Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Autor: Renfer, H.

Kapitel: I: Die Bernoullische Funktion nach J. Raabe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

gliedern sich im Wesentlichen gleichartig, nur lassen sich bei der einen Definition diese Eigenschaften, bei der andern jene leichter aus der Grundgleichung ableiten. Im ganzen soll der historische Gang möglichst innegehalten werden.

Endlich sei der Vollständigkeit halber noch bemerkt, dass sich bei einzelnen Arbeiten über die Bernoullischen Zahlen hie und da einige Bemerkungen über die Bernoullische Funktion finden. Am Schlusse dieser Arbeit findet sich deshalb ein Verzeichnis sämtlicher benutzter Quellen und Werke.

Die dieser Arbeit beigefügten Tabellen und Kurven wurden selbst berechnet und dargestellt.

I. Die Bernoullische Funktion nach J. Raabe.

§ 1. Herleitung der Definition.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gelangt Raabe auf diese Funktion bei der Entwicklung von $\sum x^m$ in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes. Der Weg der Herleitung vermittelst Summation von Differenzreihen ist so ausgedehnt, dass hier auf eine Wiedergabe desselben verzichtet werden muss, da dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten würde, umfasst die Ableitung dieser Definition in Raabes erster Schrift ja nicht weniger als dreizehn Druckseiten; zudem ist die Herleitung ziemlich einfach und bietet durchaus keine Schwierigkeiten.[8])

Raabe definiert darin

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3} B_2 z^{m-3} + \frac{1}{6}\binom{m}{5} B_3 z^{m-5} - + \cdots\cdots \quad (1)$$

als die «Bernoullische Funktion.»

Aus dem Grunde, dass der Funktionsexponent m nicht in der ganzen Allgemeinheit einer absoluten Variabelen auftritt, hat Raabe denselben in der Bezeichnung der Bernoullischen Funktion unbeachtet gelassen. Da sich eine Verschiedenheit der Bernoullischen Funktion mit geradem und ungeradem Exponenten ergibt, so bezeichnet er die Bernoullische Funktion mit geradem Exponenten 2 m durch $B''(z)$ und diejenige mit ungeradem Exponenten $(2m+1)$ durch $B'(z)$, wobei $m =$ ganz und positiv, weshalb sich folgende zwei Definitionsgleichungen ergeben

$$B''(z) = \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m \, . \, z. \quad (2)$$

$$B'(z) = \frac{z^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2} z^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 z^{2m} - \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3} B_2 z^{2m-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m z^2. \quad (3)$$

Aus diesen beiden Hauptgleichungen ist ersichtlich, dass nach Raabe auf der rechten Seite kein von der Variabelen freier Term vorkommen darf, eine Bestimmung, welche, wie wir sehen werden, die so definierte Bernoullische Funktion zu wenig allgemein macht.

Bedeutend rascher gelangt Raabe in seiner zweiten Arbeit zu der nämlichen Definitionsgleichung. Ausgangspunkt dieser Herleitung ist die bekannte Beziehung

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Dieser Ausdruck wird mehrmals nacheinander mit dx multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und x integriert; so entstehen successive die Bernoullischen Funktionen mit den Exponenten 2, 3, 4, ..., nämlich

$$\frac{x^2}{1 \, . \, 2} = \pi x - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1 - \cos kx}{k^2},$$

und sei noch abkürzend, wie gebräuchlich, bezeichnet

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^m} = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots \text{ in inf.} = S_m,$$

so werden

$$\frac{x^2}{1 \, . \, 2} = \pi \, . \, x - 2 S_2 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

$$\frac{x^3}{3!} = \pi \cdot \frac{x^2}{2!} - 2 S_2 x + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k x}{k^3}.$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \pi \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} - 2 S_2 \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + 2 S_4 \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^{m-1} S_{2m-2} \frac{x^3}{3!} + 2(-1)^m S_{2m}\, x + 2(-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k x}{k^{2m+1}}. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} = \pi \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - 2 S_2 \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 2 S_4 \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^m S_{2m} \frac{x^2}{2!} + 2(-1)^{m+1} S_{2m+2} + 2(-1)^{m+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k x}{k^{2m+2}}. \qquad (\beta)$$

Beide gelten für alle Werte von $x = 0$ bis $x = 2\pi$; m darf gehen von 0, 1, 2, ...; eine Ausnahme bildet nur $m = 0$; denn für diesen Wert bleiben die Grenzwerte $x = 0$ und $x = 2\pi$ ausgeschlossen.

Berücksichtigen wir, dass

$$B_m = (2m)!\, \frac{2}{(2\pi)^{2m}}\, S_{2m},$$

und multiplizieren wir (α) mit $\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}}$ und (β) mit $\frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}}$, so werden

$$\frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k x}{k^{2m+1}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-1} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

$$\frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k x}{k^{2m+2}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1}.$$

In diesen beiden letzten Gleichungen ersetzt Raabe $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ durch x und führt die Beziehungen (2) und (3) ein; dann werden

$$B''(x) = \frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}} (2m)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} \tag{4}$$

$$B'(x) = \frac{2(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m+2}} (2m+1)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m+2}} - \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1}. \tag{5}$$

Durch obige Substitution hat sich aber das Gültigkeitsgebiet verkleinert; die Beziehungen (4) und (5) gelten nur noch für $0 < x < 1$, inklusive Grenzen, wenn der Fall $m = 0$ ausgeschlossen wird.

Aus diesen ziemlich komplizierten Formeln leitet Raabe die Mehrzahl der Eigenschaften der Bernoullischen Funktion ab, weshalb seine Ableitungen oft etwas lang und umständlich werden.

Da wir zu spätern Vergleichungen noch die Bernoullische Funktion mit dem Exponenten $(2m-1)$ nötig haben, so geben wir Raabes Definitionsformel für dieselbe, nämlich

$$B'(z) = \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} B_1 z^{2m-2} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2. \tag{6}$$

§ 2. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir können dieselben aus den Definitionsgleichungen (2) und (3), oder viel einfacher aus (4) und (5) auf folgende Weise finden:

1. *Für die ungerade Bernoullische Funktion* wird nach (2)

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2m+2}{2m+2} z^{2m+1} - \frac{1}{2}(2m+1) z^{2m}$$
$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 2m \, . \, z^{2m-1} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m \, 2z$$
$$= (2m+1 \left\{ \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m z \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B'(z) = (2m+1) B''(z). \tag{7}$$

2. Für *die gerade Bernoullische Funktion* bedienen wir uns der Formel (3); es wird

$$\frac{\partial}{\partial x} B''(z) = z^{2m} - \frac{2m}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 (2m-1) z^{2m-2}$$

$$-\frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 (2m-3) z^{2m-4} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m}{2m-3} B_{m-1} z^2$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m$$

$$= 2m \left\{ \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} z^{2m-2} B_1 \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\binom{2m-1}{3} B_2 z^{2m-4} + - \cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2 \right\}$$

$$+ (-1)^{m-1} B_m$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B''(z) = 2m \,.\, 'B(z) + (-1)^{m-1} B_m. \tag{8}$$

Es tritt hier eine Komplikation durch Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl auf.

Noch einfacher ergeben sich dieselben Formeln aus (4) und (5), wie ersichtlich ist aus

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2(-1)^m (2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} -2k\pi \cdot \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$

$$= \frac{2(-1)^{m+1} (2m)!\,(2m+1)}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = (2m+1)\, B''(z). \tag{7}$$

Analog wird

$$\frac{\partial}{\partial x} B''(z) = \frac{2(-1)^{m+1} (2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} 2k\pi \cdot \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$

$$= \frac{2(-1)^{m-1} (2m-1)!\, 2m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m}}.$$

Ziehen wir die Formeln (5) und (6) in Betracht, so wird dieses zu

$$\frac{\partial}{\partial z} B''(z) = 2m \,.\, 'B(z) + (-1)^{m-1} B_m. \tag{8}$$

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Da Raabe den Exponenten der Funktion nicht, oder nur ungenügend andeutet, so lassen sich die wiederholten Ableitungen nicht direkt durch die Bernoullische Funktion, wohl aber durch trigonometrische Summenformeln darstellen; wäre bei dem Funktionszeichen der Exponent berücksichtigt worden, so könnten die Derivierten mit Leichtigkeit angegeben werden.

Durch successives Differenzieren der Beziehungen (4) und (5) gelangen wir zu folgenden einfachen Gleichungen, wenn man symbolisch setzt

$$B_{2r} = (2\,r)^{te} \text{ Ableitung von } B$$

$$B''_{2r-1}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{9}$$

$$B'_{2r}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m+1)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{10}$$

C. Einfache Integralformeln.

Aus den Gleichungen (7) und (8) resultieren durch Multiplikation mit dz und Integration zwischen den Grenzen 0 und z

$$\int_0^z B''(z)\,dz = \frac{B'(z)}{2m+1} \qquad \text{und} \tag{11}$$

$$\int_0^z {}'B(z)\,dz = \frac{B''(z)}{2m} + \frac{(-1)^m B_m}{2m}\,z. \tag{12}$$

Führen wir dieselben Operationen an den Formeln (4) und (5) aus, so erhalten wir zwei weitere Integralformeln einfachster Art, wenn als obere Grenze $z = 1$ gewählt wird; denn es werden

$$\int_0^1 B''(z)\,dz = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}} \int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz.$$

$$\int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz$$

$$- \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1} \int_0^1 dz.$$

Nun ist $\int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz = \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz = 0,$ somit

$$\int_0^1 B''(z)dz = 0 \quad (13) \quad \text{und} \quad \int_0^1 B'(z)dz = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1}. \quad (14)$$

§ 3. Die Bernoullische Funktion mit inversem und mit negativem Argument.

Raabe widmet diesen beiden Betrachtungen nur wenig Aufmerksamkeit; doch sind die Grundformeln schon bei ihm wie folgt hergeleitet. Er erhöht in Formel (25) seiner so langen Ableitung der Definitionsformel[9]), d. h., in

$$(1+a)^m - m a^{m-1} - a^m + \binom{m}{1}\left\{(1+a)^{m-1} - a^{m-1}\right\}\alpha_1$$
$$+\binom{m}{2}\left\{(1+a)^{m-2} - a^{m-2}\right\}\alpha_2 + \cdots\cdots + \binom{m}{m-2}\left\{(1+a)^2 - a^2\right\}\alpha_{m-2}$$
$$+\binom{m}{m-1}\left\{(1+a) - a\right\}\alpha_{m-1} = 0$$

m um die Einheit und beachtet die bekannten Ergebnisse (26) und (29) seiner Schrift und die Definitionsgleichung der Bernoullischen Funktion, wonach

$$\alpha_1 = \frac{1}{2};\ \alpha_{2h+1} = 0;\ \alpha_{2h} = (-1)^{h-1} B_h,$$

wobei h geht von 1 bis ∞, so resultiert die Gleichheit

$$B(1+z) - B(z) = z^m. \quad (15)$$

Ersetzen wir in der ursprünglichen Formel (1) z durch $(-z)$, so wird

$$B(-z) = \frac{(-z)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}(-z)^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1}B_1(-z)^{m-1}$$
$$-\frac{1}{4}\binom{m}{2}B_2(-z)^{m-3} + - \cdots\cdots$$

$$(-1)^m B(-z) = -\frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}z^m - \frac{1}{2}\binom{m}{1}B_1 z^{m-1}$$
$$+\frac{1}{4}\binom{m}{2}B_2 z^{m-3} - + \cdots\cdots$$

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 z^{m-3} + - \ldots\ldots$$

$$B(z) + (-1)^m B(-z) = -z^m. \tag{16}$$

Spezialisieren wir diese letzte Beziehung auf die gerade und ungerade Bernoullische Funktion, so erhalten wir

$$B''(-z) = -B''(z) - z^{2m} \quad \text{und} \quad B'(-z) = B'(z) + z^{2m+1}. \tag{16^a}$$

Addieren wir die Formeln (15) und (16), so erkennen wir, dass

$$B(1+z) + (-1)^m B(-z) = 0. \tag{17}$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Beziehungen, die uns über die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen nähern Aufschluss geben. Je nachdem m gerade oder ungerade, wird, wenn wir vorher z durch $(-z)$ ersetzen,

$$B(1-z) + (-1)^m B(z) = 0. \tag{17^a}$$

$$B''(1-z) = -B''(z); \; B'(1-z) = B'(z). \tag{17^b}$$

Für $z = 0$ folgt aus (15) $B(1) = B(0)$, und da laut Definitionsgleichung $B(0) = 0$, so wird

$$B(0) = B(1) = 0. \tag{17^c}$$

Ist der Exponent gerade und $z = \frac{1}{2}$, so entsteht nach (17^b)

$$B''\left(\frac{1}{2}\right) = -B''\left(\frac{1}{2}\right),$$

und dies kann nur Null sein; somit ist

$$B(0) = B\left(\frac{1}{2}\right) = B(1) = 0. \tag{17^d}$$

Es sind dies alles Resultate, die uns bei der Diskussion der Bernoullischen Funktion gute Dienste leisten werden.

Später[10]) leitet Raabe dieselben Eigenschaften aus unsern Formeln (4) und (5) ab. Er ersetzt in (4) z durch $(1-z)$; dann wird

$$B''(1-z) = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi(1-z)}{k^{2m+1}}.$$

Da aber $\sin 2k\pi(1-z) = -\sin 2k\pi z$, so wird

$$B''(1-z) = \frac{-2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}, \text{ also}$$

$$B''(1-z) = -B''(z).^{11)} \qquad (17^b)$$

Desgleichen wird

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi(1-z)}{k^{2m+2}}.$$

Da $\cos 2k\pi(1-z) = \cos 2k\pi z$, folgt

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$

$$= B'(z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1}, \text{ somit}$$

$$B'(1-z) = B'(z).^{11)} \qquad (17^b)$$

Dass die Funktion $B(z)$ bei der Annahme eines ganzen, positiven Exponenten m die Summe der m^{ten} Potenzen aller Zahlen 1 bis $(z-1)$ darstellt, kann nun gestützt auf die schon gefundenen Beziehungen leicht gezeigt werden. Zum ersten Mal sind solche Reihensummierungen von Jakob Bernoulli *allgemein* gelöst worden, der in seinem für die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung so wichtigen Werke «ars conjectandi» 1713 mit Hülfe der von ihm eingeführten Bernoullischen Zahlen, von denen er die 5 ersten berechnet[12]), solche Summierungen vornimmt. Vor ihm haben verschiedene Mathematiker wohl spezielle Potenzreihen summiert; der Engländer Wallis summierte die vierten, fünften und sechsten Potenzen[13]); auch Faulhaber führte in seiner «academia algébrae» 1631 solche Operationen aus[14]); aber Jakob Bernoulli[15]) gebührt das Verdienst, diese Aufgabe allgemein gelöst zu haben.

Ganz einfach lässt sich diese Aufgabe durch Anwendung der Bernoullischen Funktion ausführen. Wir gehen von Formel (15) aus, erhöhen successive das Argument z je um die Einheit und erhalten, wenn wir schliesslich alle diese Gleichungen addieren und z um k Einheiten fortschreitet,

$$B(k+z) = B(z) + z^m + (1+z)^m + (2+z)^m + \cdots + (k-1+z)^m. \qquad (18)$$

Daraus geht für $z=0$ die gewünschte Summationsformel von Jakob Bernoulli hervor, nämlich

$$B(k) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + (k-1)^m. \qquad (18^a)$$

Eine weitere wichtige Formel ergibt sich aus (17^b). Ersetzen wir darin z der Reihe nach durch $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, addieren dann alle diese Gleichungen und dividieren, da jedes Glied doppelt auftritt, durch 2, so folgt für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(\frac{1}{n}\right) + B''\left(\frac{2}{n}\right) + B''\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots\cdots + B''\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0. \qquad (\alpha)$$

Setzen wir weiter für z wieder successive die Werte $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ in (18) ein, so wird für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(k+\frac{1}{n}\right) = B''\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{1}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k+\frac{2}{n}\right) = B''\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{2}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{2}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k+\frac{3}{n}\right) = B''\left(\frac{3}{n}\right) + \left(\frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{3}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{3}{n}\right)^{2m}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$B''\left(k+\frac{n-1}{n}\right) = B''\left(\frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{n-1}{n}\right)^{2m}$$

$$^{16)}B''(k) = \left(\frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{n}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}.$$

Addieren wir alle diese Gleichungen, so liefert die erste Kolonne der rechten Seite gemäss (α) Null; sämtliche übrigen Potenzen mit dem Exponenten (2m), also von $\left(\frac{1}{n}\right)^{2m}$ bis zu $\left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}$ lassen sich gestützt auf (18ª) darstellen durch $\frac{1}{n^{2m}}B''(nk)$; deshalb wird

$$B''(k)+B''\left(k+\frac{1}{n}\right)+B''\left(k+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B''\left(k+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m}}B''(nk). \qquad (19)$$

Raabe weist dann nach, dass diese Formel gilt für $k =$ beliebig rational gebrochen und positiv, dann für alle irrationalen positiven Werte von k, schliesslich zeigt er, dass dieselbe auch für negative reelle Werte von k die Gültigkeit nicht verliert.[17])

Um den entsprechenden Satz für die ungerade Bernoullische Funktion zu erhalten, verfährt er wie folgt: Ausgehend von (7), wird

$$B'_1(z)=(2m+1)B''(z).$$ [18])

Er ersetzt darin z durch $\left(z+\frac{k}{n}\right)$, summiert beidseitig von $k=0$ bis $k=n-1$ und erhält unter Anwendung von (19)

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right)=(2m+1)\sum_{k=0}^{k=n-1}B''\left(z+\frac{k}{n}\right)=\frac{(2m+1)}{n^{2m}}B''(nz).$$

Nach (7) ist aber auch $B'_1(nz)=(2m+1)B''(nz)$, daher

$$\frac{1}{n^{2m}}B'_1(nz)=\sum_{k=0}^{k=n-1}B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right).$$

Wird beidseitig mit dz multipliziert und in Beziehung auf z integriert, so folgt

$$\frac{1}{n^{2m+1}}B'(nz)=\sum_{k=0}^{k=n-1}B'\left(z+\frac{k}{n}\right)+M, \qquad (\beta)$$

wo M als Integrationskonstante von z unabhängig ist. Um diese zu bestimmen, setzen wir $z=0$, dann wird

$$0=M+\sum_{k=0}^{k=n-1}B'\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$M=-\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}.$$

Durch Vergleichung zweier für dasselbe bestimmte Integral gefundener Ausdrücke, erhält Raabe dann

$$B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\left\{n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right\}B_{m+1}.$$

Setzt er die erhaltenen Werte in die vorhin erhaltene Formel (β) ein, so wird

$$B'(z)+B'\left(z+\frac{1}{n}\right)+B'\left(z+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m+1}}B'(nz)-\frac{(-1)^m\left\{n^{2m+2}-1\right\}}{(2m+2)\,n^{2m+1}}B_{m+1}, \qquad (20)$$

eine Formel, die gleich wie (19) für sämtliche reelle Werte von z und für ganze und positive Werte von n identisch Bestand hat.

Diese letzten zwei Beziehungen zeigen, wie schon Raabe andeutet, eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Gauss'schen Fundamentalsatz in der Theorie der Gamma-Funktion

$$\Gamma(a)\,.\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right).\,\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\Gamma(na)\,.\,n^{-na+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

nur finden sich hier alles Produkte, während bei der Bernoullischen Funktion Summen auftreten.[19]) Es wäre wahrscheinlich sehr interessant, sämtliche Analogien beider Funktionen herauszusuchen; doch würde uns das zu weit von unserem Thema wegleiten.

§ 4. Diskussion der Bernoullischen Funktion.

Raabe diskutiert seine aufgestellten Definitionsformeln in keiner einer Arbeiten; doch müssen wir auf diese Frage auch bei dieser Definition eintreten, damit wir später mit den andern vergleichen können. Wir kommen am besten zum Ziel, wenn wir bei den Bernoullischen Funktionen mit niedrigen Exponenten anfangen und allmählich zu denjenigen mit höhern fortschreiten.

Setzt man für m der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ..., so erhalten die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte:

$$B_0(z) = z.$$

$$B_1(z) = \frac{1}{2} z (z-1).$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z.$$

$$B_3(z) = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2.$$

$$B_4(z) = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{30} z.$$

$$B_5(z) = \frac{1}{6} z^6 - \frac{1}{2} z^5 + \frac{5}{12} z^4 - \frac{1}{12} z^2.$$

$$B_6(z) = \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{2} z^6 + \frac{1}{2} z^5 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{42} z.$$

$$B_7(z) = \frac{1}{8} z^8 - \frac{1}{2} z^7 + \frac{7}{12} z^6 - \frac{7}{24} z^4 + \frac{1}{12} z^2.$$

Für uns sind diejenigen Werte am wichtigsten, für welche z innerhalb des Intervalles 0 und 1 liegt; für z ausserhalb nehmen die Funktionen rasch grosse Werte an; auch können diese Werte aus den innerhalb dieses Intervalles liegenden berechnet werden. Die Tabelle I am Schlusse dieser Arbeit gibt die Werte der sechs ersten Bernoullischen Funktionen für verschiedene z von -3 bis $+4$.

1. $B_0(z) = z$. Diese Funktion stellt somit eine Gerade dar, die durch den Ursprung der Zahlenebene geht und den Winkel der Koordinatenaxen halbiert, indem sie durch den ersten und dritten Quadranten läuft.

2. $B_1(z) = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z$. Am meisten interessieren uns die, Maximal- und Minimalwerte der Funktion. Nach der bekannten Regel aus der Theorie der Maxima und Minima entwickelter Funktionen erhalten wir hier ein Minimum für $z = \frac{1}{2}$. Es ist leicht einzusehen dass von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ diese Funktion fortwährend abnimmt und negativ bleibt; der kleinste Wert muss somit $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ sein. Von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ beginnt die Funktion fortwährend grösser zu werden, um für $z = 1$ den Nullwert zu erreichen, von wo an die

Funktion weiter zunimmt. Der Anblick der Gleichung sagt uns überhaupt sofort, dass diese Funktion eine Parabel darstellt, die durch den Ursprung geht.

3. $B_2 = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z$. Wir erhalten ein Minimum für $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$ und ein Maximum für $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem wird diese Funktion für $z = \frac{1}{2}$ zu 0; daher folgt:

Zwischen $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ ist diese Funktion stets positiv und weist ein Maximum auf bei $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; im Intervall von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ ist dieselbe negativ mit dem berechneten Minimum bei $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Wie wir später sehen werden, stellt diese Gleichung eine Parabel höherer Ordnung dar.

4. $B_3 = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2$. Die Rechnung ergibt zwei Minima, bei $z = 0$ und $z = 1$ und ein Maximum bei $z = \frac{1}{2}$. Diese Funktion ist im ganzen Zwischenraum von 0 bis 1 positiv und besitzt eine Maximalstelle für $z = \frac{1}{2}$, wofür $B_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ wird. Es stellt dieselbe wieder eine Parabel höherer Ordnung dar; diese geht durch den Nullpunkt, der aber kein Doppelpunkt ist; gleichwohl ist die Abszissenaxe Doppeltangente; sie berührt in $z = 0$ und $z = 1$.

Bei der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen können wir nicht mehr analog verfahren, da wir auf Gleichungen vierten und noch höhern Grades gelangen; wir begnügen uns hier mit der graphischen Darstellung der zwei folgenden, höhern Bernoullischen Funktionen. Bei einer später zu untersuchenden Definition der Bernoullischen Funktion werden wir einen ausreichenden Weg der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen kennen lernen.[20])

§ 5. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Schon bei der Ableitung der Definitionsgleichung gelangte Raabe zu Reihen, welche die Bernoullischen Funktionen darstellen, ebenso bei der Herleitung der Differentialquotienten. Wir verweisen hier nur auf die diesbezüglichen Formeln (4), (5), (9) und (10). Dieselben zeigen viel Ähnlichkeit mit den Reihenentwicklungen der übrigen Definitionen der Bernoullischen Funktion.

§ 6. Die Bernoullische Funktion als bestimmtes Integral.

Es handelt sich nicht darum, eine erschöpfende Darstellung aller Integrale der Bernoullischen Funktion zu geben; wir wählen nur die zum Vergleich mit den andern Definitionen wichtigen.

Durch Multiplikation mit $\cos 2 r \pi z\, dz$, resp. $\sin 2 r \pi z\, dz$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 entstehen aus den Formeln (9) und (10) unter der Voraussetzung, dass r und k ganze Zahlen seien, die vier leicht herzuleitenden Formeln.[21])

$$\int_0^1 B''(z) \cos 2 r \pi z\, dz = 0. \tag{21}$$

$$\int_0^1 B''(z) \sin 2 r \pi z\, dz = \frac{(-1)^{m-1} \Gamma(2m+1)}{(2 \pi r)^{2m+1}}. \tag{22}$$

$$\int_0^1 B'(z) \sin 2 r \pi z\, dz = 0. \tag{23}$$

$$\int_0^1 B'(z) \cos 2 r \pi z\, dz = \frac{(-1)^{m} \Gamma(2m+2)}{(2 \pi r)^{2m+2}}. \tag{24}$$

Multiplizieren wir (4) mit $B''(z)\, dz$ und integrieren zwischen 0 und 1, so folgt, da die Doppelsumme durch die verschwindenden Integrale zur einfachen Summe wird,

$$\int_0^1 B''^2(z)\, dz = \frac{4\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{4m+2}} \int_0^1 \sin^2 2 k \pi z\, dz.$$

Der Wert des Integrales rechts ist $\frac{1}{2}$, somit

$$\int_0^1 B''^2(z)\, dz = \frac{2\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{4m+2}} = \frac{2\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}}\, S_{4m+2}.$$

Wird S_{4m+2} durch Bernoullische Zahlen ausgedrückt, so resultiert

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+1)}{(2m+1)(2m+2)\ldots\ldots(4m+2)} B_{2m+1}. \qquad (25)$$

Ebenso wird aus (5)

$$\int_0^1 B'^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+2)}{(2m+2)(2m+3)\ldots\ldots(4m+4)} B_{2m+2}$$

$$+ \left\{\frac{B_{m+1}}{2m+2}\right\}^2. \qquad (26)$$

Mit Zuziehung der Gammafunktion gelangt Raabe zu einer Anzahl bestimmter Integrale, welche durch die Bernoullische Funktion dargestellt werden können.

Bekanntlich ist $\frac{\Gamma(2m+1)}{k^{2m+1}} = \int_0^\infty e^{-ku} u^{2m}\,du$. Setzen wir diesen Wert in Formel (4) ein, so wird

$$\frac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1} B''(z) = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku} \sin 2k\pi z\right\} u^{2m}\,du.$$

Da aber $\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku} \sin 2k\pi z = \frac{\sin 2\pi z}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}}{2\sin 2\pi z} B''(z). \qquad (27)$$

Ebenso wird

$$\int_0^\infty \frac{(\cos 2\pi z - e^{-u})\,u^{2m+1}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{1}{2}(-1)^m (2\pi)^{2m+2} B'(z)$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2} B_{m+1}. \qquad (28)$$

Durch partielle Integration findet Raabe eine weitere Anzahl von bestimmten Integralen, ausgedrückt durch Bernoullische Zahlen oder Funktionen. Ebenso erhält er noch andere kompliziertere Formeln, wenn er die Summenformeln oder andere zweckmässig gewählte, mit den Bernoullischen Funktionen in Beziehung stehende Ausdrücke in Partialbrüche zerlegt. Alle diese Beziehungen erfordern aber eine ziemlich umständliche Herleitung.[22])