Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1897)
Heft: 1436-1450

Artikel: Sur la fonction Bessélienne de IIe espèce S^n(x)
Autor: Crelier, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319095

L. Crelier.

Sur la fonction Bessélienne de II^e^ espèce $\overset{n}{S}(x)$.

(Eingereicht im Dezember 1896.)

L'étude de la fonction:

$$\frac{1}{x-y} = \int_0^{\frac{N}{x-y}} e^{-(x-y)s}\, ds$$

conduit à la formule connue:

$$\frac{1}{x-y} = \overset{0}{J}(y)\,\frac{1}{x} + \sum_1^{\infty} \overset{n}{J}(y) \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds\,^{*)}$$

où $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $\overset{0}{J}(y)$ et $\overset{n}{J}(y)$ sont des fonctions Besséliennes de 1^{re} espèce.

L'intégrale:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n\, t^{-n}\right) ds$$

*) Mathem. Annalen, III, p. 138.

représente la fonction $\overset{n}{O}(x)$*), une des intégrales Besséliennes de 2^{me} espèce. Mise en sommation, elle devient:

$$\overset{n}{O}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \frac{(n-\lambda-1)!}{2!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}$$

Cette formule élégante a été introduite dans le calcul par M. Neumann, en partant de l'intégrale précédente.

Dans notre thèse de doctorat, nous avons présenté un nouveau développement de cette formule par sommation.

En appliquant la formule de l'intégration par parties,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

on peut écrire:

$$\overset{n}{O}(x) = \frac{\cos^2 n\frac{\pi}{2}}{x} + \frac{n}{2x}\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right)\frac{dt}{t} \text{ **)}$$

La nouvelle intégrale représente la fonction $\overset{n}{S}(x)$, fonction Besséliennne de 2^{me} espèce. Pour en obtenir la formule par sommation, on l'a simplement comparée à $\overset{n}{O}(x)$ et l'on a déduit la nouvelle forme.

Mais, nous ferons remarquer que l'intégrale

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right)\frac{dt}{t} \qquad (1.)$$

soumise à un mode de représentation analogue à celui que nous avons employé pour

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds, \text{ ***)}$$

et traitée ensuite par *la théorie des fractions continues*, est susceptible d'un développement particulier en une formule par sommation. Dans le travail ci-dessous, nous nous proposons de développer cette transformation.

---

*) *C. Neumann*, Bessel'sche Funktionen, p. 9.

**) *C. Neumann*, Bessel'sche Funktionen.

***) Voir: *L. Crelier* «Thèse de doctorat».

I.

Posons:

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \text{ et}$$

$$T_n = t^n - (-1)^n\, t^{-n}.$$

Voyons ce devient le produit

$$2s\, T_n = \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t^n - (-1)^n\, t^{-n}\right)$$

$$2s\, T_n = \underbrace{t^{n+1}}_{\text{I.}} \underbrace{- t^{n-1} - (-1)^n\, t^{-n+1}}_{\text{II.}} \underbrace{+ (-1)^n\, t^{-n-1}}_{\text{III.}}$$

Les parties I et III donnent: $t^{n+1} + (-1)^n\, t^{-(n+1)}$

$$= t^{n+1} - (-1)^{n+1}\, t^{-(n+1)}$$

$$= T_{n+1}$$

La partie II donne: $- t^{n-1} - (-1)^n\, t^{-n+1}$

$$= - t^{n-1} + (-1)^{n-1}\, t^{-(n-1}$$

$$= - T_{n-1}.$$

Donc

$$2s\, T_n = T_{n+1} - T_{n-1}; \qquad (2.)$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \frac{T_{n-1}}{T_n}$$

$$= 2s + \cfrac{1}{\cfrac{T_n.}{T_{n-1}}}$$

Mais on a aussi

$$2s\, T_{n-1} = T_n - T_{n-2},$$

et
$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = 2s + \cfrac{1}{\cfrac{T_{n-1}}{T_{n-2}}};$$

en appliquant la formule de récurrence (2) à ce nouveau quotient, et en continuant le développement on arrivera à:

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \ddots + \cfrac{1}{\cfrac{T_2}{T_1}}}}}$$

$$T_2 = t^2 - (-1)^2 t^{-2} = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

$$T_1 = t - (-1)^1 t^{-1} = t + \frac{1}{t}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{t^2 - t^{-2}}{t + t^{-1}} = \frac{(t + t^{-1})(t - t^{-1})}{(t + t^{-1})} = (t - t^{-1})$$
$$= 2s.$$

Donc

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = 2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{1}{2s + \ddots + \cfrac{1}{2s}}}}$$

C'est une fraction continue à n quotients incomplets égaux tous à 2 s.

D'après les théories et notations de *M. le Prof. Dr. J. H. Graf**), nous écrivons :

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\left[\overbrace{2s, 2s, \ldots\ldots, 2s}^{\text{n termes}}\right]}{\left[\underbrace{2s, 2s, \ldots\ldots, 2s}_{\text{n — 1 termes}}\right]} \qquad (3.)$$

Le numérateur a n termes et le dénominateur n — 1 termes et cette fraction est la n^e réduite de la fraction continue précédente. C'est donc sa valeur même.

---

*) Voir: «*J. H. Graf. — Relations entre la fonction Bessélienne de 1re espèce et une fraction continue*».

«Annali di Matematica». Milan, 1895, *et notre thèse*.

Rappelons:

$$f_n(a, b) = \left[a,\ a + b,\ a + 2\,b,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ a + (n-1)\,b\right]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (a + \lambda\, b)\,(a + (\lambda + 1)\, b) \ldots\ldots (a + (n - \lambda - 1)\, b)$$

En posant

$$a = 2\,s \text{ et } b = 0$$

nous aurons

$$f_n(2s, 0) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \binom{n-\lambda}{\lambda} (2\,s)^{n-2\lambda} \tag{4.}$$

et $$f_n(2s, 0) = \Big[\underbrace{2s,\ 2s,\ 2s,\ \ldots,\ 2s}_{\text{n termes}}\Big]$$

Appliquons à la formule (3), nous aurons

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{f_n(2\,s,\,0)}{f_{n-1}(2\,s,\,0)} \tag{5.}$$

De cette proportion, nous pouvons conclure que le dénominateur T_n est égal au dénominateur $f_{n-1}(2\,s,\,0)$, à une constante près.

Donc $$T_n = \text{Const.}\ f_{n-1}(2\,s,\,0)$$

Pour déterminer C, faisons $n = 2$, d'où

$$T_2 = C.\ f_1(2\,s,\,0)$$

Mais $T_2 = t^2 - t^{-2}$

et $$f_1(2\,s,\,0) = 2\,s = t - t^{-1}$$

D'où $$t^2 - t^{-2} = C.\,(t - t^{-1})$$

$$C = (t + t^{-1})$$

Donc:

$$T_n = (t + t^{-1})\, f_{n-1}(2\,s,\,0) \tag{6.}$$

Reportons nous à la valeur de l'intégrale (1)

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n\, t^{-n}\right)\frac{dt}{t} = S^n(x).$$

Nous pouvons l'écrire:

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, T_n \frac{dt}{t}$$

En introduisant la valeur (6) on obtient:

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \left(t+\frac{1}{t}\right) f_{n-1}(2s, 0) \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{t+\frac{1}{t}}{t} f_{n-1}(2s, 0)\, dt$$

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) f_{n-1}(2s, 0)\, dt. \qquad (7.)$$

Reprenons

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$2s = \left(t - \frac{1}{t}\right).$$

La différentiation donne :

$$2\, ds = dt\left(1 + \frac{1}{t^2}\right).$$

En substituant la variable s, dans (7) la limite inférieure devient

$$s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$$

$$s = 0.$$

La limite supérieure reste très grande, voisine de l'infini; on écrit:

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\, ds. \qquad (7^{bis})$$

Substituons ici la valeur (4) pour $f_{n-1}(2\,s, 0)$. Nous aurons :

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n}{2}} \binom{n-1-\lambda}{\lambda} 2\,s^{n-1-2\lambda}$$

Faisons passer les termes indépendants de devant le signe $\int$ et développons

$$S^n(x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(2\,s)^{n-1-2\lambda}\,d\,s\,;$$

posons $x\,s = u\,;\ d\,s = \frac{1}{x}\,du$:

$$S^n(x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \cdot \frac{2^{n-1-2\lambda}}{x^{n-1-2\lambda}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u}\,u^{n-1-2\lambda}\,du$$

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda!\,(n-1-2\lambda)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \int_0^{\frac{N}{x}} {}^{-u}\,u^{n-1-2\lambda}\,du. \quad (8.)$$

Mais les fonctions Eulériennes donnent:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-u}\,u^{n-1-2\lambda}\,d\,u = \Gamma_{(n-2\lambda)} = (n-1-2\lambda)!$$

En introduisant dans (8), il reste:

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda\,!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \qquad (9.)$$

Cette formule (9) est identique à la formule par sommation déduite d'une comparaison entre les deux fonctions

$O^n(x)$ et $S^n(x)$.

Sur la somme $S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x)$ et sur la différence $S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x)$.

I.

Rappelons la formule

$$O^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds + \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s, 0)\, ds\,{}^{*)}$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left\{ s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0) \right\} ds$$

et la formule (7^{bis}) du paragraphe précédent

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0).$$

Changeons *n* en *n* — *1* et en *n* + *1* dans cette dernière formule. Nous aurons alors:

$$S^{n+1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_n(2s, 0)\, ds$$

$$S^{n-1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s, 0)\, ds.$$

Si nous tenons compte de la relation (4) du travail précité de *M. le Prof. J. H. Graf* nous aurons:

$$f_n(2s, 0) = 2s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0).$$

Introduisons cette valeur dans $S^{n+1}(x)$ et cette formule deviendra:

$$S^{n+1}(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left\{ 2s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0) \right\} ds$$

---

*) *Ls. Crelier:* Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes «Annali di Matematica» tome 24 (1896) (§ VI, formule 7.)

ou

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s f_{n-1}(2s, 0)\, ds + 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-2}(2s, 0)\, ds. \quad (\alpha).$$

D'autre part $S^{n-1}(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-2}(2s, 0)\, ds,$

l'addition donne alors:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds +$$

$$4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, f_{n-2}(2s, 0)\, ds$$

$$= 4\int e^{-xs}\left\{s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right\} ds.$$

Comparé avec la valeur de $O^n(x)$, ce résultat s'écrit:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, O^n(x). \quad (1.)$$

II.

La valeur (α) de $S^{n+1}(x)$ peut aussi s'écrire:

$$S^{n+1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0) + S^{n-1}(x)$$

Faisons passer $S^{n-1}(x)$ de l'autre côté du signe égal et nous aurons:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds. \quad (\beta).$$

Le membre de droite de cette *nouvelle relation* n'est autre chose que la I^re^ intégrale dans le développement de $O^n(x)$.

La formule (6) de la I[re] partie:

$$T_n = \left(t + t^{-1}\right) f_{n-1}(2s, 0), \qquad \text{donne :}$$

$$f_{n-1}(2s, 0) = \frac{1}{t + t^{-1}}, \quad T_n = \frac{1}{\left(t + t^{-1}\right)} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\}.$$

Introduisons cette valeur dans la relation (β); celle-ci deviendra

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left\{ \frac{s}{t + t^{-1}} \right\} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} ds;$$

nous avons eu $s = \frac{1}{2}\left(t - t^{-1}\right)$

$$\text{et } ds = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

En substituant ces valeurs dans l'intégrale ci-dessus, la nouvelle variable devient t, et la limite inférieure

$$s = 0 \text{ donne } 0 = \frac{1}{2}\left(t - t^{-1}\right)$$

$$\text{d'où } \underline{t = 1}$$

La limite inférieure est 1, et la formule précédente s'écrit:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(\frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1}} \right) \left(1 + t^{-2}\right)$$

$$\left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} dt$$

ou

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t} \quad (\gamma).$$

La valeur de $S^n(x)$ nous a donné:

$$S^n(x) = \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t^n - (-1)^n t^{-n} \right) \frac{dt}{t} \quad ^{*)}$$

$$\text{avec } s = \frac{1}{2}\left(t - t^{-1}\right) \text{ comme plus haut.}$$

---

*) *Neumann*, Bessel'sche Funktionen. (Leipzig, 1867.)

En différentiant suivant x, nous aurons

$$\frac{\delta S^n(x)}{\delta x} = \int_1^{\frac{N}{x}} \frac{\delta}{\delta x} e^{-xs} \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (-s) \left\{ t^n - (-1)^n t^{-n} \right\} \frac{dt}{t}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}.$$

D'où

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(t - t^{-1}\right) \left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t} = -2 \frac{\delta S^n(x)}{\delta x}.$$

Introduite dans (γ) cette valeur nous conduit à l'intéressante relation

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = -2 \frac{\delta S^n}{\delta x}$$

que l'on peut aussi écrire

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2 \frac{\delta S^n}{\delta x}. \qquad (2.)$$

Ces formules (1) et (2) sont déjà connues mais en déduction de raisonnements tout à fait différents.

III.

La valeur $\frac{\delta S^n}{\delta x}$ à laquelle nous venons d'arriver, peut donc s'écrire:

$$\frac{\delta S^n}{\delta x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s.\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds. \qquad (3.)$$

en remontant à la formule (β) dont nous sommes partis.

Le développement par sommation de cette intégrale, nous est connu et donne :

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s\,.\,0)\, ds = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{1}{4}\cdot\frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda\,!}(n-2\lambda)\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}.$$

Donc :

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda\,!}(n-2\lambda)\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda} \qquad (4.)$$

Nous ferons remarquer que cette valeur (4) peut aussi s'écrire directement en différentiant suivant x :

$$S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-1-\lambda)!}{\lambda\,!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}.$$

(C'est la formule (9) de la première partie de cette note.)

En tenant compte de la valeur (3) pour $\frac{\partial S^n}{\partial x}$, et de celle de $0^n(x)$:

$$0^n x = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds + \int_0^{\frac{N}{x}} f_{n-2}(2s,\ 0)\, ds,$$

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds,$$

$$S^n = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\, ds,$$ nous aurons :

$$0^n(x) = \frac{1}{2}S^{n-1}(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial S^n}{\partial x} \qquad (5.)$$

Si nous considérons les deux relations (1) et (2)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\,0^{n}$$

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2\,\frac{\partial S^{n}}{\partial x}$$

par addition, elles donnent une valeur de $0^{n}(x)$ identique à (5) celle donnée plus haut, soit:

$$0^{n}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - \frac{\partial S^{n}}{\partial x}\right);$$

par soustraction, elles donnent encore

$$0^{n}(x) = \frac{1}{2}\left\{S^{n+1}(x) + \frac{\partial S^{n}}{\partial x}\right\} \qquad (6.)$$

IV.

Revenons à la formule modifiée de (α) au § II

$$S^{n+1}(x) = 4\int_{0}^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds + S^{n-1}(x)$$

et à (β): $S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) = 4\displaystyle\int_{0}^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds$

et étudions l'intégrale qui forme le membre de droite.

Nous connaissons:

$$f_{n-1} = 2\,s\,f_{n-2} - f_{n-3}.$$

Cette nouvelle valeur nous permet d'écrire:

$$-2\,\frac{\partial S^{n}}{\partial x} = 4\int_{0}^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,\ 0)\, ds = 4\int_{0}^{\frac{N}{x}} e^{-xs.}$$

$$s\,\big((2s\,f_{n-2}(2s, 0) + f_{n-3}(2s,\ 0)\big)\, ds$$

$$= 8\int_{0}^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^{2}\, f_{n-2}(2s, 0)\, ds + 4\int_{0}^{\frac{N}{x}} e^{-xs.}\, s\, f_{n-3}(2s,\ 0)\, ds.$$

La dernière partie est égale à

$$- 2 \frac{\delta S^{n-2}}{\delta x}.$$

Voyons ce que donne la Ire partie:

$$\text{prenons} \quad \frac{\delta S^n}{\delta x} = - 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, s \, f_{n-1} (2s, 0) \, ds$$

et différentions encore une fois suivant x. On peut le faire sans remplacer s par sa valeur en fonction de t. Nous obtenons

$$\frac{\delta^2 S^n}{\delta x^2} = - 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (- s) \, s \, f_{n-1} (2s, 0) \, ds$$

$$= + 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, s^2 \, f_{n-1} (2s, 0) \, ds.$$

Avec n changé en n — 1, nous avons:

$$\frac{\delta^2 S^{n-1}}{\delta x^2} = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, s^2 \, f_{n-2} (2s, 0) \, ds. \qquad (7.)$$

Nous avons alors:

$$- 2 \frac{\delta S^n}{\delta x} = 4 \frac{\delta^2 S^{n-1}}{\delta x^2} - 2 \frac{\delta S^{n-2}}{\delta x} \quad \text{ou}$$

$$- \frac{\partial S^n}{\delta x} = 2 \frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} - \frac{\delta S^{n-2}}{\partial x} \qquad (8.)$$

En traitant de même la formule:

$$- \frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, s \, f_{n-3} (2s, 0) \, ds,$$

$$\text{nous aurons;} \quad - \frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} - \frac{\partial S^{n-4}}{\partial x}$$

Nous écrivons la *nouvelle relation :*

$$\frac{\partial S^{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial S^n}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2}. \qquad (8^{bis})$$

Cette formule, donnant la différence de deux dérivées simples, prouve que la relation $S^{n-2} - S^n = 2 \,.\, \partial\, S^{n-1}$ est aussi valable quand on en prend la dérivée par rapport à x.

Remplaçons ensuite dans (8) la dernière dérivée simple par une dérivée seconde suivant $(8)^{bis}$ et nous aurons:

$$\frac{\partial\, S^n}{\partial x} = -\,2 \left\{ \frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-5}}{\partial x^2} + \cdots\cdots \right\};$$

arrêtons nous aux termes en S^0 ou S^1 dont les valeurs sont très simples, afin de ne pas arriver aux fonctions S (x) à indices négatifs. $\frac{\partial\, S^n (x)}{\partial x}$ ou la première dérivée de $S^n (x)$ apparaît clairement comme une sommation des deuxièmes dérivées de fonctions S (x).

Pour développer cette sommation nous considérerons 2 cas avec *n pair* ou avec *n impair.*

I. cas. n pair. On a dans ce cas:

$$\frac{\partial\, S^n}{\partial x} = -\,2 \left\{ \frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2} \right\} + \frac{\partial\, S^0}{\partial x}$$

$$\text{car} \; -\frac{\partial\, S^2}{\partial x} = 2\,\frac{\partial^2 S^1}{\partial x} - \frac{\partial\, S^0}{\partial x}$$

$$S^0 (x) = 0, \; \frac{p\, S^0}{\partial x} = 0$$

n étant diminué de 1, 3, 5 etc., les indices des 2mes dérivées sont des nombres impairs; le dernier est donc 1 et le premier n — 1. Nous pouvons alors écrire:

$$\frac{\partial\, S^n}{\partial x} = -\,2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \frac{\partial^2\, S^{2\lambda+1}}{\partial x^2} \qquad (9.)$$

IIe cas. n impair. Ici, les indices des deuxièmes dérivées sont des nombres pairs et comme

$$-\frac{\partial\, S^3}{\partial x} = +\,2\,\frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} - \frac{\partial\, S^1}{\partial x},$$

nous pourrons écrire notre série sous la forme:

$$\frac{\partial\, S^n}{\partial x} = -\,2 \left\{ \frac{\partial^2\, S^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\, S^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} \right\} + \frac{\partial\, S^1}{\partial x}$$

$$S^1 (x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1};\; \frac{\partial\, S^1}{\partial x} = -\,2x^{-2} = -\,\frac{2}{x^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2\left\{\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right\} \qquad (9^{bis})$$

Les formules (9) et (9^{bis}) nous donnent le développement cherché.

En posant dans (9) $n = 2p$ et $n = 2p - 1$ dans $9^{(bis)}$ et en additionnant nous obtiendrons

$$\left(\frac{\partial S^{2p}}{\partial x} + \frac{\partial S^{2p-1}}{\partial x}\right) = -2\left[\frac{\partial^2 S^{2p-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^{2p-2}}{\partial x^2} + \cdots\cdots \right.$$

$$\left. \cdots\cdots + \frac{\partial^2 S^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$\frac{\partial S^{2p}}{\partial x} + \frac{\partial S^{2p-1}}{\partial x} = -2\left\{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2p-1} \frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2}\right\}$$

Nous arrivons de cette façon à la somme de dérivées premières de fonctions consécutives.

Ce résultat se présenterait sous la même forme en prenant $n = 2p + 1$ avec $n = 2p$.

Donc:

$$-\left(\frac{\partial S^n}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = +\frac{2}{x^2} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^n}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x^2}. \qquad (10.).$$

Les formules (9) et (9^{bis}) peuvent se réunir en une seule de la forme

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S^n}{x} = \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2} + \sum_{0}^{\lambda < \frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2} \qquad (11.)$$

Car λ étant toujours entier on a, à la limite inférieure: $\frac{\partial^2 S^{n-1}}{\partial x^2}$ et à la limite supérieure $\frac{\partial S^2}{\partial x^2}$ avec n impair, ou $\frac{\partial^2 S^1}{\partial x^2}$ avec n pair;

en outre $\dfrac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2}$ donne avec n pair $\dfrac{\sin^2 p\pi}{x^2} = 0$ et avec n impair

$$\frac{\sin^2 (2p+1)\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{(-1)^{2p}}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

La relation (11) établit ainsi la valeur d'une dérivée simple en fonction des dérivées secondes des fonctions d'indices inférieurs.

V.

D'un autre côté nous connaissons la formule $S^{n-1}_{(x)} - S^{n+1}_{(x)} = 2\dfrac{\partial S^n}{\partial x}$; cette formule est donc égale à

$$S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = -4\left(\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x^2} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2}\right) \quad (12.)$$

On peut aussi écrire

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\,\partial S^n}{\partial x} - S^{n-1}(x);$$

nous savons que cette formule est générale; elle nous conduira donc à la somme d'une suite de dérivées premières pour la valeur d'une fonction simple $S^n(x)$. Soit:

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\,\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-4}(x)}{\partial x} + \cdots$$

Pour former cette suite en une sommation à terme général, nous considérerons 2 cas, un avec ***n** pair* et un avec ***n** impair*.

I^er^ cas: n pair. Le dernier terme sera de la forme

$$\frac{2\,\partial S^2(x)}{\partial x} - S^1(x) = -S^3(x). \quad S^1(x) = \frac{2}{x}.$$

Donc on aura:

$$-S^{n+1}(x) = -\frac{2}{x} + 2\sum_{1}^{\lambda=\frac{n}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda}(x)}{\partial x}. \qquad (13.)$$

II^{me} cas. n impair. La somme devra s'arrêter ici à

$$\frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - S^0(x).$$

Faisons remaquer que nous ne prolongeons pas nos sommes plus loin, simplement pour ne pas obtenir de termes négatifs.

Notre second cas donnera

$$-S^{n+1}(x) = \frac{2\,\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \cdots + \frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - S^0(x),$$

$S^0(x) = 0.$

Donc

$$-S^{n+1}(x) = 2\sum_{0}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}. \qquad (13^{\text{bis}})$$

Nous avons obtenu de cette façon les deux sommations pour les fonctions $S^n(x)$, suivant qu'elles sont paires ou impaires.

Prenons maintenant deux fonctions consécutives n et n — 1 et formons la suite des dérivées premières correspondantes. Quelle que soit leur parité, la 1re des dérivées sera $\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}$, la dernière $\frac{\partial S^1}{\partial x}$ et le dernier terme de la somme: $-\frac{2}{x}$, car nous avons 2 fonctions dont une paire et une impaire, et la fonction paire finit avec $-\frac{2}{x}$.

$$-\left(S^n(x) + S^{n-1}(x)\right) = \frac{2\,\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{2\,\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} + \cdots\cdots \frac{2\,\partial S^1(x)}{\partial x} - \frac{2}{x}$$

$$S^n(x) + S^{n-1}(x) = +\frac{2}{x} - 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial S^\lambda(x)}{\partial x} \qquad (14.)$$

Cette formule présente une harmonie parfaite avec la formule (10) en $\frac{\partial^2 S^\lambda}{\partial x}$ de même que les formules (13) et $(13)^{\text{bis}}$ avec les formules (9) et $(9)^{\text{bis}}$.

Les formules (13) et $(13)^{bis}$ peuvent aussi se grouper en une seule sommation qui sera:

$$-\frac{1}{2} S^n(x) = -\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{x} + \sum_{0}^{\lambda < \frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x} \qquad (15.)$$

La limite supérieure donnera suivant que n sera pair ou impair ∂S^1 ou ∂S^2 et la limite inférieure donnera toujours ∂S^{n-1}.

Développons maintenant $S^n(x)$ sous une double sommation de dérivées secondes. Nous considérons encore 2 cas avant de prendre le cas général.

I^er^ cas. n pair.

La relation (13^{bis}) nous donne:

$$S^n(x) = -2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}$$

Les fonctions dont on doit prendre les dérivées premières sont les fonctions impaires inférieures à n.

La relation (9^{bis}) nous donne pour ce cas:

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -2 \left[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 S^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2} \right]$$

$$\frac{\partial S^{2\lambda+1}(x)}{\partial x} = -2 \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{\partial^2 S^{2\mu}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2} \right]$$

Donc chaque terme de $S^n(x)$ étant une sommation, $S^n(x)$ sera la sommation de ces sommations.

$$S^n(x) = -2 \sum -2 \left(\Sigma + \frac{1}{x^2} \right)$$

Chaque terme dans la sommation étant affecté du facteur — 2, celui-ci peut passer devant et l'on a

$$S^n(x) = 4 \sum \left(\Sigma + \frac{1}{x^2} \right)$$

Le terme $\frac{1}{x^2}$ est pris autant de fois que la grande sommation comporte de termes, car toutes les dérivées qui forment cette grande sommation sont une autre sommation plus $\frac{1}{x^2}$.

On a $\frac{n-2}{2} + 1$ ou $\frac{n}{2}$ termes et $\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{n}{2x^2}$.

Donc:

$$S^n(x) = \frac{2n}{x^2} + 4 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{n-2}{2}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda} \frac{\partial^2 S^{2\mu}(x)}{\partial x^2}. \tag{16.}$$

II^me cas. n impair.

$$S^n(x) = \frac{2}{x} - 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{2\lambda}}{\partial x}$$

donne la valeur de S pour notre cas:

Ensuite

$$\frac{\partial S^{2\lambda}}{\partial x} = -2 \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{2\mu+1}}{\partial x^2}.$$

Ce qui nous permet d'écrire directement

$$S^n(x) = \frac{2}{x} + 4 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n-1}{2}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{2\mu+1}}{\partial x^2} \tag{17.}$$

Pour établir une formule générale, considérons les deux formules relatives à S^n et ∂S^n obtenues aux numéros (11) et (15). Soit

$$S^n(x) = \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x} - 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial S^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x},$$

dans (11) remplaçons n par $n - 2\lambda - 1$, nous aurons

$$\frac{\partial S^{n-2\lambda-1}(x)}{\partial x} = -2\left(\frac{\sin^2\frac{(n-2\lambda-1)\pi}{2}}{x^2} + \sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n}{2}-\lambda-1} \frac{\partial^2 S^{n-2\lambda-2\mu-2}(x)}{\partial x^2}\right)$$

Introduite dans la 1e sommation, cette valeur nous donne, en tenant compte de ce que la valeur $\sin^2 (n-2\lambda-1)\frac{\pi}{2}$ s'annule pour *n impair*, et encore de ce que, quand *n* est *pair*, la 1e somme comporte $\frac{n}{2}$ termes:

$$S^n(x) = \frac{2\sin^2\frac{n\pi}{2}}{x} + 4\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{\sin^2(n-1)\frac{\pi}{2}}{x^2} + 4\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\ \sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n}{2}-(\lambda+1)} \frac{\partial^2 S^{n-2\lambda-2\mu-2}}{\partial x^2} \qquad (18)$$

Telle sera notre formule générale pour $S^n(x)$, *n* étant pair ou impair.

Sur la somme $0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x)$ et la différence $0^{n-1}(x) - 0^{n+1}(x)$.

I.

La relation (1) dans le chapitre précédent donne:

$$4\,0^{n+1}(x) = S^{n+2}(x) + S^n(x)$$

ou

$$4\,0^{n-1}(x) = S^n(x) + S^{n-2}(x).$$

L'addition nous amène à

$$4\left(0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x)\right) = S^{n+2}(x) + 2\,S^n(x) + S^{n-2}(x).$$

En introduisant la valeur de $S^n(x)$:

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{2}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\,ds$$

dans les diverses fonctions S, nous obtenons:

$$4\left(0^{n+1}(x)+0^{n-1}(x)\right) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left\{f_{n+1}(2s,0) + 2\,f_{n-1}(2s,0) + f_{n-3}(2s,0)\right\}ds$$

On sait que: $f_{n+1}(2s, 0) = 2s\,f_n(2s, 0) + f_{n-1}(2s, 0)$

$f_{n+1}(2s, 0) + 2\,f_{n-1} + f_{n-3}(2s, 0)$ devient avec cette valeur:

$$2s\,f_n(2s, 0) + 3\,f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-3}(2s, 0)$$

Faisons: $f_n = 2s\, f_{n-1} + f_{n-2}$

et introduisons, nous aurons:

$$4s^2 f_{n-1} + 3 f_{n-1} + \underbrace{2s\, f_{n-2} + f_{n-3}}_{= f_{n-1}}.$$

Les deux derniers termes représentant f_{n-1}, la somme devient alors

$$4s^2 f_{n-1} + 4 f_{n-1} \text{ ou } 4\left(s^2 f_{n-1} + f_{n-1}\right).$$

D'où

$$4\left(0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x)\right) = 8 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2+1)\, f_{n-1}(2s,0)\, ds,$$

$$0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x) = 2 \int e^{-xs}(s^2+1)\, f_{n-1}(2s,0)\, ds.$$

Pour trouver la valeur de l'intégrale précédente posons:

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s,0)\, ds,$$

$$\frac{\partial S^n}{\partial x} = -2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, f_{n-1}(2s,0)\, ds,$$

$$\frac{\partial^2 S^n}{\partial x^2} = +2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2 f_{n-1}(2s,0)\, ds.$$

Ce mode de représentation nous permet d'écrire

$$\frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s^2 f_{n-1}(2s,0)\, ds$$

$$+ 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s,0)\, ds$$

$$= 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2+1)\, f_{n-1}(2s,0)\, ds.$$

D'où nous tirons l'intéressante formule:

$$0^{n+1}(x) + 0^{n-1}(x) = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n \qquad (1)$$

En remplaçant $O^{n+1}(x)$ et $O^{n-1}(x)$ par leurs valeurs tirées de l'équation (5) précédente, en additionnant et en égalisant à $\frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x)$, nous avons un intéressant moyen de vérification de notre formule (1).

$$\left.\begin{aligned} O^{n+1}(x) &= \frac{1}{2} S^n - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} \\ O^{n-1} &= \frac{1}{2} S^{n-2} - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} \end{aligned}\right\} (\partial)$$

$$O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left\{S^n(x) + S^{n-2}(x) - \left(\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2} + S^n(x)$$

d'où $= \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - S^n(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2}$

mais $S^{n-2}(x) - S^n(x) = 2\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x}$, et

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n+1}}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} = \frac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 S^n}{\partial x}.$$

Ce procédé de vérification nous amène à une valeur qui n'est qu'un cas de notre formule (8^{bis}) de la page 74. Ceci nous permet de conclure que notre relation (1) est exacte.

On pourrait aussi remplacer $O^{n+1}(x)$ et $O^{n-1}(x)$ par leurs valeurs tirées des formules (6), et l'on arriverait encore au même résultat, ce qui vérifie doublement les résultats donnés.

II.

Posons ensuite:

$$O^{n+1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_n(2s,0) + f_{n-1}(2s,0)\right) ds$$

et

$$O^{n-1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_{n-2}(2s,0) + f_{n-3}(2s,0)\right) ds.$$

Par soustraction nous obtenons:

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ s\, f_n(2s, 0) - s\, f_{n-2}(2s, 0)$$

$$+ f_{n-1}(2s, 0) - f_{n-3}(2s, 0) \Big\}\, ds,$$

on sait que:

$$f_n = 2s f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_{n-1} = 2s f_{n-2} + f_{n-3}$$

Avec ces substitutions notre intégrale devient:

$$\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ 2s^2 f_{n-1} + s f_{n-2} - s f_{n-2} + 2s f_{n-2} + f_{n-3} - f_{n-3} \Big)\, ds,$$

$$= \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \Big\{ 2s^2 f_{n-1} + 2s f_{n-2} \Big)\, ds,$$

$$= 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s \Big(s f_{n-1} + f_{n-2} \Big)\, ds,$$

mais

$$\frac{\partial\, 0^n(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} (s f_{n-1} + f_{n-2})\, ds$$

$$= - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\, s\, (s f_{n-1} + f_{n-2})\, ds,$$

Ce qui nous permet de conclure:

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) = -2 \frac{\partial\, 0^n(x)}{\partial x} \quad \text{ou}$$

$$0^{n-1}(x) - 0^{n+1}(x) = 2 \frac{\partial\, 0^n(x)}{\partial x} \qquad (2.)$$

C'est donc une relation pour la différence de 2 fonctions $0(x)$, relation assez analogue à celle pour la différence de 2 fonctions $S(x)$

Ces 2 relations sont déduites du nouveau mode de représentation des fonctions Besséliennes de 2e espèce suivant une fonction du numérateur d'une réduite de la fraction continue $\Big\{ 2s \ldots\ldots 2s \Big\}$.

III.

En nous reportant à la formule (5.) page 72, nous avons:

$$0^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - \frac{\partial S^n}{\partial x}\right)$$

Développons ainsi 0^{n-1} et $0^{n+1}(x)$. En faisant la différence nous avons:

$$0^{n-1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right),$$

$$0^{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(S^n(x) - \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right),$$

$$\left(0^{n-1}(x) - 0^{n+1}(x)\right) = \frac{1}{2}\left(S^{n-2}(x) - S^n(x)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\frac{\partial S^{n-1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x}\right).$$

Ce qui nous donne la relation:

$$4\,\frac{\partial 0^n(x)}{\partial x} = \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial S} \qquad (3)$$

Ce résultat est aussi développable en partant de

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = -\,2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s\, f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

et il montre que la formule:

$$S^{n-1}(x) + S^{n+1}(x) = 4\, 0^n(x),$$

est encore valable quand on en prend la dérivée par rapport à x.

En posant aussi:

$$0^n(x) = \int_0^x e^{-xs}\left(s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds$$

et

$$\frac{\partial 0^n}{\partial x} = -\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s\left(s\, f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds$$

puis en appliquant cette formule à

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x}$$

et en additionnant, on arrive à une relation qui doit pouvoir s'obtenir directement en dérivant suivant x:

$$O^{n+1} + O^{n-1} = \frac{\partial^2 S^n}{\partial x} + S^n.$$

En effet

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 f_n + s f_{n+1})\, ds$$

$$\frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 f_{n-2} + s f_{n-3})\, ds.$$

L'addition donne:

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}(s^2 f_n + s^2 f_{n-2} + s f_{n-1} + s f_{n-3})\, ds.$$

mais $f_n = 2 s f_{n-1} + f_{n-2}$

$$s^2 f_n = 2 s^3 f_{n-1} + s^2 f_{n-2} \quad \text{et} \quad 2 s^2 f_{n-2} + s f_{n-3} = s f_{n-1};$$

nous avons donc

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = - \int e^{-xs} \left\{ 2 s^3 f_{n-1} + 2 s^2 f_{n-2} + s f_{n-1} + s f_{n-3} \right\} ds$$

$$= - \int e^{-xs} (2 s^3 f_{n-1} + 2 s f_{n-1})\, ds$$

$$= - 2 \int e^{-xs} s (s^2 + 1) f_{n-1}\, ds$$

$$S^n(x) = 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}\, ds$$

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = - 2 \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s f_{n-1}\, ds$$

$$\frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s^3 f_{n-1} ds$$

$$\frac{\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x} = -2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} s (s^2 + 1) f_{n-1} ds \qquad \text{d'où}$$

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} \qquad (4)$$

C. q. f. d.

IV.

Nous avons eu la formule :

$$O^{n-1}(x) - O^{n+1} = \frac{2\,\partial O^n}{\partial x},$$

nous devons obtenir une relation analogue entre les dérivées de $O^{n-1}(x)$ et de $O^{n+1}(x)$, relation que l'on pourrait obtenir directement en dérivant cette formule suivant x.

En effet:

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} = -\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \left(s^2 f_n + s f_{n-1}\right) ds,$$

faisons dans cette intégrale

$$f_n = 2 s f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{et} \quad f_{n-1} = 2 s f_{n-2} + f_{n-3}$$

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} = -\int e^{-xs} \left(2 s^3 f_{n-1} + s^2 f_{n-2} + s f_{n-1}\right) ds$$

$$= -\int e^{-xs} \left(2 s^3 f_{n-1} + 3 s^2 f_{n-2} + s f_{n-3}\right) ds$$

$$= -2\int e^{-xs} s^2 \left(s f_{n-1} + f_{n-2}\right) ds + \int e^{-xs} s\left(s f_{n-2} + f_{n-3}\right) ds.$$

La première de ces intégrales n'est autre chose que

$$-2\frac{\partial^2 O^n(x)}{\partial x}, \quad \text{et la seconde} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x}.$$

Donc

$$\frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 O^n}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^n(x)}{\partial x^2} \qquad (5)$$

C. q. f. d.

Les relations (2) et (5) de ce chapitre nous permettront évidemment d'obtenir des sommations pour

$$O^n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial O^n(x)}{\partial x},$$

analogues aux sommations du chapitre précédent pour

$$S^n(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$$

Nous pouvons poser:

$$-\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial O^{n-2}(x)}{\partial x}$$

$$= 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 O^{n-3}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 O^{n-5}(x)}{\partial x^2} + \cdots\cdots$$

$$+ 2\frac{\partial^2 O^2(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial O^1(x)}{\partial x}$$

quand $\underline{n}$ est *impair*, et

$$-\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 O^{n-3}}{\partial x^2} + \cdots + 2\frac{\partial^2 O^1(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial O^0(x)}{\partial x}$$

quand $\underline{n}$ est *pair*.

Ceci donne les 2 formules par sommation:

$$-\frac{\partial O^{2p+1}(x)}{\partial x} = \frac{2}{x^3} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \frac{\partial \ O^{2\lambda}(x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$-\frac{\partial O^{2p}(x)}{\partial x} = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{\partial^2 O^{2\lambda+1}(x)}{\partial x^2}. \tag{6bis}$$

D'où

$$-\left(\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial^2 O^\lambda}{\partial x^2} \tag{7}$$

Les 2 valeurs (6) et (6^{bis}) se réunissent évidemment en une seule

$$-\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = \frac{2\sin n\frac{\pi}{2}}{x^2} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{x^2} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial^2 O^{n-(2\lambda+1)}(x)}{\partial x^2} \tag{8}$$

Nous pouvons poser encore

$$-\,0^{n}(x) = 2\,\frac{\partial\,0^{n-1}(x)}{\partial x} - 0^{n-2}(x)$$

$$= 2\,\frac{\partial 0^{n-1}(x)}{\partial x} + 2\,\frac{\partial\,0^{n-3}(x)}{\partial x} + \cdots\cdots + 2\,\frac{\partial\,0^{2}(x)}{\partial x} - 0^{1}(x)$$

avec $\underline{n}$ impair, et

$$-\,0^{n}(x) = 2\,\frac{\partial\,0^{n-1}(x)}{\partial x} + 2\,\frac{\partial\,0^{n-3}(x)}{\partial x} + \cdots\cdots + 2\,\frac{\partial\,0^{1}(x)}{\partial x} - 0^{0}(x)$$

quand $\underline{n}$ est *pair.*

Nous obtenons alors 2 sommations:

$$-\,0^{2p+1}(x) = -\,\frac{1}{x^2} + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \frac{\partial\,0^{2\lambda}(x)}{\partial x} \quad \text{et} \tag{9}$$

$$-\,0^{2p}(x) = -\,\frac{1}{x} + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{p-1}{2}} \frac{\partial\,0^{2\lambda+1}(x)}{\partial x}. \tag{9bis}$$

D'où

$$-\Big(0^{n}(x) + 0^{n-1}(x)\Big) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\partial\,0^{\lambda}}{\partial x}. \tag{10}$$

Les valeurs (9) et (9^{bis}) mises en une forme plus générale donnent:

$$-\,0^{n}(x) = -\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{x^2} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{x}\right) + 2\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{\partial\,0^{n-(2\lambda+1)}}{\partial x}. \tag{11}$$

La formule (11) peut comme la formule (15) du chapitre précédent se ramener à une double sommation qui est:

$$0^{n}(x) = \sin\frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2(n-1)}{x^3}\right) + \sin\frac{(n-1)\,\pi}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{n}{x^2}\right)$$

$$+\,4\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\ \sum_{\mu=0}^{\mu<\frac{n-2\lambda-2}{2}} \frac{\partial^2\,0^{n-2\lambda-2\mu-2}}{\partial x^2} \tag{12}$$

Conclusions:

Considérons la fonction Bessélienne de 2^e espéce $O^n(x)$

$$O^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds.$$

et donnons lui la nouvelle forme que nous avons introduite dans le § 6 de notre thèse; soit:

$$O^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(s f_{n-1}(2s, 0) + f_{n-2}(2s, 0)\right) ds;$$

considérons de même la fonction Bessélienne de 2^e espèce $S^n(x)$:

$$S^n(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right) \frac{dt}{t}$$

et donnons lui aussi notre nouvelle forme inaugurée au chapitre I^{er} de cette note:

$$S^n(x) = 2\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} f_{n-1}(2s, 0)\, ds.$$

Rappelons encore que $f_n(2s, 0)$ est le numérateur de la dernière réduite de la fraction continue: $(2s \cdot 2s \cdot 2s \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2s)$ ayant n quotients incomplets.

a) Ces deux nouvelles formules conduisent aisément aux sommations pour $O^n(x)$ et $S^n(x)$. (§ 6 notre thèse — chapitre I^{er} de cette note.)

b) Elles permettent en tenant compte des propriétés de $f_n(2s, 0)$ d'arriver rapidement aux 4 relations suivantes

I. $S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x) = 2\dfrac{\partial S^n}{\partial x}$ (formule 2 chap. II.)

II. $S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, O^n(x)$ (» 1 » II.)

III. $O^{n-1}(x) - O^{n+1}(x) = 2\dfrac{\partial O^n}{\partial x}$ (» 2 » III.)

IV. $O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = S^n(x) + \dfrac{\partial^2 S^n(x)}{\partial x^2}$ (» 1 » III.)

Dont les 3 premières sont déjà connues.

Faisons remarquer que la nouvelle formule IV conduit des fonctions $O^n(x)$ aux fonctions $S^n(x)$, à l'inverse de la formule II.

c) La valeur $\frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$ pouvant aussi se mettre sous la forme d'une intégrale définie conduit aux valeurs suivantes pour $O^n(x)$ (§ 3 chap. II).

$$\text{V.} \quad \begin{cases} O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n-1} - \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}\right) \\ O^n(x) = \frac{1}{2}\left(S^{n+1} + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}\right) \end{cases}$$

d) L'application des propriétés de $f_n(2s, 0)$ aux intégrales donnant les valeurs

$$\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}$$

conduit à 2 nouvelles relations démontrant que les formules I et III subsistent quand on les dérive par rapport à x, autrement dit qu'il existe des relations analogues entre les dérivées suivant x et entre les fonctions directes:

$$\text{VI.} \quad \frac{\partial S^{n-2}(x)}{\partial x} - \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} = \frac{2d^2 S^{n-1}(x)}{\partial x} \quad \text{(formule } 8^{bis} \text{ chap. II.)}$$

$$\text{VII.} \quad \frac{\partial O^{n-2}(x)}{\partial x} - \frac{\partial O^n(x)}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 O^{n-1}(x)}{\partial x^2} \quad \text{(» 5 chap. III.)}$$

e) Les deux formules V avec $n-1$ et $n+1$ retranchées et comparées ensuite à III, nous donnent un résultat prouvant qu'il existe entre les dérivées suivant x dans la formule II, une relation analogue à celle entre les fonctions directes.

$$\text{VIII.} \quad \frac{\partial S^{n-1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial S^{n+1}(x)}{\partial x} = 4\frac{\partial O^n(x)}{\partial x} \quad \text{(formule 3 chap. III.)}$$

f) Les dérivées de $O^{n-1}(x)$ et de $O^{n+1}(x)$ mises en intégrales et additionnées nous démontrent encore que la formule IV subsiste quand on dérive tous les termes suivant x.

$$\text{IX.} \quad \frac{\partial O^{n+1}(x)}{\partial x} + \frac{\partial O^{n-1}(x)}{\partial x} = \frac{\partial S^n(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 S^n(x)}{\partial x^3} \quad \text{(formule 4 chap. III.)}$$

g) Les relations I et III conduisent aux lois suivantes:

1. Une fonction Bessélienne de IIe espèce O ou S à indice positif, prise négativement est égale à 2 fois la somme des dérivées suivant x de toutes les mêmes fonctions inférieures à indices positifs mais de parité différente, moins une constante.

2. La somme de deux fonctions Besséliennes de Ie espèce O ou S à indices positifs consécutifs, prise avec le signe —, est égale à 2 fois la somme des dérivées suivant x de toutes les fonctions inférieures à indices positifs, moins une constante.

(Voir les formules 14 et 15 chap. II et les formules 11 et 12 chap. III.)

h) Les relations VI et VII conduisent aux mêmes lois pour le développement des dérivées premières en fonction des dérivées secondes.

1. Les lois de formation des fonctions Besséliennes O ou S à indices positifs, en fonction des dérivées premières des mêmes fonctions à indices inférieurs et d'une autre parité, subsistent pour le développement des dérivées premières en fonction des dérivées secondes.

2. La somme prise négativement, de 2 dérivées premières de fonctions O ou S consécutives est égale à 2 fois la somme des dérivées secondes de toutes les fonctions inférieures, plus une constante.

(Formules 10 et 11 chap. II et formules 7 et 8 chap. III.)

k) Les fonctions O ou S peuvent se représenter par des doubles sommations. (Formule 18 chap. I et formule 12 chap. II).

Sur un cas particulier du développement de la fonction $P^a_m(x)$ en une intégrale définie

cas de lim m = ∞.

Rappelons la valeur de $P^a_m(x)$: *)

$$P^a_m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} (-1)^\lambda \frac{(m-\lambda)!}{\lambda!} \binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

Développons le coefficient binoméal

*) J.-H. Graf, ibidem «Annali di Matematica».

$$\binom{a+m-\lambda}{m-2\lambda} \quad \text{suivant} \quad \binom{n}{\lambda} = \frac{n!}{\lambda!\,(n-\lambda)!}$$

et introduisons la notation Eulérienne soit $n! = \Gamma(n+1)$.

Nous aurons:

$$P_m^a(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\, \Gamma(a+m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(m-2\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

en considérant lim $m = \infty$, nous aurons

$$P_m^a(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\, \Gamma(a+m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(m-2\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

Rappelons encore que

$$\Gamma(n+a) = n^a\, \Gamma n \;*)$$

pour lim $n = \infty$.

Nous aurons alors:

$$\Gamma(m+1-2\lambda) = \Gamma((m+1-\lambda)-\lambda) = (m-\lambda+1)^{-\lambda}\, \Gamma(m-\lambda+1)$$

$$\Gamma((m-\lambda+1)+a) = (m-\lambda+1)^a\, \Gamma(m-\lambda+1).$$

En introduisant ces valeurs dans la fonction $P_m^a(x)$, nous obtenons:

$$\underset{\lim m=\infty}{P_m^a(x)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\, (m-\lambda+1)^a\, \Gamma(m-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)\, (m-\lambda+1)^{-\lambda}\, \Gamma(m-\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda\, \Gamma(m-\lambda+1)\, (m-\lambda+1)^{a+\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\, \Gamma(a+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{m-2\lambda}.$$

On aura de même

$$(m-\lambda+1)^{a+\lambda}\, \Gamma(m-\lambda+1) = \Gamma(m-\lambda+1+\lambda+a)$$
$$= \Gamma(m+a+1) = (m+a)!$$

On peut remplacer $\frac{1}{\lambda!}$ par

$$\frac{1}{\lambda!} = \frac{2^{2\lambda}\, \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2\lambda)!}$$

ce qui donne:

---

*) Prof. Dr. *J. H. Graf*, Einleitung in die Theorie der Gammafunktion, page 5. Bern, 1894.

$$\underset{\lim m = \infty}{P_m^a(x)} = \frac{(m+a)!}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda 2^{2\lambda} \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{(2\lambda)!\ \Gamma(a+\lambda+1)\ \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{-2\lambda},$$

mais

$$\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a+\lambda+1)} = \int_0^1 y^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-y)^{a-\frac{1}{2}}\,dy.$$

D'où

$$\underset{\lim m = \infty}{P_m^a(x)} = \frac{(m+a)!\ 2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)x^m} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda}}{(2\lambda)!} \int_0^1 y^{\lambda-\frac{1}{2}}(1-y)^{a-\frac{1}{2}}dy$$

Faisons $y = y^2$ d'où $dy = 2y\ dy$
l'intégrale deviendra.

$$2\int_0^1 y^{2\lambda-1}(1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} y\,.\,dy;$$

ce qui donne

$$P_m^a(x) = \frac{(m+a)!\ 2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)x^m} 2\int_0^1 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda (xy)^{2\lambda}}{2\lambda!}\,dy.$$

La sommation devient $\cos xy$.

Nous pouvons encore considérer $2\int$; la 1re de 0 à 1 et la seconde avec y changé en $-y$ va de 0 a -1, et devient négative.

Elle peut devenir:

$$\int_{-1}^0 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\,.\,dy.$$

Les intégrales donneront:

$$\int_{-1}^0 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\,dy + \int_0^1 (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\,dy$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos xy\,dy.$$

en faisant $y = \cos\varphi$, les nouvelles limites seront

$$\begin{array}{ll} y = -1 & \varphi = \pi \\ y = \ \ 1 & \varphi = 0 \end{array}$$

$$dy = d\cos\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi.$$

En changeant les limites on aura pour l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin^{2a-1}\varphi\Big(\cos\big\{x\,(\cos\varphi)\big\}\Big)\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \sin^{2a}\varphi\,.\cos\big(x\cos\varphi\big)\, d\varphi.$$

La fonction $P^a_m(x)$ avec $m = \infty$ devient donc :

$$\underset{\lim m = \infty}{P^a_m(x)} = \frac{\Gamma(m+a+1)\,2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)x^m}\int_0^\pi \cos\big\{x\cos\varphi\big\}\sin^{2a}\varphi\,.\,d\varphi.$$

$$= \frac{\Gamma(m+a+1)\,2^m}{\Gamma\frac{1}{2}\cdot\Gamma\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot x^m}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2a}\varphi\, d\varphi$$

$$\underset{\lim m = \infty}{P^a_m(x)} = \frac{2^{m+a}\,.\,\Gamma(m+a+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2a-1)}\,\frac{1}{x^m\,.\,\pi}\int_0^\pi \cos\big(x\cos\varphi\big)\sin^{2a}\varphi\, d\varphi.\ (\alpha.)$$

Cette valeur de $P^a_m(x)$ déduite de la théorie des fonctions Eulériennes, peut être facilement transformée et ramenée à la formule de définition donnée par M. *J.-H. Graf* dans le travail précité. Pour cela, reportons nous à la formule de Jacobi, pour $J^a(x)$:

$$J^a(x) = \frac{x^a}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2a-1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2a}\varphi\, d\varphi\,;$$

notre valeur $P^a_m(x)$ devient alors:

$$P^a_m(x) = \frac{2^{m+a}\,\Gamma(m+a+1)}{x^{m+a}}\,J^a(x)$$

Introduisons maintenant pour cette dernière fonction la valeur donnée par l'auteur précédent

$$\underset{\lim m = \infty}{J^a(x)} = \frac{f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(m+a+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^m\left(\frac{x}{2}\right)^a$$

Après simplification, il reste la formule fondamentale:

$$P_m^a(x) = i^m f_m\left(\frac{2(a+1)}{ix}, \frac{2}{ix}\right).$$

L'expression (α) est la relation cherchée.