}$ aus der Klammer und erhält die Summe

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\left(1+e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{2x}{k}}+e^{\frac{3x}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)x}{k}}\right)-k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}.$$

Durch Summation der geometrischen Reihe in der Klammer folgt

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\frac{e^x-1}{e^{\frac{x}{k}}-1} - k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}$$

und durch leichte Veränderung, wenn schliesslich $x = k\xi$, wird

$$S = \frac{1}{k^{n-1}} D_\xi^n\left\{\xi\frac{e^{kz\xi}-1}{e^\xi-1}\right\}_{\xi=0} + k\left\{\frac{1}{k^m}-1\right\}\varphi^m(0).$$

Für $n = gerade = 2m$ wird

$$\varphi(z, 2m) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m\right)$$

$$= \frac{1}{k^{2m-1}}\left\{\varphi(kz, 2m) + (-1)^m (k^{2m}-1) B_m\right\}. \quad (12)$$

Für $n = ungerade = (2m + 1)$ folgt

$$\varphi(z, 2m+1) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m+1\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m+1\right)$$

$$= \frac{1}{k^{2m}} \varphi(kz, 2m+1). \quad (13)$$

Wir sehen hier wieder die Zweispurigkeit der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion.

Setzen wir $z = 0$ und $k = \frac{1}{2}$, so finden wir aus dieser allgemeinen Formel für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$, also für die gerade Bernoullische Funktion, den schon früher gefundenen Wert (11). Ebenso lassen sich Ausdrücke finden für

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, 2m\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) \text{ und } \varphi\left(\frac{1}{6}, 2m\right).$$

Für die ungerade Funktion kommen wir auf diese Weise zu keinen Spezialwerten.

§ 10. Die Funktion mit negativem Argument.

Um diese Funktion zu untersuchen, berechnet Schlömilch vorerst $\varphi(z+1, n)$. Nach Definitionsgleichung (2) wird durch Subtraktion

$$\varphi(z+1, n) - \varphi(z, n) = D_x^n \left\{x \frac{e^{(z-1)x} - e^{zx}}{e^x - 1}\right\}_{x=0}$$

$$= D_x^n \left\{x \frac{e^{zx}(e^x - 1)}{e^x - 1}\right\}_{x=0} = D_x^n \left\{x e^{zx}\right\}_{x=0} = n z^{n-1}.$$

$$\varphi(z+1, n) = \varphi(z, n) + n z^{n-1}. \quad (14)$$

Durch Anwendung von (8) entsteht daraus

$$\varphi(-z, n) = (-1)^n \left\{\varphi(z, n) + n z^{n-1}\right\}. \quad (15)$$

Es sind dies zwei wichtige Formeln; (14) dient dazu, aus einer Bernoullischen Funktion eine neue Bernoullische Funktion gleichen Grades, aber mit einem um die Einheit erhöhten Argument zu berechnen; (15) wird gebraucht zur Verwandlung einer Bernoullischen Funktion mit negativem Argument in eine solche mit positivem.

Mit Hülfe von (14) findet Schlömilch eine Beziehung zur Darstellung der Werte der Bernoullischen Funktion auch ausserhalb des Intervalles von 0 bis 1. Lässt man nämlich z der Reihe nach die Werte $z+1$, $z+2$, $z+3, \cdots\cdots, (z+k-1)$ annehmen, wo $k =$ positiv und ganz, und addiert dann die so erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\varphi(z+k, n) = \varphi(z, n) + n\left\{z^{n-1} + (z+1)^{n-1} + (z+2)^{n-1} + \cdots\cdots + (z+k-1)^{n-1}\right\}. \quad (16)$$

Geben wir hierin dem k einen beliebigen ganzzahligen Wert, so können wir auch höhere Werte der Bernoullischen Funktion, ganze und gebrochene, berechnen, da z nicht ganzzahlig zu sein braucht und wir ja die Bernoullische Funktion im Intervall von 0 bis 1 genau kennen. Diese Formel wird uns die zur graphischen Darstellung der einzelnen Funktionen nötigen Werte liefern, wenn wir nicht vorziehen, solche direkt aus den Definitionsformeln zu berechnen.

Schlömilch verwandelt eine Bernoullische Funktion mit negativem Argument noch durch folgende einfache Formel, die er erhält, indem er in (8) für z den Wert $\left(z+\frac{1}{2}\right)$ setzt, in eine Funktion mit positivem Argument

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - z, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right), \quad (17)$$

die in einigen Fällen gute Dienste leistet. Aus dieser Formel ist auch ersichtlich, dass $\varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right)$ eine gerade oder ungerade Funktion ist, je nachdem n einen geraden oder ungeraden Wert hat. Daraus ist auch $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$ als Maximal- oder Minimalwert erkennbar.

Einzelne spezielle Werte, die Schlömilch nicht oder auf ganz andere Weise herleitet, findet *J. Worpitzky* gestützt auf Schlömilchs Definition wie folgt:[26])

1. Berechnung von $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$.

Wir ersetzen in (2) z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 2\, D_x^n \left\{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi(x)\right\} = -\, D_x^n\, \varphi(x)_0\, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}.$$

Weil $D_x^{2m+1}\varphi(x)_0 = 0$ und $D_x^{2m}\varphi(x)_0 = (-1)^n B_n$, so wird für

n = ungerade = (2m+1) $\quad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = 0$ und für

n = gerade = 2m $\quad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^n \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_n. \quad (18)$

2. *Berechnung von* $\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$.

Es ist identisch $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1} = \frac{e^{\frac{3w}{4}}-1}{e^w-1} - \frac{e^{\frac{w}{4}}-1}{e^w-1}$, wo $w = 2x$, und somit wird nach Definition (2)

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n}\left\{\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) - \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)\right\}.$$

Nach (17) ist $\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$; daher wird für

n = gerade = 2m. $\quad D_x^{2m-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = 0$ und für

n = ungerade = (2m+1). $\quad D_x^{2m}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0}$

$$= -\frac{2^{2m+1}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$$

Ebenso ist identisch

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{2} D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1} + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1} - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0}. \quad (\alpha)$$

Es sind $D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{(-1)^n - 1\right\}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

Substituieren wir diese letzten drei Werte in (α), so resultiert für $n = 2m$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)\frac{2^{2m-1}+1}{2^{2m}}. \quad (19)$$

Setzen wir in dieser interessanten Beziehung zwischen den Bernoullischen Funktionen mit Argument $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$ den früher gefundenen Wert, so erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = (-1)^m \frac{(2^{2m}-1)(2^{2m-1}+1)}{2^{4m-1}}. \qquad (20)$$

§ 11. Diskussion dieser Definition.

Wir könnten natürlich bei dieser Diskussion gleich verfahren wie bei Raabe. Schlömilch geht aber ganz anders vor, und wir wollen uns deshalb an seine Darstellungsweise halten.

Setzen wir für n der Reihe nach 1, 2, 3, ..., so nehmen die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte an:

$$\varphi(z, 1) = z.$$
$$\varphi(z, 2) = z^2 - z = z(z-1).$$
$$\varphi(z, 3) = z^3 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{1}{2} z = z(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right).$$
$$\varphi(z, 4) = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2.$$
$$\varphi(z, 5) = z^5 - \frac{5}{2} z^4 + \frac{5}{3} z^3 - \frac{1}{6} z.$$
$$\varphi(z, 6) = z^6 - 3z^5 + \frac{5}{2} z^4 - \frac{1}{2} z^2.$$
$$\varphi(z, 7) = z^7 - \frac{7}{2} z^6 + \frac{7}{2} z^5 - \frac{7}{6} z^3 + \frac{1}{6} z.$$
$$\varphi(z, 8) = z^8 - 4z^7 + \frac{14}{3} z^6 - \frac{7}{3} z^4 + \frac{2}{3} z^2.$$

Schlömilch beginnt seine Diskussion mit dem einfachsten Fall, für $n = 2$ und führt sie mittelst den Differentialformeln (3) und (4) weiter.

Die erste Funktion $\varphi(z,1) = z$ stellt wieder eine Winkelhalbierende durch den Ursprung und den ersten und dritten Quadranten dar. Hinsichtlich der zweiten Funktion $\varphi(z, 2) = z(z-1)$ erhellt unmittelbar, dass sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ *negativ* bleibt und fortwährend abnimmt; der Wert $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{1}{4}$ ist ihr *absolutes Minimum* innerhalb dieses Intervalles.

Nach (4) wird $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 3) = \varphi(z, 2) + B_1$. Die rechte Seite ist anfangs für $z = 0$ *positiv,* nimmt dann kontinuierlich ab und erhält für $z = \frac{1}{2}$ den *negativen* Wert $-\frac{1}{12}$, woraus folgt, dass es zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ einen, aber auch nur einen Wert gibt, für welchen der Ausdruck verschwindet. Diesem Verhalten von $\varphi'(z, 3)$ gemäss, steigt anfangs $\varphi(z, 3)$, erreicht zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$ ein Maximum und fällt dann wieder. Jenes Steigen fängt an mit $\varphi(0, 3) = 0$; das nachherige Fallen hört auf mit $\varphi\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 0$; die Funktion $\varphi(z, 3)$ bleibt also *positiv* während des Intervalles von 0 bis $\frac{1}{2}$; dazwischen liegt ein *Maximum.*

Formel (3) gibt $\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 4) = \varphi(z, 3)$, und da nach dem Vorigen die rechte Seite, mithin auch $\varphi'(z, 4)$ *positiv* ist, so findet bei $\varphi(z, 4)$ ein fortwährendes Wachstum statt; dieses beginnt mit $\varphi(0, 4) = 0$; mithin ist $\varphi(z, 4)$ *positiv* und *zunehmend.*

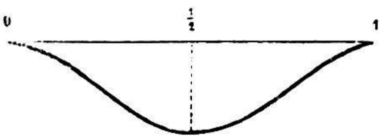
In Gleichung $\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 5) = \varphi(z, 4) - B_2$ ist die rechte Seite anfangs für $z = 0$ *negativ,* wird aber immer grösser und erreicht für $z = \frac{1}{2}$ ihren grössten Wert $\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) B_2$, welcher *positiv* ist. Aus diesem Verhalten von $\varphi'(z, 5)$ folgt, dass $\varphi(z, 5)$ erst ab- und nachher wieder zunimmt. Die Abnahme fängt mit $\varphi(0, z) = 0$ an; die Zunahme hört mit $\varphi\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ auf; somit bleibt $\varphi(z, 5)$ *negativ* von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb dieses Intervalles ein *Minimum.*

Weil ferner $\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, 6) = \varphi(z, 5)$ und die rechte Seite, also auch $\varphi'(z, 6)$ immer *negativ* ist, so nimmt $\varphi(z, 6)$ immer ab, mit $\varphi(0, 6) = 0$ anfangend; somit ist $\varphi(z, 6)$ *negativ* und *abnehmend.*

Wir überblicken augenscheinlich den Fortgang dieser Schlüsse, deren Gesamtergebnis sich graphisch darstellen lässt, wenn man z als Abszisse und $\varphi(z, n)$ als zugehörige rechtwinklige Ordinate konstruiert;

dann werden im Intervall von 0 bis 1 die Funktionen *gerader Ordnung* charakterisiert durch

Fig. 1.



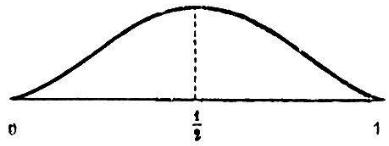
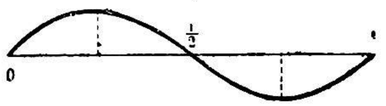


Fig. 2.

Fig. 1, wenn $n = 2, 6, 10, 14, \ldots\ldots, (4k-2)$,
Fig. 2, wenn $n = 4, 8, 12, 16, \ldots\ldots, (4k)$

und die Funktionen *ungerader Ordnung* durch

Fig. 3. Fig. 4.



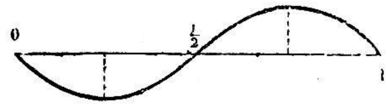


Fig. 3, wenn $n = 3, 7, 11, 15, \ldots\ldots, (4k-1)$,
Fig. 4, wenn $n = 5, 9, 13, 17, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Auf eine genauere graphische Darstellung der verschiedenen Bernoullischen Funktionen werden wir im letzten Abschnitt eintreten.[27])

§ 12. Verwandlung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Mit Hülfe der Schlömilchschen Definition als Differentialquotient lässt sich diese Funktion in eine nach cosinus oder sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitende Reihe entwickeln.

Aus der Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale ist bekannt

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\frac{\pi z}{n} + a_2 \cos\frac{2\pi z}{n} + a_3 \cos\frac{3\pi z}{n} + \cdots\cdots \quad (0 \leqq z \leqq n),$$

wobei

$$a_k = \frac{2}{n}\int_0^n f(z) \cos\frac{k\pi z}{n}\, dz.$$

Es sei $f(z) = \varphi(z, 2m)$ und $n = 1$; dann wird

$$\varphi(z, 2m) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \pi z + a_2 \cos 2\pi z + a_3 \cos 3\pi z + \cdots\cdots$$

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(z, 2m) \cos k\pi z\, dz$$

$$= 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \int_0^1 (e^{xz} - 1) \cos k\pi z\, dz \right\}_{x=0}.$$

Die Integration lässt sich jetzt leicht ausführen, doch müssen wir die zwei Fälle getrennt betrachten:

1. $k = 0$, dann wird $\frac{1}{2} a_0 = D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \int_0^1 (e^{xz} - 1) dz \right\}_{x=0}$

$$= - \varphi^{(2m)}(0) = (-1)^m B_m.$$

2. $k > 0$, daher $a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \left[\int_0^1 (e^{xz} \cos k \pi z \, dz - \int_0^1 \cos k \pi z \, dz \right] \right\}_{x=0}$.[28])

$$a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \frac{e^x [(-1)^k x - x]}{x^2 + \pi^2 k^2} \right\}_{x=0}.$$

Diese Formel wird für $k = gerade$ $\quad a_k = 2(-1)^m \frac{(2m)!}{(k\pi)^{2m}}$.

» $k = ungerade$ $a_k = 0$.

Demnach wird die gesuchte Reihenentwicklung

$$\varphi(z, 2m) = (-1)^m B_m + (-1)^{m-1} 2 \frac{(2m)!}{(\pi)^{2m}} \left\{ \frac{\cos 2\pi z}{2^{2m}} + \frac{\cos 4\pi z}{4^{2m}} + \frac{\cos 6\pi z}{6^{2m}} + \cdots\cdots\cdots \right\}. \tag{21}$$

für $0 \leqq z \leqq 1$.

Auf ganz analoge Weise finden wir einen Ausdruck für die ungerade Bernoullische Funktion, so dass ist

$$\varphi(z, 2m-1) = (-1)^m 2 \frac{(2m-1)!}{\pi^{2m-1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi z}{2^{2m-1}} + \frac{\sin 4\pi z}{4^{2m-1}} + \frac{\sin 6\pi z}{6^{2m-1}} + \cdots\cdots \right\}. \tag{22}$$

für $0 \leqq z \leqq 1$; $n > 1$.

Schlömilch findet diese Formel (22) durch Differentiation der Reihe (21). Beide Formeln erinnern uns an die Raabeschen Definitionsformeln (4) und (5), von denen ja Raabe die meisten Eigenschaften seiner Bernoullischen Funktion herleitet.

Diese Reihen lassen darauf schliessen, dass die Bernoullische Funktion in enger Beziehung zu den Kreisfunktionen steht, was auch J. Worpitzky in einer Studie über «Bernoullische und Eulersche Zahlen» beweist.[29])

Er zeigt, dass der Spezialwert einer geraden Ableitung der Cotangente eines Argumentes, multipliziert mit dem Argument selbst, sich durch eine Bernoullische Zahl wie folgt ausdrücken lässt

$$D_x^{2m}\left\{x \operatorname{cotg} x\right\}_{x=0} = -2^{2m} B_m.$$

Ebenso lässt sich der Nullwert der geraden Ableitungen der trig. Tangente durch eine Bernoullische Zahl oder durch eine Bernoullische Funktion vom Argument $\frac{1}{2}$ ausdrücken, so dass ist

$$D_x^{2m}\left\{\operatorname{tg} x\right\}_{x=0} = 2^{2m-1}\frac{(2^{2m}-1)}{m} B_m.$$

Schliesslich ist auch der Nullwert der geraden Ableitung der Sekante durch eine Bernoullische Funktion darstellbar, indem wird

$$D_x^{2m}\left\{\sec x\right\}_{x=0} = (-1)^{m+1}\frac{2^{4m+2}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m+1\right).$$

§ 13. Die Bernoullische Funktion in bestimmten Integralen.

Ausser den einfachen Integralwerten in § 8 dieses Abschnittes gibt Schlömilch weder in seinem Compendium, noch in der erwähnten Abhandlung in Band I der Zeitschrift für Mathematik und Physik andere Integralausdrücke mit Bernoullischen Funktionen, abgesehen von der Bernoullischen Funktion, welche der Restausdruck bei der Summierung der allgemeinen Differenzenreihe enthält, und dem Restgliede der Maclaurinschen Summenformel, das unter dem Integralzeichen ebenfalls eine Bernoullische Funktion aufweist.[30]) Auch bei Worpitzky finden sich keine Integralformeln der Bernoullischen Funktion, doch lassen sich den Raabeschen Formen entsprechende Ausdrücke mit Leichtigkeit aufstellen.

III. Die Bernoullische Funktion nach L. Schläfli.

§ 14. Herleitung der Definition.

Schläfli geht aus von der Summe

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \cdots\cdots\cdots + (x-1)^m;$$

gibt er dem m die Werte 0, 1, 2, ..., m, so erhält er (m+1) Summen S_0, S_1, S_2, ..., S_m. Diese multiplizieren wir der Reihe