Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Autor: Renfer, H.

Kapitel: Anmerkungen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Anmerkungen.

☛ Während der Drucklegung vorliegender Arbeit erschien in den «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900, von J. H. Graf herausgegeben, und mit Noten versehen, ein Brief L. Schläflis an einen Freund, betitelt «*Praktische Integration.*» Derselbe wurde veranlasst durch Fragen des Freundes über die Richtigkeit verschiedener Resultate von J. L. Raabes Differential- und Integralrechnung, Band I, 1839. In dieser Abhandlung gibt Schläfli Beziehungen, die sehr grosse Ähnlichkeit zeigen mit seinen später aufgestellten Relationen der Bernoullischen Funktionen. Stammt dieser Brief wirklich aus dem Jahre 1840, was nach den vorliegenden Untersuchungen von J. H. Graf als bewiesen anzunehmen ist, *so ist Schläfli, zwar ohne den Namen der Funktion zu nennen, schon vor J. Raabe auf diese Funktion gekommen.* Es ist dies ein weiterer Beweis für Schläflis schöpferische Thätigkeit.

Folgende wenige Thatsachen sollen einige Ähnlichkeiten hervorheben:

a) Die auf Seite 7 (89) der «Mitteilungen» der naturforschenden Gesellschaft in Bern 1900 gegebenen Koeffizienten c_1, c_2, c_3, ... stimmen genau überein mit denjenigen bei der Herleitung der Definition der Bernoullischen Zahlen.

b) Die von Schläfli in der angeführten Arbeit, Seite 10 (92) angewandte Formel für c_{2n} ist nicht identisch mit der *später* von ihm gebrauchten. Daher werden die B-Werte nicht gleich den eigentlichen Bernoullischen Zahlen. (Vergleiche Tabelle auf Seite 10 (92) dieses Briefes.) Trotzdem tritt eine unverkennbare Ähnlichkeit der Beziehungen hier und später bei der Bernoullischen Funktion ein; vergleiche in diesem bereits erwähnten Briefe

1.	Formel	(e),	Seite	11 (93)	und	B″(z)	von Raabe,
2.	»	zwischen (e) u. (f),	»	11 (93)	»	B′ (z)	» »
3.	»	(f),	»	11 (93)	»	'B (z)	» » ,

welche bis auf die jedem Gliede vorgesetzten Nenner übereinstimmen.

c) Formel (l) ist analog gebaut wie unsere Formel (III) (25); nur zeigt sie eine Fakultät im Nenner; letztere hat Schläfli später durch zweckmässige Wahl der Definitionsgleichung wegzuschaffen gewusst. Formel (m) gleicht unserer Formel III (23), zeigt aber eine unliebsame Zuthat durch ein Summenglied.

d) Formel (y) entspricht unserer Formel III (24); sie liefert auch dieselben Werte, trotzdem darin die B-Zahlen andere Werte haben.

e) Auch die unterste Formel auf Seite 13 (95) dieses Schläflischen Briefes, welche Beziehungen seiner φ-Funktionen für die Argumente 0, $\frac{1}{2}$ und 1 gibt, entspricht ganz unserer spätern Formel III (10).

Natürlich sind durch diese wenigen Aufzählungen die Analogien beider noch lange nicht erschöpft.

[1]) Vergleiche das Verzeichnis der benutzten Litteratur am Schlusse der Arbeit.

[2]) Siehe *Saalschütz* «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Sekantenkoeffizienten und ihre wichtigsten Anwendungen,» wo sich auf den Seiten 204—207 ein grösseres Litteraturverzeichnis befindet.

[3]) Zum Studium sehr zu empfehlen ist die schon in Anmerkung 2 angeführte Arbeit von L. Saalschütz. Siehe Litteraturverzeichnis!

[4]) *Jakob Bernoulli* (1654—1705) gab in seinem epochemachenden Werke über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ars conjectandi, Mutmassungskunst als Erweiterung der gemeinen ars computandi oder Rechnungskunst, nicht nur eine beinahe vollständige Theorie der Kombinatorik und der figurierten Zahlen, sondern fand auch die nach ihm benannten Zahlen, die bekanntlich in der Reihen- und Interpolationsrechnung von Wichtigkeit sind, und auf welche sich die Theorie der Bernoullischen Funktion stützt.

[5]) Siehe Journal für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, Band 42, Seite 348—376.

[6]) Quarterly Journal of pure and applied Mathematics, Vol. XXIX, pag. 1.

[7]) Messenger of Mathematics, Vol. XXVI, No. 10—12 und Vol. XXVII, No. 2—8.

[8]) Vergleiche J. Raabe «Die Jakob Bernoullische Funktion», Seite 1—16.

[9]) Seite 13 der eingangs erwähnten Schrift: J. Raabe «die Jakob Bernoullische Funktion.»

[10]) Vergleiche Raabes zweite diesbezügliche Arbeit. Journal von Crelle. Band 42.

[11]) Es sind dies die beiden schon früher gefundenen Formeln (17^b).

[12]) Seite 97 u. ff. und Saalschütz «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen». Anmerkung 1, Seite 7 und 8.

[13]) Vergleiche Wallis «Opera mathematica.» Oxon. 1695 und «Arithmetica infinitorum.»

[14]) Siehe A. G. Kästner «Geschichte der Mathematik,» Band 3, Seite 111 u. ff.

[15]) Vergleiche «Ars conjectandi.» Basilea 1713. Seite 97 u. ff.

[16]) Ist Formel 18^a, nur identisch anders geschrieben.

[17]) Vergleiche Raabes erste Arbeit über diesen Gegenstand, Seite 17—23.

[18]) Wo $B_1'(z) = \frac{d}{dz} B'(z)$.

[19]) Raabe spricht sich im Vorwort seiner ersten auf die Bernoullische Funktion bezüglichen Schrift folgendermassen darüber aus: «Die Eigenschaften dieser Funktion $B(z)$ sind Analogien zu denen der Legendreschen Funktion $\Gamma(z)$, die das Eulersche Integral zweiter Art vorstellt. Beinahe alle Eigentümlichkeiten die bei dieser $\Gamma(z)$ durch Produkte angedeutet sind, sprechen sich bei jener $B(z)$ durch Summen aus: so dass gestützt auf eine in der niedern Algebra übliche Terminologie, wo von einer arithmetischen und geometrischen Progression die Rede ist, auch die hier einzuführende Funktion $B(z)$ eine arithmetische, und

das Eulersche Integral $\Gamma(z)$ eine geometrische Funktion von z genannt werden dürfte».

[20]) Siehe auch Tabelle V am Schlusse dieser Arbeit.

[21]) Raabe gibt diese vier Formeln, ohne auf ihre Herleitung näher einzutreten, in seiner zweiten, diesen Gegenstand behandelnden Schrift in Crelles Journal, Band 42, Seite 352.

[22]) Zum genauern Studium verweisen wir wieder auf Raabes Arbeit im 42. Band von Crelles Journal, Seiten 359—362.

[23]) Hierin bedeutet wie gebräuchlich $D^p = \frac{d^p}{d x^p}$.

[24]) Siehe Compendium der höhern Analysis von O. Schlömilch, Teil I Seite 277 und Teil II, Seite 208.

[25]) Siehe auch §§ 29 und 30 vorliegender Arbeit.

[26]) Vergleiche J. Worpitzky «Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen». Journal von Crelle, Band 94, Seite 203 u. ff.

[27]) Vergleiche § 31 vorliegender Arbeit, sowie Tabelle VI.

[28]) Über die Ausmittlung von $\int_0^1 e^{xz} \cos k \pi z \, dz$, die ziemlich umständlich bewerkstelligt wird, siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band I, Seite 361, § 78. II.

[29]) Siehe Journal von Crelle, Band 94, Seite 220. Formeln 52.

[30]) Vergleiche Zeitschrift für Mathematik und Physik. Band I, Seite 202 und Comp. der Analysis von O. Schlömilch, Band II, Seite 218 u. ff.

[31]) Wir bezeichnen in Zukunft Koeffizient stets durch $[\ldots]$, z. B., $[y^n]$ = Koeffizient von y^n.

[32]) Vergleiche § 31 und Tabellen V—VIII.

[33]) Siehe § 16, Formel (12).

[34]) Vergleiche auch Tabelle VII am Schlusse dieser Arbeit.

[35]) Vergleiche § 12.

[36]) Siehe § 20, Formeln (40) und (41).

[37]) Vergleiche Dr. J. H. Graf: «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale», Seite 30, Formel (36), wie auch bei andern Autoren.

[38]) Nach Definitionsgleichung (2).

[39]) Vergleiche auch § 20, Formeln (29), (31) und (33).

[40]) Wir verweisen auf die darüber bekannten Arbeiten: «Über Bernoullische Zahlen und Funktionen», Vorlesungen an der Berner Hochschule von Dr. J. H. Graf. S. S. 1898 und «Über eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Funktionen und ihren Zusammenhang mit der verallgemeinerten Riemannschen Reihe» von Dr. Alfred Jonquière. Stockholm 1891. Bihang till K. Svenska Vet.-Acad. Handlingar. Band 16. Afd. I. No. 6.

[41]) Siehe Dr. J. H. Graf «Einleitung in die Theorie der Gammafunktion», Seite 49, 3. Zeile, wie auch bei andern Autoren.

[42]) Siehe «Quarterly Journal of pure and applied mathematics». Vol. XXVIII, pag. 1—174.

[43]) Siehe gleiche Zeitschrift, Vol. XXIX, pag. 1—168.

[44]) Vergleiche «Messenger of mathematics», Vol. XXVI, pag. 152—182 und Vol. XXVII, pag. 20—98.

[45]) Vergleiche darüber «Quarterly Journal», Vol. XXVII, pag. 4—18.

[46]) Über ihren Zusammenhang siehe § 29, Formel (10).

[47]) Siehe § 23, Formeln (12), (13) und (16).

[48]) Vergleiche «Quarterly Journal». Band XXVIIII, § 18, pag. 11.

[49]) Siehe § 26, Formeln (23) und (24).

[50]) Siehe Schlömilch «Compendium der Analysis». Seite 140, Formel 27, und Seite 141, Formel 32. Diese gehen durch Substitution von $\lambda = a$ und $x = \pi(1-2x)$ in unsere Formeln über.

[51]) Vergleiche den mehrfach erwähnten Band des «Quarterly Journal», pag. 7—18, wie auch an andern Stellen.

[52]) Ebendort, pag. 26—83.

[53]) Siehe § 28.

[54]) «Quarterly Journal», Band XXIX, §§ 58, 75, 85, 88, 109, 115, 119, 123, 132, 134, 143 und 146.

[55]) Vergleiche «Quarterly Journal», Band XXIX, § 18.

[56]) Vergleiche Tabellen IV und VIII.

[57]) Siehe Formeln (23) und (24) von § 26.

[58]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 47, 58 und 75 und «Messenger of mathematics», § 73.

[59]) Siehe «Messenger of mathematics», Bände XXVI und XXVII.

[60]) Siehe «Quarterly Journal», §§ 174—216.

[61]) Vergleiche «Quarterly Journal», §§ 217—311.

[62]) Siehe «Messenger of mathematics», §§ 99—102 und § 108.

[63]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 1, 7, 14 und 21.

[64]) Siehe diese Arbeit §§ 2, 8, 15 und 22.

[65]) Vergleiche vorliegende Arbeit, §§ 6, 13, 20 und 27.

[66]) Siehe diese Arbeit, §§ 3, 9, 16 und 23.

[67]) Vergleiche unsere §§ 3, 10, 17 und 24.

[68]) Siehe Schlömilch «Comp. der Analysis», Band II, Seite 129, wo für $\beta = \pi x$ und $x < 1$ diese Reihe erhältlich ist.

[69]) Vergleiche Anmerkung [40]).

[70]) Siehe auch Rogel «Die Entwicklung nach Bernoullischen Funktionen» in den Sitzungsberichten der königlich-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Prag 1896.

[71]) Vergleiche unsere §§ 5, 12, 19 und 26.

[72]) Siehe § 3, Formel 18, § 10, Formel 16 und § 17, Formel 19.

[73]) Vergleiche Tabelle VII.