**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern

**Band:** - (1900)

**Heft:** 1478-1499

**Artikel:** Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

**Autor:** Renfer, H.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-319106

H. Renfer.

# Die Definitionen
der
# Bernoullischen Funktion
und Untersuchung der Frage,
## welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist.

[Historisch-kritisch beleuchtet.]

## Einleitung.

Die Vorgeschichte des hier zu behandelnden Gegenstandes ist ziemlich rasch erschöpft, was schon aus der spärlichen Litteratur über diese Funktion hervorgehen dürfte, sind es doch äusserst wenige Autoren, die sich mit einer speziellen Untersuchung der Bernoullischen Funktion befreundet haben.[1]) Weit grösser ist die Anzahl der Schriften über die Bernoullischen Zahlen, auf deren Theorie sich diejenige der Bernoullischen Funktion aufbaut.[2]) Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis der Theorie der Bernoullischen Zahlen[3]) voraus, wenigstens in Bezug auf ihre wichtigsten Eigenschaften und Beziehungen und die gebräuchlichsten Rekursionsformeln. Wo es nötig ist, wird jeweilen auf die betreffende Litteratur verwiesen.

Eingeführt in die algebraische Analysis wurde die Bernoullische Funktion von Professor Dr. *J. L. Raabe* in Zürich durch seine Arbeit «*Die Jakob Bernoullische Funktion*», die im Jahre 1848 im Verlage von Orell, Füssli & Cie. in Zürich erschien. Raabe gelangte gestützt auf Reihensummierungen und mit Hülfe der Bernoullischen Summenformel auf diese Funktion; gemäss letzterer Beziehung benannte er dieselbe nach dem grossen Basler Mathematiker Jakob Bernoulli.[4]) Als Beleg diene der Anfang des Vorwortes der oben erwähnten Schrift:

«Bei der Summation der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$
\begin{aligned}
& a_1 + 2^m . a_2 x + 3^m . a_3 x^2 \\
& \qquad + \cdots\cdots + p^m . a_p x^{p-1} \\
& + (p+1)^m a_1 x^p + (p+2)^m a_2 x^{p+1} + (p+3)^m a_3 x^{p+2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + (p+p)^m a_p x^{2p-1} \\
& + (2p+1)^m a_1 x^{2p} + (2p+2)^m a_2 x^{2p+1} + (2p+3)^m a_3 x^{2p+2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + (2p+p)^m a_p x^{3p-1} \\
& + (3p+1)^m a_1 x^{3p} + (3p+2)^m a_2 x^{3p+1} + (3p+3)^m a_3 x^{3p+2} \\
& \qquad + \cdots\cdots + (3p+p)^m a_p x^{4p-1} \\
& + \text{in inf.}
\end{aligned}
$$

an der äussersten Grenze ihrer Konvergenz, wobei m eine ganze und positive Zahl, Null mitbegriffen, vorstellt und $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_p$ endliche Konstanten sind, wird man auf einen Ausdruck geführt, der die von Jakob Bernoulli eingeführten, nach ihm benannten Zahlen impliziert, und welcher zur Summierung der Reihe mit dem allgemeinen Gliede $r^m$, wo r alle ganzen Zahlenwerte von 1 aufwärts gezählt annehmen kann, von ihm benutzt worden ist. Diesen Ausdruck, in seiner Allgemeinheit, nenne ich die «Jakob Bernoullische Funktion» oder kürzer die «Bernoullische Funktion», und bezeichne solche, gleich wie die Bernoullischen Zahlen, die sie enthält, durch $B_1$, $B_2$, $B_3, \ldots\ldots B_m, \ldots\ldots$ dargestellt zu werden pflegen, durch $B(z)$, falls z die allgemeine Grösse oder Variabele dieser Funktion ist.»

Im Jahre 1851 erschien eine zweite Abhandlung Raabes über denselben Gegenstand, betitelt «*Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jakob Bernoullische Funktion.*» [5]) Durch diese Arbeit wird seine frühere Schrift bedeutend erweitert und ergänzt.

Nach Raabe hat sich dann auch Dr. *O. Schlömilch*, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, einlässlich mit dieser Funktion beschäftigt. Seine im Jahre 1856 in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band I, Seite 193 u. ff. veröffentlichte Abhandlung «*Ueber die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwicklung halbkonvergenter Reihen*» stellt die Bernoullische Funktion elegant als Nullwert von Differentialquotienten dar. Diese Darstellung ist sehr interessant; die Ausdrücke für die Spezialwerte der verschieden hohen Derivierten sind ziemlich einfach anzusehen, doch sind die Operationen, welche damit auszuführen sind, wie wir sehen werden, oft schwierig und erfordern viel Zeit. Die Schlömilchsche Definition stimmt nicht mit derjenigen von Raabe überein; doch ist die Beziehung zwischen beiden sehr einfach aufzustellen, was wir in einem spätern Abschnitt dieser Arbeit darstellen werden. Etwas erweitert findet sich die vorhin erwähnte Abhandlung auch in Schlömilchs «Compendium der höhern Analysis.» Braunschweig 1866, Seite 207 u. ff. des II. Bandes.

Wie aus den hinterlassenen Manuskripten von Professor Dr. *L. Schläfli* in Bern hervorgeht, hat sich auch dieser eingehend mit der Bernoullischen Funktion beschäftigt. Seine Definition stimmt mit den beiden vorher erwähnten nicht überein; er kommt, allerdings auf ganz anderem Wege, zu einer den frühern aber nahe verwandten Funktion, nämlich als Zusammenhang mit den Koeffizienten einer Binomialentwicklung. Das Interessante seiner Definition ist, dass dieselbe aus der gleichen Fundamentalbeziehung herstammt, wie die Definitionsgleichung der Bernoullischen Zahlen. Immerhin lässt sich seine Definition mit den beiden vorhergehenden in einfache Beziehungen bringen.

Schliesslich hat sich in den letzten Jahren noch der englische Mathematiker Dr. *J. W. L. Glaisher* sehr eingehend mit dieser Funktion befasst. Von demselben existieren zwei in englischen mathematischen Zeitschriften erschienene Abhandlungen über diesen Gegenstand. Nachdem derselbe in seiner ersten Arbeit «*On the Bernoullian Function,*»[6]) die allgemeine Theorie der Bernoullischen Funktion ausführlich entwickelt hatte, gab er in seiner zweiten Schrift «*On the definite Integrals connected with the Bernoullian Function*»[7]) meist Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion, wie es ja schon der Titel sagt; es finden sich jedoch auf Seite 21 einzelne Spezialwerte dieser Funktion, so dass die letztgenannte Schrift zu den vorliegenden Untersuchungen ebenfalls herbeigezogen werden musste.

Es handelt sich nun darum, nachzuweisen, welche dieser verschiedenen Definitionen von Raabe, Schlömilch, Schläfli und Glaisher, und letzterer hat selbst wieder von einander abweichende aufgestellt, für die Theorie die zutreffendste ist. Um diese Frage entscheiden zu können, müssen wir uns vorerst mit den einzelnen Definitionen vertraut machen. Wir betrachten daher der Reihe nach die verschiedenen Definitionen, möglichst erschöpfend und mit Weglassung alles Nebensächlichen. Gestützt auf diese Betrachtungen treffen wir dann unsere Folgerungen und den Entscheid der Frage. Die einzelnen Abschnitte gliedern sich im Wesentlichen gleichartig, nur lassen sich bei der einen Definition diese Eigenschaften, bei der andern jene leichter aus der Grundgleichung ableiten. Im ganzen soll der historische Gang möglichst innegehalten werden.

Endlich sei der Vollständigkeit halber noch bemerkt, dass sich bei einzelnen Arbeiten über die Bernoullischen Zahlen hie und da einige Bemerkungen über die Bernoullische Funktion finden. Am Schlusse dieser Arbeit findet sich deshalb ein Verzeichnis sämtlicher benutzter Quellen und Werke.

Die dieser Arbeit beigefügten Tabellen und Kurven wurden selbst berechnet und dargestellt.

---

# I. Die Bernoullische Funktion nach J. Raabe.

## § 1. Herleitung der Definition.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gelangt Raabe auf diese Funktion bei der Entwicklung von $\sum x^m$ in eine Potenzreihe unter Anwendung des binomischen Satzes. Der Weg der Herleitung vermittelst Summation von Differenzreihen ist so ausgedehnt, dass hier auf eine Wiedergabe desselben verzichtet werden muss, da dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit überschreiten würde, umfasst die Ableitung dieser Definition in Raabes erster Schrift ja nicht weniger als dreizehn Druckseiten; zudem ist die Herleitung ziemlich einfach und bietet durchaus keine Schwierigkeiten.[s])

Raabe definiert darin

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3} B_2 z^{m-3} + \frac{1}{6}\binom{m}{5} B_3 z^{m-5} - + \cdots\cdots \quad (1)$$

als die «Bernoullische Funktion.»

Aus dem Grunde, dass der Funktionsexponent m nicht in der ganzen Allgemeinheit einer absoluten Variabelen auftritt, hat Raabe denselben in der Bezeichnung der Bernoullischen Funktion unbeachtet gelassen. Da sich eine Verschiedenheit der Bernoullischen Funktion mit geradem und ungeradem Exponenten ergibt, so bezeichnet er die Bernoullische Funktion mit geradem Exponenten 2 m durch $B''(z)$ und diejenige mit ungeradem Exponenten $(2m+1)$ durch $B'(z)$, wobei $m =$ ganz und positiv, weshalb sich folgende zwei Definitionsgleichungen ergeben

$$B''(z) = \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m \,.\, z. \tag{2}$$

$$B'(z) = \frac{z^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2} z^{2m+1} + \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 z^{2m} - \frac{1}{4}\binom{2m+1}{3} B_2 z^{2m-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m z^2. \tag{3}$$

Aus diesen beiden Hauptgleichungen ist ersichtlich, dass nach Raabe auf der rechten Seite kein von der Variabelen freier Term vorkommen darf, eine Bestimmung, welche, wie wir sehen werden, die so definierte Bernoullische Funktion zu wenig allgemein macht.

Bedeutend rascher gelangt Raabe in seiner zweiten Arbeit zu der nämlichen Definitionsgleichung. Ausgangspunkt dieser Herleitung ist die bekannte Beziehung

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Dieser Ausdruck wird mehrmals nacheinander mit $dx$ multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und $x$ integriert; so entstehen successive die Bernoullischen Funktionen mit den Exponenten 2, 3, 4, ......., nämlich

$$\frac{x^2}{1\,.\,2} = \pi x - 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1 - \cos kx}{k^2},$$

und sei noch abkürzend, wie gebräuchlich, bezeichnet

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^m} = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots \text{ in inf.} = S_m,$$

so werden

$$\frac{x^2}{1\,.\,2} = \pi\,.\,x - 2 S_2 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

$$\frac{x^3}{3!} = \pi \cdot \frac{x^2}{2!} - 2\,S_2\,x + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^3}.$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \pi \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!} - 2\,S_2 \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + 2\,S_4 \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^{m-1} S_{2m-2} \frac{x^3}{3!} + 2(-1)^m S_{2m}\,x + 2(-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^{2m+1}}. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} = \pi \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - 2\,S_2 \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 2\,S_4 \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} - + \cdots\cdots$$

$$+ 2(-1)^m S_{2m} \frac{x^2}{2!} + 2(-1)^{m+1} S_{2m+2} + 2(-1)^{m+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k\,x}{k^{2m+2}}. \qquad (\beta)$$

Beide gelten für alle Werte von $x = 0$ bis $x = 2\pi$; m darf gehen von 0, 1, 2, . . . . .; eine Ausnahme bildet nur $m = 0$; denn für diesen Wert bleiben die Grenzwerte $x = 0$ und $x = 2\pi$ ausgeschlossen.

Berücksichtigen wir, dass

$$B_m = (2m)!\,\frac{2}{(2\pi)^{2m}}\,S_{2m},$$

und multiplizieren wir ($\alpha$) mit $\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}}$ und ($\beta$) mit $\frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}}$, so werden

$$\frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin k\,x}{k^{2m+1}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m-1} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

$$\frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos k\,x}{k^{2m+2}} = \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2m} - + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$+ \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1}.$$

In diesen beiden letzten Gleichungen ersetzt Raabe $\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ durch x und führt die Beziehungen (2) und (3) ein; dann werden

$$B''(x) = \frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}} (2m)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} \tag{4}$$

$$B'(x) = \frac{2(-1)^{m}}{(2\pi)^{2m+2}} (2m+1)! \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m+2}} - \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1}. \tag{5}$$

Durch obige Substitution hat sich aber das Gültigkeitsgebiet verkleinert; die Beziehungen (4) und (5) gelten nur noch für $0 < x < 1$, inklusive Grenzen, wenn der Fall $m = 0$ ausgeschlossen wird.

Aus diesen ziemlich komplizierten Formeln leitet Raabe die Mehrzahl der Eigenschaften der Bernoullischen Funktion ab, weshalb seine Ableitungen oft etwas lang und umständlich werden.

Da wir zu spätern Vergleichungen noch die Bernoullische Funktion mit dem Exponenten $(2m-1)$ nötig haben, so geben wir Raabes Definitionsformel für dieselbe, nämlich

$$B'(z) = \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} B_1 z^{2m-2} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2. \tag{6}$$

## § 2. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

### A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir können dieselben aus den Definitionsgleichungen (2) und (3), oder viel einfacher aus (4) und (5) auf folgende Weise finden:

1. *Für die ungerade Bernoullische Funktion* wird nach (2)

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2m+2}{2m+2} z^{2m+1} - \frac{1}{2}(2m+1) z^{2m}$$
$$+ \frac{1}{2}\binom{2m+1}{1} B_1 2m \,.\, z^{2m-1} - + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1} B_m \, 2z$$
$$= (2m+1 \left\{ \frac{z^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2} z^{2m} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 z^{2m-1} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 z^{2m-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m z \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B'(z) = (2m+1)\, B''(z). \tag{7}$$

2. Für *die gerade Bernoullische Funktion* bedienen wir uns der Formel (3); es wird

$$\frac{\partial}{\partial x} B''(z) = z^{2m} - \frac{2m}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} B_1 (2m-1) z^{2m-2}$$

$$-\frac{1}{4}\binom{2m}{3} B_2 (2m-3) z^{2m-4} + - \dots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m}{2m-3} B_{m-1} z^2$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1} B_m$$

$$= 2m \left\{ \frac{z^{2m}}{2m} - \frac{1}{2} z^{2m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m-1}{1} z^{2m-2} B_1 \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\binom{2m-1}{3} B_2 z^{2m-4} + - \dots + \frac{(-1)^{m-2}}{2m-2}\binom{2m-1}{2m-3} B_{m-1} z^2 \right\}$$

$$+ (-1)^{m-1} B_m$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B''(z) = 2m \,.\, {}'B(z) + (-1)^{m-1} B_m. \tag{8}$$

Es tritt hier eine Komplikation durch Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl auf.

Noch einfacher ergeben sich dieselben Formeln aus (4) und (5), wie ersichtlich ist aus

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = \frac{2(-1)^m (2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} - 2k\pi \cdot \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$

$$= \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!\,(2m+1)}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B'(z) = (2m+1)\, B''(z). \tag{7}$$

Analog wird

$$\frac{\partial}{\partial x} B''(z) = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} 2k\pi \cdot \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+1}}$$

$$= \frac{2(-1)^{m-1}(2m-1)!\, 2m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m}}.$$

Ziehen wir die Formeln (5) und (6) in Betracht, so wird dieses zu

$$\frac{\partial}{\partial z} B''(z) = 2m \,.\, {}'B(z) + (-1)^{m-1} B_m. \tag{8}$$

### B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Da Raabe den Exponenten der Funktion nicht, oder nur ungenügend andeutet, so lassen sich die wiederholten Ableitungen nicht direkt durch die Bernoullische Funktion, wohl aber durch trigonometrische Summenformeln darstellen; wäre bei dem Funktionszeichen der Exponent berücksichtigt worden, so könnten die Derivierten mit Leichtigkeit angegeben werden.

Durch successives Differenzieren der Beziehungen (4) und (5) gelangen wir zu folgenden einfachen Gleichungen, wenn man symbolisch setzt

$$B_{2r} = (2\,r)^{te} \text{ Ableitung von } B$$

$$B''_{2r-1}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{9}$$

$$B'_{2r}(z) = \frac{2(-1)^{m+r}(2m+1)!}{(2\pi)^{2m-2r+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m-2r+2}} \tag{10}$$

### C. Einfache Integralformeln.

Aus den Gleichungen (7) und (8) resultieren durch Multiplikation mit dz und Integration zwischen den Grenzen 0 und z

$$\int_0^z B''(z)\,dz = \frac{B'(z)}{2m+1} \quad \text{und} \tag{11}$$

$$\int_0^z {}'B(z)\,dz = \frac{B''(z)}{2m} + \frac{(-1)^m B_m}{2m} z. \tag{12}$$

Führen wir dieselben Operationen an den Formeln (4) und (5) aus, so erhalten wir zwei weitere Integralformeln einfachster Art, wenn als obere Grenze $z = 1$ gewählt wird; denn es werden

$$\int_0^1 B''(z)\,dz = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}} \int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz.$$

$$\int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{2(-1)^{m}(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz$$

$$- \frac{(-1)^m}{2m+2} B_{m+1} \int_0^1 dz.$$

Nun ist $\int_0^1 \sin 2k\pi z\,dz = \int_0^1 \cos 2k\pi z\,dz = 0,$ somit

$$\int_0^1 B''(z)dz = 0 \quad (13) \quad \text{und} \quad \int_0^1 B'(z)\,dz = \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2} B_{m+1}. \quad (14)$$

## § 3. Die Bernoullische Funktion mit inversem und mit negativem Argument.

Raabe widmet diesen beiden Betrachtungen nur wenig Aufmerksamkeit; doch sind die Grundformeln schon bei ihm wie folgt hergeleitet. Er erhöht in Formel (25) seiner so langen Ableitung der Definitionsformel[9]), d. h., in

$$\begin{aligned}(1+a)^m - m a^{m-1} - a^m + \binom{m}{1}\left\{(1+a)^{m-1} - a^{m-1}\right\} \alpha_1 \\ + \binom{m}{2}\left\{(1+a)^{m-2} - a^{m-2}\right\} \alpha_2 + \cdots\cdots + \binom{m}{m-2}\left\{(1+a)^2 - a^2\right\} \alpha_{m-2} \\ + \binom{m}{m-1}\left\{(1+a) - a\right\} \alpha_{m-1} = 0\end{aligned}$$

m um die Einheit und beachtet die bekannten Ergebnisse (26) und (29) seiner Schrift und die Definitionsgleichung der Bernoullischen Funktion, wonach

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_{2h+1} = 0; \quad \alpha_{2h} = (-1)^{h-1} B_h,$$

wobei h geht von 1 bis $\infty$, so resultiert die Gleichheit

$$B(1+z) - B(z) = z^m. \tag{15}$$

Ersetzen wir in der ursprünglichen Formel (1) z durch ($-z$), so wird

$$B(-z) = \frac{(-z)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2}(-z)^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 (-z)^{m-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 (-z)^{m-3} + - \cdots\cdots$$

$$(-1)^m B(-z) = -\frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m - \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1}$$
$$+ \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 z^{m-3} - + \cdots\cdots$$

$$B(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{2} z^m + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 z^{m-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{m}{2} B_2 z^{m-3} + - \cdots\cdots$$

---

$$B(z) + (-1)^m B(-z) = - z^m. \tag{16}$$

Spezialisieren wir diese letzte Beziehung auf die gerade und ungerade Bernoullische Funktion, so erhalten wir

$$B''(-z) = - B''(z) - z^{2m} \quad \text{und} \quad B'(-z) = B'(z) + z^{2m+1}. \tag{16a}$$

Addieren wir die Formeln (15) und (16), so erkennen wir, dass

$$B(1+z) + (-1)^m B(-z) = 0. \tag{17}$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei Beziehungen, die uns über die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen nähern Aufschluss geben. Je nachdem m gerade oder ungerade, wird, wenn wir vorher z durch (—z) ersetzen,

$$B(1-z) + (-1)^m B(z) = 0. \tag{17a}$$

$$B''(1-z) = - B''(z); \; B'(1-z) = B'(z). \tag{17b}$$

Für $z = 0$ folgt aus (15) $B(1) = B(0)$, und da laut Definitionsgleichung $B(0) = 0$, so wird

$$B(0) = B(1) = 0. \tag{17c}$$

Ist der Exponent gerade und $z = \frac{1}{2}$, so entsteht nach (17b)

$$B''\left(\frac{1}{2}\right) = - B''\left(\frac{1}{2}\right),$$

und dies kann nur Null sein; somit ist

$$B(0) = B\left(\frac{1}{2}\right) = B(1) = 0. \tag{17d}$$

Es sind dies alles Resultate, die uns bei der Diskussion der Bernoullischen Funktion gute Dienste leisten werden.

Später[10]) leitet Raabe dieselben Eigenschaften aus unsern Formeln (4) und (5) ab. Er ersetzt in (4) z durch (1—z); dann wird

$$B''(1-z) = \frac{2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi(1-z)}{k^{2m+1}}.$$

Da aber $\sin 2k\pi(1-z) = - \sin 2k\pi z$, so wird

$$B''(1-z) = \frac{-2(-1)^{m+1}(2m)!}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2m+1}}, \text{ also}$$

$$B''(1-z) = -B''(z).^{11)} \tag{17^b}$$

Desgleichen wird

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi(1-z)}{k^{2m+2}}.$$

Da $\cos 2k\pi(1-z) = \cos 2k\pi z$, folgt

$$B'(1-z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1} = \frac{2(-1)^m(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2m+2}}$$

$$= B'(z) + \frac{(-1)^m}{m+2} B_{m+1}, \text{ somit}$$

$$B'(1-z) = B'(z).^{11)} \tag{17^b}$$

Dass die Funktion $B(z)$ bei der Annahme eines ganzen, positiven Exponenten $m$ die Summe der $m^{ten}$ Potenzen aller Zahlen 1 bis $(z-1)$ darstellt, kann nun gestützt auf die schon gefundenen Beziehungen leicht gezeigt werden. Zum ersten Mal sind solche Reihensummierungen von Jakob Bernoulli *allgemein* gelöst worden, der in seinem für die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung so wichtigen Werke «ars conjectandi» 1713 mit Hülfe der von ihm eingeführten Bernoullischen Zahlen, von denen er die 5 ersten berechnet[12]), solche Summierungen vornimmt. Vor ihm haben verschiedene Mathematiker wohl spezielle Potenzreihen summiert; der Engländer Wallis summierte die vierten, fünften und sechsten Potenzen[13]); auch Faulhaber führte in seiner «academia algébrae» 1631 solche Operationen aus[14]); aber Jakob Bernoulli[15]) gebührt das Verdienst, diese Aufgabe allgemein gelöst zu haben.

Ganz einfach lässt sich diese Aufgabe durch Anwendung der Bernoullischen Funktion ausführen. Wir gehen von Formel (15) aus, erhöhen successive das Argument $z$ je um die Einheit und erhalten, wenn wir schliesslich alle diese Gleichungen addieren und $z$ um $k$ Einheiten fortschreitet,

$$B(k+z) = B(z) + z^m + (1+z)^m + (2+z)^m + \cdots + (k-1+z)^m. \tag{18}$$

Daraus geht für $z=0$ die gewünschte Summationsformel von Jakob Bernoulli hervor, nämlich

$$B(k) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots\cdots + (k-1)^m. \qquad (18^a)$$

Eine weitere wichtige Formel ergibt sich aus $(17^b)$. Ersetzen wir darin z der Reihe nach durch $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$, addieren dann alle diese Gleichungen und dividieren, da jedes Glied doppelt auftritt, durch 2, so folgt für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(\frac{1}{n}\right) + B''\left(\frac{2}{n}\right) + B''\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots\cdots + B''\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0. \qquad (\alpha)$$

Setzen wir weiter für z wieder successive die Werte $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ in (18) ein, so wird für die gerade Bernoullische Funktion

$$B''\left(k+\frac{1}{n}\right) = B''\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{1}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k+\frac{2}{n}\right) = B''\left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{2}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{2}{n}\right)^{2m}$$

$$B''\left(k+\frac{3}{n}\right) = B''\left(\frac{3}{n}\right) + \left(\frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{3}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{3}{n}\right)^{2m}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$B''\left(k+\frac{n-1}{n}\right) = B''\left(\frac{n-1}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{n-1}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-1+\frac{n-1}{n}\right)^{2m}$$

$$^{16)}B''(k) = \left(\frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(1+\frac{n}{n}\right)^{2m} + \left(2+\frac{n}{n}\right)^{2m} + \cdots\cdots + \left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}.$$

Addieren wir alle diese Gleichungen, so liefert die erste Kolonne der rechten Seite gemäss $(\alpha)$ Null; sämtliche übrigen Potenzen mit dem Exponenten (2m), also von $\left(\frac{1}{n}\right)^{2m}$ bis zu $\left(k-2+\frac{n}{n}\right)^{2m}$ lassen sich gestützt auf ($18^a$) darstellen durch $\frac{1}{n^{2m}} B''(nk)$; deshalb wird

$$B''(k)+B''\left(k+\frac{1}{n}\right)+B''\left(k+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B''\left(k+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m}} B''(nk). \qquad (19)$$

Raabe weist dann nach, dass diese Formel gilt für $k =$ beliebig rational gebrochen und positiv, dann für alle irrationalen positiven Werte von k, schliesslich zeigt er, dass dieselbe auch für negative reelle Werte von k die Gültigkeit nicht verliert.[17])

Um den entsprechenden Satz für die ungerade Bernoullische Funktion zu erhalten, verfährt er wie folgt: Ausgehend von (7), wird

$$B'_1(z)=(2m+1)\,B''(z).\,^{18})$$

Er ersetzt darin z durch $\left(z+\frac{k}{n}\right)$, summiert beidseitig von $k=0$ bis $k=n-1$ und erhält unter Anwendung von (19)

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right)=(2m+1)\sum_{k=0}^{k=n-1} B''\left(z+\frac{k}{n}\right)=\frac{(2m+1)}{n^{2m}}\,B''(nz).$$

Nach (7) ist aber auch $B'_1(nz) = (2m+1)\,B''(nz)$, daher

$$\frac{1}{n^{2m}}\,B'_1(nz)=\sum_{k=0}^{k=n-1} B'_1\left(z+\frac{k}{n}\right).$$

Wird beidseitig mit dz multipliziert und in Beziehung auf z integriert, so folgt

$$\frac{1}{n^{2m+1}}\,B'(nz)=\sum_{k=0}^{k=n-1} B'\left(z+\frac{k}{n}\right)+M, \qquad (\beta)$$

wo M als Integrationskonstante von z unabhängig ist. Um diese zu bestimmen, setzen wir $z=0$, dann wird

$$0=M+\sum_{k=0}^{k=n-1} B'\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$M=-\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}.$$

Durch Vergleichung zweier für dasselbe bestimmte Integral gefundener Ausdrücke, erhält Raabe dann

$$B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\left\{n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right\}B_{m+1}.$$

Setzt er die erhaltenen Werte in die vorhin erhaltene Formel ($\beta$) ein, so wird

$$B'(z)+B'\left(z+\frac{1}{n}\right)+B'\left(z+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+B'\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2m+1}}B'(nz)-\frac{(-1)^m\left\{n^{2m+2}-1\right\}}{(2m+2)\,n^{2m+1}}B_{m+1}, \qquad (20)$$

eine Formel, die gleich wie (19) für sämtliche reelle Werte von z und für ganze und positive Werte von n identisch Bestand hat.

Diese letzten zwei Beziehungen zeigen, wie schon Raabe andeutet, eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Gauss'schen Fundamentalsatz in der Theorie der Gamma-Funktion

$$\Gamma(a)\,.\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right).\,\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$=\Gamma(na)\,.\,n^{-na+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

nur finden sich hier alles Produkte, während bei der Bernoullischen Funktion Summen auftreten.[19]) Es wäre wahrscheinlich sehr interessant, sämtliche Analogien beider Funktionen herauszusuchen; doch würde uns das zu weit von unserem Thema wegleiten.

## § 4. Diskussion der Bernoullischen Funktion.

Raabe diskutiert seine aufgestellten Definitionsformeln in keiner einer Arbeiten; doch müssen wir auf diese Frage auch bei dieser Definition eintreten, damit wir später mit den andern vergleichen können. Wir kommen am besten zum Ziel, wenn wir bei den Bernoullischen Funktionen mit niedrigen Exponenten anfangen und allmählich zu denjenigen mit höhern fortschreiten.

Setzt man für m der Reihe nach 0, 1, 2, 3, ......, so erhalten die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte:

$$B_0(z) = z.$$

$$B_1(z) = \frac{1}{2} z(z-1).$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z.$$

$$B_3(z) = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2.$$

$$B_4(z) = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{30} z.$$

$$B_5(z) = \frac{1}{6} z^6 - \frac{1}{2} z^5 + \frac{5}{12} z^4 - \frac{1}{12} z^2.$$

$$B_6(z) = \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{2} z^6 + \frac{1}{2} z^5 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{42} z.$$

$$B_7(z) = \frac{1}{8} z^8 - \frac{1}{2} z^7 + \frac{7}{12} z^6 - \frac{7}{24} z^4 + \frac{1}{12} z^2.$$

Für uns sind diejenigen Werte am wichtigsten, für welche z innerhalb des Intervalles 0 und 1 liegt; für z ausserhalb nehmen die Funktionen rasch grosse Werte an; auch können diese Werte aus den innerhalb dieses Intervalles liegenden berechnet werden. Die Tabelle I am Schlusse dieser Arbeit gibt die Werte der sechs ersten Bernoullischen Funktionen für verschiedene z von $-3$ bis $+4$.

1. $B_0(z) = z$. Diese Funktion stellt somit eine Gerade dar, die durch den Ursprung der Zahlenebene geht und den Winkel der Koordinatenaxen halbiert, indem sie durch den ersten und dritten Quadranten läuft.

2. $B_1(z) = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z$. Am meisten interessieren uns die, Maximal- und Minimalwerte der Funktion. Nach der bekannten Regel aus der Theorie der Maxima und Minima entwickelter Funktionen erhalten wir hier ein Minimum für $z = \frac{1}{2}$. Es ist leicht einzusehen dass von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ diese Funktion fortwährend abnimmt und negativ bleibt; der kleinste Wert muss somit $B_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ sein. Von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ beginnt die Funktion fortwährend grösser zu werden, um für $z = 1$ den Nullwert zu erreichen, von wo an die

Funktion weiter zunimmt. Der Anblick der Gleichung sagt uns überhaupt sofort, dass diese Funktion eine Parabel darstellt, die durch den Ursprung geht.

3. $B_2 = \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z$. Wir erhalten ein Minimum für $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$ und ein Maximum für $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem wird diese Funktion für $z = \frac{1}{2}$ zu 0; daher folgt:

Zwischen $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ ist diese Funktion stets positiv und weist ein Maximum auf bei $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$; im Intervall von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ ist dieselbe negativ mit dem berechneten Minimum bei $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Wie wir später sehen werden, stellt diese Gleichung eine Parabel höherer Ordnung dar.

4. $B_3 = \frac{1}{4} z^4 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1}{4} z^2$. Die Rechnung ergibt zwei Minima, bei $z = 0$ und $z = 1$ und ein Maximum bei $z = \frac{1}{2}$. Diese Funktion ist im ganzen Zwischenraum von 0 bis 1 positiv und besitzt eine Maximalstelle für $z = \frac{1}{2}$, wofür $B_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64}$ wird. Es stellt dieselbe wieder eine Parabel höherer Ordnung dar; diese geht durch den Nullpunkt, der aber kein Doppelpunkt ist; gleichwohl ist die Abszissenaxe Doppeltangente; sie berührt in $z = 0$ und $z = 1$.

Bei der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen können wir nicht mehr analog verfahren, da wir auf Gleichungen vierten und noch höhern Grades gelangen; wir begnügen uns hier mit der graphischen Darstellung der zwei folgenden, höhern Bernoullischen Funktionen. Bei einer später zu untersuchenden Definition der Bernoullischen Funktion werden wir einen ausreichenden Weg der Diskussion der höhern Bernoullischen Funktionen kennen lernen.[20])

## § 5. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Schon bei der Ableitung der Definitionsgleichung gelangte Raabe zu Reihen, welche die Bernoullischen Funktionen darstellen, ebenso bei der Herleitung der Differentialquotienten. Wir verweisen hier nur auf die diesbezüglichen Formeln (4), (5), (9) und (10). Dieselben zeigen viel Ähnlichkeit mit den Reihenentwicklungen der übrigen Definitionen der Bernoullischen Funktion.

## § 6. Die Bernoullische Funktion als bestimmtes Integral.

Es handelt sich nicht darum, eine erschöpfende Darstellung aller Integrale der Bernoullischen Funktion zu geben; wir wählen nur die zum Vergleich mit den andern Definitionen wichtigen.

Durch Multiplikation mit $\cos 2 r \pi z\, dz$, resp. $\sin 2 r \pi z\, dz$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 entstehen aus den Formeln (9) und (10) unter der Voraussetzung, dass r und k ganze Zahlen seien, die vier leicht herzuleitenden Formeln.[21])

$$\int_0^1 B''(z) \cos 2 r \pi z\, dz = 0. \tag{21}$$

$$\int_0^1 B''(z) \sin 2 r \pi z\, dz = \frac{(-1)^{m-1} \Gamma(2m+1)}{(2\pi r)^{2m+1}}. \tag{22}$$

$$\int_0^1 B'(z) \sin 2 r \pi z\, dz = 0. \tag{23}$$

$$\int_0^1 B'(z) \cos 2 r \pi z\, dz = \frac{(-1)^m \Gamma(2m+2)}{(2\pi r)^{2m+2}}. \tag{24}$$

Multiplizieren wir (4) mit $B''(z)\, dz$ und integrieren zwischen 0 und 1, so folgt, da die Doppelsumme durch die verschwindenden Integrale zur einfachen Summe wird,

$$\int_0^1 B''^2(z)\, dz = \frac{4\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{4m+2}} \int_0^1 \sin^2 2 k \pi z\, dz.$$

Der Wert des Integrales rechts ist $\frac{1}{2}$, somit

$$\int_0^1 B''^2(z)\, dz = \frac{2\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{4m+2}} = \frac{2\,(2m)!^2}{(2\pi)^{4m+2}}\, S_{4m+2}.$$

Wird $S_{4m+2}$ durch Bernoullische Zahlen ausgedrückt, so resultiert

$$\int_0^1 B''^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+1)}{(2m+1)(2m+2)\ldots\ldots(4m+2)}\,B_{2m+1}. \qquad (25)$$

Ebenso wird aus (5)

$$\int_0^1 B'^2(z)\,dz = \frac{\Gamma(2m+2)}{(2m+2)(2m+3)\ldots\ldots(4m+4)}\,B_{2m+2}$$

$$+\left\{\frac{B_{m+1}}{2m+2}\right\}^2. \qquad (26)$$

Mit Zuziehung der Gammafunktion gelangt Raabe zu einer Anzahl bestimmter Integrale, welche durch die Bernoullische Funktion dargestellt werden können.

Bekanntlich ist $\frac{\Gamma(2m+1)}{k^{2m+1}} = \int_0^\infty e^{-ku}\,u^{2m}\,du$. Setzen wir diesen Wert in Formel (4) ein, so wird

$$\frac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B''(z) = \int_0^\infty \left\{\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi z\right\} u^{2m}\,du.$$

Da aber $\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi z = \frac{\sin 2\pi z}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}}{2\sin 2\pi z}\,B''(z). \qquad (27)$$

Ebenso wird

$$\int_0^\infty \frac{(\cos 2\pi z - e^{-u})\,u^{2m+1}}{e^u + e^{-u} - 2\cos 2\pi z}\,du = \frac{1}{2}(-1)^m(2\pi)^{2m+2}B'(z)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}\,B_{m+1}. \qquad (28)$$

Durch partielle Integration findet Raabe eine weitere Anzahl von bestimmten Integralen, ausgedrückt durch Bernoullische Zahlen oder Funktionen. Ebenso erhält er noch andere kompliziertere Formeln, wenn er die Summenformeln oder andere zweckmässig gewählte, mit den Bernoullischen Funktionen in Beziehung stehende Ausdrücke in Partialbrüche zerlegt. Alle diese Beziehungen erfordern aber eine ziemlich umständliche Herleitung.[22])

# II. Die Bernoullische Funktion nach O. Schlömilch.

## § 7. Herleitung der Definition.

Ausgangspunkt ist die Summation der uns schon bekannten Potenzreihe

$$1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \cdots\cdots\cdots + (k-1)^p.$$

Das Problem bietet uns keine Schwierigkeiten, wenn die Fälle für $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, ....... successive behandelt werden, d. h., wenn man jeden Fall auf den vorhergehenden zurückführt; eine allgemeine Formel ist dagegen auf diese Weise nicht zu finden, wohl aber durch Differentialrechnung.

Obige Reihe entsteht durch p-malige Differentiation einer andern Reihe, so dass ist

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \left\{ D^p \, \frac{e^{kx}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0}.$$ [23]

Um die Differentiation auszuführen, zerlegen wir die rechte Seite in zwei Faktoren $\frac{x}{e^x-1} \cdot \frac{e^{kx-1}}{x} = \varphi(x) \,.\, \psi(x)$; dann wird nach der Regel der Differentiation von Produkten

$$D^p \left\{ \varphi(x)\,\psi(x) \right\}_{x=0} = \varphi(0)\,\psi^p(0) + \binom{p}{1} \varphi'(0)\,\psi^{p-1}(0) + \binom{p}{2} \varphi''(0)\,\psi^{p-2} + \cdots\cdots \qquad (\alpha)$$

Zur Berechnung der Werte $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..... benutzen wir die bekannte Formel über Bernoullische Zahlen[24])

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{2^2 B_1}{2!} y - \frac{2^4 B_2}{4!} y^3 + \frac{2^6 B_3}{6!} - + \cdots\cdots,$$

$$\text{wo } -\pi < y < \pi.$$

Durch passende Umänderung, wobei noch $y = \frac{1}{2} x$ gesetzt wird, geht diese Formel über in

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_1}{2!} x^2 - \frac{B_2}{4!} x^4 + \frac{B_3}{6!} x^6 - + \cdots\cdots$$

Daraus erhalten wir für $x = 0$ folgendes Wertesystem:

$$\varphi(0) = 1.$$

$$\varphi'(0) = -\frac{1}{2}. \qquad \varphi''(0) = B_1.$$

$$\varphi'''(0) = 0. \qquad \varphi''''(0) = -B_2.$$

$$\varphi'''''(0) = 0. \qquad \varphi''''''(0) = B_3.$$

— — — — — — — — — — — —

$$\varphi^{(2m+1)}(0) = 0. \qquad \varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m. \qquad (\beta)$$

Zur Bestimmung von $\psi^p(0)$, $\psi^{p-1}(0), \ldots\ldots$ dient

$$\frac{e^{kx}-1}{x} = k + \frac{k^2}{2!}x + \frac{k^3}{3!}x^2 + \frac{k^4}{4!}x^3 + \cdots\cdots$$

Für $\psi^p(0)$ verschwinden alle Ableitungen, die x enthalten, und

$$\psi^p(0) = \frac{k^{p+1}}{p+1}. \qquad (\gamma)$$

Setzen wir die Werte $(\beta)$ und $(\gamma)$ in Formel $(\alpha)$ ein, so folgt gestützt auf eine leicht einzusehende kleine Veränderung

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + (k-1)^p = \frac{k^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}k^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1}B_1 k^{p-1}$$
$$- \frac{1}{4}\binom{p}{3}B_2 k^{p-3} + \frac{1}{6}\binom{p}{5}B_3 k^{p-5} - + \cdots\cdots$$

Während die linke Seite nur Sinn hat für k als ganzen, positiven Wert, grösser als 1, kann die rechte Seite verallgemeinert werden; wir erhalten dann einen Ausdruck, der eine ganze, rationale Funktion darstellt. Um aber nicht Funktionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades betrachten zu müssen, und um der höchsten Potenz von k oder z, wie allgemein üblich, den Koeffizienten 1 zu verschaffen, ersetzt Schlömilch p durch $(n-1)$, multipliziert mit m und definiert unter Vernachlässigung der linken Seite

$$\varphi(z, n) = z^n - \frac{1}{2} n z^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 z^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 z^{n-4}$$
$$+ \binom{n}{6} B_3 z^{n-6} - + \cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

als die «*Bernoullische Funktion $n^{ter}$ Ordnung.*»

Die Herleitung dieser Fundamentalbeziehung verlangt, dass rechter Hand kein von z freier Term vorkommen darf; es ist dies eine Eigenschaft, welche die Allgemeinheit dieser Definition wesentlich einschränkt.[25])

Durch Vergleich erhalten wir folgende Definitionsformeln, welche die Bernoullischen Funktionen als Nullwerte von Differentialquotienten darstellen

$$\varphi(z, n) = n\, D_x^{n-1} \left\{ \frac{e^{zx} - 1}{e^x - 1} \right\}_{x=0} = D_x^n \left\{ x \frac{e^{zx} - 1}{e^x - 1} \right\}_{x=0}. \qquad (2)$$

Ausgehend von diesen beiden Hauptgleichungen hat Schlömilch die verschiedenen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion genauer untersucht. Diese Definition stimmt nicht ganz mit derjenigen von Raabe überein.[25]) Die Resultate, zu denen Schlömilch gelangt, entsprechen denjenigen, die Raabe gefunden. Schlömilch ist der erste, welcher gezeigt hat, dass die Bernoullischen Funktionen Differentialquotienten sind; dass sich dadurch die Darstellung hübscher gestaltet, ist nicht zu bezweifeln; nur ist das Operieren damit hie und da ziemlich umständlich.

## § 8. Die Derivierten der Bernoullischen Funktion.

### A. Die einfachen Differentialquotienten.

Um die Eigenschaften der Ableitungen von $\varphi(z, n)$ zu erfahren, differenzieren wir die gebrochene Funktion $\frac{e^{zx} - 1}{e^x - 1}$ $(m-1)$-mal nach x und einmal nach z und erinnern uns, dass die Reihenfolge der Operationen beliebig ist; demnach wird

$$D_z D_x^{n-1} \left\{ \frac{e^{zx} - 1}{e^x - 1} \right\} = D_x^{n-1} \left\{ x \frac{e^{zx} - 1}{e^x - 1} + \frac{x}{e^x - 1} \right\}$$

$$= D_x^{n-1} \left\{ \frac{e^{zx} - 1}{e^x - 1} + \varphi(x) \right\}.$$

Dies liefert für $x = 0$ unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen (2) $\qquad D_z \frac{\varphi(z, n)}{n} = \varphi(z, n-1) + \varphi^{(n-1)}(0).$

Trennen wir die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion, so folgt unter Anwendung früherer Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, 2m) = 2m \,.\, \varphi(z, 2m-1) \qquad \text{und} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, 2m+1) = (2m+1) \left\{ \varphi(z, 2m) + (-1)^{m-1} B_m \right\}. \qquad (4)$$

Diese beiden Formeln entsprechen ganz denjenigen von Raabe. Infolge der etwas andern Definitionsgleichung zeigt hier die Ableitung der ungeraden Bernoullischen Funktion den Zusatz einer Bernoullischen Zahl, während bei Raabe die gerade.

### B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Schlömilch gibt dieselben nicht; doch sind sie durch successive Differentiation einfach zu finden; es resultieren, ausgehend von (3) und (4), folgende Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m)=(2\lambda)!\binom{2m}{2\lambda}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.\\
&\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m)=(2\lambda+1)!\binom{2m}{2\lambda+1}\varphi(z,2m-2\lambda-1).\\
&\frac{\partial^{2\lambda}}{\partial z^{2\lambda}}\varphi(z,2m+1)=(2\lambda)!\binom{2m+1}{2\lambda}\varphi(z,2m+1-2\lambda).\\
&\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial z^{2\lambda+1}}\varphi(z,2m+1)=(2\lambda+1)!\binom{2m+1}{2\lambda+1}\left\{\varphi(z,2m-2\lambda)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+(-1)^{m-\lambda-1}B_{m-\lambda}\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Die wiederholten Ableitungen der Bernoullischen Funktion sind wieder Bernoullische Funktionen; nur treten hier noch Faktoren und Bernoullische Zahlen dazu, welche die Darstellung etwas komplizieren.

### C. Einfache Integralformen.

Multiplizieren wir die Formeln (3) und (4) mit dz und integrieren zwischen den Grenzen 0 und z, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^z\varphi(z,2m-1)\,dz=\frac{\varphi(z,2m)}{2m};\ m>1\qquad\text{und}\\
&\int_0^z\varphi(z,2m)\,dz=\frac{\varphi(z,2m+1)}{2m+1}+(-1)^m B_m\,.\,z.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Die Integrale der Bernoullischen Funktion, nach Schlömilch definiert, sind wieder gleiche Funktionen, dividiert durch eine bestimmte Zahl; für die gerade Funktion tritt noch ein Produkt einer Bernoullischen Zahl mit einer Variabelen auf, das je nach dem Exponenten m entweder addiert oder subtrahiert wird.

Für die obere Grenze $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir unter Anwendung der im folgenden § 9 zu beweisenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m-1)\,dz = \frac{(-1)^m \left\{2^{2m}-1\right\}}{m\, 2^{2m}} B_m \quad \text{und} \\ &\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, 2m)\,dz = (-1)^m \frac{1}{2} B_m. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

## § 9. Die Funktion mit inversem Argument.

Wir ersetzen in $\frac{e^{zx}-1}{e^x-1}$ die Grösse z durch $1-z$; dann geht durch leichte Umwandlung dieses über in $1 - \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1}$, und es wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = - D_x^n \left\{ x \frac{e^{-zx}-1}{e^{-x}-1} \right\}_{x=0}.$$

Ersetzen wir x durch $-\xi$, so wird

$$D_x^n \left\{ x \frac{e^{(1-z)x}-1}{e^x-1} \right\}_{x=0} = (-1)^n D_\xi^n \left\{ \xi \frac{e^{z\xi}-1}{e^\xi-1} \right\}_{\xi=0}.$$

Somit folgt nach Definitionsgleichung

$$\varphi(1-z, n) = (-1)^n \varphi(z, n). \tag{8}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Bernoullische Funktion für $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ in entgegengesetzter Reihenfolge dieselben Werte annimmt, welche sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ hatte und zwar mit dem nämlichen oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, je nachdem die Funktion von gerader oder ungerader Ordnung ist, was die Diskussion erleichtert.

Für die gerade Funktion folgt aus (8) und der Definitionsgleichung (1) für $x = 0$, dass

$$\varphi(1, 2m) = \varphi(0, 2m) = 0. \tag{9}$$

Für die ungerade Funktion wird für $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}$, wie leicht einzusehen ist,

$$\varphi(1, 2m+1) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = \varphi(0, 2m+1) = 0. \qquad (10)$$

Wir suchen nun einen Wert für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$. Dazu ersetzen wir in der Definitionsformel (2) n durch 2 m und z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = D_x^{2m}\left\{x\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = 2\,D_x^{2m}\left\{\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0}.$$

Es ist identisch gleich

$$\frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}+1} = \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}-1} - \frac{x}{e^x-1} = \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) - \varphi(x).$$

Durch 2 m-malige Differentiation nach x und Multiplikation mit 2 erhalten wir für $x = 0$ unter Berücksichtigung von $\varphi^{(2m)}(0) = (-1)^{m-1} B_m$ die Formel

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^m \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_m. \qquad (11)$$

Diese Berechnungen der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion für verschiedene Argumente sind nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes, den Schlömilch wie folgt erhält. Er setzt in der Definitionsgleichung (2) für das Argument z der Reihe nach z, $\left(z+\frac{1}{k}\right)$, $\left(z+\frac{2}{k}\right), \ldots\ldots, \left(z+\frac{k-1}{k}\right)$, addiert die so erhaltenen Ausdrücke, nimmt $\varphi(x) = \frac{x}{e^x-1}$ aus der Klammer und erhält die Summe

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\left(1+e^{\frac{x}{k}}+e^{\frac{2x}{k}}+e^{\frac{3x}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)x}{k}}\right)-k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}.$$

Durch Summation der geometrischen Reihe in der Klammer folgt

$$S = D_x^n\left\{\left[e^{zx}\frac{e^x-1}{e^{\frac{x}{k}}-1} - k\right]\varphi(x)\right\}_{x=0}$$

und durch leichte Veränderung, wenn schliesslich $x = k\xi$, wird

$$S = \frac{1}{k^{n-1}} D_\xi^n\left\{\xi\frac{e^{kz\xi}-1}{e^\xi-1}\right\}_{\xi=0} + k\left\{\frac{1}{k^m}-1\right\}\varphi^m(0).$$

Für *n = gerade = 2 m* wird

$$\varphi(z, 2m) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m\right)$$

$$= \frac{1}{k^{2m-1}}\left\{\varphi(kz, 2m) + (-1)^m (k^{2m} - 1) B_m\right\}. \quad (12)$$

Für *n = ungerade = (2 m + 1)* folgt

$$\varphi(z, 2m+1) + \varphi\left(z + \frac{1}{k}, 2m+1\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(z + \frac{k-1}{k}, 2m+1\right)$$

$$= \frac{1}{k^{2m}} \varphi(kz, 2m+1). \quad (13)$$

Wir sehen hier wieder die Zweispurigkeit der geraden und ungeraden Bernoullischen Funktion.

Setzen wir $z = 0$ und $k = \frac{1}{2}$, so finden wir aus dieser allgemeinen Formel für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$, also für die gerade Bernoullische Funktion, den schon früher gefundenen Wert (11). Ebenso lassen sich Ausdrücke finden für

$$\varphi\left(\frac{1}{3}, 2m\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) \text{ und } \varphi\left(\frac{1}{6}, 2m\right).$$

Für die ungerade Funktion kommen wir auf diese Weise zu keinen Spezialwerten.

## § 10. Die Funktion mit negativem Argument.

Um diese Funktion zu untersuchen, berechnet Schlömilch vorerst $\varphi(z+1, n)$. Nach Definitionsgleichung (2) wird durch Subtraktion

$$\varphi(z+1, n) - \varphi(z, n) = D_x^n \left\{ x \frac{e^{(z-1)x} - e^{zx}}{e^x - 1} \right\}_{x=0}$$

$$= D_x^n \left\{ x \frac{e^{zx}(e^x - 1)}{e^x - 1} \right\}_{x=0} = D_x^n \left\{ x e^{zx} \right\}_{x=0} = n z^{n-1}.$$

$$\varphi(z+1, n) = \varphi(z, n) + n z^{n-1}. \quad (14)$$

Durch Anwendung von (8) entsteht daraus

$$\varphi(-z, n) = (-1)^n \left\{ \varphi(z, n) + n z^{n-1} \right\}. \quad (15)$$

Es sind dies zwei wichtige Formeln; (14) dient dazu, aus einer Bernoullischen Funktion eine neue Bernoullische Funktion gleichen Grades, aber mit einem um die Einheit erhöhten Argument zu berechnen; (15) wird gebraucht zur Verwandlung einer Bernoullischen Funktion mit negativem Argument in eine solche mit positivem.

Mit Hülfe von (14) findet Schlömilch eine Beziehung zur Darstellung der Werte der Bernoullischen Funktion auch ausserhalb des Intervalles von 0 bis 1. Lässt man nämlich z der Reihe nach die Werte $z+1$, $z+2$, $z+3, \cdots\cdots, (z+k-1)$ annehmen, wo $k =$ positiv und ganz, und addiert dann die so erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\varphi(z+k, n) = \varphi(z, n) + n\left\{z^{n-1} + (z+1)^{n-1} + (z+2)^{n-1} + \cdots\cdots + (z+k-1)^{n-1}\right\}. \quad (16)$$

Geben wir hierin dem k einen beliebigen ganzzahligen Wert, so können wir auch höhere Werte der Bernoullischen Funktion, ganze und gebrochene, berechnen, da z nicht ganzzahlig zu sein braucht und wir ja die Bernoullische Funktion im Intervall von 0 bis 1 genau kennen. Diese Formel wird uns die zur graphischen Darstellung der einzelnen Funktionen nötigen Werte liefern, wenn wir nicht vorziehen, solche direkt aus den Definitionsformeln zu berechnen.

Schlömilch verwandelt eine Bernoullische Funktion mit negativem Argument noch durch folgende einfache Formel, die er erhält, indem er in (8) für z den Wert $\left(z + \frac{1}{2}\right)$ setzt, in eine Funktion mit positivem Argument

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - z, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right), \quad (17)$$

die in einigen Fällen gute Dienste leistet. Aus dieser Formel ist auch ersichtlich, dass $\varphi\left(\frac{1}{2} + z, n\right)$ eine gerade oder ungerade Funktion ist, je nachdem n einen geraden oder ungeraden Wert hat. Daraus ist auch $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$ als Maximal- oder Minimalwert erkennbar.

Einzelne spezielle Werte, die Schlömilch nicht oder auf ganz andere Weise herleitet, findet *J. Worpitzky* gestützt auf Schlömilchs Definition wie folgt:[26])

*1. Berechnung von* $\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right)$.

Wir ersetzen in (2) z durch $\frac{1}{2}$; dann wird

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right) = 2\, D_x^n \left\{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi(x)\right\} = -\, D_x^n \varphi(x)_0 \, \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}}.$$

Weil $D_x^{2m+1}\varphi(x)_0 = 0$ und $D_x^{2m}\varphi(x)_0 = (-1)^n B_n$, so wird für

$$n = ungerade = (2m+1) \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m+1\right) = 0 \qquad \text{und für}$$

$$n = gerade \quad = 2m \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right) = (-1)^n \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_n. \tag{18}$$

2. *Berechnung von* $\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$.

Es ist identisch $\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1} = \dfrac{e^{\frac{3w}{4}}-1}{e^w-1} - \dfrac{e^{\frac{w}{4}}-1}{e^w-1}$, wo $w = 2x$, und somit wird nach Definition (2)

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = \frac{2^{n-1}}{n}\left\{\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) - \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)\right\}.$$

Nach (17) ist $\varphi\left(\frac{3}{4}, n\right) = (-1)^n \varphi\left(\frac{1}{4}, n\right)$; daher wird für

$$n = gerade \quad = 2m. \qquad D_x^{2m-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0} = 0 \qquad \text{und für}$$

$$n = ungerade = (2m+1). \qquad D_x^{2m}\left\{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x+1}\right\}_{x=0}$$

$$= -\frac{2^{2m+1}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, n\right).$$

Ebenso ist identisch

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{e^{\frac{x}{4}}-1}{e^x-1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{2} D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1} + \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1} - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0}. \tag{$\alpha$}$$

Es sind $D_x^{n-1}\left\{\dfrac{e^{\frac{x}{4}}}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \dfrac{2^{n-1}}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{(-1)^n - 1\right\}\varphi\left(\dfrac{1}{4}, n\right).$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

$$D_x^{n-1}\left\{\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}\right\}_{x=0} = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{2}, n\right).$$

Substituieren wir diese letzten drei Werte in ($\alpha$), so resultiert für $n = 2m$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)\frac{2^{2m-1}+1}{2^{2m}}. \tag{19}$$

Setzen wir in dieser interessanten Beziehung zwischen den Bernoullischen Funktionen mit Argument $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ für $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2m\right)$ den früher gefundenen Wert, so erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m\right) = (-1)^m \frac{(2^{2m}-1)(2^{2m-1}+1)}{2^{4m-1}}. \tag{20}$$

## § 11. Diskussion dieser Definition.

Wir könnten natürlich bei dieser Diskussion gleich verfahren wie bei Raabe. Schlömilch geht aber ganz anders vor, und wir wollen uns deshalb an seine Darstellungsweise halten.

Setzen wir für n der Reihe nach 1, 2, 3, ......, so nehmen die acht ersten Bernoullischen Funktionen folgende Werte an:

$$\varphi(z, 1) = z.$$
$$\varphi(z, 2) = z^2 - z = z(z-1).$$
$$\varphi(z, 3) = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = z(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right).$$
$$\varphi(z, 4) = z^4 - 2z^3 + z^2 = z^2(z-1)^2.$$
$$\varphi(z, 5) = z^5 - \frac{5}{2}z^4 + \frac{5}{3}z^3 - \frac{1}{6}z.$$
$$\varphi(z, 6) = z^6 - 3z^5 + \frac{5}{2}z^4 - \frac{1}{2}z^2.$$
$$\varphi(z, 7) = z^7 - \frac{7}{2}z^6 + \frac{7}{2}z^5 - \frac{7}{6}z^3 + \frac{1}{6}z.$$
$$\varphi(z, 8) = z^8 - 4z^7 + \frac{14}{3}z^6 - \frac{7}{3}z^4 + \frac{2}{3}z^2.$$

Schlömilch beginnt seine Diskussion mit dem einfachsten Fall, für $n = 2$ und führt sie mittelst den Differentialformeln (3) und (4) weiter.

Die erste Funktion $\varphi(z,1) = z$ stellt wieder eine Winkelhalbierende durch den Ursprung und den ersten und dritten Quadranten dar. Hinsichtlich der zweiten Funktion $\varphi(z, 2) = z(z-1)$ erhellt unmittelbar, dass sie von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ *negativ* bleibt und fortwährend abnimmt; der Wert $\varphi\left(\frac{1}{2}, 2\right) = -\frac{1}{4}$ ist ihr *absolutes Minimum* innerhalb dieses Intervalles.

Nach (4) wird $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,3)=\varphi(z,2)+B_1$. Die rechte Seite ist anfangs für $z=0$ *positiv*, nimmt dann kontinuierlich ab und erhält für $z=\frac{1}{2}$ den *negativen* Wert $-\frac{1}{12}$, woraus folgt, dass es zwischen $z=0$ und $z=\frac{1}{2}$ einen, aber auch nur einen Wert gibt, für welchen der Ausdruck verschwindet. Diesem Verhalten von $\varphi'(z,3)$ gemäss, steigt anfangs $\varphi(z,3)$, erreicht zwischen $z=0$ und $z=\frac{1}{2}$ ein Maximum und fällt dann wieder. Jenes Steigen fängt an mit $\varphi(0,3)=0$; das nachherige Fallen hört auf mit $\varphi\left(\frac{1}{2},3\right)=0$; die Funktion $\varphi(z,3)$ bleibt also *positiv* während des Intervalles von 0 bis $\frac{1}{2}$; dazwischen liegt ein *Maximum*.

Formel (3) gibt $\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,4)=\varphi(z,3)$, und da nach dem Vorigen die rechte Seite, mithin auch $\varphi'(z,4)$ *positiv* ist, so findet bei $\varphi(z,4)$ ein fortwährendes Wachstum statt; dieses beginnt mit $\varphi(0,4)=0$; mithin ist $\varphi(z,4)$ *positiv* und *zunehmend*.

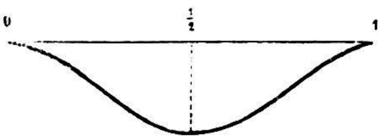
In Gleichung $\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,5)=\varphi(z,4)-B_2$ ist die rechte Seite anfangs für $z=0$ *negativ*, wird aber immer grösser und erreicht für $z=\frac{1}{2}$ ihren grössten Wert $\left(1-\frac{1}{2^3}\right)B_2$, welcher *positiv* ist. Aus diesem Verhalten von $\varphi'(z,5)$ folgt, dass $\varphi(z,5)$ erst ab- und nachher wieder zunimmt. Die Abnahme fängt mit $\varphi(0,z)=0$ an; die Zunahme hört mit $\varphi\left(\frac{1}{2},5\right)$ auf; somit bleibt $\varphi(z,5)$ *negativ* von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}$ und besitzt innerhalb dieses Intervalles ein *Minimum*.

Weil ferner $\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,6)=\varphi(z,5)$ und die rechte Seite, also auch $\varphi'(z,6)$ immer *negativ* ist, so nimmt $\varphi(z,6)$ immer ab, mit $\varphi(0,6)=0$ anfangend; somit ist $\varphi(z,6)$ *negativ* und *abnehmend*.

Wir überblicken augenscheinlich den Fortgang dieser Schlüsse, deren Gesamtergebnis sich graphisch darstellen lässt, wenn man z als Abszisse und $\varphi(z,n)$ als zugehörige rechtwinklige Ordinate konstruiert;

dann werden im Intervall von 0 bis 1 die Funktionen *gerader Ordnung* charakterisiert durch

Fig. 1.



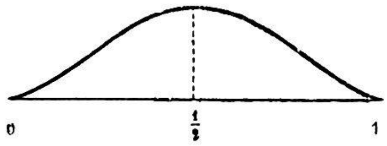


Fig. 2.

Fig. 1, wenn $n = 2, 6, 10, 14, \ldots\ldots, (4k-2)$,
Fig. 2, wenn $n = 4, 8, 12, 16, \ldots\ldots, (4k)$

und die Funktionen *ungerader Ordnung* durch

Fig. 3.

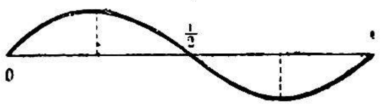


Fig. 4.

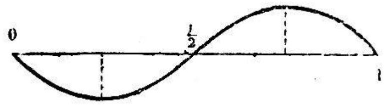


Fig. 3, wenn $n = 3, 7, 11, 15, \ldots\ldots, (4k-1)$,
Fig. 4, wenn $n = 5, 9, 13, 17, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Auf eine genauere graphische Darstellung der verschiedenen Bernoullischen Funktionen werden wir im letzten Abschnitt eintreten.[27])

## § 12. Verwandlung der Bernoullischen Funktion in trig. Reihen.

Mit Hülfe der Schlömilchschen Definition als Differentialquotient lässt sich diese Funktion in eine nach cosinus oder sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitende Reihe entwickeln.

Aus der Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale ist bekannt

$$f(z) = \frac{1}{2}\, a_0 + a_1 \cos\frac{\pi z}{n} + a_2 \cos\frac{2\pi z}{n} + a_3 \cos\frac{3\pi z}{n} + \cdots\cdot\cdot \quad (0 \leqq z \leqq n),$$

wobei
$$a_k = \frac{2}{n}\int_0^n f(z)\cos\frac{k\pi z}{n}\,dz.$$

Es sei $f(z) = \varphi(z, 2m)$ und $n = 1$; dann wird

$$\varphi(z, 2m) = \frac{1}{2}\, a_0 + a_1 \cos\pi z + a_2 \cos 2\pi z + a_3 \cos 3\pi z + \cdots\cdots$$

$$a_k = 2\int_0^1 \varphi(z, 2m)\cos k\pi z\,dz$$

$$= 2 D_x^{2m}\left\{\varphi(x)\int_0^1 (e^{xz}-1)\cos k\pi z\,dz\right\}_{x=0}.$$

Die Integration lässt sich jetzt leicht ausführen, doch müssen wir die zwei Fälle getrennt betrachten:

1. $k=0$, dann wird $\frac{1}{2} a_0 = D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \int_0^1 (e^{xz}-1) dz \right\}_{x=0}$

$$= -\varphi^{(2m)}(0) = (-1)^m B_m.$$

2. $k>0$, daher $a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \left[ \int_0^1 (e^{xz} \cos k\pi z \, dz - \int_0^1 \cos k\pi z \, dz \right] \right\}_{x=0}$. [28])

$$a_k = 2 D_x^{2m} \left\{ \varphi(x) \frac{e^x [(-1)^k x - x]}{x^2 + \pi^2 k^2} \right\}_{x=0}.$$

Diese Formel wird für $k =$ *gerade* $a_k = 2(-1)^m \frac{(2m)!}{(k\pi)^{2m}}$.

» $k =$ *ungerade* $a_k = 0$.

Demnach wird die gesuchte Reihenentwicklung

$$\varphi(z, 2m) = (-1)^m B_m + (-1)^{m-1} 2 \frac{(2m)!}{(\pi)^{2m}} \left\{ \frac{\cos 2\pi z}{2^{2m}} + \frac{\cos 4\pi z}{4^{2m}} + \frac{\cos 6\pi z}{6^{2m}} + \cdots\cdots\cdots \right\}. \quad (21)$$

$$\text{für } 0 \leqq z \leqq 1.$$

Auf ganz analoge Weise finden wir einen Ausdruck für die ungerade Bernoullische Funktion, so dass ist

$$\varphi(z, 2m-1) = (-1)^m 2 \frac{(2m-1)!}{\pi^{2m-1}} \left\{ \frac{\sin 2\pi z}{2^{2m-1}} + \frac{\sin 4\pi z}{4^{2m-1}} + \frac{\sin 6\pi z}{6^{2m-1}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (22)$$

$$\text{für } 0 \leqq z \leqq 1; \ n > 1.$$

Schlömilch findet diese Formel (22) durch Differentiation der Reihe (21). Beide Formeln erinnern uns an die Raabeschen Definitionsformeln (4) und (5), von denen ja Raabe die meisten Eigenschaften seiner Bernoullischen Funktion herleitet.

Diese Reihen lassen darauf schliessen, dass die Bernoullische Funktion in enger Beziehung zu den Kreisfunktionen steht, was auch J. Worpitzky in einer Studie über «Bernoullische und Eulersche Zahlen» beweist.[29])

Er zeigt, dass der Spezialwert einer geraden Ableitung der Cotangente eines Argumentes, multipliziert mit dem Argument selbst, sich durch eine Bernoullische Zahl wie folgt ausdrücken lässt

$$D_x^{2m}\left\{x \operatorname{cotg} x\right\}_{x=0} = -2^{2m} B_m.$$

Ebenso lässt sich der Nullwert der geraden Ableitungen der trig. Tangente durch eine Bernoullische Zahl oder durch eine Bernoullische Funktion vom Argument $\frac{1}{2}$ ausdrücken, so dass ist

$$D_x^{2m}\left\{\operatorname{tg} x\right\}_{x=0} = 2^{2m-1}\frac{(2^{2m}-1)}{m} B_m.$$

Schliesslich ist auch der Nullwert der geraden Ableitung der Sekante durch eine Bernoullische Funktion darstellbar, indem wird

$$D_x^{2m}\left\{\sec x\right\}_{x=0} = (-1)^{m+1}\frac{2^{4m+2}}{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m+1\right).$$

### § 13. Die Bernoullische Funktion in bestimmten Integralen.

Ausser den einfachen Integralwerten in § 8 dieses Abschnittes gibt Schlömilch weder in seinem Compendium, noch in der erwähnten Abhandlung in Band I der Zeitschrift für Mathematik und Physik andere Integralausdrücke mit Bernoullischen Funktionen, abgesehen von der Bernoullischen Funktion, welche der Restausdruck bei der Summierung der allgemeinen Differenzenreihe enthält, und dem Restgliede der Maclaurinschen Summenformel, das unter dem Integralzeichen ebenfalls eine Bernoullische Funktion aufweist.[30]) Auch bei Worpitzky finden sich keine Integralformeln der Bernoullischen Funktion, doch lassen sich den Raabeschen Formen entsprechende Ausdrücke mit Leichtigkeit aufstellen.

---

## III. Die Bernoullische Funktion nach L. Schläfli.

### § 14. Herleitung der Definition.

Schläfli geht aus von der Summe

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \cdots\cdots + (x-1)^m;$$

gibt er dem m die Werte 0, 1, 2, ......, m, so erhält er $(m+1)$ Summen $S_0, S_1, S_2, \ldots\ldots, S_m$. Diese multiplizieren wir der Reihe nach mit $y^0$, $\frac{y^1}{1!}$, $\frac{y^2}{2!}$, ........., $\frac{y^m}{m!}$, so folgt

$$\frac{S_0 y^0}{0!} = 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1.$$

$$\frac{S_1 y^1}{1!} = \frac{y}{1!} + \frac{2y}{1!} + \frac{3y}{1!} + \cdots\cdots + \frac{[x-1]y}{1!}.$$

$$\frac{S_2 y^2}{2!} = \frac{y^2}{2!} + \frac{(2y)^2}{2!} + \frac{(3y)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{[(x-1)y]^2}{2!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{S_m y^m}{m!} = \frac{y^m}{m!} + \frac{(2y)^m}{m!} + \frac{(3y)^m}{m!} + \cdots\cdots + \frac{[(x-1)y]^m}{m!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Addieren wir die senkrecht untereinanderstehenden Kolonnen, so erhalten wir, wenn bis ins Unendliche ausgedehnt wird,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^m}{m!} = 1 + e^y + e^{2y} + e^{3y} + \cdots\cdots + e^{(x-1)y} = \frac{e^{xy}-1}{e^y-1}.$$

Wir denken uns die Gleichung mit y multipliziert und dann zerrissen; so erhalten wir eine Beziehung, aus welcher wir die Bernoullischen Zahlen ebenso leicht herleiten können wie die Bernoullische Funktion. Wir definieren daher

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^{m+1}}{m!} = \frac{y e^{xy}}{e^y-1} - \frac{y}{e^y-1} \qquad (1)$$

als die *Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen und Bernoullischen Funktionen.*

Der erste Bruch für sich betrachtet führt auf die Bernoullische Funktion, während der zweite auf die Bernoullischen Zahlen leitet.

Wir nehmen deshalb an, es sei

$$\frac{y e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)\, y^n \quad \text{und} \qquad (2)$$

definieren $\chi(0, x) =$ Konstante $= 1$ und $\chi(n, x)$ als $n^{te}$ *Bernoullische Funktion.* Die Koeffizienten der Potenzen von y sind also die Bernoullischen Funktionen, und wir wollen für die $n^{te}$ Bernoullische Funktion $\chi(n, x)$ einen Ausdruck suchen. Es wird

$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = \frac{y}{e^y-1}\,e^{xy} = \left\{1 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots\cdots + c_\lambda y^\lambda + \cdots\cdots\right\} \times$$
$$\left\{1 + \frac{xy}{1!} + \frac{x^2y^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-\lambda}\,y^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} + \cdots\right\}.$$

Der allgemeine Term, welcher $y^n$ liefert, lautet

$$\text{Koeffizient von } y^n = [y^n] \overset{31)}{=} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Daher wird
$$\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}\,y^n.$$

Diese Gleichung stellt denselben Wert dar wie Beziehung (2); durch Vergleichung beider folgt als Wert für $\chi(n, x)$

$$\chi(n,x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} = \frac{c_0 x^n}{n!} + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Bei der letzten Summe ist ersichtlich, wie auch schon früher, dass infolge der Fakultät im Nenner $\lambda$ nur bis $\lambda = n$ gehen darf.

Aus der Theorie der Bernoullischen Zahlen ist bekannt, dass bei Entwicklung von $\frac{y}{e^y-1}$ folgende Koeffizienten $c_\lambda$ auftreten:

$$c_0 = 1;\ c_1 = -\frac{1}{2};\ c_{2\lambda-1} = 0;\ c_{2\lambda} = (-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{(2\lambda)!};$$

daher wird, wenn wir noch für $\lambda$ den Wert $(2\lambda)$ setzen,

$$\chi(n,x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1} \frac{B_\lambda}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!}\,x^{n-2\lambda}.$$

Da aber $\frac{n!}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!} = \binom{n}{2\lambda}$, so definieren wir die «*$n^{te}$ Bernoullische Funktion*» durch

$$\chi(n,x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2}\,x^{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1}\binom{n}{2\lambda} B_\lambda\, x^{n-2\lambda}\right\}. \qquad (3)$$

Wir können die obere Grenze in der Summe weglassen, wenn wir bedenken, dass für $\lambda = \frac{n}{2}$ der Ausdruck $\binom{n}{n} = 1$, ebenso

$x^0 = 1$ wird und für ein grösseres $\lambda$ zufolge von $\binom{n}{n+\mu} = 0$, wenn $\mu$ positiv, die Summe stets zu Null wird; die Reihe bricht also von selbst ab. Der Hauptunterschied dieser Definition gegenüber den beiden ersten ist der, dass auf der rechten Seite auch Terme mit $x^0$, also solche, die x gar nicht mehr enthalten, vorkommen dürfen, was diese Definition viel allgemeiner macht. Auch der vorgesetzte Faktor $\frac{1}{n!}$ leistet gute Dienste, da er das Konvergenzgebiet der Funktion vergrössert.[32]) Die kürzere Schreibweise durch Einführung der Summenformel könnte bei den übrigen Definitionen auch angewendet werden.

## § 15. Die Derivierten dieser Funktion.

### A. Einfache Differentialquotienten.

Wir wollen vorerst die gerade und ungerade Bernoullische Funktion trennen. Ist n gerade, so wird für

*1. $n =$ gerade $= 2m$.*

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m, x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{2m\,x^{2m-1} - \frac{2m\,(2m-1)}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m}{2\lambda}B_\lambda\,(2m-2\lambda)\,x^{2m-2\lambda-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!}\left\{x^{2m-1} - \frac{2m-1}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\left\{\substack{\lambda=m\\ \lambda=m-1}\right.}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m-1}{2\lambda}B_\lambda\,x^{2m-2\lambda-1}\right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m, x) = \chi(2m-1, x).$$

*2. $n =$ ungerade $= (2m+1)$.* Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m+1, x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{(2m+1)x^{2m} - (2m+1)\frac{2m}{2}x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(2m+1-2\lambda)\,x^{2m-2\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m)!}\left\{ x^{2m} - \frac{2m}{2} x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda} B_\lambda x^{2m-2\lambda} \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(2m+1, x) = \chi(2m, x).$$

Wir haben beide Funktionen getrennt betrachtet wegen der obern Grenze; wir hätten aber ebenso gut direkt von (3) ausgehen können und dann erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(n, x) = \chi(n-1, x). \tag{4}$$

*Die Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Einheit vermindert.*

### B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Gestützt auf (4) werden

$$D^2 \chi(n, x) = D\chi(n-1, x) = \chi(n-2, x).\ .$$

$$D^3 \chi(n, x) = \chi(n-3, x).$$

— — — — — — — —

$$D^\lambda \chi(n, x) = \chi(n-\lambda, x). \tag{5}$$

*Die wiederholte Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Zahl, welche die Anzahl der Ableitungen angibt, vermindert.*

Wir finden hier den ersten grossen Vorteil dieser Funktion gegenüber den zwei frühern Definitionen; es treten keine Bernoullischen Zahlen zu den Ableitungen; die Definition ist demnach allgemeiner und liefert einfachere Resultate.

### C. Einfache Integralformen.

Da die Differentialformeln sich einfacher gestalten, so thun dies auch die Integralformeln. Auch hier können wir vom allgemeinen Fall ausgehen und es resultiert

$$\int_0^x \chi(n-1, x)\, dx = \Big\{ \chi(n, x) \Big\}_0^x.$$

Da, wie wir später sehen werden, $\chi(2m, 0) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}$ und $\chi(2m+1, 0) = 0$, so entstehen die beiden Beziehungen

$$\int_0^x \chi(2m-1, x)\,dx = \chi(2m, x) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \quad \text{und} \qquad (6)$$

$$\int_0^x \chi(2m, x)\,dx = \chi(2m+1, x). \qquad (7)$$

Durch Integration wird somit der Exponent um die Einheit erhöht. *Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen 0 und x einer Bernoullischen Funktion ist wieder eine Bernoullische Funktion mit um die Einheit erhöhtem Exponenten und* $\pm$ *einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion.*

Wir haben hier insofern eine Vereinfachung, als das Argument bei der Bernoullischen Zahl fehlt, das bei Raabe und Schlömilch noch hinzutritt.

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ wird nach (7)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,dx = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

und nach (6)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\,dx = \chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!}.$$

Setzen wir für $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ den später zu beweisenden Wert[33]) ein,

so wird $$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.$$

## § 16. Die Bernoullische Funktion mit inversem Argument.

Ersetzen wir in (2) den Wert x durch (1—x), so wird

$$\frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, 1-x)\,y^n, \text{ d. h.,}$$

$$\chi(n, 1-x) = [y^n] \text{ in } \frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y - 1}.$$

Nun wird

$$\frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y-1} = (-y)\,\frac{e^{x(-y)}}{e^{(-y)}-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)(-y)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x) y^n (-1)^n;$$

somit ist $\qquad \chi(n, 1-x) = (-1)^n \chi(n, x). \qquad$ **(8)**

Daraus folgt für $x = 0$ unter Anwendung der Definitionsgleichung (3), wenn $n = gerade = 2m$:

$$\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}, \tag{9}$$

dagegen für $n$ = *ungerade* = $(2m+1)$, wenn x auch $= \frac{1}{2}$,

$$\chi(2m+1, 0) = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = \chi(2m+1, 1) = 0, \text{ d. h.,} \tag{10}$$

*alle Bernoullischen Funktionen ungerader Ordnung verschwinden für die Argumente 0,* $\frac{1}{2}$ *und 1.*

Wir fragen uns nun, was wird aus $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$. Um diesen Wert ausmitteln zu können, müssen wir vorerst über die Vervielfachung des Argumentes aufgeklärt sein.

Wir denken uns die $\chi$-Funktionen $\chi(n, x)$, $\chi\left(n, x+\frac{1}{k}\right)$, $\chi\left(n, x+\frac{2}{k}\right), \dots\dots\dots, \chi\left(n, x+\frac{k-1}{k}\right)$ aufgefasst als Koeffizienten von $y^n$ in den dazu gehörenden Entwicklungen; dann addieren wir diese; die Summe T wird, wenn wir dieselbe als geometrische Progression summieren,

$$T = \frac{1}{e^y-1} \cdot \frac{e^y-1}{e^{\frac{y}{k}}-1}\, y\,e^{xy} = \frac{y\,e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}}-1}, \text{ also}$$

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x+\frac{1}{k}\right) + \cdots + \chi\left(n, x+\frac{k-1}{k}\right) = [y^n] \text{ in } \frac{y\,e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}}-1}.$$

Es ist aber $\displaystyle \frac{y\,e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}}-1} = \frac{k\left(\frac{y}{k}\right)e^{kx\left(\frac{y}{k}\right)}}{e^{\left(\frac{y}{k}\right)}-1} = k \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, kx)\left(\frac{y}{k}\right)^n.$

$$[y^n] = \frac{1}{k^{n-1}} \chi(n, kx).$$

Daraus ergibt sich

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{k}\right) + \chi\left(n, x + \frac{2}{k}\right)$$
$$+ \cdots\cdots + \chi\left(n, x + \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{k^{n-1}} \chi(n, kx) \qquad (11)$$

als wichtige Formel, die über jede Vervielfachung des Argumentes Auskunft gibt. Infolge von $\frac{k-1}{k}$ bricht die Reihe links von selbst ab. Die beiden entsprechenden Formeln der frühern zwei Definitionen lieferten stets zwei getrennte Werte, je nachdem die Bernoullische Funktion gerade oder ungerade war. Wir ersehen auch daraus, dass die so definierte Bernoullische Funktion die allgemeinere ist; zudem ist diese Herleitung vorliegender Formel wesentlich einfacher als bei Raabe und Schlömilch.

Aus derselben lassen sich verschiedene Spezialwerte berechnen.

*I. Verdopplung des Argumentes.* $k = 2$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi(n, 2x).$$

Ersetzen wir in (8) die Grösse x durch $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ und setzen diesen Wert in die letzte Formel ein, so wird

$$\chi(n, x) + (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi(n, 2x). \qquad (\alpha)$$

Ist darin $x = 0$ *und* $n =$ *ungerade* $= (2m+1)$, so wird

$$\chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0;$$

dagegen wird für $x = 0$ *und* $n =$ *gerade* $= 2m$, wenn für $\chi(2m, 0)$ der bekannte Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (12)$$

*II. Verdreifachung des Argumentes.* $k = 3$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{3}\right) + \chi\left(n, x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^{n-1}} \chi(n, 3x). \quad (\beta)$$

Unter Anwendung von (8) wird für $x = 0$

$$\chi(n,0)+\chi\left(n,\frac{1}{3}\right)+(-1)^n\chi\left(n,\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\chi(n,0);$$

*n = ungerade* liefert die identische Gleichung $0=0$; dagegen ist für *n = gerade*, wenn für $\chi(2m,0)$ der gefundene Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m,\frac{1}{3}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \tag{13}$$

Aus Gleichung ($\alpha$) resultiert für $x=\frac{1}{3}$ und $n=2m$

$$\chi\left(2m,\frac{2}{3}\right)=2^{2m-1}\left\{\chi\left(2m,\frac{1}{3}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)\right\}. \tag{$\gamma$}$$

Einen Wert für $\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)$ erhalten wir, wenn wir in ($\beta$) für $x=\frac{1}{6}$ und $n=2m$ setzen; es ist dann

$$\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3^{2m-1}}\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right).$$

Daraus folgt, wenn für $\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right)$ der früher gefundene Wert (12) gesetzt wird,

$$\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{(2^{2m-1}-1)(1-3^{2m-1})}{6^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \tag{14}$$

Setzen wir die gefundenen Formeln (13) und (14) in ($\gamma$) ein, so ist, was zwar einfacher aus Formel (8) für $x=\frac{2}{3}$ und $n=2m$ hervorgeht,

$$\chi\left(2m,\frac{2}{3}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \tag{15}$$

Wir hätten schon dort die zwei Sätze aufstellen können:

1. *Jede zwei geraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind nach absolutem Wert und nach Vorzeichen einander gleich.*

2. *Jede zwei ungeraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind wohl dem Vorzeichen nach entgegengesetzt, dem absoluten Werte nach aber gleich.*

*III. Vierfaches Argument.* $k = 4$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{4}\right) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) + \chi\left(n, x + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4^{n-1}} \chi(n, 4x).$$

Für $x = 0$ wird unter Anwendung von Formel (8) und Einsetzen der Werte für $\chi(2m, 0)$ und $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ für die gerade Bernoullische Funktion

$$\chi\left(2m, \frac{1}{4}\right) = \chi\left(2m, \frac{3}{4}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (16)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich $\chi\left(2m, \frac{5}{6}\right)$, $\chi\left(2m, \frac{1}{8}\right)$, ........, $\chi\left(2m, \frac{7}{8}\right)$ und andere $\chi$-Funktionen berechnen; die Ausdrücke werden aber ziemlich kompliziert.

## § 17. Die Bernoullische Funktion mit negativem Argument.

Wir können auf zwei getrennten Wegen das Verhalten der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument untersuchen. Vorerst gehen wir von der Definitionsformel (3) aus, müssen aber dabei die geraden und ungeraden Funktionen getrennt betrachten.

*1. Die gerade Bernoullische Funktion.* Wir ersetzen in (3) n durch 2 m und x durch $(-x)$; dann wird

$$\chi(2m, -x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{x^{2m} + \frac{2m}{2} x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda} B_\lambda x^{2m-2\lambda}\right\}.$$

Durch Addition und Subtraktion desselben Ausdruckes $\frac{2m x^{2m-1}}{(2m)!}$ und passendes Zusammennehmen wird

$$\chi(2m, -x) = \chi(2m, x) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

*2. Die ungerade Bernoullische Funktion.* Durch analoges Verfahren wird

$$\chi(2m+1, -x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{-x^{2m+1} - \frac{2m+1}{2} x^{2m}\right.$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(-x)^{2m+1-2\lambda}\Bigg\}.$$

Hier addieren und subtrahieren wir $\frac{(2m+1)x^{2m}}{(2m+1)!}$; nun ist

$$\chi(2m+1,-x)=-\chi(2m+1,x)-\frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Eine *allgemeine* Formel für die Bernoullische Funktion mit negativem Argument finden wir aus folgender Betrachtung:

Ersetzen wir in Formel (2) den Wert x durch $(1+x)$, so ist

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,1+x)\,y^n=\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1}. \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1}=y\,e^{xy}+\frac{y\,e^{xy}}{e^y-1}=y\,e^{xy}+\sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n.$$

Durch Reihenentwicklung von $e^{xy}$ folgt

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n-1}y^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n. \qquad (\beta)$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von $y^n$ der Gleichungen $(\alpha)$ und $(\beta)$, so erhalten wir

$$\chi(n,1+x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\chi(n,x). \qquad (17)$$

Ersetzen wir darin x durch $(-x)$, so wird unter Berücksichtigung von (8)

$$\chi(n,-x)=(-1)^n\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\chi(n,x)\right\}. \qquad (18)$$

Diese Formel geht für $n=2m$ und $n=(2m+1)$ in die eingangs dieses Paragraphen hergeleiteten über. Sie dient zur Berechnung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument. Auch hier zeigt sich wieder die Vereinfachung, da Raabe und Schlömilch je zwei entsprechende Formeln nötig haben.

Um die $\chi$-Funktion auch ausserhalb des Intervalles 0 bis 1 zu untersuchen, dient eine Formel, welche wir erhalten, indem wir in (17) für $(x+1)$ der Reihe nach setzen $(x+1)$, $(x+2)$, . . . . . , $(x+k)$ und sämtliche so entstandenen Gleichungen addieren; es wird dann

$$\chi(n, k+x) = \chi(n, x) + \frac{1}{(n-1)!}\Big\{ x^{n-1} + (1+x)^{n-1} + (2+x)^{n-1} + \cdots\cdots + (k-1+x)^{n-1}\Big\}. \qquad (19)$$

Eine weitere Formel zur Untersuchung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument, die uns gute Dienste zur numerischen Ausrechnung und Kontrolle der Werte leistet, finden wir, wenn wir in (8) für x den Wert $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ setzen; dieselbe geht dann über in

$$\chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} + x\right). \qquad (20)$$

Diese Formel charakterisiert uns den Punkt $x = \frac{1}{2}$ als *Maximal-* oder *Minimalstelle.*

## § 18. Diskussion dieser Definition.

Setzen wir in der Definitionsformel (3) der Reihe nach für n die Werte 1, 2, 3, ......, so nehmen die acht ersten Funktionen dieser Definition folgende Werte an, die nacheinander diskutiert werden sollen:

$$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$\chi(2, x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$\chi(3, x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}.$$

$$\chi(4, x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}.$$

$$\chi(5, x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720}.$$

$$\chi(6, x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} + \frac{x^4}{288} - \frac{x^2}{1440} + \frac{1}{30240}.$$

$$\chi(7, x) = \frac{x^7}{5040} - \frac{x^6}{1440} + \frac{x^5}{1440} - \frac{x^3}{4320} + \frac{x}{30240}.$$

$$\chi(8, x) = \frac{x^8}{40320} - \frac{x^7}{10080} + \frac{x^6}{8640} - \frac{x^4}{17280} + \frac{x^2}{60480} - \frac{1}{1.209600}.$$

Wir gelangen hier zu ähnlichen Resultaten wie früher; da aber auf der rechten Seite auch Terme vorkommen dürfen, die von der Variabelen befreit sind, so ist leicht ersichtlich, dass nur die ungeraden Bernoullischen Funktionen für die Werte $x = 0$ und $x = 1$ erfüllt sind; das Glied der geraden Bernoullischen Funktion, das die Veränderliche nicht enthält, gibt für das Argument 0 und 1 sofort den Wert der ganzen Funktion an.

$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}$ stellt eine Gerade dar, die aber für diese Definition nicht mehr durch den Ursprung geht.

$\chi(2, x)$ ist die Gleichung einer Parabel; die Funktion besitzt ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $\chi\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$.

$\chi(3, x)$ besitzt im Intervall 0 bis 1 sowohl ein Maximum als ein Minimum, und zwar liegt ersteres bei $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$, das letztere dagegen bei $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem ist $\chi\left(3, \frac{1}{2}\right) = 0$; diese Kurve, analytisch gesprochen, ist eine Art Parabel höhern Grades.

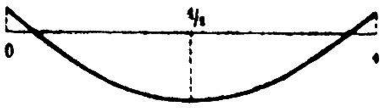
Die Funktion $\chi(4, x)$ besitzt bei $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum vom Werte $\frac{7}{5760}$; zudem ergeben sich zwei Minima bei $x = 0$ und $x = 1$, so dass $\chi(4, 0) = \chi(4, 1) = -\frac{1}{720}$.

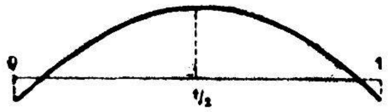
Was $\chi(5, x)$ anbetrifft, so ist diese Funktion als ungerade Bernoullische Funktion erfüllt für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$; sie weist ein Maximum auf zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, wie auch ein Minimum zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

Alle diese höhern Bernoullischen Funktionen stellen Parabeln höherer Ordnung dar.

Wir erhalten somit folgende Bilder des Verlaufes der Bernoullischen Funktion zwischen den Grenzen 0 und 1; im wesentlichen stimmen sie mit den bei Schlömilch dargestellten überein.

Figur 1.



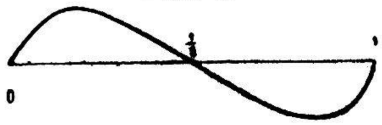




Figur 2.

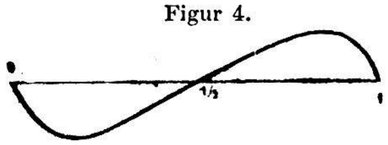
Die Funktionen sind charakterisiert durch[34])

Figur 1, wenn $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4k-2)$,
» 2, » $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4k$,
» 3, » $n = 3, 7, 11, \ldots\ldots, (4k-1)$,
» 4, » $n = 5, 9, 13, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Figur 3.




Figur 4.




## § 19. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in Reihen.

Wir könnten hier analog verfahren wie Schlömilch[35]); zudem würden wir noch viel rascher ans Ziel kommen, da das Integral, welches bei dieser Herleitung auszuwerten ist, leicht dargestellt werden kann.[36]) Schläfli geht aber ganz auf seine Art und Weise vor; er untersucht vorerst, was wird aus

$$\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha^n}{\lambda^n} + \cdots\cdots\cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\lambda^n}.$$

Multiplizieren wir mit $x^\lambda$, so wird

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = [\alpha^n] \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^\lambda}{\lambda-\alpha}. \tag{$\alpha$}$$

Laut Theorie der Gammafunktion gilt für ein beliebiges a die

Beziehung[37]) $\displaystyle\int_{-1 \circlearrowleft 0} x^{-a}(1-x)^{b-1}\,dx = 2i\sin a\pi \,\frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)}$;

substituieren wir für a den Wert $(1-n)$ und setzen $b = 1$, so wird

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2 i \sin n\pi} \underset{-1 \quad 0}{\int} x^{n-1}\, d x. \tag{$\beta$}$$

Diese Formel gibt uns ein Mittel an die Hand, obige Summe durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Ist t die Integrationsvariabele, so wird nach ($\beta$)

$$\frac{1}{(\alpha-\lambda)} = \frac{1}{2 i \sin (\alpha-\lambda)\pi} \underset{-1 \quad 0}{\int} t^{\alpha-\lambda-1}\, d t = \frac{(-1)^{\lambda}}{2 i \sin \alpha\pi} \underset{-1 \quad 0}{\int} t^{\alpha-\lambda-1}\, d t.$$

Die Summe geht dann über in

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha} = \frac{1}{2 i \sin \alpha\pi} \underset{-1 \quad 0}{\int} \alpha t^{\alpha-1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda} d t$$

$$= \frac{\alpha}{2 i \sin \alpha\pi} \underset{-1 \quad 0}{\int} t^{\alpha} \frac{x}{t+x} \cdot \frac{d t}{t}.$$

Der gefährliche Punkt des Integrales ist $t = -x$; für diesen wird der Nenner zu Null, so dass der Wert des Integrales $\infty$ ist, wir müssen daher die Schlinge um $(-x)$ gehen lassen, diesen Pol also ausschliessen, und wir betrachten

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{2 i \sin \alpha\pi} \underset{-1 \quad -x, 0}{\int} t^{\alpha} \frac{x\, d t}{t(t+x)}. \tag{$\gamma$}$$

Dieses Integral ist aber kein Schlingenintegral mehr; denn es nimmt nach einem ganzen Umlauf seinen ursprünglichen Wert an. Wir dürfen dann auch später, ohne den Wert des Integrales zu verändern, eine additive Konstante beifügen, welche wir so auswählen, dass sie für unsere Zwecke passst.

Durch Substitution von $t^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log} t}$ wird

$$\frac{\alpha t^{\alpha}}{2 i \sin \alpha \pi} = \frac{\alpha t^{\alpha}}{e^{i \alpha \pi} - e^{-i \alpha \pi}} = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \frac{2 i \pi \alpha e^{2 i \pi \alpha \left(\frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right)}}{e^{2 i \alpha \pi} - 1}$$

$$= \frac{1}{2 i \pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) (2 i \pi \alpha)^{n}.$$ [38]

Somit ist $$\left[\alpha^{n}\right] = \frac{1}{2 i \pi} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) (2 i \pi)^{n}.$$

Deshalb wird, wenn wir die Gleichungen $(\alpha)$ und $(\gamma)$ berücksichtigen,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda^{n}} = \frac{(2 i \pi)^{n}}{2 i \pi} \int_{-1 \; -x,0} \left\{ \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) - \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}\right) \right\} \frac{x \, dt}{t(t+x)}, \qquad (\delta)$$

wobei die zugefügte Konstante den Wert hat

$$K = - \frac{(2 i \pi)^{n}}{2 i \pi} \int_{-1 \; -x,0} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}\right) \frac{x \, dt}{t(t+x)}.$$

Wir wollen nun darnach trachten, x auf die Peripherie des Einheitskreises zu bringen; zu diesem Zweck müssen wir uns aber zuerst über Log t und Log (—x) ins Klare setzen; vor dem Nullpunkt wollen wir uns hüten, weil in demselben eine starke Transcendenz vorhanden ist.

$\operatorname{Log}(-x) = - i \pi (-\varrho) + 2 i \pi \Theta$; $\Theta =$ Konstante. $\varrho = 0$, sobald (—x) auf der Peripherie des Einheitskreises liegt.

Wenn $t = e^{2 i \pi \varphi - i \pi}$, wird $\operatorname{Log} t = - i \pi + 2 i \pi \varphi$.

$\varphi =$ Bogen von 0 bis 1; wenn $t = x$, soll $\varphi = \Theta$ werden. Dann sind

$$\operatorname{Log} t = 2 i \pi \left(\varphi - \frac{1}{2}\right); \quad \varphi = \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}; \quad \Theta = \text{Konstante} = \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi};$$

$$\frac{dt}{t} = 2 i \pi \, d\varphi.$$

Setzen wir diese Werte ein, so wird aus $(\delta)$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda^{n}} = \frac{(2 i \pi)^{n}}{2 i \pi} \int_{-1 \; -x,0} \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \frac{x \, dt}{t(t+x)}. \qquad (\varepsilon)$$

Der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen wird dann in dem Momente zu Null, sobald $\varphi = \Theta$ geworden; somit ist

$$x = e^{2i\pi\Theta};\ t = -e^{2i\pi\varphi};$$

$$e^{2i\pi\Theta} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)};\ e^{2i\pi\varphi} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)};$$

$$t+x = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)} - e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)}$$
$$= -e^{i\pi(\varphi+\Theta)}\, 2i\sin(\varphi-\Theta)\pi;$$

$$\frac{x}{t+x} = \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\}.$$

Substituieren wir diese Werte ins Integral ($\varepsilon$), so erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \frac{(2i\pi)^n}{2i\pi} \int \left\{\chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\} 2i\pi\, d\varphi.$$

$$-1 \quad -x,0$$

Setzen wir jetzt $x = e^{2i\pi\Theta}$, so bewegt sich die Variabele auf dem Einheitskreis von 0 bis 1, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{2i\pi\Theta\lambda}}{\lambda^n} = (2i\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\} d\varphi. \quad (\mu)$$

Wegen $i^n$ sollten wir die Fälle für $n =$ gerade oder $n =$ ungerade trennen; um dies zu vermeiden, ziehen wir vor, beide Seiten mit $(-i)^n = e^{-in\frac{\pi}{2}}$ zu multiplizieren; dann wird ($\mu$) zu

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\pi\lambda\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$
$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\} d\varphi. \quad (21)$$

Diese Formel gilt auch für $\Theta = \varphi$, da dieselbe dafür nicht unstetig wird. Wegen der Cotangente lässt sich anfangs leicht glauben, das Integral werde unstetig; doch ist ja im Nenner der Cotangente der Sinus, der sich auf den Bogen $(\varphi - \Theta)$ reduzieren lässt. Da die $\chi$-Funktionen algebraische Funktionen $n^{ten}$ Grades sind, so geht die Klammer in tiefster Annäherung über in $(\varphi^n - \Theta^n)$; somit verhält sich das Integral wie $\frac{\varphi^n - \Theta^n}{\varphi - \Theta}$; ein solcher Ausdruck ist aber endlich und daher auch das Gesamtintegral für $\varphi = \Theta$.

**Herausheben der Komponenten.**

In obiger Formel (21) sind sowohl reelle als imaginäre Bestandteile enthalten. Wir wollen nach dem Moivreschen Grundsatz der Trennung des Reellen vom Imaginären die einzelnen Komponenten herausnehmen, da wir zerlegen können

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} e^{i\left(2\pi\lambda\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right) + i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right). \qquad (\varrho)$$

**A. Die reelle Komponente.**

Dieselbe wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = \frac{(2\pi)^n}{2}\int_0^1 \left\{ \chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} d\varphi. \qquad (\nu)$$

Dieses Integral muss ausgemittelt werden. Wir wissen, dass durch Integration der Grad einer Bernoullischen Funktion um die Einheit steigt; somit wird für n gerade oder ungerade

$$\int_0^1 \chi(n,\varphi)\, d\varphi = \Big\{ \chi(n+1,\varphi) \Big\}_0^1 = 0;$$

denn die ungeraden Bernoullischen Funktionen verschwinden für die Argumente 0 und 1 und die geraden weisen denselben Wert auf, der hier das eine Mal mit negativem Vorzeichen genommen werden muss. Es zeigt sich nur die Ausnahme für $n = 0$; doch müssen wir diesen Fall ausschliessen, da sonst links alle Nenner zur Einheit werden.

Ferner ist $\chi(n,\Theta)$ in Bezug auf $\varphi$ als Konstante zu betrachten, also $\int_0^1 \chi(n,\Theta)\, d\varphi = \chi(n,\Theta)$; daher wird ($\nu$)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2}\chi(n,\Theta).$$

$$\chi(n, \Theta) = -\frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}. \tag{22}$$

Dies ist wieder eine weit allgemeinere Formel als die entsprechende der frühern Definitionen; aus derselben erhalten wir leicht die den frühern gleichwertigen Beziehungen; die einzige Bedingung ist $0 < \Theta < 1$.

Die Formel konvergiert ganz unzweideutig für $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$; für $n = 1$ müssen wir die Konvergenzfrage noch genauer prüfen; es wird für $n = 1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda}$$

$$= -\pi\chi(1, \Theta) = -\pi\left(\Theta - \frac{1}{2}\right).$$

Der höchste Wert von $\sin 2\lambda\pi\Theta$ kann nur 1 sein; dann nähert sich die Summe der Reihe der Stammbrüche, welche *divergent* ist. Die Folge davon ist, dass die Werte $\Theta = 0$ und $\Theta = 1$ ausgeschlossen werden müssen. Ist n nahe bei Null, so schreitet der Zähler fort nach $2\pi\Theta$, $4\pi\Theta$, $6\pi\Theta, \ldots\ldots$ Die Summe dieser Ausdrücke wird aber $\infty$ gross; die Konvergenz erscheint daher sehr verdächtig; aber für $2\pi\Theta = \psi$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda\psi}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda\psi}{\lambda\psi}\, \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

Wir setzen $\lambda\psi = \mu$; dann dürfen wir ein sehr kleines $\psi$ als $d\mu$ betrachten, so dass ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \mu}{\mu}\, d\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

$\mu = \lambda\psi$ durchläuft die Wertereihe $\mu$, $\mu + \psi$, $\mu + 2\psi, \ldots\ldots$, d. h., wenn $\psi$ klein genug gewählt, so geht $\mu$ von 0 bis $\infty$; somit wird die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin \mu}{\mu}\, d\mu = \int_0^\infty \frac{\sin \mu}{\mu}\, d\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist der Ausdruck *konvergent*, da wir hier einen endlichen Wert erhalten.

Wir kehren wieder zu unsrer reellen Komponente (22) zurück und wollen die Fälle $n = \text{gerade} = 2m$ und $n = \text{ungerade} = (2m+1)$ trennen.

Für $n = 2m$ wird $\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = (-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, also

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m}} = (-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2}\chi(2m, \Theta). \tag{23}$$

Dies ist eine den Raabeschen Definitionsformeln entsprechende Beziehung; nur fehlt hier wieder der lästige Zusatz der Bernoullischen Zahl.

Setzen wir darin $\Theta = 0$ und berücksichtigen den Wert für $\chi(2m, 0)$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} = S_{2m} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2m} B_m}{(2m)!}. \tag{24}$$

Da $\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1)$, so würden wir die nämliche Formel erhalten für $\Theta = 1$.

Für $n = (2m+1)$ wird $\cos\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $(-1)^m \sin 2\lambda\pi\Theta$; dies in (22) gesetzt, gibt

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1}\frac{1}{2}(2\pi)^{2m+1}\chi(2m+1, \Theta). \tag{25}$$

Für $\Theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ resultiert daraus die identische Gleichung $0 = 0$; dieselbe entsteht ebenfalls, wenn wir (23) nach $\Theta$ ableiten. Differenzieren wir (25) nach $\Theta$, so entsteht wieder Formel (23); alles dies sind Kontrollen der Richtigkeit.

Spezialfälle dieser ungeraden Bernoullischen Funktion sind lösbar und sehr zu vereinfachen, wenn ein Mittel gefunden würde, um die ungerade Bernoullische Funktion durch Bernoullische Zahlen oder durch geeignete bestimmte Integrale auszudrücken; doch stösst man gerade bei letzterer Aufgabe auf die Summierung von komplizierten Ausdrücken. So wird z. B. für $\Theta = \frac{1}{4}$ aus Formel (25)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda\frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1}\frac{1}{2}(2\pi)^{2m+1}\chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right).$$

Es wird $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$

$$+ - \ldots\ldots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}} = H_{2m+1},$$

somit $$H_{2m+1} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right). \qquad (26)$$

Ähnliche Formeln könnten wir für $\Theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \ldots\ldots\ldots$ ableiten; jedesmal kommen wir auf Funktionen, die den Bernoullischen Funktionen nahe verwandt sein müssen, da sie ganz ähnlichen Summenformeln genügen.[39])

**B. Die imaginäre Komponente.**

Zurückgreifend auf Formel (21) und ($\varrho$) wird, wie leicht einzusehen ist, $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$

$$= \frac{1}{2}(2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta)\right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi. \qquad (27)$$

Es ist dies wieder eine ganz allgemeine, sämtliche Fälle einschliessende Formel.

Für n = 1 wird, da $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\lambda\pi\Theta$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \pi \int_0^1 \left\{\chi(1, \Theta) - \chi(1, \varphi)\right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi.$$

Nach längern Umwandlungen, wobei als Integrationskonstante Log 2 genommen ist, wird, wenn $\Theta$ als Konstante weggelassen, also bei verändertem $\varphi = \varphi_1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \operatorname{Log}(2\sin\pi\varphi_1).$$

Es ist auch, wenn $(\varphi - \Theta) = \varphi_1$ gesetzt, da die Grenzen $(-\Theta)$ und $(1-\Theta)$ werden, $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} =$

$$= (2\pi)^n \frac{1}{2} \int_{-\Theta}^{1-\Theta} \{ \chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta) \} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Das Integral rechts bezeichnen wir mit S; es lässt sich zerlegen in

$$S = \int_0^{1-\Theta} \{ \chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta) \} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1$$

$$- \int_0^{+\Theta} \{ \chi(n, \Theta - \varphi_1) - \chi(n, \Theta) \} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1,$$

wenn im zweiten Integral zudem noch $\varphi_1$ durch $(-\varphi_1)$ ersetzt wird.

Wir können nun partiell integrieren, indem wir setzen

$$\int \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} (2 \sin \pi \varphi_1).$$

Die finiten Teile der partiellen Integration aus beiden obigen Integralen der Summe S werden, wie wir uns durch Ausführung der Integration überzeugen können, zu Null; es bleiben nur die infiniten Teile, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(n-1, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(n-1, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Da für $n = (2m+1)$ der Wert $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $-\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = -(-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}}$$

$$= (2\pi)^{2m} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(2m, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- (2\pi)^{2m} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(2m, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Für $\Theta = 0$ verschwindet das erste Integral, und es ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^m (2\pi)^{2m} \int_0^1 \operatorname{Log}(2 \sin \pi \varphi)\, \chi(2m, \varphi)\, d\varphi, \qquad (28)$$

wenn wieder $\varphi$ als Integrationsvariabele gewählt wird.

Mit Hülfe dieser Definition als Reihenentwicklung lässt sich die *Raabesche Restformel* ableiten; dann können wir den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweisen; diese Beziehungen sprechen deutlich für die Allgemeinheit dieser Definition. Alles hier auszuführen, würde aber den Rahmen vorliegender Arbeit wesentlich überschreiten. [40])

## § 20. Integrale mit Bernoullischen Funktionen.

Schläfli selbst gibt in seinen Vorlesungen keine Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion. Dieselben gestalten sich aber wesentlich einfacher als die entsprechenden der frühern Definitionen. Dieser § liesse sich beliebig weit ausdehnen; es taucht eine grosse Mannigfaltigkeit an Integralen der Bernoullischen Funktion auf. Wir geben hier nur die zum Vergleich wichtigen. Gute Hülfe bei all diesen Darstellungen liefern uns die Formeln (23) und (25).

### A. Einfache Integrale.

*1. Für die gerade Bernoullische Funktion.*

Es interessieren uns einige Spezialfälle der Formel (7); setzen wir darin für die obere Grenze der Reihe nach $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$, so wird vorerst

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\, dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}} R_{2m+1}, \quad \text{wobei} \qquad (29)$$

$$R_{2m+1} = 1 - \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}} + - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{(3\lambda-2)^{2m+1}} - \frac{1}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Die Funktion $R_{2m+1}$ lässt sich unter Anwendung der Formel

$$\frac{1}{k^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-kx} x^{a-1}\, dx \qquad (\alpha)$$

aus der Theorie der Gammafunktion [41]) in ein bestimmtes Integral verwandeln, so dass wird

$$R_{2m+1} = \frac{1}{(2m)!}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}-e^{-2x}\}}{1-e^{-3x}}\,dx, \quad \text{somit folgt}$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}-e^{-2x}\}\,dx}{1-e^{-3x}}. \quad (30)$$

Analog ist
$$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}} H_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (31)$$

$$H_{2m+1} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$$
$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Durch Anwendung derselben Formel ($\alpha$) wird

$$H_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{\operatorname{cos} x}\,dx,$$

also
$$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{e^x+e^{-x}}\,dx$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{\operatorname{cos} x}\,dx. \quad (32)$$

Entsprechend folgt

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}} G_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (33)$$

$$G_{2m+1} = 1 + \frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}}$$
$$+ + - - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-2)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Wie früher durch Integrale dargestellt, wird

$$G_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}+e^{-2x}\}}{1+e^{-3x}}\,dx, \qquad \text{somit}$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}+e^{-2x}\}}{1+e^{-3x}}\,dx. \quad (34)$$

*2. Für die ungerade Bernoullische Funktion.*

Hier vereinfachen sich die Werte bedeutend, da wir alle durch Bernoullische Zahlen ausdrücken können. Gestützt auf (6) werden, wenn wir wieder der Reihe nach für die obere Grenze $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ und für die untere Grenze stets 0 setzen, folgende Formeln auf einfache Weise, durch Einsetzen der von früher her bekannten Formeln (9), (13), (16) und (14), entstehen

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2m}-1}{3^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (35)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{2^{4m-1}+2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (36)$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{6^{2m-1}+3^{2m-1}+2^{2m-1}-1}{6^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (37)$$

**B. Integrale mit trig. Funktionen.**

Nehmen wir r als positive ganze Zahl an, so wird nach (25)

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\cos 2r\pi x\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}2}{(2\pi)^{2m+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}} \cos 2r\pi x\,dx;$$

da aber $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \,.\cos 2r\pi x\,dx = 0$ für alle Werte von $\lambda$, so folgt

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\cos 2r\pi x\,dx = 0. \quad (38)$$

Da wir auf die Auswertung eines analogen Integrales kommen, wenn wir die gerade Bernoullische Funktion mit $\sin 2 r \pi x \, dx$ kombinieren, so wird, was auch direkt hätte gezeigt werden können,

$$\int_0^1 \chi(2\,m, x) \sin 2 r \pi x \, dx = 0. \tag{39}$$

Wir verbinden nun gleichartige Bernoullische Funktionen und trig. Funktionen; es wird

$$\int_0^1 \chi(2\,m, x) \cos 2 r \pi x \, dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\, 2}{(2\pi)^{2m}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\pi \lambda x}{\lambda^{2m}} \cos 2 r \pi x \, dx.$$

Der Ausdruck $\int_0^1 \cos 2\pi\lambda x \,.\, \cos 2 r \pi x \, dx$ verschwindet für alle Werte des ganzzahligen $\lambda$, mit Ausnahme von $\lambda = r$; dafür wird

$$\int_0^1 \cos^2 2 r \pi x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Von der Summation unter dem Integralzeichen bleibt somit nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^{2m}}$; daher wird

$$\int_0^1 \chi(2\,m, x) \cos 2 r \pi x \, dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi r)^{2m}}. \tag{40}$$

Die entsprechenden Erläuterungen gelten auch für die ungerade Bernoullische Funktion verbunden mit $\sin 2 r \pi x \, dx$; also

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x) \sin 2 r \pi x \, dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi r)^{2m+1}}. \tag{41}$$

Daraus ergibt sich der

*Satz: Die Integrale einer Bernoullischen Funktion verbunden mit einer ungleichartigen trig. Funktion werden zu Null, verbunden mit einer gleichartigen nehmen sie einen bestimmten Wert an.*

Wir könnten auch Integrale mit den trigonometrischen Funktionen im Nenner untersuchen; doch würden uns diese Untersuchungen zu weit vom eigentlichen Thema wegführen.

### C. Integrale von Produkten der $\chi$-Funktion.

Wir gehen wieder von den Formeln (23) und (25) aus und unterscheiden:

*1. Beide Bernoullischen Funktionen seien gerade.* Dann wird

$$J = \int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m}\,(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}\,\lambda^{2n}}\,dx.$$

Bekanntlich sind

$$\int_0^1 \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\ \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\ \int_0^{\frac{1}{4}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Somit resultieren, da die Doppelsumme verschwindet, wenn wir für

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n}} = S_{2m+2n}$$

den Wert in Bernoullischen Zahlen setzen,

die drei Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}.\\
\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Also folgt $$\int_0^1 F(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} F(x)\,dx, \tag{43}$$

wobei $F(x) = \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)$ ist.

Lassen wir $m = n$ werden, so verändert sich (43) nicht, nur dass dann $F(x) = \{\chi(2m, x)\}^2$ wird, während die Formeln (42) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \{\chi(2m, x)\}^2 dx = \frac{B_{2m}}{(4m)!},\\
&\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m, x)\}^2 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m, x)\}^2 dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

2. *Beide Funktionen seien ungerade.* Es wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}(2\pi)^{2n+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}\,\lambda^{2n+1}}.$$

Es sind bekanntlich

$$\int_0^1 \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\quad \int_0^{\frac{1}{8}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Deshalb resultieren, wenn für $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n+2}} = S_{2m+2n+2}$ der Wert in Bernoullischen Zahlen gesetzt wird, da die übrigen Integrale der Doppelsumme zu Null werden,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx = (-1)^{m+n}\,\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx = (-1)^{m+n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx = (-1)^{m+n}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Es wird also auch hier die Beziehung gelten

$$\int_0^1 G(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} G(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} G(x)\,dx,\qquad \text{wobei} \tag{46}$$

$G(x) = \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)$.

Lassen wir wieder m = n werden, so erfährt die Beziehung (46) keine Änderung, nur dass $G(x) = \{\chi(2m+1, x)\}^2$ wird; die Formeln (45) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx = \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}.
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

*3. Eine Bernoullische Funktion sei gerade, die andere ungerade.* Dann wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\, \chi(2m, x)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\, 2\, (-1)^{n-1}\, 2}{(2\pi)^{2m+1} (2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x . \cos 2\lambda\mu x}{\lambda^{2m+1} \lambda^{2n}}\, dx.$$

Weil $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x . \cos 2\lambda\pi x\, dx = 0$, so wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\, \chi(2m, x)\, dx = 0. \qquad (48)$$

Wir erkennen daraus den

*Satz: Die Integrale eines Produktes zweier Bernoullischen Funktionen nehmen einen bestimmten durch Bernoullische Zahlen ausdrückbaren Wert an, wenn die beiden Bernoullischen Funktionen gleichartig, verschwinden aber, wenn dieselben ungleichartig sind.*

Die Integraldarstellungen lassen sich noch beliebig weit ausdehnen; doch müssen uns diese Betrachtungen genügen.

# IV. Die Definitionen nach J. W. L. Glaisher.

Nachdem Dr. Glaisher schon in einer frühern Bekanntmachung «*On series and products involving prime numbers only*»[42]) auf die Bernoullische Funktion gekommen ist, widmet er derselben eine eingehende Besprechung in der gleichen englischen Zeitschrift, betitelt «*On the Bernoullian Function*».[43]) In dieser 168 Seiten umfassenden Abhandlung gibt dieser berühmte englische Mathematiker eine grosse Menge von Formeln; ja er begnügt sich auch nicht mit einer einzigen Definition, sondern führt deren mehrere an. Wir treten hier nur auf diejenige Definition näher ein, die uns für die allgemeinste und bequemste erscheint, ohne dabei die übrigen zu vernachlässigen, da wir alle aus der zu besprechenden Definition leicht herstellen können, weil sie durch einfache algebraische Beziehungen verbunden sind. Eine weitere Arbeit «*On the definite integrals connected with the Bernoullian Function*»[44]) von demselben Verfasser gibt uns eine beträchtliche Anzahl von bestimmten Integralen mit Bernoullischen Funktionen.

Die Formel, die Glaisher einer eingehenden Betrachtung unterzieht, lautet anfänglich

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2} x^{n-1} + \frac{n-1}{2!} B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \quad (1)$$

## § 21. Herleitung der Definitionsgleichung.

Wie schon Raabe, so geht auch Glaisher aus von der bekannten Beziehung für $0 < x < 1$[68])

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Durch Multiplikation mit dx und Integration zwischen 0 und x wird

$$\frac{1-\cos 2\pi x}{2\pi} + \frac{1-\cos 4\pi x}{8\pi} + \frac{1-\cos 6\pi x}{18\pi} + \cdots\cdots = \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right);$$

multiplizieren wir mit $(-2\pi)$ und zerreissen dann, so folgt, weil

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = S_2 = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \cdots\cdots = 2\pi^2 \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \right\}.$$

Durch wiederholte Integration und Multiplikation mit $(-2\pi)$ entstehen nacheinander

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^3} + \frac{\sin 6\pi x}{3^3} + \cdots\cdots = \frac{2^2\pi^3}{2!} \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right\}.$$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^4} + \frac{\cos 6\pi x}{3^4}$$

$$+ \cdots\cdots = \frac{-2^3\pi^4}{3!} \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{4} \right\}.$$

---

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}}$$

$$+ \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n-1)!} \left\{ B_{2n}(x) + (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n} \right\}. \quad (2)$$

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}}$$

$$+ \cdots\cdots = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n} \pi^{2n+1}}{(2n)!} B_{2n+1}(x). \quad (3)$$

Darin bedeuten $B_n(x)$ die Klammerausdrücke der obern Formeln; es sind dies die «*Bernoullischen Funktionen*». Die beiden Formeln (2) und (3), wie auch die frühern, sind rationale und integrierbare Funktionen von x. Der erste Term von (2) ist von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung; der letzte Term der Bernoullischen Funktion in (2) ist vom $2^{\text{ten}}$ Grade in x; der erste Term der Bernoullischen Funktion in (3) ist vom $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade, während der letzte in Bezug auf x linear ist. Also ist nach dieser Definition $B_n(x)$ eine Funktion von x, *die keinen von x freien Ausdruck enthalten darf.* Der Ausdruck, der von x unabhängig ist in den obigen Entwicklungen, stellt stets den Wert der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots\cdots$, ausgedrückt in Bernoullischen Zahlen, dar.

Diese Definition der Bernoullischen Funktion stimmt nun ganz mit derjenigen von Raabe überein, wie auch Glaisher bei seinen ersten Untersuchungen über diese Funktion die Raabesche Definition benutzt hat, und es ist

$$B_{2n+1}(x) = B''(x) \quad \text{und} \quad B_{2n+2}(x) = B'(x).$$

Glaisher führt dann die Untersuchung über diese $B_n(x)$-Funktion in ausführlicher Weise durch, wobei er Raabe in vielem wesentlich ergänzt. Er berührt anfangs ganz kurz die Funktion mit inversem Argument, dann die einfachen Ableitungen und gibt die Spezialwerte für $x = 0$ und $x = 1$. Sodann leitet er Reihenentwicklungen ab, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten.

Alles dies sind Eigenschaften, die mit der Raabeschen Auffassung übereinstimmen und bei denjenigen von Schlömilch und Schläfli zu entsprechenden Resultaten führen.

Glaisher erwähnt auch, dass die Bernoullischen Funktionen die Koeffizienten der Entwicklung $\dfrac{e^{ax}-1}{e^a-1}$ darstellen und leitet mit Hülfe dieser Auffassung einige Eigenschaften her. Hernach gibt er ähnliche Beziehungen von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen dieser Definition, entsprechend den Darstellungen bei den früher betrachteten Definitionen, und erwähnt auch die Funktion mit negativem Argument.[45])

Uns interessiert diese $B_n(x)$-Funktion weniger, weil sie mit derjenigen von Raabe übereinstimmt und weil dieselbe zu wenig allgemein ist, da auf der rechten Seite die Reihe mit dem Gliede in $x^2$ oder $x$ abschliesst. Auch Glaisher sah sich gezwungen, zur Vereinfachung der Koeffizienten der Entwicklung nach $B_n(x)$-Funktionen

$$a\,\frac{e^{a(2x-1)}+e^{-a(2x-1)}}{e^a-e^{-a}} = 1 + (2a)^2\left\{B_2(x)+\frac{B_1}{2}\right\} + \frac{(2a)^4}{3!}\left\{B_4(x)-\frac{B_2}{4}\right\} + \cdots\cdots$$

für die Klammerausdrücke einfachere Funktionen einzuführen, und er thut dies, indem er setzt

$$A_{2n}(x) = B_{2n}(x) + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n}; \quad A_{2n+1}(x) = B_{2n+1}(x). \qquad (n>0).$$

Er selbst sagt, dass diese neue Funktion $A_n(x)$ als analytische Funktion praktischer sei, da sie weniger komplizierte und systematischere Resultate liefere. Da jetzt bei der geraden Bernoullischen Funktion durch diese Setzung auch ein von $x$ freier Term vorkommen darf, so steht diese Funktion in enger Beziehung zu derjenigen von Schläfli.[46])

Nach obigen Erläuterungen werden somit

$$A_{2n}(x) = \frac{1}{2n}\left\{x^{2n} - \frac{1}{2}\,2n\,x^{2n-1} + \binom{2n}{2}B_1 x^{2n-2} - + \cdots\cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} x^2 + (-1)^{n+1} B_n\right\}.$$

$$A_{2n+1}(x) = \frac{1}{2n+1}\left\{x^{2n+1} - \frac{1}{2}(2n+1)x^{2n} + \binom{2n+1}{2}B_1 x^{2n-1} - \binom{2n+1}{4}B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots (-1)^n \binom{2n+1}{2n} B_n x\right\}.$$

Die Reihen brechen von selbst ab; beide lassen sich in die allgemeinere Formel für ein beliebiges n zusammenziehen

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 x^{n-4} + - \cdots\right\}. \quad (4)$$

Die Reihe geht so weit, dass rechts keine negativen Koeffizienten auftreten dürfen; der letzte Term enthält $\binom{n}{n-1}$ oder $\binom{n}{n}$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Diese Definition wollen wir nun eingehender betrachten.

## § 22. Die Derivierten dieser Definition.

### A. Die einfachen Differentialquotienten.

Wir gehen von der Definitionsformel (4) aus und differenzieren dieselbe nach x; dann wird

$$\frac{\partial}{\partial x} A_n(x) = x^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1)\,x^{n-2} + \binom{n-1}{2}B_1 x^{n-3} - \binom{n-1}{4}B_2 x^{n-5} + - \cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x} A_n(x) = (n-1)\,A_{n-1}(x). \quad (5)$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die entsprechenden Spezialformeln für die geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen der Definitionen von Raabe und Schlömilch über. Hier sind die zwei Spezialfälle in *eine* Formel zusammengefasst; nur steht noch ein Faktor vor der Bernoullischen Funktion, der bei der Schläflischen Definition fehlt. Schon dies ist ein Grund, dass die Definition von Schläfli den Vorzug verdient, da die einfachen Ableitungen der $\chi$-Funktionen wieder reine $\chi$-Funktionen liefern.

**B. Die wiederholten Ableitungen.**

Solche finden sich bei Glaisher nirgends; dieselben sind jedoch leicht zu erhalten; doch tritt stets ein komplizierender Faktor hinzu; wie leicht herzuleiten, wird, wenn symbolisch $D^\lambda = \frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda}$,

$$D^\lambda A_n(x) = \lambda! \binom{n}{\lambda} A_{n-\lambda}(x). \qquad (6)$$

Schläflis Definition ist also auch in dieser Hinsicht einfacher, da dieselbe auch hier keinen vorgesetzten Faktor zeigt.

**C. Einfache Integralformeln.**

Multiplizieren wir (5) mit dx und integrieren zwischen 0 und x, so wird

$$\int_0^x A_{n-1}(x)\,dx = \left\{ \frac{A_n(x)}{n-1} \right\}_0^x;$$

durch Trennung der geraden von der ungeraden Bernoullischen Funktion folgen

$$\int_0^x A_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n} A_{2n+1}(x) \qquad \text{und} \qquad (7)$$

$$\int_0^x A_{2n-1}(x)\,dx = \frac{1}{2n-1} \left\{ A_{2n}(x) + (-1)^n \frac{B_n}{2n} \right\}, \qquad (8)$$

wenn die später zu beweisenden Spezialwerte für $A_{2n+1}(0) = 0$ und $A_{2n}(0) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}$ eingesetzt werden.[47])

Aus obigen 2 Formeln ergeben sich für die obere Grenze $x = 1$

$$\int_0^1 A_{2n}(x)\,dx = 0; \qquad \int_0^1 A_{2n-1}(x)\,dx = 0. \qquad (9)$$

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ werden unter Berücksichtigung von[47])

$$A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} \qquad \text{und} \qquad A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0; \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(2n-1)} (-1)^n \frac{B_n}{n} \cdot \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}. \qquad (10)$$

Auch diese Formeln (7), (8) und (10) zeigen einen vorgesetzten Faktor, der bei den entsprechenden Formeln von Schläfli wegfällt.

## § 23. Die $A_n(x)$-Funktion mit inversem Argument.

Glaisher tritt auf diese Funktion nicht näher ein; er gibt nur die Hauptformel, ohne auf ihre Herleitung einzugehen.[48]) Wir gelangen jedoch auf einfache Weise zu diesen Beziehungen, wenn wir ausgehen von den später herzuleitenden Reihenentwicklungen (23) und (24).[49]) Ersetzen wir in (24) x durch (1—x), so wird unter Anwendung von $\sin 2\lambda\pi(1-x) = -\sin 2\lambda\pi x$

$$-\left\{\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots\right\}$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{(2n)!}A_{2n+1}(1-x)$$

und durch Vergleichung dieser Formel mit (24)

$$A_{2n+1}(x) = -A_{2n+1}(1-x). \qquad (\alpha)$$

Setzen wir in (23) für x den Wert (1—x), so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\cos 2\lambda\pi(1-x) = \cos 2\lambda\pi x$ genau wieder dieselbe Formel (23), also

$$A_{2n}(x) = A_{2n}(1-x). \qquad (\beta)$$

Diese zwei letzten Formeln ($\alpha$) und ($\beta$) lassen sich zusammenziehen zu der allgemeinern Formel

$$A_n(1-x) = (-1)^n A_n(x). \qquad (11)$$

Aus dieser Formel ergeben sich unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung (4) mit Leichtigkeit

$$A_{2n}(0) = A_{2n}(1) = (-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n} \quad \text{und} \qquad (12)$$

$$A_{2n+1}(0) = A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = A_{2n+1}(1) = 0. \qquad (13)$$

### Vervielfachung des Argumentes.

Die Herleitung der Formeln dafür ist hier bedeutend umständlicher als bei Schlömilch und Schläfli, da Glaisher zuerst eine Reihenentwicklung suchen muss, in welcher die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten; von diesem Momente an ist das Verfahren analog dem bei Schläfli.

Er geht aus von der bekannten, für $0 < x < 1$ geltenden Beziehung[50])

$$\frac{1}{2}\pi\frac{e^{a\pi(1-2x)}-e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{\sin 2\pi x}{1^2+a^2}+\frac{2\sin 4\pi x}{2^2+a^2}$$
$$+\frac{3\sin 6\pi x}{3^2+a^2}+\cdots\cdots$$

Entwickeln wir die einzelnen Glieder der rechten Seite nach Potenzen von $a^2$ und nehmen die gleichartigen zusammen, so sind nach (24) die Koeffizienten der Potenzen von a Bernoullische Funktionen, und es wird, wenn zugleich mit a multipliziert und dann $a\pi$ durch a ersetzt wird,

$$a\frac{e^{a(1-2x)}-e^{-a(1-2x)}}{e^a-e^{-a}}=-2a\,A_1(x)-\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)$$
$$-\frac{(2a)^5}{4!}A_5(x)-\cdots\cdots \qquad (\gamma)$$

Es ist dies eine nach ungeraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung.

Analog wird aus der bekannten Gleichung[50])

$$\frac{1}{2}a\pi\frac{e^{a\pi(1-2x)}+e^{-a\pi(1-2x)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{a^2\cos 2\pi x}{1^2+a^2}$$
$$+\frac{a^2\cos 4\pi x}{2^2+a^2}+\cdots\cdots$$

durch Entwicklung nach Potenzen von a, Multiplikation mit 2 und Ersetzen von $a\pi$ durch a

$$a\frac{e^{a(1-2x)}+e^{-a(1-2x)}}{e^a-e^{-a}}=1+(2a)^2A_2(x)+\frac{(2a)^4}{3!}A_4(x)$$
$$+\frac{(2a)^6}{5!}A_6(x)+\cdots\cdots, \qquad (\delta)$$

also eine nach geraden Bernoullischen Funktionen fortschreitende Entwicklung. Addieren wir diese beiden Entwicklungen ($\gamma$) und ($\delta$), nachdem wir in denselben a durch (—a) ersetzt haben, so resultiert eine neue, nach aufeinanderfolgenden $A_n(x)$-Funktionen fortschreitende Reihe, nämlich

$$2a\frac{e^{a(2x-1)}}{e^a-e^{-a}}=1+2a\,A_1(x)+\frac{(2a)^2}{1!}A_2(x)+\frac{(2a)^3}{2!}A_3(x)+\cdots\cdots$$

Setzen wir darin für 2a den Wert a und multiplizieren dann Zähler und Nenner mit $e^{\frac{a}{2}}$, so wird

$$a\frac{e^{ax}}{e^a-1} = 1 + a\,A_1(x) + a^2 A_2(x) + \frac{a^3}{2!}A_3(x) + \frac{a^4}{3!}A_4(x) + \cdots \quad (14)$$

Es ist dies eine elegante Entwicklung, woraus ersichtlich ist, dass

$$A_n(x) = \left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in der Entwicklung } a\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Von dieser Entwicklung geht, wie wir gesehen haben, Schläfli aus, indem er die Fakultäten der obigen Entwicklung auch noch zur Bernoullischen Funktion mitnimmt; ausgehend von dieser Eigenschaft leitet er dann die wesentlichen Eigenschaften der Bernoullischen Funktion her. Bei Glaisher tritt diese Beziehung nicht so in den Vordergrund, wie sie es verdiente; er leitet zwar einige Formeln durch Koeffizientenvergleichung gleichwertiger Entwicklungen her[51]) und gibt später die Bernoullische Funktion noch als Koeffizient einer andern Entwicklung. *Ein reiner Koeffizient einer solchen Entwicklung ist die Definition von Glaisher nicht.*

Gestützt auf Koeffizientenvergleichung kommt nun auch Glaisher auf die Vervielfachung des Argumentes. Ist k eine positive, ganze Zahl, setzen wir in der letzten Entwicklung für x der Reihe nach die Werte $x$, $x+\frac{1}{k}$, ........., $x+\frac{k-1}{k}$ und addieren dann alle diese Entwicklungen, so wird die Summe

$$S = A_n(x) + A_n\left(x+\frac{1}{k}\right) + \cdots\cdots + A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right)$$

$$= \left[a^n\right] \text{ in } \frac{a}{e^a-1}e^{ax}\left\{1+e^{\frac{a}{k}}+e^{\frac{2a}{k}}+\cdots\cdots+e^{\frac{(k-1)a}{k}}\right\}$$

$$= \left[a^n\right] \text{ in } \left(\frac{a}{k}\right)\frac{k\,e^{\frac{a}{k}(kx)}}{e^{\frac{a}{k}}-1} = \frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx); \text{ daher}$$

$$A_n(x) + A_n\left(x+\frac{1}{k}\right) + \cdots + A_n\left(x+\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{k^{n-1}}A_n(kx) \quad (15)$$

Setzen wir $x = 0$, so müssen wir die zwei Fälle $n =$ gerade und $n =$ ungerade unterscheiden; es werden für

*n = ungerade*

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right) + A_n\left(\frac{2}{k}\right) + \cdots\cdots + A_n\left(\frac{k-1}{k}\right) = 0 \quad \text{und für} \quad (15^a)$$

*n = gerade*

$$A_n\left(\frac{1}{k}\right)+A_n\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots\cdots+A_n\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n}\left\{1-\frac{1}{k^{n-1}}\right\}\frac{B_{\frac{1}{2}n}}{n}. \qquad (15^b)$$

Aus diesen Formeln lassen sich mit Leichtigkeit verschiedene Spezialwerte für die Argumente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ berechnen; für einzelne Argumente können wir auch direkt von der Definitionssummenformel ausgehen.

*A. Berechnung von* $A_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Aus den Formeln ($15^{a\text{ und }b}$) folgt sofort für $k=2$

$$A_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \text{und} \qquad A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}}\cdot\frac{B_n}{n}. \qquad (16)$$

*B. Berechnung von* $A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)$. Die ungeraden Bernoullischen Funktionen können wir mit Formel ($15^a$) nicht berechnen, da wir stets auf die identische Gleichung $0=0$ geführt werden. Gehen wir von der Summenformel für $A_{2n+1}(x)$ aus, so gelangen wir auf «Eulersche Zahlen»; da wir jedoch dieselben zu unsern Untersuchungen nie herbeigezogen haben, so wollen wir auch hier nicht auf diese Sache eintreten, besonders da diese Untersuchungen für alle betrachteten Definitionen in analoger Weise durchgeführt werden können.

Dagegen wird aus ($15^b$) unter Berücksichtigung des Wertes für $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ in Formel (16)

$$A_{2n}\left(\frac{1}{4}\right)=(-1)^n\frac{B_n}{n}\cdot\frac{2^{2n-1}-1}{2^{4n}}. \qquad (17)$$

*C. Berechnung von* $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$. Glaisher geht von der trig. Summenformel aus, um diesen Wert zu erhalten; ganz einfach erhalten wir dieselbe aus ($15^b$) für $k=3$ unter Anwendung von $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$; es wird dann

$$A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=(-1)^n\left\{\frac{3^{2n-1}-1}{3^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{4n}. \qquad (18)$$

*D. Berechnung von* $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)$. Setzen wir in (15[b]) $k=6$ und erinnern uns, dass $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)=A_{2n}\left(\frac{2}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)=A_{2n}\left(\frac{5}{6}\right)$, so wird

$$2A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)=(-1)^n\left\{\frac{6^{2n-1}-1}{6^{2n-1}}\right\}\frac{B_n}{2n}-2A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)-A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right);$$

die Werte für $A_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)$ und $A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$ eingesetzt, gibt

$$A_{2n}\left(\frac{1}{6}\right)=(-1)^n\frac{B_n}{4n}\left\{\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}-\frac{1}{6^{2n-1}}-1\right\}. \tag{19}$$

Auf gleiche Weise könnten wir die Werte der geraden Bernoullischen Funktionen für die Argumente $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}$ u. s. w. berechnen, würden aber zu komplizierten Formeln gelangen.

Glaisher gibt dann eine grosse Zahl von Reihenentwicklungen, in denen diese Spezialfunktionen, sowohl die $B_n(x)$- als auch die $A_n(x)$-Funktion, ja sogar noch weitere etwas von diesen abweichende Definitionen für die Argumente $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{12}$ als Koeffizienten auftreten[52]); auf die weitern von Glaisher eingeführten Definitionen werden wir später noch zu sprechen kommen.[53])

Im Verlaufe seiner Arbeit führt dann Glaisher noch eine Menge, den Eulerschen Zahlen ähnliche Zahlen J, I, H, P, Q, R und T ein, die in Beziehungen stehen mit algebraischen Reihenentwicklungen.[54]) Er widmet den Untersuchungen dieser Zahlen und Entwicklungen grosse Aufmerksamkeit; ihm gebührt das Verdienst, diese zuerst eingeführt zu haben; doch können alle diese Operationen auch an der Schläflischen Definition ausgeführt werden; die entstehenden Formeln werden ebenso einfach, ja in vielen Fällen sogar bedeutend einfacher.

## § 24. Die Funktion mit negativem Argument.

Glaisher gibt diese Funktion weder so elegant, noch so einfach wie Schläfli; die $A_n(x)$-Funktion findet sich überhaupt nicht mit negativem Argument; dagegen ist die $B_n(x)$-Funktion für $x=(-x)$ kurz erwähnt.

Er geht aus von den Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen, d. h., den Formeln ($\gamma$) und ($\delta$) des vorigen §, die mit entsprechender Abänderung auch für die $B_n(x)$-Funktion gelten; addieren wir beide, so folgt nach zweckmässiger Umgestaltung der linken Seite

$$\frac{e^{ax}-1}{e^a-1} = x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}B_3(x) + \frac{a^3}{3!}B_4(x) + \cdots\cdot \qquad (20)$$

Es ist dies eine neue Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen; aber auch hierin sind die Bernoullischen Funktionen nicht reine Koeffizienten der zugehörigen Entwicklung; diese Formel zeigt deutlich den Zusammenhang dieser Funktion mit der Definition von Schlömilch, der gerade den n-fachen Wert der $(n-1)^{ten}$ Ableitung einer solchen Entwicklung als $n^{te}$ Bernoullische Funktion $\varphi(z, n)$ definiert.

Gestützt auf obige Beziehung (20) kommt jetzt Glaisher auf die Funktion mit negativem Argument; er multipliziert dieselbe mit $e^{-ax}$ und erhält

$$-\frac{e^{-ax}-1}{e^a-1} = e^{-ax}\left\{x + a\,B_2(x) + \frac{a^2}{2!}B_3(x) + \frac{a^3}{3!}B_4(x) + \cdots\cdot\right\}.$$

Durch Entwicklung von $e^{-ax}$ und nachherige Koeffizientenvergleichung wird

$$-B_n(-x) = B_n(x) - (n-1)\,x\,B_{n-1}(x) + \binom{n-1}{2}x^2 B_{n-2}(x)$$
$$- + \cdots\cdot + (-1)^{n-2}x^{n-2}B_2(x) + (-1)^{n-1}x^n.$$

Dies setzt er symbolisch gleich[55])

$$-B\ (-x) = (E-x)^{n-1}B_1(x), \qquad (21)$$

wobei E ein Operationsfaktor ist, definiert durch

$$E\,B\ (x) = B_{r+1}(x);$$

es resultiert dann

$$(-1)^{n-1}B_n(1+x) = (E-x)^{n-1}B_1(x). \qquad (22)$$

Weitere Bernoullische Funktionen mit negativem Argument finden sich keine mehr; diese symbolische Darstellung ist keineswegs bequem zum Operieren; hier ist entschieden jede andere und besonders die Schläflische Definition vorzuziehen.

## § 25. Diskussion dieser Funktion.

Der einzige Unterschied dieser $A_n(x)$-Funktion, der dieselbe äusserlich nur unwesentlich von der Definition von Schläfli unterscheidet, ist der, dass Schläfli den Faktor $\frac{1}{n!}$ vor der Klammer der rechten Seite der Gleichung der $n^{ten}$ Bernoullischen Funktion hat, während Glaisher nur $\frac{1}{n}$. Bei der graphischen Darstellung ist dann augenscheinlich, dass der Faktor $\frac{1}{n!}$ das Konvergenzgebiet der Funktion um so mehr erweitert, je höher der Grad der Bernoullischen Funktion steigt, und dass schon deshalb die Definition von Schläfli vorzuziehen ist.

Die acht ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition nehmen folgende Werte an:

$$A_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}.$$

$$A_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

$$A_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{120}.$$

$$A_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

$$A_6(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{252}.$$

$$A_7(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x.$$

$$A_8(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{240}.$$

Wir erkennen daraus, dass die zwei ersten Bernoullischen Funktionen dieser Definition genau mit denjenigen gleich hoher Ordnung bei Schläfli übereinstimmen; die Funktion $A_2(x)$ besitzt also ebenfalls ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $-\frac{1}{24}$. Die Gleichung für $A_3(x)$ weist analog $\chi(3, x)$ zwischen 0 und 1 sowohl ein Minimum als ein Maximum auf. Beide liegen bei gleichem Werte von x wie für die $\chi(3, x)$-Funktion; doch wird hier der Wert der Funktion gerade 2!-mal so gross wie bei $\chi(3, x)$.

Entsprechend könnten wir weiterfahren; wir finden, *dass die Stellen der Maximal- und Minimalwerte nicht ändern, dass aber die zugehörigen Funktionswerte für diese Definition bedeutend grösser werden, je höher der Grad der Funktion ist; die Funktion nimmt rasch sehr grosse Werte an.*[56])

Die Figuren zu § 18 gelten auch für diese Definition.

## § 26. Verwandlung dieser Definition in trigonometr. Reihen.

Schon bei der Herleitung der Definitionsgleichung ist Glaisher zu trigonometrischen Reihen als Werte für Bernoullische Funktionen gelangt; wir brauchen nur für die $B_n(x)$-Funktion in den Formeln (2) und (3) die allgemeinere $A_n(x)$-Definition einzusetzen; dann resultieren

$$A_{2n}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} \left\{ \cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (23)$$

$$A_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\pi^{2n+1}} \left\{ \sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \cdots\cdots \right\}. \quad (24)$$

Wir wären auch zu denselben Resultaten gelangt, wenn wir uns auf die Theorie der Fourierschen Reihen und Integrale gestützt und für die Funktion $f(x)$ die Bernoullische Funktion $A_n(x)$ eingeführt hätten; wie schon bei Schläfli, so gelangen wir auch hier rascher ans Ziel als Schlömilch, weil das entstehende Integral leichter zu lösen ist.

## § 27. Integrale mit $A_n(x)$-Funktionen.

Während Glaisher in seinen zwei ersten, diesen Gegenstand behandelnden Schriften gar keine Integrale mit Bernoullischen Funktionen gibt, behandelt er die Integraldarstellungen dieser Funktion sehr eingehend in seiner dritten, bereits erwähnten Schrift «On the definite integrals connected with the Bernoullian function.»

Er geht darin von den Summenformeln des Sinus und Cosinus aus[57]) und leitet auf analoge Weise, wie die Untersuchungen von § 20 des vorhergehenden Abschnittes zeigen, seine Integrale her. Trotz des Unterschiedes beider Definitionen bleibt ja die Art des Herleitens dieselbe; wir wollen deshalb hier nicht noch einmal dieselben Ableitungen vornehmen, sondern begnügen uns mit der Angabe der erhaltenen Resultate; ein Vergleich der entsprechenden Formeln, die stets sehr ähnlich aussehen, zeigt jedoch, dass diejenigen der Definition von Schläfli noch etwas einfacher aussehen, vorausgesetzt, dass sie in der Form nicht *ganz* übereinstimmen.

**A. Einfache Integrale.**

*1. Mit der ungeraden Bernoullischen Funktion.* Gestützt auf (8) werden für die Spezialwerte der obern Grenze $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{25}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{3^{2n}-1}{3^{2n-1}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{26}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{4^{2n}+2^{2n}-2}{4^{2n}} \cdot \frac{B_n}{2n}. \tag{27}$$

$$(2n-1)\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n-1}(x)\,dx = (-1)^n \frac{6^{2n}+2\cdot 3^{2n}+3\cdot 2^{2n}-6}{6^{2n}} \cdot \frac{B_n}{4n}. \tag{28}$$

Hier kompliziert also der vor dem Integral stehende Faktor $(2n-1)$.

*2. Mit der geraden Bernoullischen Funktion.* Gestützt auf Formel (7) werden, wenn wir zur Abkürzung die von Glaisher eingeführten Zahlen wählen,[58])

$$2n\int_0^{\frac{1}{2}} A_{2n}(x)\,dx = 0. \tag{29}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{3}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{3^{2n+1}}. \tag{30}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{4}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{E_n}{4^{2n+1}}. \tag{31}$$

$$2n\int_0^{\frac{1}{6}} A_{2n}(x)\,dx = (-1)^{n+1} \frac{J_n}{6^{2n+1}}. \tag{32}$$

**B. Integrale mit trig. Funktionen.**

Durch analoges Verfahren wie in § $20^B$ werden

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \sin 2r\pi x\,dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2r\pi)^{2n+1}}. \tag{33}$$

$$\int_0^1 A_{2n+1}(x) \cos 2 r \pi x \, dx = 0. \tag{34}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \cos 2 r \pi x \, dx = (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(2 r \pi)^{2n}}. \tag{35}$$

$$\int_0^1 A_{2n}(x) \sin 2 r \pi x \, dx = 0. \tag{36}$$

Auch hier bedeutet r eine positive ganze Zahl; die Formeln (33) und (35) weisen wieder einen Faktor mehr auf, als die entsprechenden der Schläflischen Definition.

### C. Integrale von Produkten.

Gestützt auf die Multiplikation der Summenformeln (23) und (24) werden durch nachherige Integration

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m)! \, (2n)!}{(2m+2n+2)!} B_{m+n+1}. \tag{37}$$

$$\int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n}(x) \, dx = (-1)^{m+n} \frac{(2m-1)! \, (2n-1)!}{(2m+2n)} B_{m+n}. \tag{38}$$

$$\int_0^1 A_{2m+1}(x) A_{2n}(x) \, dx = \int_0^1 A_{2m}(x) A_{2n+1}(x) \, dx = 0. \tag{39}$$

Für $n = m$ werden die zwei erstern Formeln

$$\int_0^1 \left\{A_{2n+1}(x)\right\}^2 dx = \frac{\left\{(2n)!\right\}^2}{(4n+2)!} B_{2n+1} \quad \text{und} \tag{40}$$

$$\int_0^1 \left\{A_{2n}(x)\right\}^2 dx = \frac{\left\{(2n-1)!\right\}^2}{(4n)!} B_{2n}. \tag{41}$$

Wir könnten auch hier wieder als obere Grenze $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ wählen, worauf diese Integrale den $2^{\text{ten}}$ ($4^{\text{ten}}$) Teil der obigen Integrale (37) und (38) oder (40) und (41) ausmachen würden.

Ein Vergleich mit den Formeln bei Schläflis Definition zeigt, dass die Formeln der $\chi(n, x)$-Funktion wieder einfachere Gestalt aufweisen.

Auch diese Integralbetrachtungen könnten natürlich beliebig weit ausgedehnt werden.[59])

## § 28. Andere Definitionen von Glaisher.

Da Glaisher im Laufe seiner Untersuchungen zu Entwicklungen kommt, welche nach fortschreitenden Funktionen $\left\{A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}$ laufen, so führt er auch diese Funktion als eigene Definition ein, indem er setzt $A'_n(x) = A_n(x) - 2^n A_n\left(\frac{1}{2}x\right)$.
Er führt dann die Betrachtung dieser $A'_n(x)$-Funktion entsprechend derjenigen der $A_n(x)$-Funktion durch und gelangt auch zu ganz entsprechenden Resultaten, ohne aber neue Gesichtspunkte aufzudecken. Vorteile bietet diese Funktion keine, da keine der Formeln eine wesentliche Änderung erfahren.[60])

In derselben Arbeit führt Glaisher noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die in sehr engem Zusammenhang mit den früher erwähnten Definitionen stehen, da er setzt

$$V_n(x) = n\, A_n(x) \qquad \text{und} \qquad U_n(x) = n\, A'_n(x).$$

Diese beiden schmiegen sich jeweilen eng an die $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion an.

Trotzdem jetzt die Definitionsformeln den allgemeinen Nenner $\frac{1}{n}$ der rechten Seite nicht mehr besitzen, werden die daraus abgeleiteten Formeln nicht einfacher; nach Glaisher sollen sie sich besser zur symbolischen Darstellung eignen als seine früher erwähnten Definitionen. Während Glaishers $B_n(x)$-Funktion mit der Raabeschen Definition übereinstimmt, stimmt seine $V_n(x)$-Funktion mit der Schlömilchschen $\varphi(x, n)$-Funktion überein. Die Untersuchung dieser beiden Funktionen geht ähnlich vor sich, wie die Betrachtung seiner erstern Definitionen; doch wird dabei die symbolische Darstellungsweise angewandt, wo sie überhaupt anzuwenden ist.[61])

Endlich führt derselbe Mathematiker noch zwei weitere Definitionen der Bernoullischen Funktion ein, die mit der $A_n(x)$- resp. $A'_n(x)$-Funktion verbunden sind durch die Beziehungen

$$\alpha_n(x) = A_n\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \alpha_n'(x) = A_n'\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Auch hier erfolgen die allerdings nur kurzen Betrachtungen darüber in entsprechender Weise wie bei den erstern Definitionen.[62])

# V. Folgerungen.

## § 29. Zusammenhang der verschiedenen Definitionen.

Wir geben vorerst eine Übersicht der Definitionen, die wir einlässlich betrachtet haben; alle übrigen können ja aus denselben hergeleitet werden; deshalb führen wir dieselben auch bei den Vergleichungen der einzelnen Funktionen nicht an.

Es waren

$$B''(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2} x^{2n} + \frac{1}{2}\binom{2n}{1} B_1 x^{2n-1} - \frac{1}{4}\binom{2n}{3} B_2 x^{2n-3}$$

$$+ - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n}{2n-1} B_n x. \qquad (1)$$

$$B'(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{1}{2} x^{2n+1} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{1} B_1 x^{2n} - \frac{1}{4}\binom{2n+1}{3} B_2 x^{2n-2}$$

$$+ - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n+1}{2n-1} B_n x^2. \qquad (2)$$

Die Reihen brechen ab mit dem Glied in $x^2$ oder $x$, je nachdem $n$ eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

$$\varphi(x, n) = x^n - \frac{1}{2} n x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4}$$

$$+ \binom{n}{6} B_3 x^{n-6} - + \cdots\cdots \qquad (3)$$

Hier bricht die Reihe ab mit dem Gliede in $x^2$ oder $x$, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist.

$$\chi(n, x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \sum_{\lambda=1} (-1)^{\lambda-1} \binom{n}{2\lambda} B_\lambda x^{n-2\lambda}\right\} \qquad (4)$$

Die Reihe bricht von selbst ab infolge von $\binom{n}{2\lambda}$.

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2} x^{n-1} + \frac{n-1}{2!} B_1 x^{n-2}$$

$$- \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \qquad (5)$$

Die Reihe schliesst mit dem Gliede in $x^2$ oder $x$ für ein gerades oder ungerades $n$.

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{1}{n}\, n\, x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + \cdots\right\} \qquad (6)$$

Der Exponent von x darf nie negativ werden.

Die einzelnen Definitionen können wir in zwei Gruppen teilen; die eine Gruppe enthält die Definition von Raabe, diejenige von Schlömilch und die erste von Glaisher, also die Funktionen $B(x)$, $\varphi(x, n)$ und $B_n(x)$. Es sind dies alles Funktionen, bei welchen kein von x freier Term vorkommen darf. Die zweite Gruppe enthält die Funktionen, welche einen selbständigen, von x freien Ausdruck aufweisen; es sind dies alle übrigen, also die Funktionen von Glaisher und von Schläfli, nämlich $A_n(x)$, $A'_n(x)$, $V_n(x)$, $U_n(x)$ und $\chi(n, x)$.

Sämtliche Funktionen stehen mit denjenigen der gleichen Gruppe in engem Zusammenhang; etwas komplizierter sind die Beziehungen der Definitionen der einen Gruppe zu denjenigen der andern Gruppe; wir erhalten folgende Beziehungen, welche den Zusammenhang der einzelnen Definitionen veranschaulichen:

*I. Gruppe:*

$$B''(x) = \frac{\varphi(x, 2m+1)}{2m+1}; \qquad B'(x) = \frac{\varphi(x, 2m+2)}{2m+2}. \qquad (7)$$

$$B''(x) = B_{2m+1}(x); \qquad B'(x) = B_{2m+2}(x). \qquad (8)$$

$$\varphi(x, n) = n\, B_n(x). \qquad (9)$$

*II. Gruppe:*

$$\chi(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} A_n(x); \qquad A_n(x) = (n-1)!\; \chi(n, x). \qquad (10)$$

*III. Gruppen gegenseitig:*

$$B'(x) = (2n+1)!\; \chi(2n+2, x) + (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{2n+2}. \qquad (11)$$

$$B''(x) = (2n)!\; \chi(2n+1, x). \qquad (12)$$

$$B'(x) = A_{2n+2}(x) - A_{2n+2}(0); \qquad B''(x) = A_{2n+1}(x). \qquad (13)$$

$$\varphi(x, 2n) = (2n)!\, \chi(2n, x) + (-1)^n B_n;$$

$$\varphi(x, 2n+1) = (2n+1)!\; \chi(2n+1, x). \qquad (14)$$

$$\varphi(x, 2n) = 2n\, A_{2n}(x) + (-1)^n B_n; \quad \varphi(x, 2n+1) = (2n+1) A_{2n+1}(x). \qquad (15)$$

Aus den obigen Beziehungen lassen sich die Werte für die übrigen Formeln durch einfache algebraische Umwandlung finden.

Gestützt auf die Tabellen I—IV (Seite 92—95), wo die Werte der für unsere Betrachtungen wichtigsten Definitionen für die einzelnen Argumente zusammengestellt sind, können wir obige Beziehungen auf ihre Richtigkeit prüfen.

## § 30. Vergleichung der einzelnen Definitionen.

### A. Betreffs ihrer Herleitung.

Die Herleitungen der einzelnen Definitionen der Bernoullischen Funktion sind sehr verschieden. Überblicken wir alle, so erkennen wir bald, dass die einfachste und eleganteste Herleitung der Definitionsgleichung von Schläfli stammt, der ohne alle Umwege zu derselben gelangt. Zudem steht dieselbe mit der Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen in innigem Zusammenhang; dies bietet uns daher den Vorteil, dass wir aus *einer* Grundgleichung sowohl die Bernoullischen Funktionen, als auch die Bernoullischen Zahlen ohne grosse Schwierigkeit herleiten können; diese Gleichung nennen wir die «*Fundamentalgleichung der Bernoullischen Funktionen und der Bernoullischen Zahlen*»; dieselbe lautet

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^{m+1}}{m!} = \frac{y e^{xy}}{e^y - 1} - \frac{y}{e^y - 1}; \tag{16}$$

der erste Bruch rechts führt auf die Bernoullischen Funktionen, der zweite dagegen auf die Bernoullischen Zahlen.

Keine der übrigen Definitionen zeigt diesen Zusammenhang; bei all denselben braucht es grösserer Umwandlungen und längerer Rechnungen, bis wir auf die gewünschte Definitionsgleichung gelangen.[63])

### B. Betreffs der Derivierten.

Stellen wir die *einfachen Ableitungen* der verschiedenen Definitionen zusammen, so ergibt sich, dass die Ableitungen der Funktionen nach Raabe und nach Schlömilch eine unerwünschte Komplikation durch den Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion zeigen. Die Definition nach Glaisher weist zwar nur *eine* Formel auf; dagegen tritt vor die Ableitung noch ein Faktor, während bei der Schläflischen Definition die Derivierte einer Bernoullischen Funktion wieder eine reine Bernoullische Funktion ist; letztere Definition ist somit die bequemste.

Was die *mehrfachen Ableitungen* anbetrifft, so lassen sich diejenigen der Raabeschen Definition nicht darstellen, weil dort der

Exponent nur ungenügend angedeutet wird im Funktionssymbol. Ein Vergleich der übrigen zeigt, dass bei der Schlömilchschen Definition verschiedene Formeln nötig sind zur Darstellung der geraden oder ungeraden wiederholten Ableitungen der geraden oder ungeraden Bernoullischen Funktion. Bei Glaishers Definition fallen die unbequemen Bernoullischen Zahlen weg; ebenso ist zur Darstellung all der Ableitungen nur noch eine Formel nötig; doch zeigt dieselbe zwei vorgesetzte komplizierende Faktoren. Schläflis Definition ist auch hier die einfachste, da die wiederholten Ableitungen derselben stets reine Bernoullische Funktionen sind. [64])

**C. In Bezug auf die Integraldarstellungen.**

Das von den Derivierten Gesagte gilt ebenfalls von den *einfachsten Integralen,* da dieselben ja nur Umkehrungsfunktionen ersterer sind. Auch die *übrigen* Integraldarstellungen sprechen betreffs ihrer Einfachheit zu gunsten der Definition von Schläfli, da selbst die entsprechenden Formeln der Definition von Glaisher meist einen vorgesetzten Faktor mehr enthalten. [65])

**D. In Bezug auf die Funktion mit inversem Argument.**

Die Formeln dafür lauten bei allen Definitionen gleich; ihre Herleitungen sind aber sehr verschieden. Raabe geht zur Ableitung seiner obigen Formel ziemlich weit auf seine einleitenden Untersuchungen zurück; Glaisher stützt sich auf die Definitionssummenformeln des Sinus und Cosinus und stellt die beiden gefundenen Formeln zu einer allgemeinern zusammen. Sehr elegant und kurz sind die Herleitungen von Schlömilch und von Schläfli, wobei Schläfli mit Vorteil die Koeffizientenvergleichung verwendet. [66])

**E. Betreffs der Funktion mit negativem Argument.**

Es geben auch hierin alle Funktionen ziemlich ähnliche Werte, mit Ausnahme der symbolischen Darstellungsweise von Glaisher. Der Nenner im zweiten Term des Ausdruckes für die $\chi(n, -x)$-Funktion ist keine wesentliche Erschwerung, da die andern Definitionen, mit Ausnahme derjenigen von Raabe, auch einen vorgesetzten Faktor aufweisen. [67])

**F. Betreffs andrer Formeln.**

Wir haben bei den Definitionen von Raabe und Schlömilch mehr als bei den beiden andern näher betrachteten Funktionen die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion trennen müssen; die Definitionen von Glaisher und von Schläfli sind daher allgemeiner gehalten, und es ist das dem Umstande zuzuschreiben, dass die beiden ersten Definitionen kein von der Variabelen freies Glied enthalten dürfen; dies ist auch der Grund, dass bei den Differentialquotienten und Integraldarstellungen dieser Funktionen die lästigen Zusatzglieder mit den Bernoullischen Zahlen auftreten. Die Formeln, welche eine Summe von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen darstellen, entscheiden wieder zu Gunsten der Funktionen von Glaisher und von Schläfli, da dieselben nur je *eine* Formel aufweisen, während die übrigen auch hierbei einen Unterschied zwischen geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen machen müssen. Die entsprechenden Formeln dieser Summe bei Glaisher und bei Schläfli sind ganz von gleicher Form; schon ihre Herleitung ist ziemlich ähnlich, da beide durch Koeffizientenvergleichung aus Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen zum Ziele gelangen. Glaisher zeigte im Laufe seiner Untersuchungen, also nicht etwa als Ausgangspunkt derselben, dass die $A_n(x)$-Funktionen sich geben lassen als

$$\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in } a\,\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Er kommt zu dieser Thatsache, wie wir gesehen, auf ziemlich umständliche Art und Weise, ausgehend von einer Formel, die selbst eine sehr komplizierte Herleitung aufweist; zudem ist seine Bernoullische Funktion kein reiner Koeffizient der Potenz von a, da stets im Nenner eine Fakultät sein muss. Schläfli aber geht direkt von dieser Entwicklung aus, indem er definiert

$$\chi(n, x) = n^{te} \text{ Bernoullische Funktion} = [y^n] \text{ in } y\,\frac{e^{xy}}{e^y-1}.$$

Diese Entwicklung bildet also seinen Ausgangspunkt, auf welchen sich alle Untersuchungen stützen; daher gestaltet sich seine Theorie der Bernoullischen Funktion viel einheitlicher und ist derjenigen von Glaisher überlegen.[66])

**G. Betreffs Entwicklung in Reihen.**

Alle Definitionen lassen sich leicht als trigonometrische Reihen darstellen und zwar die geraden Bernoullischen Funktionen als Cosinusreihen und die ungeraden als Sinusreihen.

Raabe und Glaisher gelangen durch fortgesetzte Differentiation der bekannten Reihe für $\pi\left\{\frac{1}{2} - x\right\}$,[68]) woraus successive die einzelnen Bernoullischen Funktionen entstehen, zu ihren diesbezüglichen Resultaten.

Elegant leitet Schlömilch, wie gesehen, seine Reihen her, gestützt auf die Fourierschen Reihen und Integrale. Genau auf dieselbe Weise würden wir auch bei den übrigen drei Definitionen zum Ziele gelangen; das Ziel würde zudem noch eher erreicht, da die aufgestellten Integralformeln das zu lösende Integral, welches die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung darstellt, mit geringer Mühe auswerten.[65])

Höchst interessant und wichtig ist die Herleitung dieser Formeln nach Schläfli, der gestützt auf die Theorie der Eulerschen Integrale und der Gammafunktion eine Reihenentwicklung so transformiert, bis er schliesslich zu den entsprechenden Beziehungen gelangt. Seine Resultate bieten den grossen Vorteil, dass sie nur Spezialwerte sind einer von ihm selbst aufgestellten Hauptformel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \Big\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\Big\}\frac{1}{2}\Big[1+i\,\mathrm{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\Big]\,d\varphi. \quad (17)$$

Durch Trennung der reellen von der imaginären Komponente erhält er die beiden ganz allgemeinen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2}\chi(n,\Theta) \qquad \text{und} \qquad (18)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \Big\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\Big\}\,\mathrm{cotg}\,\pi(\varphi-\Theta)\,d\varphi. \quad (19)$$

Aus Formel (18) resultieren dann die wichtigen trigonometrischen Summenformeln

$$\chi(2m,x) = (-1)^{m-1}\frac{2}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{\cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}} \qquad \text{und} \qquad (20)$$

$$\chi(2m+1, x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}}. \tag{21}$$

Bei dieser Definition haben wir, wie sonst bei keiner andern, ursprünglich alle diese Reihenentwicklungen in derselben Formel vereinigt, was sehr zu Gunsten dieser Definition spricht.

Wir haben auch schon erwähnt, dass mit Hülfe dieser Funktion als Reihenentwicklung Schläfli die *Raabesche Restformel* herleitet und ebenso den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweist; es sind dies Beziehungen, welche die Allgemeinheit der Schläflischen Definition trefflich beleuchten.[69])

**H. Betreffs Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen.**

Entwicklungen, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten, lassen sich aus jeder Definition herleiten; aber nur bei Schläfli sind die Bernoullischen Funktionen reine Koeffizienten solcher Entwicklungen; auch hier liefert diese Definition die einfachsten Formeln.[70])

## § 31. Diskussion der „Bernoullischen Funktion."

Unsere früher hergeleiteten Reihenentwicklungen der Bernoullischen Funktion haben gezeigt, dass dieselben nur gültig sind für $0 < x < 1$[71]); deshalb haben wir in unsern Untersuchungen hauptsächlich das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$ berücksichtigt, wohl aber auch Gleichungen aufgestellt, um den Verlauf der Funktion ausserhalb dieses Intervalles kennen zu lernen.[72]) Gestützt auf diese Beziehungen hat sich uns die Frage aufgedrängt, wie weit sich das Konvergenzgebiet für die verschiedenen Definitionen überhaupt erstrecke. Um diese Frage zu entscheiden, stellen wir die Funktionen graphisch dar. Wir tragen die Werte für das Argument x (z) als Abscissen auf und die zugehörigen Funktionswerte y als Ordinaten; die einzelnen Werte sind in den Tabellen I—IV zusammengestellt; den Verlauf der verschiedenen Funktionen zeigen die Tabellen V—VIII.

*1. Die Bernoullischen Funktionen ersten Grades.* Dieselben stellen bei allen Definitionen eine Gerade dar; bei der Definition von Raabe, wie auch bei derjenigen von Schlömilch ist diese Gerade die Winkelhalbierende durch den ersten und dritten Quadranten, geht also durch den Ursprung; bei den Definitionen von Glaisher und Schläfli schneidet sie die Abscissenaxe im Punkte $x = \frac{1}{2}$, aber ebenfalls unter einem Winkel von $45^0$.

*2. Die Bernoullischen Funktionen zweiten Grades.* Dieselben stellen eine gewöhnliche Parabel dar, und zwar ist die Parallele zur Ordinatenaxe durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ die Hauptaxe der Parabel mit dem Parameter $p = \frac{1}{4}$. Bei den Definitionen von Raabe und von Schlömilch schneidet diese Parabel die Abscissenaxe in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$, bei den andern Definitionen innerhalb dieses Intervalles. Dass dem so ist, beweist die Untersuchung einer einzelnen Funktion, da das Verfahren bei allen dasselbe ist; wir wählen dazu diejenige von Schläfli

$$\chi(2, x) = y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$12\,y = 6x^2 - 6x + 1.$$

Transformieren wir diese Gleichung durch $x = x' + \frac{1}{2}$ und $y = y' - \frac{1}{24}$, so werden $y' = \frac{1}{2} x'^2$ und $p = \frac{1}{4}$; durch ähnliche Transformation der übrigen Definitionen gelangen wir stets auf dieselbe Gleichung.

*3. Die Bernoullischen Funktionen höheren Grades.* Alle diese Funktionen stellen *Parabeln höheren Grades* dar, da zu einem einzigen Werte von y stets mehrere Werte von x gehören; der Grad steigt mit dem Exponenten des ersten Gliedes. Im Intervall von 0 bis 1 weisen dieselben entweder ein Maximum oder ein Minimum oder beide zugleich auf, und es verlaufen die $n^{te}$ und die $(n+4)^{te}$ Funktion entsprechend.

Es besitzen die Funktionen mit *geradem Exponenten* $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4\lambda - 2)$ ein *Minimum* bei $x = \frac{1}{2}$ und gehen auf beiden Seiten der Ordinatenaxe mit positiven Funktionswerten ins Unendliche, während die Funktionen für $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4\lambda$ ein *Maximum* bei $x = \frac{1}{2}$ aufweisen, beidseitig schwach negativ werden, um aber wieder mit beiden Ästen der Kurve mit positiven Funktionswerten ins Unendliche zu gehen.

Etwas abweichend davon verhalten sich die Kurven der Bernoullischen Funktionen mit *ungeraden Exponenten;* dieselben gehen sowohl mit positiven Funktionswerten auf positiver Seite der Ordinatenaxe ins Unendliche, als auch mit negativen auf negativer Seite. Alle diese Kurven ungeraden Grades schneiden die Abscissenaxe in den Punkten $0, \frac{1}{2}$ und 1, und es sind die Kurven für $n = 3, 7, 11, \ldots, (4\lambda - 1)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ *positiv* und von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ *negativ;* von den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ aus gehen sie absolut gleichwertig ins Unendliche. Für $n = 5, 9, 13, \ldots, (4\lambda + 1)$ nehmen die Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ *negative* Werte an, zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ dagegen *positive;* in kurzer Entfernung ausserhalb dieses Intervalles finden sich nochmals zwei Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, worauf auch diese Kurven absolut gleichwertig ins Unendliche laufen.

Es interessiert uns nun zu wissen, wie sich die Kurven im Unendlichen verhalten; denn dass dort die zwei Äste der einzelnen Funktionskurven zusammenhangen, ist bekannt, da ja die Parabeln unikursale oder rationale Kurven sind und sich alle Punkte derselben darstellen lassen durch algebraische Funktionen eines variabelen Parameters.

Wir greifen, da alle Funktionen höhern Grades der verschiedenen Definitionen analoge Form haben, diejenigen von Schläfli heraus und untersuchen vorerst

*A. Die ungerade Bernoullische Funktion.* Wir wählen dazu

$$\chi(5, x) = y = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720} \quad \text{oder}$$

$$6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x - 720y = 0.$$

Die Schnitte dieser Kurve mit der unendlich fernen Geraden erhalten wir, wenn wir die Gleichung mit z homogen machen durch die Formeln $x = \frac{x'}{z}$ und $y = \frac{y'}{z}$ und dann $z = 0$ setzen; diese Formeln vorerst eingesetzt, gibt, wenn zugleich mit $z^5$ multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4z + 10x'^3z^2 - x'z^4 - 720y'z^4 = 0;$$

diese Gleichung wird für $z = 0$ zu $x'^5 = 0$, d. h., *die Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade in der Richtung der positiven Ordinatenaxe in fünf zusammenfallenden Punkten.*

Zur nähern Untersuchung dieser zusammenfallenden Punkte im Unendlichen transformieren wir die unendlich ferne Gerade, welche wir parallel der Abscissenaxe annehmen können, ins Endliche, indem wir sie auf die Abscissenaxe projizieren; dazu dienen die Formeln

$$y = \frac{1}{y'} \text{ und } x = \frac{x'}{y'}; \text{ also } y' = \frac{1}{y} \text{ und } x' = \frac{x}{y}.$$

Für $y = \infty$ wird $y' = 0$, d. h.,

*die unendlich ferne Gerade wird auf die Abscissenaxe projiziert und letztere ins Unendliche.*

Durch die angedeutete Substitution entsteht, wenn mit $y'^5$ multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4y' + 10x'^3y'^2 - x'y'^4 - 720y'^4 = 0. \qquad (\alpha)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; in dieser entspricht der Nullpunkt dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve.

Die Gleichung beginnt erst mit Gliedern vierten Grades; also ist der neue Nullpunkt $O'$ ein vierfacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir durch Nullsetzen der Glieder niedrigsten Grades, also durch $y'^4 = 0$, was uns sagt, dass alle vier Tangenten des vierfachen Punktes mit der Abscissenaxe zusammenfallen. Für $y' = 0$ wird $x'^5 = 0$, d. h., die Abscissenaxe schneidet die Kurve im vierfachen Punkte $O'$ in fünf zusammenfallenden Punkten.

Zur nähern Untersuchung der Kurve in der Nähe dieses vierfachen Punktes geben wir dem $x'$ kleine Werte.

a) *$x'$ = positiv = 0,01.* Die Gleichung $(\alpha)$ geht dann über in

$$6 \cdot 0{,}01^5 - 15 \cdot 0{,}01^4 y' + 10 \cdot 0{,}01^3 y'^2 - 0{,}01\,y'^4 - 720\,y'^4 = 0;$$

da $y'$ selbst klein ist, so können wir infolge der vierten und fünften Potenz, in denen das kleine $x'$ vorkommt, die beiden ersten Glieder vernachlässigen; dann folgt, wenn durch $y'^2$ dividiert wird,

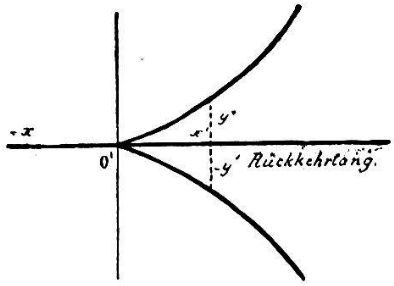
$$0{,}00001 = 720{,}01\,y'^2; \quad y' = \pm\sqrt{\frac{0{,}00001}{720{,}01}},$$

d. h., zu einem positiven kleinen $x'$ gehören zwei reelle absolut gleichwertige, ein positives und ein negatives $y'$. Geben wir dem $x'$ grössere positive Werte, so steigt der absolute Wert der $y'$ ziemlich rasch.

b) *$x'$ = negativ = — 0,01.* Für diesen Wert wird aus $(\alpha)$ unter Vernachlässigung der beiden ersten Glieder und durch Division durch $y'^2$

$$719{,}99\, y'^2 = -0{,}00001;\; y' = \pm\sqrt{-\frac{0{,}00001}{719{,}99}} = \text{imaginär.}$$

Dies ergibt sich auch aus andern negativen Werten für $x'$, somit folgt, dass auf der negativen Seite der Ordinatenaxe keine Kurvenpunkte liegen. Der neue Nullpunkt erscheint daher als ein vierfacher Punkt von der Art, dass die Kurve in ihm eine Spitze bildet, und die Abscissenaxe ist Rückkehrtangente in demselben mit fünffachem Berührungspunkt. Dasselbe gilt für den unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve; derselbe ist ein vierfacher Punkt der Parabel, in welchem alle vier Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen; wir können den Punkt als *Rückkehrpunkt zweiter Ordnung* bezeichnen.




Da wir diese Ausführungen auch auf die Bernoullischen Funktionen höhern Grades ausdehnen können, bei welchen die vielfachen Punkte nur in höherem Grade der Vielfachheit auftreten, so ergibt sich der *Satz:*

*Die ungeraden Bernoullischen Funktionen höhern, $(2m+1)^{ten}$ Grades, analytisch interpretiert, stellen Parabeln höhern Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der positiven Ordinatenaxe ein $2m$-facher Punkt, in welchem alle $2m$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Die Kurve bildet in ihm eine Spitze und die unendlich ferne Gerade ist Rückkehrtangente mit $(2m+1)$-fachem Berührungspunkt; der Punkt ist ein Rückkehrspunkt von der Ordnung $m$.*

*B. Die gerade Bernoullische Funktion.* Etwas anders gestaltet sich der Verlauf dieser Funktion im Unendlichen. Zur Untersuchung wählen wir

$$\chi(4, x) = y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720} \quad \text{oder}$$

$$30x^4 - 60x^3 + 30x^2 - 720y - 1 = 0.$$

Die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden werden gestützt auf die homogene Gleichung

$$30x'^4 - 60x'^3z + 30x'^2z^2 - 720y'z^3 - z^4 = 0,$$

für $z = 0$ $\quad x'^4 = 0$, d. h.,

*die unendlich ferne Gerade wird von der Kurve in vier zusammenfallenden Punkten geschnitten in der Richtung der positiven Ordinatenaxe.*

Projizieren wir die unendlich ferne Gerade wieder durch die frühere Substitution auf die Abscissenaxe ins Endliche, so folgt, wenn mit $y'^4$ multipliziert wird,

$$30x'^4 - 60x'^3y' + 30x'^2y'^2 - y'^4 - 720y'^3 = 0. \qquad (\beta)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; da sie erst mit Gliedern dritten Grades beginnt, so ist der neue Nullpunkt O′ ein dreifacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir aus $y'^3 = 0$, d. h., alle drei Tangenten fallen in der Abscissenaxe zusammen, und diese berührt die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten; also ist auch der unendlich ferne Punkt der Ordinatenaxe ein dreifacher Punkt der Kurve, dessen drei Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

Zur noch genauern Untersuchung dieser Kurve in der Nähe des dreifachen Punktes transformieren wir die Gleichung ($\beta$) wie folgt:

$$30x'^2(x'-y')^2 = y'^3(y'+720).$$

$$x'(x'-y') = \pm\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}.$$

$$x'^2 - x'y' \mp \sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}} = 0.$$

$$x' = \frac{1}{2}\left\{y' \pm \sqrt{y'^2 \pm 4\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}}\right\}.$$

Die Quadratwurzel wird nur für $y' = 0$ selbst zu Null.

Geben wir jetzt dem $y'$ kleine Werte, so wird für

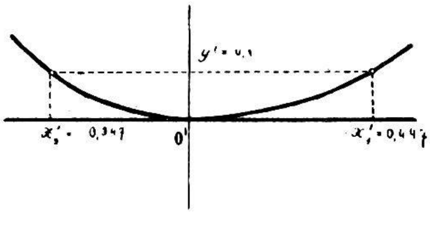
a) $y'$ = *positiv* = $0,1$.

$$x' = \frac{1}{2}\left\{0,1 \pm \sqrt{0,01 + 4\sqrt{\frac{0,001 \, . \, 720,1}{30}}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{0,1 \pm 0,794\right\}.$$

$$x_1' = 0,447; \qquad x_2' = -0,347.$$

Ebenso würde ein grösseres $y'$ zwei verschiedene reelle Werte liefern. Somit gehören zu einem positiven $y'$ zwei verschiedene reelle Werte von $x'$, wovon stets der eine *positiv*, der andere *negativ* ist.

b) $y'$ = *negativ und klein*. In diesem Falle wird die Quadratwurzel stets imaginär und somit auch der Wert für $x'$; daraus folgt, dass die Kurve ganz oberhalb der Abscissenaxe liegt und von der Ordinatenaxe nicht symmetrisch geteilt wird. Der dreifache Punkt unterscheidet sich also nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung der Kurve in der Nähe desselben eine schwächere.



Da diese Untersuchungen auch ausgedehnt werden können auf die geraden Bernoullischen Funktionen mit höhern Exponenten, so ergibt sich der *Satz:*

*Die geraden Bernoullischen Funktionen höhern, $2m^{ten}$ Grades stellen ebenfalls Parabeln höhern, $2m^{ten}$ Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der Ordinatenaxe ein $(2m-1)$-facher Punkt, in welchem alle $(2m-1)$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, welche die Kurve in $2m$ zusammenfallenden Punkten berührt. Die Kurve liegt ganz auf der einen Seite der unendlich fernen Geraden, und der $(2m-1)$-fache Punkt unterscheidet sich nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung in der Nähe desselben eine schwächere.*

Da diese Untersuchungen für alle Definitionen analog durchgeführt werden können und auch entsprechende Resultate liefern, so sind wir über den Verlauf aller Bernoullischen Funktionen im Endlichen wie im Unendlichen genügend aufgeklärt.

Die Tabellen V—VIII zeigen nun deutlich, dass das Gültigkeitsgebiet der einzelnen Definitionen ein ziemlich verschieden grosses ist; am kleinsten ist das Konvergenzgebiet der Schlömilchschen Definition; das beste Gebiet liegt hier zwischen $-1$ und $+2$; ausserhalb desselben nimmt die Funktion sehr rasch grosse Werte an. Etwas, aber nur wenig grösser ist das Konvergenzgebiet der Definitionen von Raabe und von Glaisher, was aus den Tabellen V und VIII ersichtlich ist. Die Parabeln der Definition von Schläfli sind diejenigen, welche sich der Abscissenaxe am weitesten, sowohl nach der positiven wie nach der negativen Seite hin anschmiegen und zwar um so mehr, je grösser der Grad der Funktion ist; so erstreckt sich das beste Gebiet für $n = 6$ schon zwischen $-3$ und $+4$; bei den noch höhern Bernoullischen Funktionen wird dieses Gebiet bedeutend vergrössert.

Es ist dies ein weiterer Vorzug der Definition von Schläfli, wieder bewirkt durch die Fakultät im Nenner.

## § 32. Entscheidung.

Gestützt auf all unsere frühern Betrachtungen, gelangen wir zu **folgendem Resultat:**

**Die Definition der Bernoullischen Funktion nach L. Schläfli ist die für die Theorie zutreffendste, weil**

1. *ihr Konvergenzgebiet sich am weitesten ausdehnt,*
2. *alle Formeln einfachere Gestalt annehmen,*
3. *dieselbe die allgemeinste ist und*
4. *die ganze Theorie sich einheitlicher aufbaut, infolge der trefflich gewählten Grundbeziehung zwischen den Bernoullischen Zahlen und Funktionen und der Anwendung des Prinzipes der Koeffizientenvergleichung.*

Tabelle I.

# Definition nach J. Raabe: $B^n(x)$.

| Arg. | n = 0. | n = 1. | n = 2. | n = 3. | n = 4. | n = 5. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x = — 4. | — 4,000000 | 10,000000 | — 30,000000 | 100,000000 | — 354,000000 | 1300,000000 |
| x = — 3. | — 3,000000 | 6,000000 | — 14,000000 | 36,000000 | — 98,000000 | 276,000000 |
| x = — 2. | — 2,000000 | 3,000000 | — 5,000000 | 9,000000 | — 17,000000 | 33,000000 |
| x = — 1. | — 1,000000 | 1,000000 | — 1,000000 | 1,000000 | — 1,000000 | 1,000000 |
| x = — $^3/_4$. | — 0,750000 | 0,656250 | — 0,546875 | 0,430664 | — 0,321289 | 0,233276 |
| x = — $^1/_2$. | — 0,500000 | 0,375000 | — 0,250000 | 0,140625 | — 0,062500 | 0,023438 |
| x = — $^1/_4$. | — 0,250000 | 0,156250 | — 0,078125 | 0,024414 | 0,000977 | — 0,003052 |
| x = 0. | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| x = $^1/_4$. | 0,250000 | — 0,093750 | 0,015625 | 0,008789 | — 0,004883 | — 0,004028 |
| x = $^1/_2$. | 0,500000 | — 0,125000 | 0,000000 | 0,015625 | 0,000000 | — 0,007813 |
| x = $^3/_4$. | 0,750000 | — 0,093750 | — 0,015625 | 0,008789 | 0,004883 | — 0,004028 |
| x = 1. | 1,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| x = $^5/_4$. | 1,250000 | 0,156250 | 0,078125 | 0,024414 | — 0,000977 | — 0,003052 |
| x = $^3/_2$. | 1,500000 | 0,375000 | 0,250000 | 0,140625 | 0,062500 | 0,023438 |
| x = $^7/_4$. | 1,750000 | 0,656250 | 0,546875 | 0,430664 | 0,321289 | 0,233276 |
| x = 2. | 2,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 | 1,000000 |
| x = 3. | 3,000000 | 3,000000 | 5,000000 | 9,000000 | 17,000000 | 33,000000 |
| x = 4. | 4,000000 | 6,000000 | 14,000000 | 36,000000 | 98,000000 | 276,000000 |
| x = 5. | 5,000000 | 10,000000 | 30,000000 | 100,000000 | 354,000000 | 1300,000000 |

Tabelle II.

# Definition nach O. Schlömilch: $\Phi(z, n)$.

| Arg. | n = 1. | n = 2. | n = 3. | n = 4. | n = 5. | n = 6. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z = -4.$ | — 4,000000 | 20,000000 | —90,000000 | 400,000000 | —1770,000000 | 7800,000000 |
| $z = -3.$ | — 3,000000 | 12,000000 | —42,000000 | 144,000000 | —490,000000 | 1656,000000 |
| $z = -2.$ | — 2,000000 | 6,000000 | —15,000000 | 36,000000 | — 85,000000 | 198,000000 |
| $z = -1.$ | — 1,000000 | 2,000000 | — 3,000000 | 4,000000 | — 5,000000 | 6,000000 |
| $z = -{}^3/_4.$ | — 0,750000 | 1,312500 | — 1,640625 | 1,722656 | — 1,606445 | 1,399658 |
| $z = -{}^1/_2.$ | — 0,500000 | 0,750000 | — 0,750000 | 0,562500 | — 0,312500 | 0,140625 |
| $z = -{}^1/_4.$ | — 0,250000 | 0,312500 | — 0,234375 | 0,097656 | 0,004883 | — 0,018311 |
| $z = 0.$ | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| $z = {}^1/_4.$ | 0,250000 | —0,187500 | 0,046875 | 0,035156 | — 0,024414 | — 0,024170 |
| $z = {}^1/_2.$ | 0,500000 | —0,250000 | 0,000000 | 0,062500 | 0,000000 | — 0,046875 |
| $z = {}^3/_4.$ | 0,750000 | —0,187500 | — 0,046875 | 0,035156 | 0,024414 | — 0,024170 |
| $z = 1.$ | 1,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| $z = {}^5/_4.$ | 1,250000 | 0,312500 | 0,234375 | 0,097656 | — 0,004883 | — 0,018311 |
| $z = {}^3/_2.$ | 1,500000 | 0,750000 | 0,750000 | 0,562500 | 0,312500 | 0,140625 |
| $z = {}^7/_4.$ | 1,750000 | 1,312500 | 1,640625 | 1,722656 | 1,606445 | 1,399658 |
| $z = 2.$ | 2,000000 | 2,000000 | 3,000000 | 4,000000 | 5,000000 | 6,000000 |
| $z = 3.$ | 3,000000 | 6,000000 | 15,000000 | 36,000000 | 85,000000 | 198,000000 |
| $z = 4.$ | 4,000000 | 12,000000 | 42,000000 | 144,000000 | 490,000000 | 1656,000000 |
| $z = 5.$ | 5,000000 | 20,000000 | 90,000000 | 400,000000 | 1770,000000 | 7800,000000 |

Tabelle III.

# Definition nach L. Schläfli: $\chi(n, x)$.

| Arg. | n = 1. | n = 2. | n = 3. | n = 4. | n = 5. | n = 6. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x = — 4. | — 4,500000 | 10,083333 | —15,000000 | 16,665278 | —14,750000 | 10,833366 |
| x = — 3. | — 3,500000 | 6,083333 | — 7,000000 | 5,998611 | — 4,083333 | 2,300033 |
| x = — 2. | — 2,500000 | 3,083333 | — 2,500000 | 1,503472 | — 0,708333 | 0,275033 |
| x = — 1. | — 1,500000 | 1,083333 | — 0,500000 | 0,165278 | — 0,041667 | 0,008366 |
| x = — $^3/_4$. | — 1,250000 | 0,739583 | — 0,273438 | 0,070388 | — 0,013387 | 0,001977 |
| x = — $^1/_2$. | — 1,000000 | 0,458333 | — 0,125000 | 0,022049 | — 0,002604 | 0,000228 |
| x = — $^1/_4$. | — 0,750000 | 0,239583 | — 0,039063 | 0,002680 | 0,000041 | 0,000008 |
| x = 0. | — 0,500000 | 0,083333 | 0,000000 | —0,001389 | 0,000000 | 0,000033 |
| x = $^1/_4$. | — 0,250000 | —0,010416 | 0,007813 | 0,000076 | — 0,000203 | —0,000001 |
| x = $^1/_2$. | 0,000000 | —0,041667 | 0,000000 | 0,001,215 | 0,000000 | —0,000033 |
| x = $^3/_4$. | 0,250000 | —0,010417 | — 0,007813 | 0,000076 | 0,000203 | —0,000001 |
| x = 1. | 0,500000 | 0,083333 | 0,000000 | —0,001389 | 0,000000 | 0,000033 |
| x = $^5/_4$. | 0,750000 | 0,239583 | 0,039063 | 0,002680 | — 0,000041 | 0,000008 |
| x = $^3/_2$. | 1,000000 | 0,458333 | 0,125000 | 0,022049 | 0,002604 | 0,000228 |
| x = $^7/_4$. | 1,250000 | 0,739583 | 0,273438 | 0,070388 | 0,013387 | 0,001977 |
| x = 2. | 1,500000 | 1,083333 | 0,500000 | 0,165278 | 0,041667 | 0,008366 |
| x = 3. | 2,500000 | 3,083333 | 2,500000 | 1,503472 | 0,708333 | 0,275033 |
| x = 4. | 3,500000 | 6,083333 | 7,000000 | 5,998611 | 4,083333 | 2,300033 |
| x = 5. | 4,500000 | 10,083333 | 15,000000 | 16,665278 | 14,750000 | 10,833366 |

Tabelle IV.

# Definition nach J. W. L. Glaisher: $A_n(x)$.

| Arg. | n = 1. | n = 2. | n = 3. | n = 4. | n = 5. | n = 6. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x = − 4. | −4,500 000 | 10,083 333 | −30,000 000 | 99,991 667 | −354,000 000 | 1300,003 968 |
| x = − 3. | −3,500 000 | 6,083 333 | −14,000 000 | 35,991 667 | − 98,000 000 | 276,003 968 |
| x = − 2. | −2,500 000 | 3,083 333 | − 5,000 000 | 9,020 833 | − 17,000 000 | 33,003 968 |
| x = − 1. | −1,500 000 | 1,083 333 | − 1,000 000 | 0,991 667 | − 1,000 000 | 1,003 968 |
| x = − 3/4. | −1,250 000 | 0,739 583 | − 0,546 875 | 0,422 331 | − 0,321 289 | 0,237 245 |
| x = − 1/2. | −1,000 000 | 0,458 333 | − 0,250 000 | 0,132 292 | − 0,062 500 | 0,027 406 |
| x = − 1/4. | −0,750 000 | 0,239 583 | − 0,078 125 | 0,016 081 | 0,000 977 | 0,000 916 |
| x = 0. | −0,500 000 | 0,083 333 | 0,000 000 | − 0,008 333 | 0,000 000 | 0,003 968 |
| x = 1/4. | −0,250 000 | −0,010 416 | 0,015 625 | 0,000 456 | − 0,004 833 | − 0,000 060 |
| x = 1/2. | 0,000 000 | −0,041 666 | 0,000 000 | 0,007 292 | 0,000 000 | − 0,003 968 |
| x = 3/4. | 0,250 000 | −0,010 416 | − 0,015 625 | 0,000 456 | 0,004 833 | − 0,000 060 |
| x = 1. | 0,500 000 | 0,083 333 | 0,000 000 | − 0,008 333 | 0,000 000 | 0,003 968 |
| x = 5/4. | 0,750 000 | 0,239 583 | 0,078 125 | 0,016 081 | − 0,000 977 | 0,000 916 |
| x = 3/2. | 1,000 000 | 0,458 333 | 0,250 000 | 0,132 292 | 0,062 500 | 0,027 406 |
| x = 7/4. | 1,250 000 | 0,739 583 | 0,546 875 | 0,422 331 | 0,321 289 | 0,237 245 |
| x = 2. | 1,500 000 | 1,083 333 | 1,000 000 | 0,991 667 | 1,000 000 | 1,003 968 |
| x = 3. | 2,500 000 | 3,083 333 | 5,000 000 | 9,020 833 | 17,000 000 | 33,003 968 |
| x = 4. | 3,500 000 | 6,083 333 | 14,000 000 | 35,991 667 | 98,000 000 | 276,003 968 |
| x = 5. | 4,500 000 | 10,083 333 | 30,000 000 | 99,991 667 | 354,000 000 | 1300,003 968 |

Tabelle V.

# Definition nach J. Raabe.

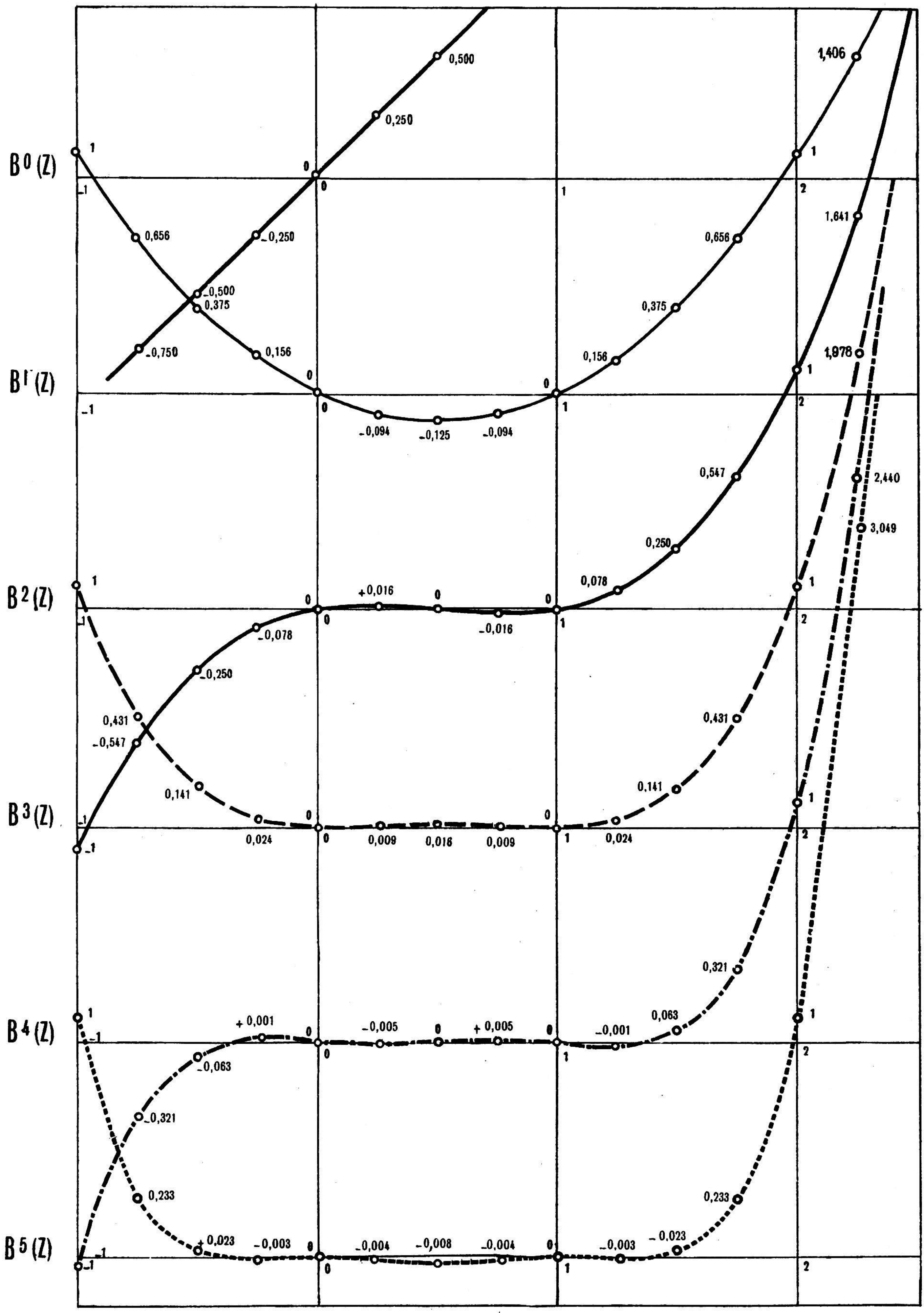


Tabelle VI.

# Definition nach Schlömilch.

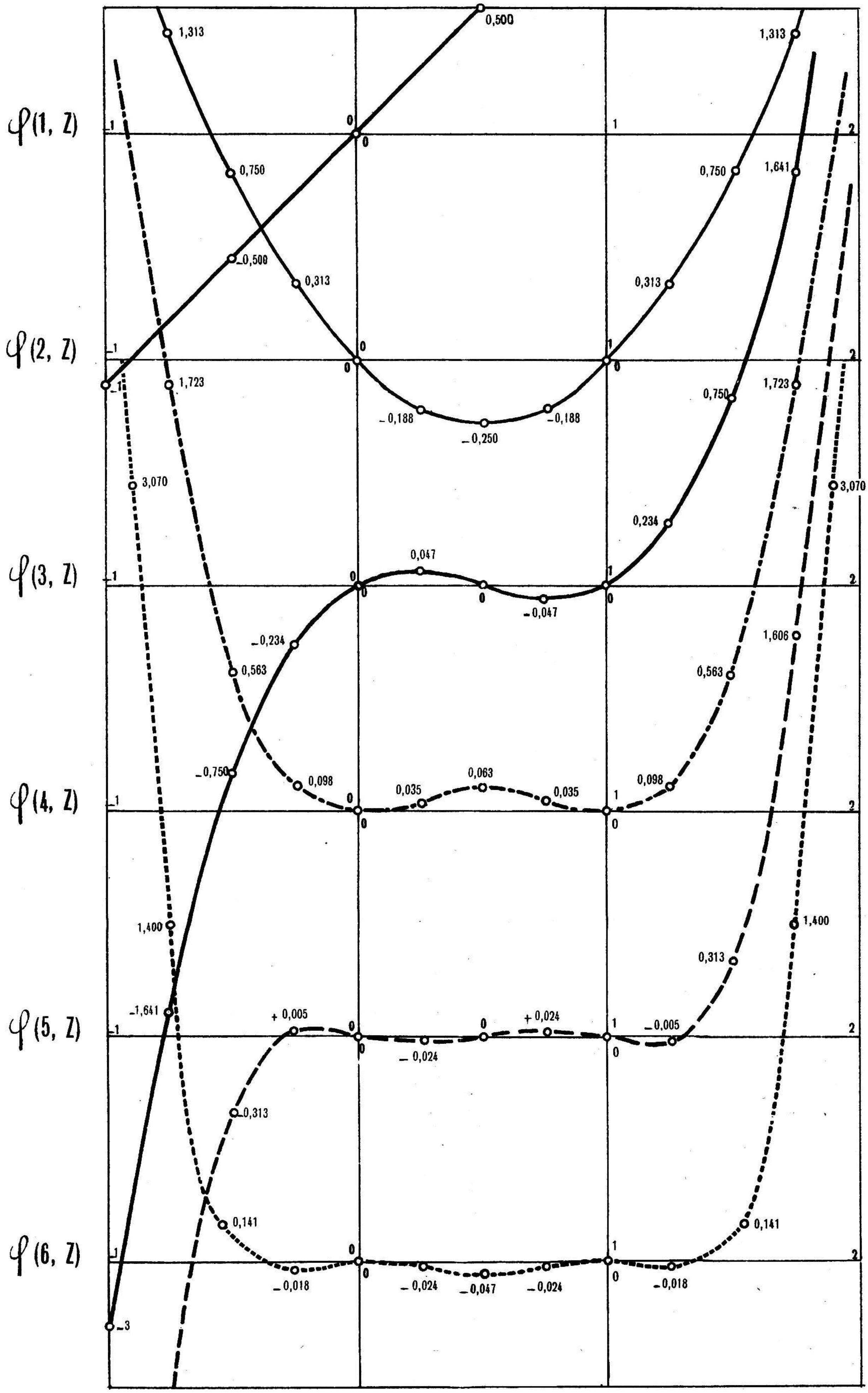


Tabelle VII.

# Definition nach L. Schläfli.

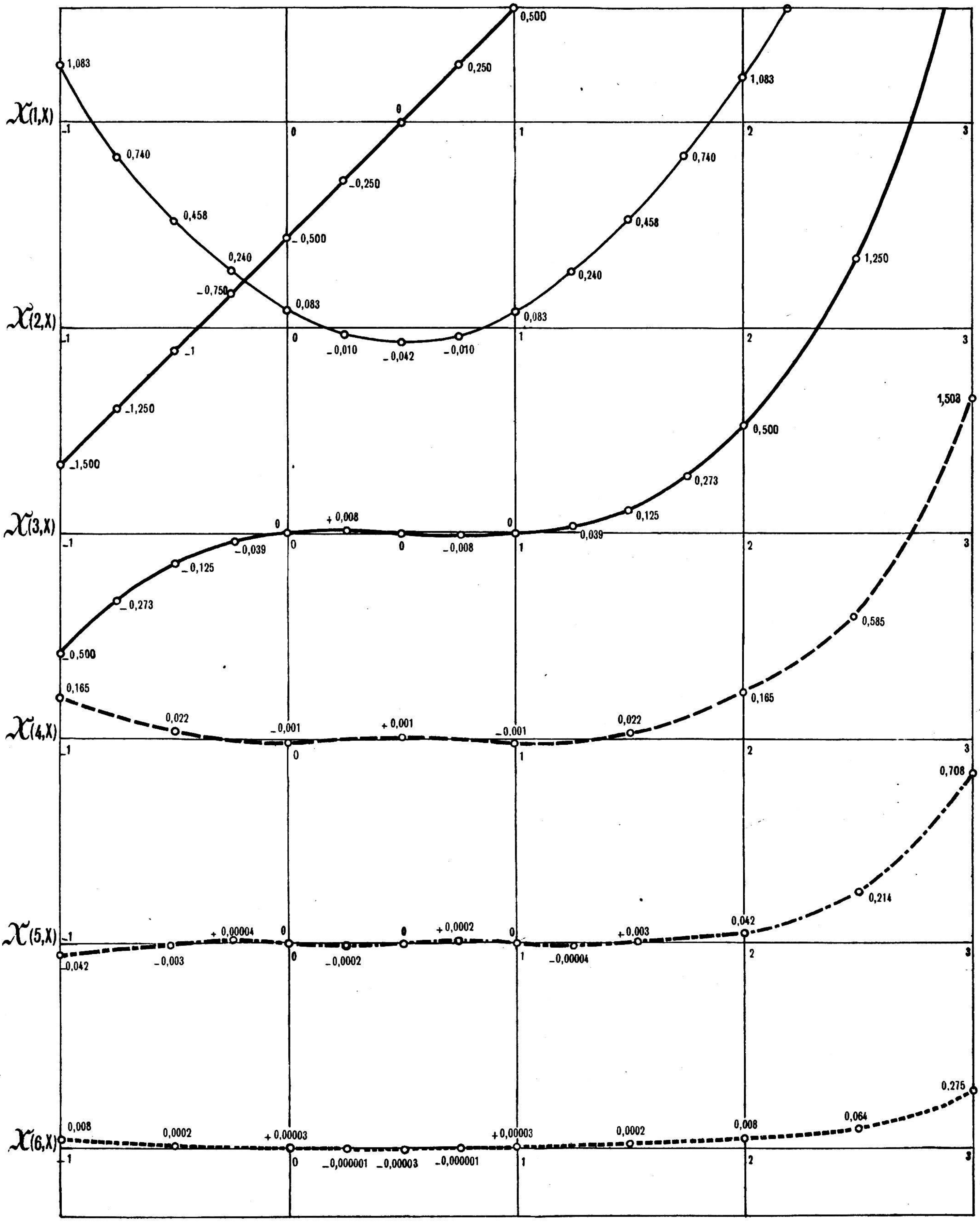
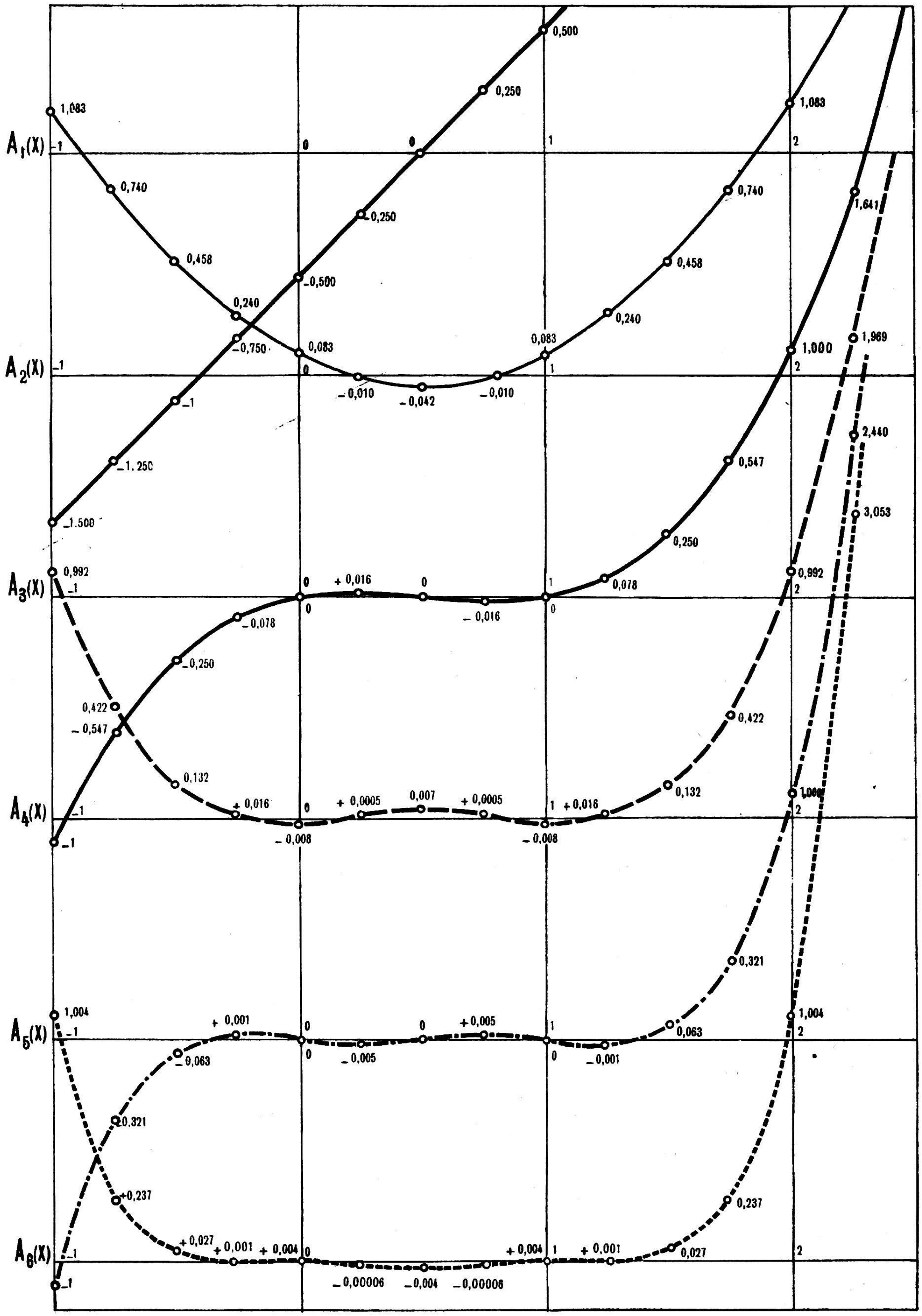


Tabelle VIII.

# Definition nach W. Glaisher.



# Anmerkungen.

☛ Während der Drucklegung vorliegender Arbeit erschien in den «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900, von J. H. Graf herausgegeben, und mit Noten versehen, ein Brief L. Schläflis an einen Freund, betitelt «*Praktische Integration.*» Derselbe wurde veranlasst durch Fragen des Freundes über die Richtigkeit verschiedener Resultate von J. L. Raabes Differential- und Integralrechnung, Band I, 1839. In dieser Abhandlung gibt Schläfli Beziehungen, die sehr grosse Ähnlichkeit zeigen mit seinen später aufgestellten Relationen der Bernoullischen Funktionen. Stammt dieser Brief wirklich aus dem Jahre 1840, was nach den vorliegenden Untersuchungen von J. H. Graf als bewiesen anzunehmen ist, *so ist Schläfli, zwar ohne den Namen der Funktion zu nennen, schon vor J. Raabe auf diese Funktion gekommen.* Es ist dies ein weiterer Beweis für Schläflis schöpferische Thätigkeit.

Folgende wenige Thatsachen sollen einige Ähnlichkeiten hervorheben:

a) Die auf Seite 7 (89) der «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900 gegebenen Koeffizienten $c_1$, $c_2$, $c_3$, ..... stimmen genau überein mit denjenigen bei der Herleitung der Definition der Bernoullischen Zahlen.

b) Die von Schläfli in der angeführten Arbeit, Seite 10 (92) angewandte Formel für $c_{2n}$ ist nicht identisch mit der *später* von ihm gebrauchten. Daher werden die B-Werte nicht gleich den eigentlichen Bernoullischen Zahlen. (Vergleiche Tabelle auf Seite 10 (92) dieses Briefes.) Trotzdem tritt eine unverkennbare Ähnlichkeit der Beziehungen hier und später bei der Bernoullischen Funktion ein; vergleiche in diesem bereits erwähnten Briefe

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Formel | (e), | Seite | 11 (93) | und | $B''(z)$ | von Raabe, |
| 2. » | zwischen (e) u. (f), | » | 11 (93) | » | $B'(z)$ | » » |
| 3. » | (f), | » | 11 (93) | » | $'B(z)$ | » », |

welche bis auf die jedem Gliede vorgesetzten Nenner übereinstimmen.

c) Formel (l) ist analog gebaut wie unsere Formel (III) (25); nur zeigt sie eine Fakultät im Nenner; letztere hat Schläfli später durch zweckmässige Wahl der Definitionsgleichung wegzuschaffen gewusst. Formel (m) gleicht unserer Formel III (23), zeigt aber eine unliebsame Zuthat durch ein Summenglied.

d) Formel (y) entspricht unserer Formel III (24); sie liefert auch dieselben Werte, trotzdem darin die B-Zahlen andere Werte haben.

e) Auch die unterste Formel auf Seite 13 (95) dieses Schläflischen Briefes, welche Beziehungen seiner $\varphi$-Funktionen für die Argumente 0, $\frac{1}{2}$ und 1 gibt, entspricht ganz unserer spätern Formel III (10).

Natürlich sind durch diese wenigen Aufzählungen die Analogien beider noch lange nicht erschöpft.

[1]) Vergleiche das Verzeichnis der benutzten Litteratur am Schlusse der Arbeit.

[2]) Siehe *Saalschütz* «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekantenkoeffizienten und ihre wichtigsten Anwendungen,» wo sich auf den Seiten 204—207 ein grösseres Litteraturverzeichnis befindet.

[3]) Zum Studium sehr zu empfehlen ist die schon in Anmerkung 2 angeführte Arbeit von L. Saalschütz. Siehe Litteraturverzeichnis!

[4]) *Jakob Bernoulli* (1654—1705) gab in seinem epochemachenden Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ars conjectandi, Mutmassungskunst als Erweiterung der gemeinen ars computandi oder Rechnungskunst, nicht nur eine beinahe vollständige Theorie der Kombinatorik und der figurierten Zahlen, sondern fand auch die nach ihm benannten Zahlen, die bekanntlich in der Reihen- und Interpolationsrechnung von Wichtigkeit sind, und auf welche sich die Theorie der Bernoullischen Funktion stützt.

[5]) Siehe Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, Band 42, Seite 348—376.

[6]) Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Vol. XXIX, pag. 1.

[7]) Messenger of Mathematics, Vol. XXVI, No. 10—12 und Vol. XXVII, No. 2—8.

[8]) Vergleiche J. Raabe «Die Jakob Bernoullische Funktion», Seite 1—16.

[9]) Seite 13 der eingangs erwähnten Schrift: J. Raabe «die Jakob Bernoullische Funktion.»

[10]) Vergleiche Raabes zweite diesbezügliche Arbeit. Journal von Crelle. Band 42.

[11]) Es sind dies die beiden schon früher gefundenen Formeln ($17^b$).

[12]) Seite 97 u. ff. und Saalschütz «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen». Anmerkung 1, Seite 7 und 8.

[13]) Vergleiche Wallis «Opera mathematica.» Oxon. 1695 und «Arithmetica infinitorum.»

[14]) Siehe A. G. Kästner «Geschichte der Mathematik,» Band 3, Seite 111 u. ff.

[15]) Vergleiche «Ars conjectandi.» Basilea 1713. Seite 97 u. ff.

[16]) Ist Formel $18^a$, nur identisch anders geschrieben.

[17]) Vergleiche Raabes erste Arbeit über diesen Gegenstand, Seite 17—23.

[18]) Wo $B_1'(z) = \frac{d}{dz} B'(z)$.

[19]) Raabe spricht sich im Vorwort seiner ersten auf die Bernoullische Funktion bezüglichen Schrift folgendermassen darüber aus: «Die Eigenschaften dieser Funktion $B(z)$ sind Analogien zu denen der Legendreschen Funktion $\Gamma(z)$, die das Eulersche Integral zweiter Art vorstellt. Beinahe alle Eigentümlichkeiten die bei dieser $\Gamma(z)$ durch Produkte angedeutet sind, sprechen sich bei jener $B(z)$ durch Summen aus: so dass gestützt auf eine in der niedern Algebra übliche Terminologie, wo von einer arithmetischen und geometrischen Progression die Rede ist, auch die hier einzuführende Funktion $B(z)$ eine arithmetische, und

das Eulersche Integral $\Gamma(z)$ eine geometrische Funktion von z genannt werden dürfte».

[20]) Siehe auch Tabelle V am Schlusse dieser Arbeit.

[21]) Raabe gibt diese vier Formeln, ohne auf ihre Herleitung näher einzutreten, in seiner zweiten, diesen Gegenstand behandelnden Schrift in Crelles Journal, Band 42, Seite 352.

[22]) Zum genauern Studium verweisen wir wieder auf Raabes Arbeit im 42. Band von Crelles Journal, Seiten 359—362.

[23]) Hierin bedeutet wie gebräuchlich $D^p = \frac{d^p}{dx^p}$.

[24]) Siehe Compendium der höhern Analysis von O. Schlömilch, Teil I Seite 277 und Teil II, Seite 208.

[25]) Siehe auch §§ 29 und 30 vorliegender Arbeit.

[26]) Vergleiche J. Worpitzky «Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen». Journal von Crelle, Band 94, Seite 203 u. ff.

[27]) Vergleiche § 31 vorliegender Arbeit, sowie Tabelle VI.

[28]) Über die Ausmittlung von $\int_0^1 e^{xz} \cos k\pi z \, dz$, die ziemlich umständlich bewerkstelligt wird, siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band I, Seite 361, § 78. II.

[29]) Siehe Journal von Crelle, Band 94, Seite 220. Formeln 52.

[30]) Vergleiche Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band I, Seite 202 und Comp. der Analysis von O. Schlömilch, Band II, Seite 218 u. ff.

[31]) Wir bezeichnen in Zukunft Koeffizient stets durch $\left[\ldots\right]$, z. B., $\left[y^n\right]$ = Koeffizient von $y^n$.

[32]) Vergleiche § 31 und Tabellen V—VIII.

[33]) Siehe § 16, Formel (12).

[34]) Vergleiche auch Tabelle VII am Schlusse dieser Arbeit.

[35]) Vergleiche § 12.

[36]) Siehe § 20, Formeln (40) und (41).

[37]) Vergleiche Dr. J. H. Graf: «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale», Seite 30, Formel (36), wie auch bei andern Autoren.

[38]) Nach Definitionsgleichung (2).

[39]) Vergleiche auch § 20, Formeln (29), (31) und (33).

[40]) Wir verweisen auf die darüber bekannten Arbeiten: «Über Bernoullische Zahlen und Funktionen», Vorlesungen an der Berner Hochschule von Dr. J. H. Graf. S. S. 1898 und «Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Funktionen und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe» von Dr. Alfred Jonquière. Stockholm 1891. Bihang till K. Svenska Vet.-Acad. Handlingar. Band 16. Afd. I. No. 6.

[41]) Siehe Dr. J. H. Graf «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion», Seite 49, 3. Zeile, wie auch bei andern Autoren.

[42]) Siehe «Quarterly Journal of pure and applied mathematics». Vol. XXVIII, pag. 1—174.

[43]) Siehe gleiche Zeitschrift, Vol. XXIX, pag. 1—168.

[44]) Vergleiche «Messenger of mathematics», Vol. XXVI, pag. 152—182 und Vol. XXVII, pag. 20—98.

[45]) Vergleiche darüber «Quarterly Journal», Vol. XXVII, pag. 4—18.

[46]) Über ihren Zusammenhang siehe § 29, Formel (10).

[47]) Siehe § 23, Formeln (12), (13) und (16).

[48]) Vergleiche «Quarterly Journal». Band XXVIIII, § 18, pag. 11.

[49]) Siehe § 26, Formeln (23) und (24).

[50]) Siehe Schlömilch «Compendium der Analysis». Seite 140, Formel 27, und Seite 141, Formel 32. Diese gehen durch Substitution von $\lambda = a$ und $x = \pi(1-2x)$ in unsere Formeln über.

[51]) Vergleiche den mehrfach erwähnten Band des «Quarterly Journal», pag. 7—18, wie auch an andern Stellen.

[52]) Ebendort, pag. 26—83.

[53]) Siehe § 28.

[54]) «Quarterly Journal», Band XXIX, §§ 58, 75, 85, 88, 109, 115, 119, 123, 132, 134, 143 und 146.

[55]) Vergleiche «Quarterly Journal», Band XXIX, § 18.

[56]) Vergleiche Tabellen IV und VIII.

[57]) Siehe Formeln (23) und (24) von § 26.

[58]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 47, 58 und 75 und «Messenger of mathematics», § 73.

[59]) Siehe «Messenger of mathematics», Bände XXVI und XXVII.

[60]) Siehe «Quarterly Journal», §§ 174—216.

[61]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 217—311.

[62]) Siehe «Messenger of mathematics», §§ 99—102 und § 108.

[63]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 1, 7, 14 und 21.

[64]) Siehe diese Arbeit §§ 2, 8, 15 und 22.

[65]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 6, 13, 20 und 27.

[66]) Siehe diese Arbeit, §§ 3, 9, 16 und 23.

[67]) Vergleiche unsere §§ 3, 10, 17 und 24.

[68]) Siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band II, Seite 129, wo für $\beta = \pi x$ und $x < 1$ diese Reihe erhältlich ist.

[69]) Vergleiche Anmerkung [40]).

[70]) Siehe auch Rogel «Die Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen» in den Sitzungsberichten der königlich-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Prag 1896.

[71]) Vergleiche unsere §§ 5, 12, 19 und 26.

[72]) Siehe § 3, Formel 18, § 10, Formel 16 und § 17, Formel 19.

[73]) Vergleiche Tabelle VII.