Ueber eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Relation

Autor(en): **Moser, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1899)**

Heft 1463-1477

PDF erstellt am: **20.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319646

Dr. Ch. Moser.

Ueber eine mit der Umlaufszeit der Planeten zusammenhängende Relation.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 12. Nov. 1898.)

I. Einleitende Bemerkungen. Geschichtliches.

Das ganze wissenschaftliche Gebäude der mathematischen Astronomie, wie es in den letzten zwei Jahrhunderten mit so vielem Geschicke und mit so grosser Eleganz und Vollkommenheit konstruirt wurde, gründet sich in der Hauptsache auf das Gesetz der allgemeinen Gravitation.

Es ist bewundernswürdig, mit welchem Scharfsinn und welcher zwingenden Logik schon *Newton* eine grosse Zahl von wichtigen Konsequenzen aus der Existenz des Gesetzes der allgemeinen Gravitation abzuleiten verstund. Dies geschah namentlich in seiner im Jahre 1686 erschienenen, epochemachenden, jedoch anfangs verhältnismässig wenig beachteten Arbeit «*Mathematische Prinzipien der Naturlehre*», einem der schönsten Denkmäler mathematisch-naturwissenschaftlicher Forschung.*)

Seither ist die rechnende Astronomie durch viele Erfolge gekrönt worden, namentlich seitdem das Gravitationsgesetz durch die sog. *Lagrange*'schen Fundamentalgleichungen einen glücklichen und sinnreichen mathematischen Ausdruck gefunden hat.

Wir geben zwar zu, dass — im Gegensatze zu manchen übrigen Zweigen der Forschung — die Fortschritte auf dem Gebiete der mathematischen Astronomie nur gemessene sind, und dass auch hier, trotz den glänzenden Arbeiten eines *Laplace, Gauss, Bessel, Leverrier, Tisserand* und anderer Männer, der Zukunft sich noch ein grosses Arbeitsfeld bietet. Ja, *H. Poincaré*, wohl einer der anerkanntesten der jetzt lebenden Mathematiker, kommt in seiner berühmten, vom schwedischen Könige preisgekrönten Arbeit über das Drei-Körper-Problem zu der Ueberzeugung, dass die vollständige Lösung dieses

*) Sir Isaac Newtons mathematische Prinzipien der Naturlehre wurden von *J. Ph. Wolfers* ins Deutsche übersetzt und sind im Verlag von Robert Oppenheim in Berlin erschienen.

Problems — wenn man je eine solche werde finden können, noch wesentlich andere und feinere mathematische Hülfsmittel, als wir sie jetzt besitzen*), erfordere. Damit wollen wir sagen, dass auf dem Gebiete der mathematischen Astronomie die zufälligen Entdeckungen nahezu ausgeschlossen sind. Die grossen Fortschritte, wie z. B. die Auffindung des Gesetzes der allgemeinen Gravitation, sind hier ebenso sehr, wenn nicht noch mehr als anderswo, das Produkt reiflicher, ja jahrelanger Ueberlegung und ernster, nicht nachlassender Arbeit.

Newton sagt uns denn auch selbst, dass er nur durch jahrelange Arbeit und auf das Drängen *Edmund Halley's*, seines Freundes, hin, dazu gekommen sei, der Herausgabe der erwähnten mathematischen Prinzipien näher zu treten.

Mit der in manchen Lehrbüchern stehenden bekannten Anekdote von dem vom Baume fallenden Apfel wird es daher nicht weit her sein. Dennoch wollen Sie mir gestatten, dieses anschauliche Bild zu benutzen, um speziell zu dem Gegenstand unserer heutigen bescheidenen Untersuchung überzugehen.

Die reifen Aepfel des Baumes fallen, sofern auf dieselben keine sie seitwärts verschiebende Kraft wirkt, in gerader Richtung nach der Erde hin.

Was würde in unserem Sonnensysteme mit den Planeten geschehen, wenn alle sie seitlich verschiebenden Kräfte verschwinden, mit anderen Worten, wenn die sog. Tangentialkraft plötzlich erlöschen würde? Wie die Aepfel fallen, würden die Planeten nach dem grossen und mächtigen, alles beherrschenden Centralkörper, nach der Sonne, hinstürzen.

Man kann nun die Fallzeit berechnen, die die einzelnen Planeten brauchen würden, um bei der Sonne anzulangen.

Wenn die Planeten sich in ihren mittleren Entfernungen von der Sonne befinden, so erhält man z. B.

für Merkur 15,55 mittlere Sonnentage,
für Venus 39,73 mittlere Sonnentage,
für die Erde 64,57 mittlere Sonnentage

und so fort.

---

*) *H. Poincaré.* Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta mathematica, herausgegeben von *G. Mittag-Leffler.* Band 13, Seite 6.

Die Fallzeiten schwanken von etwa einem halben Monat, für Merkur, bis zu mehr als 29 Jahren, für Neptun.

Ein ruhender Körper, der sich in der Entfernung der Venus von der Sonne befindet, wird also etwas mehr als einen Monat Zeit gebrauchen, um bei der Sonne anzukommen. Die Erde selbst würde, wenn die Tangentialkraft plötzlich erlöschen würde, etwas mehr als zwei Monate erfordern. Sie würde sich in immer rascherem Laufe der Sonne nähern und schliesslich mit der kolossalen Geschwindigkeit von etwa 600 000 m in der Sekunde mit der Sonne zusammenprallen.

Bemerkenswerth an diesen Fallzeiten nach der Sonne ist nun, dass sie mit den Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne in engem Zusammenhange stehen. Vor etwa 30 Jahren wurde nämlich die Wahrnehmung gemacht, dass, wenn wir diese Fallzeiten mit einer bestimmten Constanten multipliziren, wir just die Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne erhalten. Man vergleiche hierzu die Mittheilung und Beweisführung von *H. Rapin* im «Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.» Vol. XVII.

C. Flammarion, der die genannte Wahrnehmung, unabhängig von andern, ebenfalls gemacht hat, gibt in seiner viel verbreiteten «Astronomie populaire» im wesentlichen nachstehende Zusammenstellung. Dabei bedeutet die erste Zahl die Fallzeit nach der Sonne, in mittleren Sonnentagen, τ_1, die zweite Zahl ist eine Constante, $\sqrt{32}$, und das Produkt, die dritte Zahl, die Umlaufszeit des Planeten um die Sonne, ebenfalls in mittleren Sonnentagen, T.

Merkur . .	15,55.	5,656854	=	88,0,
Venus . .	39,73.	5,656854	=	224,7,
Erde . . .	64,57.	5,656854	=	365,3,
Mars . . .	121,44.	5,656854	=	687,0,
Jupiter . .	765,87.	5,656854	=	4332,4,
Saturn . .	1902,03.	5,656854	=	10759,5,
Uranus . .	5424,57.	5,656844	=	30686,0,
Neptun . .	10 628,73.	5,656854	=	60125,2,

Hiernach ist also:

$$\tau_1 \, . \sqrt{32} = T$$

oder

$$\tau_1 = \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (1).$$

Der Zusammenstellung fügt der Autor wörtlich hinzu:

«Ce qu'il y a de plus curieux dans ces durées, c'est qu'en les multipliant toutes par un même chiffre, on reproduit l'année de chaque planète.

La première fois que j'ai fait cette remarque (c'était au commencement de l'année 1870), j'en suis resté perplexe pendant des mois entiers, et j'avais beau m'ingénier, ou chercher dans les livres, aucun principe de la mécanique céleste ne me mettait sur la voie pour en découvrir la cause. Quel était ce fameux coefficient 5,656854? C'est la racine carrée de 32.

Mais qu'est-ce que cette racine carrée a à faire dans ce rapport si curieux et si inattendu entre les révolutions des planètes et leurs chutes dans le soleil?»

Dann wird eine Erklärung gegeben, in der die Fallzeit nach der Sonne hin als die halbe Umlaufszeit eines in langgestreckter Ellipse um die Sonne sich bewegenden Körpers angesehen wird. Die Anwendung des dritten *Kepler*'schen Gesetzes gibt dann sofort für die Constante den Werth $\sqrt{32}$.

Die durch die Gleichung (1) ausgedrückte Beziehung ist übrigens, wie am angegebenen Orte Rapin schreibt, schon vor Flammarion von *Adolphe de Saussure* bemerkt worden.

Mit Recht hält sich Rapin über das Erstaunen Flammarions auf und bemerkt, die Beziehung könne vielleicht nur desshalb etwas Ausserordentliches haben, dass sie so lange der astronomischen Rechnung entgangen sei.

R. Wolf, in seinem prächtigen Handbuch der Astronomie,*) nennt die Beziehung eine «merkwürdige». Dies veranlasst mich, derselben etwas näher zu treten, und sie nach zwei Richtungen hin zu verallgemeinern.

II. Verallgemeinerung.

Die Gleichung (1) erfordert, dass die Planeten in ihren mittlern Entfernungen von der Sonne sich befinden. Dies kommt aber im allgemeinen selten vor, während einer Umlaufszeit nur zweimal.

Bald wird die Entfernung von der Sonne grösser, als die mittlere, bald kleiner, infolge der elliptischen Bahnen der Planeten.

---

*) *R. Wolf.* Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. In zwei Bänden. Zürich. Druck und Verlag von F. Schulthess. Vierter Halbband. No. 484, am Schluss.

Demnach muss sich auch der Werth der Fallzeit nach der Sonne ändern. Bezeichnen wir denselben mit

$$t_1,$$

so ist t_1 grösser als τ_1, wenn der Planet weiter entfernt ist, als die mittlere Distanz Planet-Sonne beträgt, dagegen kleiner als τ_1, wenn der Planet in seiner Bahn sich näher bei der Sonne befindet. Während einer Umlaufszeit des Planeten ändert die Fallzeit t_1, beständig ihren Werth, dagegen bleibt T constant.

Um die Relation zwischen der Fallzeit nach der Sonne und der Umlaufszeit darstellen zu können, müssen wir daher schreiben:

$$t_1 = F_\alpha \, . \, \tau_1,$$

das heisst, wenn wir für τ_1 seinen Werth aus der Gleichung (1) substituiren:

$$t_1 = F_\alpha \, . \, \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (2).$$

Der Faktor F_α wird sich für jede Entfernung des Planeten von der Sonne numerisch darstellen lassen. Ob sich für denselben jedoch ein einfaches mathematisches Gesetz ergibt, wird die Untersuchung, die nachstehend ausgeführt ist, zu zeigen haben. Jedenfalls können wir jetzt schon so viel sagen, dass für die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne

$$t_1 = \tau_1$$

und daher

$$F_\alpha = 1$$

sein muss.

Die zweite Verallgemeinerung, die sich ebenfalls sofort aufdrängt, besteht darin, dass wir die Fallzeit nach der Sonne nicht gleich für den ganzen Weg Planet-Sonne, sondern nur für einen Theil dieses Weges in Beziehung zur Umlaufszeit des Planeten setzen. Diese Verallgemeinerung drängt sich uns namentlich auch dann auf, wenn wir bedenken, dass weder die Sonne, noch die Planeten mathematische Punkte sind, sondern mit ihren Massen ein gewisses Volumen erfüllen, dass also die Distanz zwischen den nächstliegenden Punkten beider Körper kleiner ist, als die Distanz r der in Rechnung gebrachten zwei Massenpunkte, in deren einem wir uns die Masse der Sonne, im andern die Masse des Planeten konzentrirt denken.

Bezeichnen wir daher einen Theil, etwa den n. Theil der Distanz r, mit s_n, so ist die Fallzeit für den Fallraum

$$s_n = \frac{r}{n}$$

in Beziehung zu setzen zur Umlaufszeit T des Planeten. Sei diese Fallzeit nach der Sonne für den Fallraum s_n gleich

$$t_n ,$$

so können wir wieder für alle Werthe n,

$$1 \overline{\overline{<}} n \leqq \infty,$$

die numerische Relation aufstellen:

$$t_n = F_\beta \, . \, t_1 \qquad (3).$$

wo F_β offenbar in den Grenzen 1 und 0 eingeschlossen ist. Ob sich auch für den Faktor F_β ein einfaches mathematisches Gesetz ergibt, lehrt uns ebenfalls die nachstehende Untersuchung.

Wenn wir die Gleichungen (2) und (3) kombiniren, erhalten wir:

$$t_n = F_\alpha \, . \, F_\beta \, . \, \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (4).$$

Indem man

$$F = F_\alpha \, . \, F_\beta \qquad (5).$$

setzt, folgt endlich:

$$t_n = F \, . \, \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (6).$$

Wir wollen nun im Nachstehenden zeigen, dass F ein einfaches mathematisches Gesetz befolgt und für alle elliptischen Bahnen den positiven Werth von $\sqrt{8}$ nicht übersteigen kann.

III. Bestimmung der Fallzeit t_n.

Die Masse der Sonne sei gleich 1, diejenige des betrachteten Planeten gleich m. Wir denken uns die Massen je in den Punkten S und P konzentrirt. Die Entfernung dieser beiden Punkte sei r. Die Masse 1 möge in der Entfernung f die Anziehung 1 ausüben. Unmittelbar vor dem Beginne der Fallzeit mögen beide Massen sich relativ in Ruhe befinden. Sie mögen ferner keinen störenden Wirkungen eines dritten Körpers ausgesetzt sein. Wir führen also die Betrachtung für das Zwei-Körper-Problem durch. Nach der Zeit t haben beide Körper die Entfernung

$$r - s.$$

Die Annäherung der beiden Körper beträgt also s. Selbstverständlich fällt nicht nur der Körper m gegen die Sonne, sondern auch die Sonne, und wenn ihre Masse noch so gross wäre, gegen den Körper m. In der Entfernung r — s übt, wenn die Kraft im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkt, die Masse 1 die Anziehung

$$\frac{f^2}{(r-s)^2}$$

aus und entsprechend die Masse m die Anziehung

$$m\,\frac{f^2}{(r-s)^2}.$$

Die Beschleunigung der Annäherung beträgt alsdann zusammen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = (1+m)\,\frac{f^2}{(r-s)^2} \qquad (7).$$

Die Integration der Gleichung (7) bietet bekanntlich keinerlei Schwierigkeiten und lässt sich genau ausführen.

Da identisch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

ist, so folgt, unter Berücksichtigung von (7), nachdem man beiderseitig mit dt multiplicirt hat und dann integrirt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(1+m)\,f^2\int\frac{ds}{(r-s)^2} + \text{Const.} \qquad (7')$$

Führt man die Integration aus und berücksichtigt, zur Bestimmung der Constanten, dass für $s = o$ die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = o$ ist, so folgt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\,(1+m)\,f^2\left(\frac{1}{r-s} - \frac{1}{r}\right) \qquad (8)$$

und hieraus:

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\,\sqrt{\frac{r-s}{s}}\,ds \qquad (9).$$

wo wir die Quadratwurzeln als positiv verstehen.

Aus (9) wird:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\int\sqrt{\frac{r-s}{s}}\,ds + \text{Const.} \qquad (10).$$

Die Constante bestimmen wir so, dass für $s = o$, ebenfalls $t = o$ wird.

Um

$$J = \int \sqrt{\frac{r-s}{s}}\, ds$$

auszumitteln, setze man:

$$s = r \sin^2 \varphi.$$

Führt man die Substitution aus, so wird

$$J = r \int (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi.$$

Man erhält mithin das folgende Resultat, wobei wir die auftretenden Quadratwurzeln ebenfalls als positiv verstehen wollen:

$$J = r\left(\arc\sin\sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1-\frac{s}{r}\right)}\right),$$

folglich geht (10) über in:

$$t = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\left(\arc\sin\sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1-\frac{s}{r}\right)}\right) + \text{Const.}$$

Setzt man die Grössen s und t gleich null, so sieht man, dass auch die Constante gleich null sein muss, wenn wir die periodische Funktion $\arc\sin\sqrt{\frac{s}{r}}$ so verstehen, dass sie für $s = o$, mit null zu beginnen habe. Wir erhalten also:

$$t = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\left(\arc\sin\sqrt{\frac{s}{r}} + \sqrt{\frac{s}{r}\left(1-\frac{s}{r}\right)}\right),$$

mithin, wenn

$$\frac{r}{s} = n$$

ist:

$$t_n = \frac{r\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\left(\arc\sin\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) \qquad (11).$$

Gleichung (11) lässt sich auch folgendendermassen schreiben:

$$t_n = \frac{\frac{r}{2}\sqrt{\frac{r}{2}}}{f\sqrt{1+m}}\,(\omega + \sin\omega) \qquad (12),$$

wo

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist. Die periodische Funktion ω hat, für $n = \infty$, entsprechend der vorgenommenen Constantenbestimmung, mit null anzufangen. Mit obiger Gleichung (12) ist der Werth der Fallzeit t_n ermittelt.

IV. Beziehung der Fallzeit t_n zur Umlaufszeit T.

Wenn wir die im vorigen Abschnitte gewählten Bezeichnungen, für die Massen der Sonne und des Planeten sowie für die Distanz f (*Gauss*'sche Zahl), beibehalten und mit a die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne, oder die halbe grosse Axe der Bahn-Ellipse, bezeichnen, so ist die Umlaufszeit T des Planeten um die Sonne bekanntlich gegeben durch die Gleichung:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{f\sqrt{1+m}} \qquad (13),$$

wobei π die bekannte Transcendente bedeutet. Für die Ableitung von (13), die in jedem Lehrbuche enthalten ist, vergleiche man z. B. das erwähnte Handbuch von *R. Wolf*, Seite 328, oder auch *F. Tisserand*, in seinem «Traité de Mécanique céleste», Bd. I, Seite 99.

Aus den Gleichungen (12) und (13) lassen sich die von den Massen abhängigen Grössen eliminiren, und wir erhalten die unserer Verallgemeinerung entsprechende charakteristische Relation:

$$t_n = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (14).$$

Man erhält also für den Faktor F den Werth:

$$F = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \qquad (15)$$

und sieht, dass er sich in der That durch einen einfachen analytischen Ausdruck darstellen lässt. Derselbe liesse sich, was wir hier nicht ausführen wollen, mit der Cykloide in Verbindung bringen.

Ist $n = 1$, so wird $\sin\omega = 0$, $\omega = \pi$, also

$$t_1 = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (16).$$

Somit ist

$$F_\alpha = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \qquad (17).$$

Wird in (14) der Abstand r gleich dem mittlern Abstand a gesetzt, so geht t_n in τ_n über, und wir haben:

$$\tau_n = \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \cdot \frac{T}{\sqrt{32}} \quad (18).$$

Der Faktor F_β ergibt sich zu:

$$F_\beta = \frac{\omega + \sin\omega}{\pi} \quad (19),$$

wo nach der Voraussetzung

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

ist und ω, für $n = \infty$, den Werth null hat.

Wir wollen noch zeigen, welche Grenzen F für die elliptischen Bahnen annehmen kann.

Für die nämliche elliptische Bahn ist a constant und r liegt innerhalb der Grenzen:

$$a\,(1-e) \overline{\overline{<}}\, r \leqq a\,(1+e),$$

wo e die numerische Excentrizität der Bahn-Ellipse darstellt.

Dividiren wir mit der positiven Grösse a, so erhalten wir:

$$(1-e) \overline{\overline{<}}\, \frac{r}{a} \leqq (1+e).$$

Nehmen wir endlich den Grenzwerth von e, e = 1, an, so wird die elliptische Bahn zu einer parabolischen. Wir erhalten also:

$$0 \overline{\overline{<}}\, \frac{r}{a} \leqq 2,$$

mithin

$$0 \overline{\overline{<}} \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \leqq \sqrt{8} \quad (20),$$

wo wir die Quadratwurzel immer positiv verstehen.

Wir haben schon früher gesehen, dass der Faktor F_β in den Grenzen 0 und 1 eingeschlossen sein muss. Dies ist auch thatsächlich der Fall, da wir $\sqrt{\frac{1}{n}}$, also auch $\sin\frac{\omega}{2}$ positiv verstanden haben und die periodische Funktion ω, für $n = \infty$, nach der vorgenommenen Constantenbestimmung mit null zu beginnen hat.

Multipliziren wir also in der Relation (20) die untere Grenze 0 mit dem kleinsten Werthe von F_β, mit 0, und die obere Grenze, $\sqrt{8}$, mit dem grössten Werthe von F_β, mit 1, so erhalten wir

$$0 \gtreqless F \leqq \sqrt{8} \qquad (21).$$

Der Faktor F kann also für alle Punkte des Raumes die Grenzen 0 und 2, 82843 nicht überschreiten.

Spezialisiren wir die Gleichung (14) noch für den Fall $n = 2$, so folgt:

$$t_2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) \frac{T}{\sqrt{32}} \qquad (22).$$

Für den fernern Spezialfall, $n = 1$, die Erde und den heutigen Abend (12. November 1898) erhalten wir als Werth des Faktors F, wenn wir nach dem Annuaire du Bureau des Longitudes

$$r = 146{,}91$$

und

$$a = 148{,}49$$

Milliarden m setzen:

$$F = 0{,}9841.$$

Würde die Tangentialkraft jetzt plötzlich erlöschen, so würde demnach die Erde in

$$t_1 = 0{,}9811 \,.\, \frac{365{,}26}{\sqrt{32}}$$

$$= 63{,}54$$

mittlern Sonnentagen sich mit der Sonne vereinigt haben.

* * *

Stellen wir zum Schlusse noch einige Resultate zusammen.

1. Zwischen der Umlaufszeit T eines Planeten um die Sonne und der Fallzeit t_n, die erforderlich ist, um den n. Theil des Fallraumes Planet-Sonne zurückzulegen, besteht die Relation:

$$t_n = F \cdot \frac{T}{\sqrt{32}}.$$

2. Der Faktor F hat folgenden Werth:

$$F = \left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \cdot \frac{\omega + \sin\omega}{\pi},$$

wo r den ganzen Fallraum Planet-Sonne und a die grosse Halbaxe der Planetenbahn darstellt, $\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}$ mit seinem positiven Werthe zur Anrechnung gelangt, $\sin\frac{\omega}{2}$ den positiven Werth von $\sqrt{\frac{1}{n}}$, ω den kleinsten dieser Definition entsprechenden positiven Bogenwerth und π die bekannte Transcendente bedeutet.

3. Der Faktor F ist unabhängig von der Masse des Planeten.

4. Der Werth von F liegt für jeden Punkt der elliptischen Bahn innerhalb der Grenzen 0 und 2,82843.

5. Für $n = 1$ und $r = a$ ergibt sich, wenn in diesem Spezialfalle t_n mit τ_1 bezeichnet wird, die von A. de Saussure aufgestellte Relation, $\tau_1 = \frac{T}{\sqrt{32}}$.