Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1899)

Heft: 1463-1477

Artikel: Über eine algebraische Reihe

Autor: Sidler, Georg

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319647

Georg Sidler.

Über eine algebraische Reihe.

(Eingereicht den 28. Juni 1899.)

§ 1. Der absolute Wert der Variabeln x sei < 1, und n eine ganze positive Zahl inklusive null. Unter diesen Voraussetzungen betrachten wir die Funktion

(1.) $$S_n = 1 + 2^n . x + 3^n . x^2 + 4^n . x^3 + \dots \text{ in inf.}$$

Wir haben

(2.) $$S_n = \frac{d}{dx}(x . S_{n-1}).$$

Da nun andererseits $S_0 = \frac{1}{1-x}$, so erhalten wir aus (2.) successive

$$S_1 = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S_2 = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad S_3 = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

$$S_4 = \frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}, \quad S_5 = \frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}$$

und allgemein für ein beliebiges ganzes und positives n

Obstehendes ist grössernteils eine Übertragung einer in Band I (Jahrgang 1856) der «Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich» von mir publizierten Arbeit «Sur une série algébrique.» Den Anstoss, auf dieselbe zurückzukommen, gab das Interméd. des Math. Jahrgang 1899, p. 51, wo in Nr. 1465 nach dem Beweise einer Formel gefragt wird, die als spezieller Fall für $k = 0$ in der obigen Formel 9 enthalten ist. Jener frühern Arbeit hinzugefügt habe ich den Beweis des Clausen-Staudt'schen Satzes über die Bernoullischen Zahlen, der, wie mich s. Z. L. Schläfli darauf aufmerksam gemacht, in einfacher Weise aus einer von mir gegebenen independenten Darstellung der genannten Zahlen hervorgeht. Ausdrücklich bemerke ich, dass die betreffende Formel 25 wie die übrigen hier gegebenen Darstellungen der Bernoullischen Zahlen, mit Ausnahme von 23 und 26, sich schon in der obgenannten, 1856 von mir publizierten Arbeit finden.

$$(3.)\qquad S_n = \frac{a_{n,0} + a_{n,1}\,.\,x + a_{n,2}\,.\,x^2\,.\,.\,.\,+ a_{n,n-1}\,.\,x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}},$$

wo $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, $a_{n,2}\ldots a_{n,n-1}$ ganze positive Zahlen darstellen, und wo $a_{n,s} = 0$, sobald das ganzzahlige s sei es negativ, sei es $> n-1$ ist.

In der That, führen wir diesen Ausdruck in (2.) ein, so sehen wir, dass derselbe für ein beliebiges ganzes und positives n gilt. Und für die Coeffizienten $a_{n,s}$ ergiebt sich die Relation

$$(4.)\qquad a_{n,s} = (s+1)\,.\,a_{n-1,s} + (n-s)\,.\,a_{n-1,s-1}.$$

Gemäss den obigen Ausdrücken für S_1, S_2, . . S_5 ist für $n = 1$, 2, 3, 4, 5

$$(5.)\qquad a_{n,s-1} = a_{n\,.\,n-s}.$$

Aus (4.) aber geht hervor

$$a_{n,n-s} = (n-s+1)\,.\,a_{n-1,n-s} + s\,.\,a_{n-1,n-s-1}$$
$$a_{n,s-1} = (n-s+1)\,.\,a_{n-1,s-2} + s\,.\,a_{n-1,s-1}.$$

Wenn also die Relation (5.) für den Index $n-1$ gilt, so gilt dieselbe auch für den Index n, und somit gilt dieselbe allgemein.

Schreiben wir die Formel (3.)

$$a_{n,0} + a_{n,1}\,.\,x + a_{n,2}\,.\,x^2\,.\,.\,+ a_{n,n-1}\,.\,x^{n-1}$$
$$= (1-x)^{n+1}.\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^n\,.\,x^s$$

und setzen die Coeffizienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich, so kommt, wenn wir mit $\binom{n}{s}$ den Coeffizienten von x^s in der Entwicklung von $(1+x)^n$ bezeichnen:

$$a_{n,0} = 1^n$$
$$a_{n,1} = 2^n - \binom{n+1}{1}\,.\,1^n$$
$$a_{n,2} = 3^n - \binom{n+1}{1}\,.\,2^n + \binom{n+1}{2}\,.\,1^n$$

u. s. w.

$$(6.)\qquad a_{n,s} = (s+1)^n - \binom{n+1}{1}s^n + \binom{n+1}{2}\,.\,(s-1)^n\,.\,.$$
$$\ldots (-1)^s\,.\binom{n+1}{s}\,.\,1^n,$$

und weiter gewinnen wir die Identität $0 = a_{n,n+s}$, d. h.

$$(7.)\quad 0 = (n+s+1)^n - \binom{n+1}{1}(n+s)^n + \binom{n+1}{2}(n+s-1)^n \ldots$$
$$\ldots (-1)^{n+1} \cdot \binom{n+1}{n+1} \cdot s^n,$$

wo s eine ganze positive Zahl inklusive null und n eine der Zahlen 1, 2, 3 . . . in inf.

§ 2. Aus der Rekursionsgleichung (4) folgt

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_{n,s} = \sum_{s=0}^{n-2}(s+1) \cdot a_{n-1,s} + \sum_{s=1}^{n-1}(n-s) \cdot a_{n-1,s-1} =$$
$$= \sum_{s=0}^{n-2}\left\{(s+1)\, a_{n-1,s} + (n-s-1)\, a_{n-1,s}\right\}$$

d. h.

$$\sum_{s=0}^{n-1} a_{n,s} = n \cdot \sum_{s=0}^{n-2} a_{n-1,s} = n!\, a_{1,0}$$

Aber $a_{1,0} = 1$, und somit

$$(8.)\qquad a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} \ldots + a_{n,n-1} = n!$$

und da $a_{n,n+s} = 0$, wenn s eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null ist, so können wir diese Relation schreiben:

$$\sum_{s=0}^{n+h-1} a_{n,s} = n!$$

wo h eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null, d. h. wenn wir für $a_{n,s}$ die Ausdrücke (6.) einsetzen:

$$n! = 1^n \cdot \left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-1}\binom{n+1}{n+h-1}\right\} +$$
$$+ 2^n \cdot \left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-2}\binom{n+1}{n+h-2}\right\} +$$
$$+ 3^n \cdot \left\{1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \ldots (-1)^{n+h-3}\binom{n+1}{n+h-3}\right\} +$$

. . . .

$$+ (n+h-1)^n . \left\{1 - \binom{n+1}{1}\right\} +$$
$$+ (n+h)^n.$$

Aber $1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \dots (-1)^s \binom{n+1}{s}$ ist der Coeffizient von x^s in der Entwicklung von $(1-x)^{-1} . (1-x)^{n+1}$ also

$$(\alpha.) \quad 1 - \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} \dots (-1)^s \binom{n+1}{s} = (-1)^s \binom{n}{s},$$

und wir erhalten

$$(9.) \qquad n! =$$
$$= (n+k)^n - \binom{n}{1} (n+k-1)^n + \binom{n}{2} (n+k-2)^n \dots$$
$$\dots (-1)^{n+k-1} . \binom{n}{n+k-1} . 1^n$$

oder auch

$$(9.^1) \qquad n! =$$
$$= (n+k)^n - \binom{n}{1} (n+k-1)^n + \binom{n}{2} (n+k-2)^n \dots (-1)^n \binom{n}{n} k^n,$$

wo k eine beliebige positive ganze Zahl inklusive null darstellt.

§ 3. Zerlegen wir den Ausdruck rechter Hand in (3.) in Partialbrüche, indem wir setzen

$$(u.) \qquad \frac{a_{n,0} + a_{n,1} . x \dots + a_{n,n-1} . x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}} =$$
$$= \frac{A_{n,n}}{(1-x)^{n+1}} - \frac{A_{n,n-1}}{(1-x)^n} \dots (-1)^{n-1} . \frac{A_{n,1}}{(1-x)^2}.$$

Schreiben wir $x = 1 - h$, so haben wir

$$A_{n,n} - A_{n,n-1} . h + . A_{n,n-2} h^2 \dots (-1)^{n-1} . A_{n,1} . h^{n-1} =$$
$$= a_{n,0} + a_{n,1} . (1-h) + a_{n,2} . (1-h)^2 \dots + a_{n,n-1} . (1-h)^{n-1},$$

und hieraus, wenn wir die Coeffizienten derselben Potenzen von h einander gleich setzen

$$A_{n,n} = a_{n,0} + a_{n,1} + a_{n,2} \dots + a_{n,n-1}$$
$$A_{n,n-1} = \binom{1}{1} a_{n,1} + \binom{2}{1} a_{n,2} \dots + \binom{n-1}{1} a_{n,n-1}$$

$$A_{n,n-2} = \binom{2}{2} a_{n,2} + \binom{3}{2} a_{n,3} \cdots\cdots + \binom{n-1}{2} a_{n,n-1}$$

. . . .

$$A_{n,1} = \binom{n-1}{n-1} a_{n,n-1}$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (5)

$$(10.)\begin{cases} A_{n,1} = a_{n,0} \\ A_{n,2} = \binom{n-1}{1} a_{n,0} + a_{n,1} \\ A_{n,3} = \binom{n-1}{2} a_{n,0} + \binom{n-2}{1} a_{n,1} + a_{n,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n,n} = \binom{n-1}{n-1} a_{n,0} + \binom{n-2}{n-2} a_{n,1} \cdots + \binom{1}{1} a_{n,n-2} + a_{n,n-1} \end{cases}$$

oder allgemein

$$(10.^1) \qquad A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n-k-1}{s-k-1} a_{n,k}.$$

Auch die Coeffizienten $A_{n,s}$ sind somit ganze positive Zahlen.

Schreiben wir aber mit Beachtung, dass $a_{n,s-1} = a_{n,n-s}$ ist: die Gleichung (u).

$$a_{n,n-1} + a_{n,n-2} \cdot x \cdots + a_{n,1} \cdot x^{n-2} + a_{n,0} \cdot x^{n-1} =$$
$$= A_{n,n} - A_{n,n-1}(1-x) + A_{n,n-2}(1-x)^2 \ldots (-1)^{n-1} . A_{n,1} (1-x)^{n-1},$$

und vergleichen die Coeffizienten der nämlichen Potenzen von x mit einander, so erhalten wir umgekehrt

$$(11.)\begin{cases} a_{n,0} = A_{n,1} \\ a_{n,1} = A_{n,2} - \binom{n-1}{1} A_{n,1} \\ a_{n,2} = A_{n,3} - \binom{n-2}{1} A_{n,2} + \binom{n+1}{1} A_{n,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,n-1} = A_{n,n} - \binom{1}{1} A_{n,n-1} + \binom{2}{2} A_{n,n-2} \cdots \\ \qquad \cdots (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} A_{n,1} \end{cases}$$

oder

$$(11.^1) \qquad a_{n,\,s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{n-s+k+1}{k} A_{n,\,s-k+1}$$

Substituieren wir in (10.[1]) für die $a_{n,\,k}$ ihre Ausdrücke aus (6.), so erhalten wir

$$A_{n,\,s} = 1^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-1}{s-1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-2}{s-2} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots (-1)^{s-1} \cdot \binom{n+1}{s-1}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$+ 2^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-2}{s-2} - \binom{n+1}{1}\binom{n-3}{s-3} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots (-1)^{n-2} \cdot \binom{n+1}{s-2}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ (s-1)^n \cdot \left\{ \binom{n+1}{0}\binom{n-s+1}{1} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s}{0} \right\} +$$
$$+ s^n \cdot \binom{n+1}{0}\binom{n-s}{0},$$

oder

$$A_{n,\,s} = \sum_{k=1}^{s} k^n \cdot \sum_{r=0}^{s-k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-k-r}{s-k-r} =$$
$$= \sum_{k=0}^{s-1} (s-k)^n \cdot \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \cdot \binom{n+1}{r}\binom{n-s+k-r}{k-r}.$$

Der Coeffizient von $(s-k)^n$ ist hier gleich $(-1)^k$. Coeffizient von x^k im Produkte $(1+x)^{n+1} \,.\, (1+x)^{-(n-s+1)}$, also

$$= (-1)^k \cdot \binom{s}{k}, \text{ d. h.:}$$

$$\binom{n+1}{0}\binom{n-s+k}{k} - \binom{n+1}{1}\binom{n-s+k-1}{k-1} + \binom{n+1}{2}\binom{n-s+k-2}{k-2} \ldots$$

$$(\beta.) \qquad \ldots (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k}\binom{n-s}{0} = (-1)^k \cdot \binom{s}{k},$$

oder

$$(\beta.') \qquad \binom{n-s}{0}\binom{n+1}{k} - \binom{n-s+1}{1}\binom{n+1}{k-1} + \binom{n-s+2}{2}\binom{n+1}{k-2} \ldots$$

$$\ldots (-1)^k \binom{n-s+k}{k} \binom{n+1}{0} = \binom{s}{k}.$$

Wir bekommen somit

(12.) $$A_{n,s} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} (s-k)^n,$$

oder auch

(12.') $$A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{k=1}^{s} (-1)^k \cdot \binom{s}{k} \cdot k^n,$$

d. h.:

(12.'') $$\begin{cases} A_{n,1} = 1^n \\ A_{n,2} = 2^n - \binom{2}{1} 1^n \\ A_{n,3} = 3^n - \binom{3}{1} 2^n + \binom{3}{2} 1^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n,n} = n^n - \binom{n}{1} (n-1)^n + \binom{n}{2} (n-2)^n \ldots \\ \qquad\qquad \ldots (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \cdot 1^n, \end{cases}$$

und infolge der Relation (9) ist

$$A_{n,n} = n!$$

Da in (u) linker Hand der Nenner um zwei Grade höher als der Zähler ist, also rechts ein Term $\frac{A_{n,0}}{1-x}$ nicht auftreten kann, so haben wir zu setzen

(13.) $$A_{n,0} = 0.$$

Wenn ferner im Ausdruck (10') von $A_{n,s}$ der zweite Index s grösser als n wird, so werden rechter Hand sämtliche Terme null. Somit haben wir

(14.) $$0 = A_{n,n+k+1} =$$

$$= \binom{n+k+1}{0} (n+k+1)^n - \binom{n+k+1}{1} (n+k)^n +$$

$$+ \binom{n+k+1}{2} (n+k-1)^n \ldots (-1)^{n+k} \binom{n+k+1}{n+k} \cdot 1^n,$$

wenn k irgend eine positive ganze Zahl inklusive null darstellt. —

Oder

$$(14.') \qquad \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} \cdot r^n = 0, \text{ wenn } m > n.$$

Zufolge der Relation (2) haben wir

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot A_{n,s} \cdot (1-x)^{-s-1}$$

$$= -\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^s \cdot A_{n-1,s} \cdot x\,(1-x)^{-s-1}$$

Schreiben wir rechts den ersten variabeln Faktor $x = 1 - (1 - x)$, so wird die rechte Seite

$$-\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n=1} (-1)^s \cdot A_{n-1,s} \cdot \left\{ (1-x)^{-s-1} - (1-x)^{-s} \right\},$$

oder wenn wir in der ersten Summe $s - 1$ an die Stelle von s setzen, so haben wir, da $A_{n-1,0} = 0$ und $A_{n-1,n} = 0$ ist:

$$\frac{d}{dx} \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot \left\{ A_{n-1,s-1} + A_{n-1,s} \right\} \cdot (1-x)^{-s} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \cdot s\,(A_{n-1,s-1} + A_{n-1,s})\,(1-x)^{-s-1}.$$

Wir erhalten also für die Coeffizienten $A_{n,s}$ die Relation

$$(15.) \qquad A_{n,s} = s \cdot (A_{n-1,s} + A_{n-1,s-1}).$$

Wir behaupten aber, es sei $A_{n,s}$ durch $s!$ teilbar. In der That, setzen wir $A_{n,s} = s!\, c_{n,s}$, so giebt (15)

$$c_{n,s} = s \cdot c_{n-1,s} + c_{n-1,s-1}.$$

Aber $c_{n,0} = 0$ und $c_{n,1} = 1$ und somit werden die Grössen $c_{n,s}$ sämtlich ganze Zahlen sein, w. z. z.

Wir haben daher

$$(16.) \quad s^n - \binom{s}{1}(s-1)^n + \binom{s}{2}(s-2)^n \ldots (-1)^{s-1} \cdot \binom{s}{s-1} 1^n$$

$$\equiv 0 \ (\text{mod } s!), \text{ wenn } s \leqq n$$

$$= 0 \qquad\qquad , \text{ wenn } s > n.$$

Wenn wir in der Identität

$$1+2^n x+3^n x^2+4^n x^3+\ldots \text{ in inf.} = \frac{a_{n,0}+a_{n,1}x\ldots a_{n,n-1}x^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}$$

die rechte Seite nach Potenzen von x entwickeln, und die Coefficienten derselben Potenzen auf beiden Seiten einander gleich setzen, so erhalten wir

(17.) $$(s+1)^n =$$

$$=\binom{n+s}{s}a_{n,0}+\binom{n+s-1}{s-1}a_{n,1}+\binom{n+s-2}{s-2}a_{n,2}\cdots+\binom{n}{0}.a_{n,s}.$$

Wenn $s \overline{\gtrless} n$, so bricht die rechte Seite in (17) nach dem Gliede $\binom{s+1}{s-n+1}a_{n,n-1}$ ab.

Verfahren wir auf dieselbe Weise mit der Identität

$$1+2^n x+3^n x^2+4^n x^3+\ldots \text{ in inf.} =$$

$$=(-1)^{n+1}\left\{\frac{A_{n,1}}{(1-x)^2}-\frac{A_{n,2}}{(1-x)^3}+\frac{A_{n,3}}{(1-x)^4}\cdots(-1)^{n+1}\frac{A_{n,n}}{(1-x)^{n+1}}\right\},$$

so kommt

(18.) $$(-1)^{n+1}.(s+1)^n =$$

$$=\binom{s+1}{1}A_{n,1}-\binom{s+2}{2}A_{n,2}+\binom{s+3}{3}A_{n,3}\cdots+(-1)^{n+1}\binom{s+n}{n}A_{n,n}.$$

Mittelst der Relationen (10) oder (11) gehen die rechten Seiten in (17) und (18) auch direkt in einander über.

§ 4. Die Ausdrücke (17) und (18) führen auf mehrfache independente Darstellungen der *Bernoullischen Zahlen.* In der That aus (17) folgt

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} a_{n,r}.\left\{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}\cdots+\binom{n+k-r-1}{k-r-1}\right\}$$

und aus (18)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}.A_{n,r}\left\{\binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\binom{r+2}{2}\cdots+\binom{r+k-1}{k-1}\right\}.$$

In diesen Summen ist der Coeffizient von $a_{n,r}$ gleich demjenigen von x^{k-r-1} im Produkte $(1-x)^{-1}.(1-x)^{-n-1}$, also $=\binom{n+k-r}{k-r-1}=$

$\binom{n+k-r}{n+1}$, und der Coeffizient von $(-1)^{n-r} \cdot A_{n,r}$ ist gleich demjenigen von x^{k-1} im Produkte $(1-x)^{-1} \cdot (1-x)^{-r-1}$, also $= \binom{r+k}{k-1}$ $= \binom{r+k}{r+1}$.

Wir gewinnen somit die beiden Resultate

(19.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdot\cdot + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} a_{n,0} + \binom{n+k-1}{n+1} a_{n,1} + \binom{n+k-2}{n+1} a_{n,2} \cdot\cdot + \binom{k+1}{n+1} a_{n,r-1}$$

und

(20.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdot\cdot + k^n =$$
$$= \binom{n+k}{n+1} A_{n,n} - \binom{n+k-1}{n} A_{n,n-1} + \binom{n+k-2}{n-1} A_{n,n-2}$$
$$\cdot\cdot (-1)^{n-1} \binom{k+1}{2} A_{n,1}.$$

Anderseits hat man, wenn $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die *Bernoullischen Zahlen* darstellen,

(21.) $$1^n + 2^n + 3^n \cdot\cdot + k^n =$$
$$= \frac{k^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} k^n +$$
$$+ \binom{n}{1} \frac{B_1}{2} \cdot k^{n-1} - \binom{n}{3} \frac{B_2}{4} \cdot k^{n-3} + \binom{n}{5} \frac{B_3}{6} \cdot k^{n-5} \cdot\cdot$$
$$+ \begin{cases} \cdot\cdot (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot \binom{n}{n-1} \cdot \dfrac{B_{n/2}}{n} \cdot k, & \text{wenn n gerade} \\ \cdot\cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \binom{n}{n-2} \cdot \dfrac{B_{\frac{n-1}{2}}}{n-1} \cdot k^2, & \text{wenn n ungerade.} \end{cases}$$

Entwickeln wir also die Ausdrücke rechter Hand in den Gleichungen (19) und (20) nach Potenzen von k, so ist, vorausgesetzt, dass n grösser als 1 ist, der Coeffizient von k, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder $= (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}$, oder $= 0$.

Betrachten wir zuerst die Gleichung (19)

$$\sum_{s=1}^{k} s^n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+k-r}{n+1} a_{n,r}.$$

In der Faktoriellen

$$\binom{n+k-r}{n+1} = \frac{(k+n-r)(k+n-r-1)\cdot\cdot(k+1)\,k\,(k-1)\cdot\cdot(k-r)}{(n+1)!}$$

wird der Coefficient von k sein

$$= (-1)^r \cdot \frac{(n-r)(n-r-1)\cdot\cdot 2\cdot 1\cdot 12\cdot\cdot r}{(n+1)!} = (-1)^r\,\frac{(n-r)!\,r!}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^r}{n+1}\cdot\frac{1}{\binom{n}{r}}.$$

In Gleichung (19) ist also der gesuchte Coeffizient

$$\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\,\frac{a_{n,r}}{\binom{n}{r}},$$ und wir erhalten

$$(22.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{0}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{1}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{2}}\cdot\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n+2}{2}}\cdot(n+1)\,.\,B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0\\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1.\end{cases}$$

Oder da $a_{n,n-s} = a_{n,s-1}$, so erhalten wir auch, wenn wir (22) mit $(-1)^{n-1}$ multiplizieren:

$$(23.)\quad \frac{a_{n,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n,2}}{\binom{n}{3}}\cdot\cdot(-1^{n-1}\,\frac{a_{n,n-1}}{\binom{n}{n}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2}\,.\,(n+1)\,B_{n/2}, & \text{wenn n gerade und} > 0\\ = 0 & \text{, wenn n ungerade und} > 1.\end{cases}$$

Ersetzen wir in (22) $a_{n,s}$ gemäss der Relation (4) durch $(s+1)\,a_{n-1,s} + (n-s)\,a_{n-1,s-1}$, so kömmt

$$(24.)\quad \frac{a_{n-1,0}}{\binom{n}{1}} - \frac{a_{n-1,1}}{\binom{n}{2}} + \frac{a_{n-1,2}}{\binom{n}{3}} \cdot\cdot (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1,n-2}}{\binom{n}{n-1}} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot (n+1) \cdot B_{n/2}, & \text{wenn } n \text{ gerade und } > 0, \\ = 0 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } > 1. \end{cases}$$

Die Formeln (22) und (23) stellen die Bernoullischen Zahlen durch die $a_{n,s}$ mit geraden Indices n, die Formel (24) durch die $a_{n,s}$ mit ungeraden Indices n dar. Die Coefficienten $a_{n,s}$ sind durch die Formeln (6) und durch die Rekursionsgleichung (4) gegeben.

Betrachten wir endlich die Gleichung (20)

$\sum\limits_{s=1}^{k} s^n = \sum\limits_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \cdot \binom{k+r}{r+1} \cdot A_{n,r}$. In der Faktoriellen $\binom{k+r}{r+1} = \frac{(k+r)(k+r-1)\,.\,.\,(k+1)\,k}{(r+1)!}$ ist der Faktor von k gleich $\frac{r!}{(r+1)!} = \frac{1}{r+1}$. Wir erhalten somit aus (21)

$$(25.)\quad \frac{A_{n,1}}{2} - \frac{A_{n,2}}{3} + \frac{A_{n,3}}{4} \cdot\cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{A_{n,n}}{n+1} =$$

$$\begin{cases} = (-1)^{n/2} \cdot B_{n/2}, & \text{wenn } n \text{ gerade und } > 0, \\ = 0 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } > 1. \end{cases}$$

Setzen wir hier gemäss (15) $A_{n,s} = s\,(A_{n-1,s} + A_{n-1,s-1})$, so kommt

$$(26.)\quad \frac{A_{n-1,1}}{2\,.\,3} - \frac{A_{n-1,2}}{3\,.\,4} + \frac{A_{n-1,3}}{4\,.\,5} \cdot\cdot (-1)^{n} \cdot \frac{A_{n-1,n-1}}{n\,(n+1)} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot B_{n/2}, & \text{wenn } n \text{ gerade und } > 0, \\ 0 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } > 1. \end{cases}$$

In (25) sind die Bernoullischen Zahlen durch die $A_{n,s}$ mit geraden Indices n, in (26) durch die $A_{n,s}$ mit ungeraden Indices n dargestellt. Die Coeffizienten $A_{n,s}$ sind durch die Formeln (12) und durch die Rekursionsgleichung (15) gegeben.

§ 5. *Der Clausen-Staudt'sche Satz.* Wir hatten in (25) die n^{te} Bernoullische Zahl B_n dargestellt durch

$$(-1)^n \cdot B_n = \sum_{s=1}^{2n} (-1)^{s+1} \cdot \frac{A_{2n,s}}{s+1},$$

wo $A_{n,s} = (-1)^s \cdot \sum_{r=1}^{s} (-1)^r \cdot \binom{s}{r} r^n$ und $A_{n,s} \equiv 0 \pmod{s!}$.

Untersuchen wir jetzt $A_{2n,s}$ auf die Teilbarkeit durch $s+1$.

a) Wenn *$s+1$ in zwei ungleiche Faktoren zerlegbar*, $s+1 = a \cdot b$, wo $a > b > 1$, so sind sowohl a als b kleiner als $s+1$, und daher findet sich jeder dieser Faktoren in $s!$ Dann ist also $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

b) Wenn *$s+1 = p^2$, wo p eine Primzahl,* so behaupten wir, dass wiederum $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

Denn wenn zunächst $p = 2$, so ist zwar $\frac{s!}{s+1} = \frac{3!}{4} = \frac{3}{2}$, aber dann ist $\frac{A_{2n,s}}{s+1} = \frac{3 - 3 \cdot 2^{2n} + 3^{2n}}{4}$. Nun ist $3 + 3^{2n} \pmod 4$ $\equiv -1 + (-1)^{2n} \equiv 0$, und daher $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine ganze Zahl, w. z. z.

Wenn aber $p > 2$, so betrachten wir $\frac{s!}{s+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p^2-1)}{p^2}$. Wenn nun $p > 2$, so ist $p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \geqq 2p$. Im Produkte $s!$ treten daher sowohl p als 2 p als Faktoren auf, und daher ist $\frac{s!}{s+1}$ ganz und somit auch $\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine ganze Zahl wie z. z.

c) Sei nun *$s+1 = p$, wo p eine Primzahl.*

Wenn zunächst $s+1=2$, so ist im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ das betreffende Glied $\frac{A_{2n,1}}{2} = \frac{1}{2}$.

Sei endlich $s+1=p$, wo p eine ungerade Primzahl. Im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ ist der betreffende Term

$$-\frac{A_{2n,s}}{s+1} = \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \frac{\binom{s}{r} \cdot r^{2n}}{s+1}.$$

Von den hier auftretenden Grössen r ist keine durch die Primzahl $s+1=p$ teilbar. Wir haben jetzt die Fälle zu unterscheiden, wo $2n$ durch s teilbar und wo $2n$ nicht durch s teilbar.

Betrachten wir erst den Fall, wo $2n$ nicht durch s teilbar. Es sei denn $2n \equiv a \pmod{s}$, wo $0 < a < s$, also $2n = ks + a = k(p-1) + a$, wo k eine ganze Zahl, oder

$$r^{2n} = r^{k(p-1)+a}.$$

Da nun r durch p nicht teilbar, so ist nach dem Fermat'schen Satze $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, und daher

$$r^{2n} \equiv r^a \pmod{p}.$$

Somit modulo p

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n} \equiv \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} r^a.$$

Aber, da hier $s > a$, so ist gemäss der Relation (14') der Ausdruck rechter Hand identisch $= 0$. Also ist nun

$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n}$ durch $p = s+1$ teilbar und somit ist jetzt

$\frac{A_{2n,s}}{s+1}$ eine *ganze Zahl.*

Geht aber $s = p-1$ in $2n$ auf, oder ist $2n = k \cdot s$, wo k eine ganze Zahl, so haben wir $r^{2n} = r^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$.

Also modulo $p = s+1$ ist jetzt

$$\sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} \cdot r^{2n} \equiv \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+1} \cdot \binom{s}{r} = 1 - (1-1)^s = 1,$$

d. h. im Ausdruck von $(-1)^n \cdot B_n$ ist der betreffende Term

$$-\frac{A_{2n,p-1}}{p} = \frac{1}{p} + \text{ganze Zahl.}$$

Alles zusammengefasst erhalten wir also

$$(-1)^n \cdot B_n = \left(\frac{1}{2} + \sum \frac{1}{p}\right) + \text{Ganze Zahl,}$$

wo die Summe rechter Hand sich auf alle diejenigen ungeraden Primzahlen p bezieht, für welche $p - 1$ ein Teiler von $2n$ ist. Oder da auch 2 eine Primzahl, und $2 - 1$ stets ein Teiler von $2n$ ist, so können wir schreiben

$$(27.)\qquad B_n = \text{Ganze Zahl} + (-1)^n \cdot \left\{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \cdot \cdot + \frac{1}{\lambda}\right\},$$

wo $\alpha, \beta \ldots \lambda$ alle diejenigen Primzahlen darstellen, für welche $\alpha - 1$, $\beta - 1, \ldots \lambda - 1$ Teiler von $2n$ sind. Dies ist der *Clausen-Staudt'sche Satz*.

Z. B.:

2	Teiler	1, 2
	Primzahlen . .	2, 3

$$B_1 = \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

4	Teiler	1, 2, 4
	Primzahlen . . .	2, 3, 5

$$B_2 = \frac{1}{30} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right).$$

6	Teiler	1, 2, 3, 6
	Primzahlen . . .	2, 3, 7

$$B_3 = \frac{1}{42} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right).$$

8	Teiler	1, 2, 4, 8
	Primzahlen . . .	2, 3, 5

$$B_4 = \frac{1}{30} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right).$$

10	Teiler	1, 2, 5, 10
	Primzahlen . . .	2, 3, 11

$$B_5 = \frac{5}{66} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11}\right).$$

12	Teiler	1, 2, 3, 4, 6, 12
	Primzahlen . . .	2, 3, 5, 7, 13

$$B_6 = \frac{691}{2730} = -1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right).$$

14	Teiler	1, 2, 7, 14
	Primzahlen . . .	2, 3

$$B_7 = \frac{7}{6} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

16	Teiler	1, 2, 4, 8, 16
	Primzahlen . . .	2, 3, 5, 17

$$B_8 = \frac{3617}{510} = 6 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{17}\right).$$

18	Teiler	1, 2, 3, 6, 9, 18
	Primzahlen . . .	2, 3, 7, 19

$$B_9 = \frac{43867}{798} = 56 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{19}\right).$$

20	Teiler	1, 2, 4, 5, 10, 20
	Primzahlen . . .	2, 3, 5, 11

$$B_{10} = \frac{174\,611}{330} = 528 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11}\right).$$

22	Teiler	1, 2, 11, 22
	Primzahlen . . .	2, 3, 23

$$B_{11} = \frac{854\,513}{138} = 6193 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23}\right).$$

24	Teiler	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
	Primzahlen . . .	2, 3, 5, 7, 13

$$B_{12} = \frac{236\,364\,091}{2730} = 86\,579 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13}\right).$$

u. s. w.

Dieser Satz ward zuerst von Thomas Clausen in den «Astronomischen Nachrichten», Bd. VII, Nr. 406 (1840, Juli 23) ohne Beweis mitgeteilt, und von Georg Karl Christian v. Staudt im «Crelle'schen Journal» Bd. XXI, p. 372 und f. (1840, Aug. 16.) bewiesen. Um den Beweis für die Bernoullische Zahl der n^{ten} Ordnung zu leisten, muss Staudt voraussetzen, dass der Satz für alle niedrigeren Ordnungen schon bewiesen sei. Herr Louis Saalschütz in seinen «Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893», p. 132 und f. reproduziert im wesentlichen den Staudt'schen Beweis. Eine direkte Herleitung, die mit der obigen Analogie hat, aber einen andern Ausgangspunkt nimmt, giebt Herr K. Schering: «Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen». Mathemat. Annalen. Bd. 52 (1899), p. 171 und f.

(Siehe Tabellen Rückseite.)

Werte von $a_{n,s} = (s+1) \cdot a_{n-1,s} + (n-s) \cdot a_{n-1,s-1}$.

s =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	usw.
n = 1	1										
2	1	1									
3	1	4	1								
4	1	11	11	1							
5	1	26	66	26	1						
6	1	57	302	302	57	1					
7	1	120	1 191	2 416	1 191	120	1				
8	1	247	4 293	15 619	15 619	4 293	247	1			
9	1	502	14 608	88 234	156 190	88 234	14 608	502	1		
10	1	1 013	47 840	455 192	1 310 354	1 310 354	455 192	47 840	1 013	1	
.											
.											
.											

u. s. w.

Die Summe jeder horizontalen Zeile ist $= n!$

Werte von $A_{n,s} = s!\,c_{n,s}$, wo $c_{n,s} = s \,.\, c_{n-1,s} + c_{n-1,s-1}$.

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	. . .
n = 1	1												
2	1	2 ! 1											
3	1	2 ! 3	3 ! 1										
4	1	2 ! 7	3 ! 6	4 ! 1									
5	1	2 ! 15	3 ! 25	4 ! 10	5 ! 1								
6	1	2 ! 31	3 ! 90	4 ! 65	5 ! 15	6 ! 1							
7	1	2 ! 63	3 ! 301	4 ! 350	5 ! 140	6 ! 21	7 ! 1						
8	1	2 ! 127	3 ! 966	4 ! 1701	5 ! 1050	6 ! 266	7 ! 28	8 ! 1					
9	1	2 ! 255	3 ! 3025	4 ! 7770	5 ! 6951	6 ! 2646	7 ! 462	8 ! 36	9 ! 1				
10	1	2 ! 511	3 ! 9330	4 ! 34105	5 ! 42525	6 ! 22827	7 ! 5880	8 ! 750	9 ! 45	10 ! 1			
11	1	2 ! 1023	3 ! 28501	4 ! 145750	5 ! 246730	6 ! 179487	7 ! 63987	8 ! 11880	9 ! 1155	10 ! 55	11 ! 1		
12	1	2 ! 2047	3 ! 86526	4 ! 611501	5 ! 1379400	6 ! 1323652	7 ! 627396	8 ! 159027	9 ! 22275	10 ! 1705	11 ! 66	12 ! 1	
.													
.													
.													

u. s. w.

Die Grössen $c_{s+k,\,s}$, wo s die Werte 1, 2, 3, 4, 5 . . . in inf. durchläuft, und k konstant bleibt, bilden eine arithmetische Reihe der Ordnung 2 k, wo die konstante Differenz der (2 k) Ordnung $= 1 . 3 . 5 \ldots (2\,k-1)$ ist.

Z. B.

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . . .
$c_{s+1,\,s}$ =	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66 . . .
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . .
$c_{s+2,\,s}$ =	1	7	25	65	140	266	462	750	1155	1705	2431 . .
	6	18	40	75	126	196	288	405	550	726	
	12	22	35	51	70	92	117	145	176		
	10	13	16	19	22	25	28	31			
	3	3	3	3	3	3	3				

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . .
$c_{s+3,\,s}$ =	1	15	90	350	1050	2646	5880	11880	22275	39325	66066 . .
	14	75	260	700	1596	3234	6000	10395	17050	26741	
	61	185	440	896	1638	2766	4395	6655	9691		
	124	255	456	742	1128	1629	2260	3036			
	131	201	286	386	501	631	776				
	70	85	100	115	130	145					
	15	15	15	15	15						

s =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 . .
$c_{s+4,\,s}$ =	1	31	301	1701	6951	22827	63987	159027	359502	752752	1479478 . .
	30	270	1400	5250	15876	41160	95040	200475	393350	726726	
	240	1130	3850	10626	25284	53880	105435	192775	333476		
	890	2720	6776	14658	28596	51555	87340	140701			
	1830	4056	7882	13938	22959	35785	53361				
	2226	3826	6056	9021	12826	17576					
	1600	2230	2965	3805	4750						
	630	735	840	945							
	105	105	105								

e. s. w.