Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Autor: Renfer, H.

Kapitel: Einleitung

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

H. Renfer.

Die Definitionen
der
Bernoullischen Funktion
und Untersuchung der Frage,
welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist.

[Historisch-kritisch beleuchtet.]

Einleitung.

Die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes ist ziemlich rasch erschöpft, was schon aus der spärlichen Litteratur über diese Funktion hervorgehen dürfte, sind es doch äusserst wenige Autoren, die sich mit einer speziellen Untersuchung der Bernoullischen Funktion befreundet haben.[1]) Weit grösser ist die Anzahl der Schriften über die Bernoullischen Zahlen, auf deren Theorie sich diejenige der Bernoullischen Funktion aufbaut.[2]) Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis der Theorie der Bernoullischen Zahlen[3]) voraus, wenigstens in Bezug auf ihre wichtigsten Eigenschaften und Beziehungen und die gebräuchlichsten Rekursionsformeln. Wo es nötig ist, wird jeweilen auf die betreffende Litteratur verwiesen.

Eingeführt in die algebraische Analysis wurde die Bernoullische Funktion von Professor Dr. *J. L. Raabe* in Zürich durch seine Arbeit «*Die Jakob Bernoullische Funktion*», die im Jahre 1848 im Verlage von Orell, Füssli & Cie. in Zürich erschien. Raabe gelangte gestützt auf Reihensummierungen und mit Hülfe der Bernoullischen Summenformel auf diese Funktion; gemäss letzterer Beziehung benannte er dieselbe nach dem grossen Basler Mathematiker Jakob Bernoulli.[4]) Als Beleg diene der Anfang des Vorwortes der oben erwähnten Schrift:

«Bei der Summation der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$\begin{aligned}
& a_1 + 2^m . a_2 x + 3^m . a_3 x^2 \\
& \qquad + \cdots\cdots + p^m . a_p x^{p-1} \\
& + (p+1)^m a_1 x^p + (p+2)^m a_2 x^{p+1} + (p+3)^m a_3 x^{p+2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + (p+p)^m a_p x^{2p-1} \\
& + (2p+1)^m a_1 x^{2p} + (2p+2)^m a_2 x^{2p+1} + (2p+3)^m a_3 x^{2p+2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + (2p+p)^m a_p x^{3p-1} \\
& + (3p+1)^m a_1 x^{3p} + (3p+2)^m a_2 x^{3p+1} + (3p+3)^m a_3 x^{3p+2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + (3p+p)^m a_p x^{4p-1} \\
& + \text{in inf.}
\end{aligned}$$

an der äussersten Grenze ihrer Konvergenz, wobei m eine ganze und positive Zahl, Null mitbegriffen, vorstellt und a_1, a_2, $a_3 \ldots\ldots a_p$ endliche Konstanten sind, wird man auf einen Ausdruck geführt, der die von Jakob Bernoulli eingeführten, nach ihm benannten Zahlen impliziert, und welcher zur Summierung der Reihe mit dem allgemeinen Gliede r^m, wo r alle ganzen Zahlenwerte von 1 aufwärts gezählt annehmen kann, von ihm benutzt worden ist. Diesen Ausdruck, in seiner Allgemeinheit, nenne ich die «Jakob Bernoullische Funktion» oder kürzer die «Bernoullische Funktion», und bezeichne solche, gleich wie die Bernoullischen Zahlen, die sie enthält, durch B_1, B_2, $B_3, \ldots\ldots B_m, \ldots\ldots$ dargestellt zu werden pflegen, durch $B(z)$, falls z die allgemeine Grösse oder Variabele dieser Funktion ist.»

Im Jahre 1851 erschien eine zweite Abhandlung Raabes über denselben Gegenstand, betitelt «*Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob Bernoullische Funktion.*» [5]) Durch diese Arbeit wird seine frühere Schrift bedeutend erweitert und ergänzt.

Nach Raabe hat sich dann auch Dr. *O. Schlömilch*, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, einlässlich mit dieser Funktion beschäftigt. Seine im Jahre 1856 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band I, Seite 193 u. ff. veröffentlichte Abhandlung «*Ueber die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwicklung halbkonvergenter Reihen*» stellt die Bernoullische Funktion elegant als Nullwert von Differentialquotienten dar. Diese Darstellung ist sehr interessant; die Ausdrücke für die Spezialwerte der verschieden hohen Derivierten sind ziemlich einfach anzusehen, doch sind die Operationen, welche damit auszuführen sind, wie wir sehen werden, oft schwierig und erfordern viel Zeit. Die Schlömilchsche Definition stimmt nicht mit derjenigen von Raabe überein; doch ist die Beziehung zwischen beiden sehr einfach aufzustellen, was wir in einem spätern Abschnitt dieser Arbeit darstellen werden. Etwas erweitert findet sich die vorhin erwähnte Abhandlung auch in Schlömilchs «Compendium der höhern Analysis.» Braunschweig 1866, Seite 207 u. ff. des II. Bandes.

Wie aus den hinterlassenen Manuskripten von Professor Dr. *L. Schläfli* in Bern hervorgeht, hat sich auch dieser eingehend mit der Bernoullischen Funktion beschäftigt. Seine Definition stimmt mit den beiden vorher erwähnten nicht überein; er kommt, allerdings auf ganz anderem Wege, zu einer den frühern aber nahe verwandten Funktion, nämlich als Zusammenhang mit den Koeffizienten einer Binomialentwicklung. Das Interessante seiner Definition ist, dass dieselbe aus der gleichen Fundamentalbeziehung herstammt, wie die Definitionsgleichung der Bernoullischen Zahlen. Immerhin lässt sich seine Definition mit den beiden vorhergehenden in einfache Beziehungen bringen.

Schliesslich hat sich in den letzten Jahren noch der englische Mathematiker Dr. *J. W. L. Glaisher* sehr eingehend mit dieser Funktion befasst. Von demselben existieren zwei in englischen mathematischen Zeitschriften erschienene Abhandlungen über diesen Gegenstand. Nachdem derselbe in seiner ersten Arbeit «*On the Bernoullian Function,*»[6]) die allgemeine Theorie der Bernoullischen Funktion ausführlich entwickelt hatte, gab er in seiner zweiten Schrift «*On the definite Integrals connected with the Bernoullian Function*»[7]) meist Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion, wie es ja schon der Titel sagt; es finden sich jedoch auf Seite 21 einzelne Spezialwerte dieser Funktion, so dass die letztgenannte Schrift zu den vorliegenden Untersuchungen ebenfalls herbeigezogen werden musste.

Es handelt sich nun darum, nachzuweisen, welche dieser verschiedenen Definitionen von Raabe, Schlömilch, Schläfli und Glaisher, und letzterer hat selbst wieder von einander abweichende aufgestellt, für die Theorie die zutreffendste ist. Um diese Frage entscheiden zu können, müssen wir uns vorerst mit den einzelnen Definitionen vertraut machen. Wir betrachten daher der Reihe nach die verschiedenen Definitionen, möglichst erschöpfend und mit Weglassung alles Nebensächlichen. Gestützt auf diese Betrachtungen treffen wir dann unsere Folgerungen und den Entscheid der Frage. Die einzelnen Abschnitte gliedern sich im Wesentlichen gleichartig, nur lassen sich bei der einen Definition diese Eigenschaften, bei der andern jene leichter aus der Grundgleichung ableiten. Im ganzen soll der historische Gang möglichst innegehalten werden.

Endlich sei der Vollständigkeit halber noch bemerkt, dass sich bei einzelnen Arbeiten über die Bernoullischen Zahlen hie und da einige Bemerkungen über die Bernoullische Funktion finden. Am Schlusse dieser Arbeit findet sich deshalb ein Verzeichnis sämtlicher benutzter Quellen und Werke.

Die dieser Arbeit beigefügten Tabellen und Kurven wurden selbst berechnet und dargestellt.

I. Die Bernoullische Funktion nach J. Raabe.

§ 1. Herleitung der Definition.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gelangt Raabe auf diese Funktion bei der Entwicklung von $\sum x^m$ in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes. Der Weg der Herleitung vermittelst Summation von Differenzreihen ist so ausgedehnt, dass hier auf eine Wiedergabe desselben verzichtet werden muss, da dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten würde, umfasst die Ableitung dieser Definition in Raabes erster Schrift ja nicht weniger als dreizehn Druckseiten; zudem ist die Herleitung ziemlich einfach und bietet durchaus keine Schwierigkeiten.[8])

Raabe definiert darin

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3} B_2 z^{m-3} + \frac{1}{6}\binom{m}{5} B_3 z^{m-5} - + \cdots\cdots \quad (1)$$

als die «Bernoullische Funktion.»

Aus dem Grunde, dass der Funktionsexponent m nicht in der ganzen Allgemeinheit einer absoluten Variabelen auftritt, hat Raabe denselben in der Bezeichnung der Bernoullischen Funktion unbeachtet gelassen. Da sich eine Verschiedenheit der Bernoullischen Funktion