Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1896)

Heft: 1399-1435

Artikel: Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schäfli

Autor: Graf, J. H.

Kapitel: 1855

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319085

«Beim Redigiren wird sich wohl Anlass finden, Ihnen bald wie-
«der zu schreiben. Indessen leben Sie wohl, d. h. gehen Sie fleissig
«zu Ihrer geliebten Gräfin [1]).

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Berlin, 30. November 1854.

1855.

Die nachfolgenden Fragen Steiner's sind undatirt [2]):

Fragen an den Cima-Rüssel.

«1. Hat der aus einem Punkt in einer Fläche dieser umschriebene «Kegel die zugehörige Berührungsebene zur *Doppelebene* und berührt «er dieselbe längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve? Und «wenn nun die Ebene mit *Rückkehrpunkten* berührt: ist sie dann eine «*Wendeebene* des Kegels (oder Rückkehrebene?); oder wenn sie mit «*Selbstberührung* schneidet, «ist sie dann eine *Selbstberührungsebene* «des Kegels?

«2. Wenn sich zwei f in 1 Punkt berühren, so hat die ihnen «gemeinsam umschriebene Abweichung die Berührungsebene zur «Doppelebene und berührt sie längs der beiden Tangenten der Schnitt-«curve der Flächen —? Sie wird *Wende-* (?) *und Selbstberührungs-«ebene*, wenn der Punkt ein *Rückkehr-* oder *Selbstberührungspunkt* «der Curve ist? Die Rückkehrtangente ist dann eine Asymptote in «der Involution; ist es die Selbstberührungs-Tangente auch?

«3. Der Knotenkegel n^{ten} Grads $=$ K sendet n (n $+$ 1) Zweige «durch den Knotenpunkt, deren Tangenten, T, in K fallen; berührt «eine E den K längs einer T, so hat ihre Schnittcurve mit der f^m «diese T zum Selbstberührungspunkt; und für die vorhergehenden «und noch folgenden, den K berührenden Ebenen, wechselt (ändert «sich) die Richtung der Rückkehrtangente ihres Schnittes. Geht E frei «durch T, so hat ihr Schnitt (ein Zweig desselben) die T zur wt im Kp; «geht E durch zwei T eben so beide.

«4. Sie sagen bloss; «Bei einer Doppelschaar von Flächen giebt «es etc.», müsste da nicht beigefügt werden «bei einer Doppelschaar «von Flächen *gleichen Grads oder gleicher Klasse* giebt es etc. oder liegt «*gleichen Grads* oder *gleicher Klasse* schon im Begriff der Schaar? —

[1]) Gemeint ist das Café Gräf, wo Schläfli jahrelang, d. h. bis 1876, in Pension war.

[2]) Sie beziehen sich zum Teil auf den Brief Steiners vom 25. Febr. 1855.

«Kann man bei einer Doppelschaar von «drei successiven Flächen» «sprechen, da jede gleichsam von einer Schaar umgeben ist?

«5. Wenn der Knotenkegel 2^{ten} Grads reell oder imaginär sein «kann, so muss es doch zwischen beiden einen Uebergangsfall geben, «wo der Knotenpunkt *paraboloidisch* oder ein *Rückkehrknotenpunkt* «wird, indem der Kegel sich auf eine einzige Gerade reducirt, die «Rückkehrtangente des Schnitts jeder durch sie gehenden Ebene ist. «Besteht der Kegel aus 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, und «dem entsprechend der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*, und «beim Uebergang, wo die Ebenen zusammenfallen, *parabolisch*, so «muss zwischen diesem dem hiesigen elliptischen und dem vorigen «*paraboloidischen* Knotenpunkt wohl noch ein Unterschied obwalten.

«Wenn Ihr Phantasiegebilde über den in 2 E zerfallenen Knoten«kegel Realität haben soll, so muss folgendes unterschieden werden. «Beim wirklichen Kegel: *hyperboloidischer* und *ellipsoidischer* Knoten«punkt, und bei den donnstigs 2 Ebenen: *hyperbolischer* und *ellipti«scher*. Der Uebergangsfall zwischen erstern muss dann ein *paraboloi«discher* oder Rückkehrknotenpunkt sein, indem der ....

«6. Braucht man «*Schaar*» nicht zu definiren? Wenn Sie sagen «eine Doppelschaar von Flächen» muss da nicht zugesetzt werden «*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*»; liegt dies schon drin? «‖ Steht schon oben 4 · ‖

«7. Da die *Klasse* der doppelt umschriebenen Abwickelbaren bei «f^m bekannt, so muss auch der *Grad* ihrer Berührungscurve daraus «zu finden sein. Denn gehen durch $P\mu$ Doppelebenen, so schneidet «seine Polare f^{m-1} jene B. C R^x in 2μ Punkten, so dass also «$(m-1)\,x = 2\mu$, oder $x = \dfrac{2\mu}{m-1}$ ist. Aber nun ist die Frage: ob R^x «nicht in *Theilcurven* zerfalle? wie z. B. bei $n = 3$, wo $R^x = R^{27}$ aus «27 Geraden besteht, was die Formel aber nicht anzuzeigen vermag, «sondern nur, da $\mu = 27$ ist, auch $x = \dfrac{2 \cdot 27}{3-1} = 27$ giebt.

«8. *Bei gegebenen* f^m *und* f^n ist die *gemeinschaftlich-umschriebene «Abwickelbare* von der $m\,(m-1)^2 \times n\,(n-1)^{2\,ten}$ Klasse (weil «die beiden aus P den Flächen umschriebenen Kegel beziehlich von «der $m\,(m-1)^2$ und $n\,(n-1)^{2\,ten}$ Klasse sind, und daher «$m\,n\,(m-1)^2\,(m-1)^2$ gemeinsam berührende Ebenen haben); ihre «Berührungscurven $M\mu$, $N\nu$ mit den Flächen werden daher von den «Polaren f^{m-1}, f^{n-1} beziehlich in $n\,(n-1)^2$ $m\,(m-1)^2$

«$m\ (m - 1)^2\ n\ (n - 1)^2$ Punkten geschnitten, so dass

$$«\mu = m\ (m - 1)\ n\ (n - 1)^2,$$
$$«\nu = m\ (m - 1)^2\ n\ (n - 1)$$

«sein muss. Wären die gegebenen Flächen von der m^{ten} und n^{ten} Klasse, «so wäre die Abwickelbare nur von der $m\,n^{ten}$ Klasse und für ihre beiden «Berührungscurven [1]) gilt folgendes: Ist die Klasse $= m$, so ist ihr Grade «$= m\ (m = 1)^2$; also Grad der ersten Polare $= m\ (m - 1)^2 - 1$; «daher $\mu = \dfrac{m\ n}{m\ (m - 1)^2 - 1}$ und $\nu = \dfrac{m\ n}{n\ (n - 1)^2 - 1}$; was «auch richtig sein kann, weils für $m = n = 2$ stimmt; aber für «$m = 3$ und $n = 2$ schon Unsinn giebt.

«9. Den Berührungscurven der gemeinschaftlich umschriebenen «Abwickelbaren entsprechen die längs der Schnittcurve zweier Flächen «f^m und f^n diesen umschriebenen Abwickelbaren. Da die Curve vom «m nten Grad ist, so wird sie von den Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes «Pols in $m\,n \cdot (m - 1)$ und $m\,n \cdot (n - 1)$ Punkten geschnitten und «daher sind die Abwickelbaren beziehlich von der $m\,n\ (m - 1)^{ten}$ «und $m\,n\ (n - 1)^{ten}$ Klasse. Daher müssen auch bei zwei Flächen «m^{ter} und n^{ter} Klasse, die Berührungscurven der gemeinschaftlich um- «schriebenen Abwickelbaren, vom beziehlich $m\ n\ (m - 1)^{ten}$ und «$m\ n\ (n - 1)^{ten}$ Grad sein. — Da nun durch P nur $m\,n$ gemeinsame «Ebenen der f^m und f^n (Klasse) gehen und die erste Polare von P «auf f^m eine $f^{m\,(m-1)^2-1}$ ist, also die Berührungscurve $M\mu =$ «$M^{n\,m\,(m-1)}$ in $[m\ (m - 1)^2 - 1] \times n\,m\ (m - 1)$ Punkten schneiden «sollte statt nur in $m\,n$: so müssen die übrigen durch die *Doppel-* und «*Rückkehrlinie* der f^m absorbirt werden; also $d\,l$ und $r\,l$ absorbiren «$= m\,n\ [(m - 1)\ [m\ (m - 1)^2 - 1] - 1] = m\,n\ [m\ (m - 1)^3$ «$- (m - 1) - 1] = n\,m^2\ [(m - 1)^3 - 1]$ Punkte; und daraus «sollte folgen, wie vielfach $d\,L$ und $r\,l$ oder L_d und L_r für die Polare «$f^{m\ (m-1)^2-1}$ zählen.

$$«\frac{n\,m^2\ [(m - 1)^3 - 1)}{n\ m\ (m - 1)} = x\,L_d + y\,L_r = \frac{m\ [(m - 1)^3 - 1]}{m - 1}$$

«Nimmt man 2 Polaren $f^{m\,(m-1)^2-1}$ von 2 P auf f_k^m, so haben «ihre Schnittcurven mit f_k^m nur m freie Punkte, statt

$$«m\ (m - 1)^2 \times [m\ (m - 1)^2 - 1]^2,$$

«so dass durch L_d und L_r absorbirt werden $= m\ [(m - 1)^2$ «$[m\ (m - 1)^2 - 1] - 1] = m\ [m\ (m - 1)^4 - (m - 1)^2\ 1]$.

[1]) Das Concept ist hier unklar.

«10. Hat f^m einen KK $= K^n$, so zerfällt der aus dem Kp ihr «umschriebene $K^{m\,(m-1)}$ in den $(n+1)$ fachen K^n und in einen $K_0^{m\,(m-1)-n\,(n+1)}$. Beim Maximum für n, bei $n = m-1$, wird also $K_0 = 0$, sowie auch 1^2 Polare $f^{m-1} = K^n = K^{m-1}$.»

Schläfli an Steiner (undatirt).

«*Lieber Freund!*

«Ich beeile mich, einige Irrthümer zu zerstören, in denen wir beide «befangen waren.

«I. In Beziehung auf eine f^3 sei A ein *Sylvester*'scher Punkt, «durch den die Kanten b, c, d gehen; a seine Gegenkante, auf ihr die «Punkte B, C, D. Die Polarebene von A berührt die Kernfläche längs «der ganzen a. Also berührt die letzte Polarenveloppe von a (der «Knotenkegel A der Kernfläche) die Kernfläche längs den drei Geraden «b, c, d und schneidet sie daher in einem *Kegelschnitt,* dessen Ebene «durch a geht.

«Auf der Kernfläche Q einer freien Basis f^n liegen $10\,(n-2)^3$ «Knotenpunkte A, deren vorletzte Polaren in zwei Ebenen zerfallen, «deren Kante a heissen soll; die Polarebene von A berührt die Kern-«fläche P längs der Kante a. Die Classe der Kernfläche Q ist somit «$4\,(n-2)\,(11\,n^2 - 52\,n + 61)$ und die Classe ihres ebenen Schnitts «$4\,(n-2)\,(4n-9)$. Die Kernfläche P ist von der Classe $4\,(n-1)^2\,(n-2)$, «ihr ebener Schnitt von der Classe $6\,(n-1)\,(n-2)^2$. — Es «giebt eine Schaar erster Polaren, deren Knotenkegel in zwei Ebenen «zerfällt; der entsprechende Pol durchläuft die Rückkehrlinie der Kern-«fläche P, für deren Grad ich $30\,(n-2)^2\,(n-3)$ gefunden habe(?). Es «giebt ferner eine Schaar erster Polaren mit zwei Knotenpunkten; der «Pol durchläuft also die *Doppellinie* der Kernfläche P; wenn der an-«gegebene Grad der Rückkehrlinie richtig ist, so muss diese Doppel-«linie vom Grade

$$2\,(n-2)^2\,(n-3)\,(4\,n^3 - 20\,n^2 + 36\,n - 45)$$

«sein. Für eine Basis f^4 hätte also die Kernfläche P eine Doppellinie «280^{ten} Grades und eine Rückkehrlinie 120^{ten} Grades. Bei der Unter-«suchung des Verhaltens dieser singulären Curven der Kernfläche P «zu ihrer Geraden a verwickelte ich mich aber in schreiende Wider-«sprüche. Ich bediente mich dazu des folgenden Satzes, den ich im «Allgemeinen für unzweifelhaft halte. «Ein Flächenbüschel n^{ten} Grades, «dessen sämmtliche Flächen einen Knotenpunkt K gemein haben, zählt

«4 $(n-1)^3$ — 11 Flächen, welche noch einen zweiten Knotenpunkt «haben, und 3 Flächen, deren Knotenkegel in K ein Ebenenpaar ist.»

«III. Jedem Gebüsch zweiten Grades entspricht ein *festes* Pentaeder; «in Beziehung auf jede Fläche des Gebüschs geht die Polare eines «Ecks A von den 10 des Pentaeders durch die Gegenkante a. In «Beziehung auf den Gebüschs-Kegel, dessen Scheitel A ist, sind die «von hier ausgehenden Kanten b, c, d ein harmonisches Tripel.

«Alle 10 Ecken des Pentaeders liegen auf der R^6 (Tangenten-«fläche vom 16ten Grade und von der 30sten Classe), der Knotencurve «des Gebüschs; aber sonst giebt es kein Pentaeder von dieser Eigen-«schaft. Die Basen dritten Grades, deren jede das gegebene Gebüsch «in ihrem Netze erster Polaren enthält, bilden eine Schaar, von der «durch jeden Punkt des Raums 4 Flächen gehen, und haben jenes «Pentaeder als *Sylvester*'sches gemein. Ist λ ein Faktor, der von Fläche «zu Fläche sich ändert, und sind v, w, x, y, z die Polynome des Pentaeders, «so ist die Gleichung irgend einer Fläche der Schaar

$$\frac{v^3}{\lambda A + A'} + \frac{w^3}{\lambda B + B'} + \frac{x^3}{\lambda C + C'} + \frac{y^3}{\lambda D + D'} + \frac{z^3}{\lambda E + E'} = 0;$$

«der Pol irgend einer bestimmten Fläche des Gebüschs bewegt sich «in einer Geraden, wenn die Base sich ändert. Die entsprechenden Kern-«flächen bilden einen Büschel, dessen Grundcurve aus jener R^6 und den «10 Kanten des Pentaeders besteht. Die Umhüllungsfläche der Schaar «von Basen dritten Grades ist vom 18ten Grade und der 216ten Classe, «hat eine Doppellinie 45ten Grades und als Umhüllte ihrer erzeugenden «Curven 9ten Grades eine R^{27}, welche jede Pentaederebene in 9 Punkten «dreipunktig passirt und als die charakterische *Rückkehrlinie* bezeichnet «werden kann; ausserdem aber hat die Umhüllungsfläche in jeder Pen-«taederebene eine C^3 als Rückkehrlinie, welche dreimal gezählt als er-«zeugende Curve auftritt, und im Schnitt der Pentaederebene mit der «Umhüllungsfläche nur zweimal zählt; dieser Schnitt besteht nämlich «noch aus einer C^{12}, die jene 9 Punkte zu Rückkehrpunkten hat, in «denen sie von der C^3 berührt wird.

«So viel in Beziehung auf jene zwei Irrthümer, die R^5, in der «die Kernfläche der f^3 von einem ihrer Knotenkegel geschnitten werden «sollte — und das längs der Knotencurve eines Büschels zweiten Grades «fortrückende Pentaeder. — Ich lege Ihnen nun hier zur Beurtheilung «vor die Art, wie ich ein Flächennetz nten Grades zu behandeln ge-«dächte.

«Wenn ein Netz von Flächen nten Grades gegeben ist, so kann «man irgend 5 desselben auswählen, von denen keine 4 einem und «demselben Gebüsch angehören. Dann lasse man in einem räumlichen «System von Punkten irgend 5 Punkte, von denen keine 4 in einer «Ebene liegen, jenen 5 Flächen entsprechen. Verlangt man nun, dass «jeder Fläche des Netzes ein Punkt des räumlichen Systems in der «Weise entspreche, dass die Punkte in einer Geraden liegen, so oft «die Flächen einen Büschel bilden, so ist diese Aufgabe möglich und «völlig bestimmt; und zugleich werden je 4 Flächen eines Büschels «dasselbe perspectivische Doppelverhältniss haben, wie die 4 ent«sprechenden in einer Geraden liegenden Punkte. Der einer Fläche «des Netzes entsprechende Punkt soll ihr *reciproker* Punkt heissen.

«Für irgend einen Pol P bilden nun die ersten Polaren (und da«her überhaupt die irgendwievielten) aller Flächen des Netzes wieder «ein Netz, welchem genau das vorige räumliche Punktsystem entspricht. «Verlangt man jetzt, dass das Netz der ersten Polaren einen Grund«punkt X habe, so wird der Pol P genöthigt, sich auf einer Fläche «$4(n-1)^{3\text{ten}}$ Grades (*Polfläche*) zu bewegen, während der Grundpunkt X «eine Fläche $4\,(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (*Knotenfläche*) durchläuft. Die letztere «ist zugleich der Ort aller Punkte X, deren Polarebenen in Beziehung «auf sämmtliche Flächen des Netzes durch einen und denselben Punkt «P gehen.

«Verlangt man ferner, dass eine Fläche φ des Netzes einen «Knotenpunkt habe, so bewegt sich ihr reciproker Punkt A auf einer «Fläche $4\,(n-1)^{3\text{ten}}$ Grades (*reciproke Fläche*), und der Knotenpunkt «X liegt nothwendig auf der schon erwähnten Knotenfläche. Man könnte «noch denjenigen zu X und P reciproken Punkt B anzeichnen, für des«sen Netzfläche φ (ohne Knotenpunkt und nicht durch X gehend) die «erste Polare von P den Grundpunkt X zum Knotenpunkt hat.

«Ich will nun der Reihe nach an die reciproke Fläche in A, «an die Knotenfläche in X und an die Polfläche in P *Berührungsebenen* «legen. 1⁰ Alle Flächen des Netzes, welche durch X gehen, bilden «ein Gebüsch und haben den Strahl XP zur gemeinschaftlichen Tan«gente; ihre reciproken Punkte liegen also in einer Ebene, und diese «berührt die reciproke Fläche in A. Wenn insbesondere die reciproken «Punkte in einer durch A gehenden Tangente der reciproken Fläche «liegen, so bilden die zugehörigen Flächen des Netzes einen Büschel «und berühren sich alle in X. Umgekehrt: je zwei Flächen des Netzes «können sich nirgends berühren, als auf der Knotenfläche, z. B. in X, «und der Strahl, welcher ihre reciproken Punkte verbindet, wird dann «die reciproke Fläche im zugeordneten Punkte A berühren. 2° Die «erste Polare von P in Beziehung auf die Fläche des Netzes, welche «den zugeordneten Punkt X zum Knotenpunkt hat, berührt die Polfläche «in X; oder, was auf dasselbe hinauskömmt, die Polarebene von P «in Beziehung auf den Knotenkegel der genannten Fläche φ ist die Be-«rührungsebene der Knotenfläche in X. 3° Die letzte Polare des Punkts «X in Beziehung auf die Fläche φ des Netzes, für welche die erste «Polare von P den Knotenpunkt X hat, ist die Berührungsebene der «Polfläche in P.

«Hat *im Besondern* das ursprüngliche Netz einen Grundpunkt X, «so geht die Knotenfläche durch diesen und hat ihn zum Knotenpunkt; «ebenso die Polfläche, indem dann P und X zusammenfallen; endlich «hat auch die reciproke Fläche den reciproken Punkt A zum Knoten-«punkt. Bei der Knotenfläche und der Polfläche fällt der Knotenkegel «mit demjenigen der entsprechenden Fläche φ des Netzes zusammen; «und wenn X und P sich unendlich wenig vom Grundpunkt entfernen, «so liegen sie in einem und demselben Strahl des Knotenkegels. Legt «man nun durch einen solchen eine Berührungsebene an den Knoten-«kegel, so bilden alle Flächen des Netzes, welche diese Ebene im «Grundpunkt berühren, einen Büschel, dessen reciproke Punkte den «entsprechenden Strahl des Knotenkegels der reciproken Fläche in A «bilden.

«Verlangt man, dass die letzten Polaren eines Punkts X in Be-«ziehung auf alle Flächen des Netzes sich in einer Geraden schneiden, «so unterwirft man den Punkt X vier unter sich unabhängigen Bedin-«gungen; es wird also im Allgemeinen keinen solchen Punkt X geben, «dessen zugehöriger Pol sich in einer Geraden bewegen kann, und «daher kann die Knotenfläche keinen Knotenpunkt haben.

«Beim Flächengebüsch n^{ten} Grades will ich ähnliche Zeichen ge-«brauchen, wie beim Netz; nur haben wir jetzt statt des Poles P einen «Polstrahl p, in dem alle Polarebenen des Punktes X sich schneiden; «ein einzelner Punkt auf p möge P heissen. Die von p beschriebene «geradlinige Fläche heisse *Polfläche*. Die von X beschriebene *Knoten-«curve* ist vom $6\ (n-1)^{2ten}$ Grade, ihre Tangentenfläche ist vom Grad «$4\ (n-1)^{\,2}\ (7n-10)$ und von der Classe $6\ (n-1)^{\,2}\ (14n-23)$. Die «Tangente der Knotencurve in X ist der Polstrahl der Ebene (Xp) in «Beziehung auf den Knotenkegel der Gebüschfläche in X, d. h. die «Grundcurve des Büschels erster Polaren von p in Beziehung auf die «Fläche des Gebüschs, welche X zum Knotenpunkt hat, berührt die

«Knotencurve in X. Ist ein Punkt P auf p gegeben, durch den man «eine Berührungsebene an die Polfläche legen soll, so wird das gege- «bene Flächengebüsch einen Büschel enthalten, in Beziehung auf welche «die ersten Polaren von P die Knotencurve in X berühren; dann ist «die gemeinschaftliche letzte Polare von X in Beziehung auf alle ur- «sprünglichen Flächen des genannten Büschels die verlangte Berührungs- «ebene. Die reciproken Punkte aller durch X gehenden Gebüschflächen «liegen auf der Tangente der *reciproken Curve* in A; diese ebene Curve «ist vom Grade 4 $(n-1)^3$. — Die geradlinige Polfläche ist von Grad «und Classe 8 $(n-1)^3$.

«Mittelst des schiefen Fünfseits $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ und der Axe e können «also Geraden, wie folgt, linear construirt werden. b_1 geht durch die «Punkte, in denen die Ebene $(a_3\ a_4)$ von a_1 und e geschnitten wird; «c_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_1\ b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten «wird; d_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(b_1\ e)$ von a_5, a_2, c_3, «c_4 geschnitten wird; d_1' ist Durchschnitt der Ebenen $(a_2\ d_3)$, $(a_5\ d_4)$, «$(c_3\ d_5)$, $(c_4\ d_2)$; endlich e' Durchschnitt der Ebenen $(b_1\ d_1')$, $(b_2\ d_2')$, «etc. Resultat: 5 Dreiseite $(a_3\ a_4\ b_1)$, 5 $(a_1\ b_1\ c_1)$, 5 $(b_1\ c_5\ c_2)$, 10 $(a_1\ d_5\ d_2')$, «10 $(c_1\ d_3\ d_4')$, 5 $(b_1\ d_1\ e)$, 5 $(b_1\ d_1'\ e')$.»

Steiner an Schläfli.

«*Monsignore, treuer Freund!* (28. Januar 55.)

«Dass Sie denken, ich sei böse, geschieht Ihnen ganz recht. «Ich möchte es sein, über mich und Sie. Die schöne Hoffnung mit «der ich nach Bern kam, ist nun dahin; ich habe auch im Dezember «keine Abhandlung vorgelegt. Hätten Sie doch damals nur meine «aphoristischen Sätze revidirt, worum ich Sie bat, so war die Sache «abgethan. Jetzt sehe ich nicht wo ein wo aus. Geistige Kraftlosig- «keit und körperliche Leiden machen die Vollendung der Arbeit fast «unmöglich, zumal da ich auf den Zopf anbiss, den Gegenstand nach «Ihren Andeutungen vollständiger zu behandeln. Länger als 2 Monate «quälte ich mich mit leidigen Spezialitäten ab, ohne Sie zu bewäl- «tigen und ohne sie los zu werden; diese Bemühungen wechseln ab «oder werden unterbrochen durch Schmerzen, Einschlafen, Luft- «schlösser über Crimm, Donau und ganze Türkei. Schon in Bern «— wie Sie wissen — hatte ich etwas Rheumatismen (durch das Ge- «mäuer — oder Beaujolais?), der auf der Reise und hier steigend «fortdauerte und gleich am folgenden Tage, wo ich Ihnen schrieb, «in heftiges Podagra ausartete, das mich 12 Tage zu Hause bannte. «Nachdem ich 9 Tage wieder aushinkte, kam ein noch stärkerer Anfall, der mich einmal vor Schmerz brüllen machte und wieder 10 «Tage ins Zimmer bannte; und so gieng es fort, dass ich bis jetzt in «5 *Stören* das Zimmer hüten und die Vorlesungen aussetzen musste. «Da ich die letztern, der Leiden wegen, erst am 15. November be«gann und auch gleich wieder unterbrach, so habe ich wenig Zu«hörer, nur 6—8, wovon nur 4 regelmässig kommen. Wenn oft «auch die Schmerzen vorüber, so kann ich doch tagelang nicht aus«gehen, weil die Füsse so geschwollen sind, dass sie nicht in die «Stiefel gehen. — Dabei hat mich etwas frappirt: welches ist das «*Einzige* Mittel, das diese Art Schmerzen lindert?! — Ihre Lieblings«blume — die Kiltblume!

«Was ich Ihnen vor 2 Monaten schreiben wollte, ist halb ver«gessen oder liegt verworren in meinem Kopf, wiewohl ich stets an «derselben Sache geknabert habe (darob auch die Redaction ausge«setzt — seit 8. November — soll aber nächstens wieder beginnen). «Da ich schwer dazu komme meine früheren Manuscripte oder Ihre «Briefe gehörig nachzulesen, so wäre es möglich, dass ich hier Fragen «aufwerfe, die einfältig sind, oder die Sie schon erledigt, oder gar «allgemeiner beantwortet haben. Schad't nichts.

«1. Der Name «*Gebüsch*» geht nicht, denn es ist ein Netz, «gleich dem in der Ebene, ein *Plannetz*, oder ein *einfaches* Netz «entgegen dem *vollständigen*. Oder kann man es *Netzbasis* nennen? «wie 3 Punkte A, B, C die Basis des Tetraeders A B C D bestimmen. «Aber dann fordert die Bezeichnung 2 Buchstaben = N b (f^n). Das Wort «*Netz* sollte aber vorkommen: als *Netzbasis*, he?

«2. Die singuläre Ebene, die eine Fläche längs einer Curve be«rührt, ist fast nicht zu benennen; kann man sie *Dehnebene* heissen «da sie das Widerspiel des Knotenpunkts ist? dann hiesse jene Curve «die *Dehncurve, Dehnkegelschnitt.*

«3. Wo Sie sagen: «Der *Knotenkegel* zerfalle in zwei *Ebenen*», «schien mir, er reducire sich auf die *Schnittlinie* der Ebenen auf «die Knotenkante, ohne dass der Scheitel des Kegels seine Existenz «aufgiebt. Dass der Schnitt jeder dieser zwei Ebenen mit der f^n «drei freie Zweige durch den Knotenpunkt sendet, vermag ich nicht «anzuschauen, vielmehr kommen mir die Ebenen als diejenigen vor, «deren Schnitt sich im Knotenpunkt *selbst berührt*, die Knotenkante «zur *Selbstberührungstangente* hat. Die zwei Ebenen sind gewisser-

«massen *Wendeebenen* der f^n, daher der Wechsel von dem einen Paar «ihrer Scheitelwinkel in das andere. — (Der Schnitt C^n jeder 3^{ten} durch «den Knotenpunkt gehenden Ebene mit f^n hat ihre Schnitte mit den «zwei Ebenen zu Tangenten im Knotenpunkt. Wollte was sagen, aber «ist nichts.)

«Den einen der zwei Irrthümer, die Sie im Brief vom 15. No-«vember zerstören, hatte ich bereits selbst bemerkt, nämlich: «dass «der *Sylvester*'sche Knotenkegel die Kernfläche P^4 längs dreier Geraden «berührt.» Ich (komme) bei Betrachtung der 2^{ten} Polar-Enveloppe einer «Ebene in Bezug auf Basis f^3, die 3^{ten} Grads und 4. Klasse ist und «4 Kp hat, darauf, wo ebenfalls jeder Knotenkegel längs der 3 «Strahlen die nach den übrigen 3 Kp gehen, berührt. — Den Plan «zur Behandlung des Netzes $N(f^n)$, habe ich schon früher entworfen, «und werde seiner Zeit Ihrem gewaltigen Rüssel das Nöthige unter-«breiten.

«4. Zu den Flächen gehört wohl auch noch das: Eine einfache «Schaar gerader Linien liegen in einer speziellen Fläche, die *geradlinig* «heissen soll (surface réglée); die Doppelschaar der sie berührenden «Ebenen, besteht aus der Schaar Ebenenbüschel, die jene Geraden «zu Axen haben. Diese Fläche hat ferner die Eigenthümlichkeit: 1) «dass ihr Grad und ihre Klasse gleich sind; 2) dass auch ihre Polar-«figur (auf Basis f^2) ihr an Grad und Klasse gleich ist. Es giebt nur «eine Fläche, die zwei Schaaren Gerade hat (Hyperboloid), die andern «können nur höchstens zwei Gerade haben, die nicht zur Schaar ge-«hören.

«5. Ich wollte synthetisch die Zahl der Punkte finden, durch die «C^n und f^n bestimmt sind, nach Art der unbestimmten Cofficienten; «sagen Sie, ob ich den folgenden Beweis geben darf, ohne mich lächer-«lich zu machen, indem doch ein analytischer Grund dahinter steckt. «Gesetzt jede C^n werde durch dieselbe Zahl $= N$ gegebenen Punkte «a bestimmt. Liegen von denselben $n+1$ in einer Geraden C', so «muss die Curve zerfallen in $C' + C^{n-1}$, und es muss C^{n-1} durch die «übrigen $N-n-1$ Punkte a bestimmt sein; folglich erfordert die um «*einen* Grad höhere Curve zu ihrer Bestimmung so viele Punkte mehr, «als der Grad der niedrigern $+ 2$ beträgt. Da nun die Linie 1^{ten} «Grads durch 2 Punkte bestimmt ist: so erfordert die 2^{ten} Grads um «$1 + 2 = 3$ mehr, $= 5$, die 3^{ten} Grads wieder um $2 + 2$ mehr «u. s. w.. folglich ist C^n durch $2 + 3 + 4 + \cdot \cdot \cdot \cdot + n + 1 =$ «$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1$ Punkte bestimmt. — Jede f^n werde durch «eine gleiche Zahl N Punkte bestimmt. Liegen von denselben «$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ in einer Ebene f^1, so muss f^n aus f^1+f^{n-1} bestehen, «und somit f^{n-1} durch die $N-\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ übrigen Punkte «bestimmt sein; d. h. eine f^{x+1} erfordert zu ihrer Bestimmung «$\frac{1}{2}(x+2)(x+3)$ Punkte mehr als eine f^x; nun erfordert f^1 nur 3 «Punkte, die f^2 mehr $\frac{1}{2}(1+2)(1+3)$, u. s. w., so dass also f^n «durch $3+6+\cdots\cdot+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=$

$$«\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-1$$

«Punkte bestimmt ist, $=\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1$. *Schweins*[1]) und Consorten «schreiben eine Facultät $(a+u)(a+2u)\cdots\cdot$ «$(a+nu)$ kurz $(a+u)^{n|u}$ und ebenso $(a-u)(a-2u)\cdots\cdot(a-nu)=$ «$(a-u)^{n|-u}$; $\frac{(a+1)(a+2)\cdots\cdot(a+n)}{1\cdot 2\cdot\;\cdot\;\cdot n}=\frac{(a+1)^{n|1}}{1^{n|1}}$, etc.

«6. Daraus (5.) entsprang folgendes Verfahren um Ihre zwei «Sätze (nebst andern analogen) zu beweisen. Die zu bestimmende Fläche «f^n zerfällt in 2 Theile, etwa $f^\alpha+f^\beta$ $(\alpha+\beta=n)$, sobald die ge- «gebenen $\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1$ Punkte a sämmtlich in diesen zwei Flä- «chen liegen, jedoch dürfen auf keiner weniger Punkte liegen, als ihre «Bestimmung erheischt, also beziehlich nicht weniger als

$$«\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-1 \text{ und } \frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}-1; \text{ daher bleiben}$$

$$«\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1-\left[\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-1+\frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}-1\right]=$$

$$\frac{1}{2}\alpha\beta(n+4)=\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)$$

«Punkte frei, d. h. nach Belieben auf die beiden Flächen f^α, f^β zu «vertheilen, und es ist ihre Zahl zugleich *die Zahl der Bedingungen,* «*damit f^n in diese zwei Flächen zerfällt.* Diese Zahl ist also um

---

[1]) Schweins, Franz Ferdinand, geb. 24. III. 1780 † 15. VII. 1856 Professor der Mathematik in Heidelberg, Lehrer Steiners.

«so grösser, je mehr α und β sich $\frac{1}{2}$n nähern, oder je kleiner ihr «Unterschied. — Wie geht's nun weiter? — Soll f^n in $f^\alpha + f^\beta + f^\gamma$ «zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen

$$=(\alpha+\beta+\gamma+4)\,(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma;$$

«und soll f^n in n Ebenen zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen,

$$«= \frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-1-3n=\frac{1}{6}n\,(n-1)\,(n-7).\ ^{1)}$$

«Von den f^n bestimmenden Punkten dürfen also auf einer ge- «gegebenen Fläche f^α höchstens nur

$$«\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-\frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}=\frac{1}{2}\alpha\beta\,(n+4)+\frac{1}{6}(\alpha-1)^{3|1}-1$$

$$«=\frac{1}{2}\alpha\,(n-\alpha)\,(n+4)-1+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$$

«frei gewählt werden; (denn nähme man darauf nur einen Punkt «mehr an, so wäre durch die übrigen die andere Theilfläche f^3 nicht «mehr bestimmt, also auch die ganze f^n ($= f^\alpha + f^\beta$) nicht). Lässt man «nun von dieser höchsten Zahl Punkte auf f^α einen Punkt ganz weg, «so ist f^n nicht mehr bestimmt, sondern es findet ein $B(f^n)$ statt, «worin $f^\alpha + f^\beta$ ein spezielles Glied ist, so dass die Grundcurve des- «selben aus zwei Theilen $R^{\alpha n} + R^{\beta n}$ besteht, die auf f^α und f^β liegen, «durch die auf diesen befindlichen gegebenen respective

$$«\frac{1}{2}\alpha\,(n-\alpha)\,(n+4)+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-2 \text{ Punkte a und}$$

«$\frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1}-1$ Punkte b gehen. Wird nun einer der Punkte b im «beliebig versetzt, so ändert sich die Fläche f^β und es entsteht ein Raume «neuer Flächenbüschel, $(B_1 f^n)$, sowie auch eine neue Curve $R_1^{\beta n}$, statt «$R^{\beta n}$, aber wohin auch jener Punkt gerückt werden mag, immer bleibt «er in irgend einer Fläche des vorigen Büschels, so dass also beide «Büschel diese Fläche gemein haben, und folglich auch deren Schnitt «mit der Fläche f^α, jene $R^{\alpha n}$, ein gemeinschaftlicher Theil der Grund- «curven beider Büschel ist. Da man aus der neuen Fläche f^β aufs «Neue einen Punkt versetzen kann und dadurch zu einem neuen «Büschel $B_2(f^n)$ gelangt, der durch die nämliche Curve $R^{\alpha n}$ auf f^α «geht, so ist dadurch Ihr Satz erwiesen: «*dass auf einer Fläche f^α nur*

---

1) Hier hatte Steiner im Concept noch folgende bezeichnende Stelle: «Mangen Sie das und geben's mir gut gekaut wieder, auch das «folgende; denn sowie Formeln kommen, bin ich blödsinnig.»

«$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-2+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ *Punkte a gewählt werden dürfen,*
«*wenn eine f^n durchgehen soll»*; und «*dass alle durchgehenden f^n, die*
«$\left[\frac{1}{6}(n-\alpha+1)^{3|1}-2\right]$*fache Schaar f^n, die f^α in der nämlichen*
«*Vollkurve $R^{\alpha n}$ schneiden, die somit durch jene Punkte bestimmt ist.*»
«— Wird ferner einer der Punkte α aus der Fläche f^α beliebig in
«Raum versetzt und nachher ganz weggelassen, so entsteht ein $G(f^n)$,
«und werden sodann die Punkte b (auf f^β) einer nach der andern ver-
«setzt, so schliesst man weiter: «dass alle f^n, die durch gegebene
«$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-3+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ Punkte a auf einer f^α gehen
«auch noch durch $\frac{1}{2}\alpha n(n+\alpha-4)+1-\frac{1}{6}(\alpha-1)^{3|-1}$ noth-
«wendige Punkte a auf dieser Fläche f^α gehen»; oder «dass jede Voll-
«curve R^{n^2}, die durch jene Punkte a geht, die Fläche f^α auch noch in
«diesen nothwendigen Punkten a_0 durchbohrt.»

«7. Ich glaube früher bei ebenen Curven gefunden zu haben: «dass
«wenn C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte a von C^α und C^β gehen soll,
«$n>\alpha>\beta$, dann die Zahl der Nothwendigen
«$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$ sei; d. h. geht C^n durch

$$«\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$$

«der $\alpha\beta$ Punkte a, so geht sie auch durch die übrigen. Die C^n ist daher
«bestimmt, wenn sie, ausser durch die $\alpha\beta$ Punkte a, noch durch andere
«gegebene

$$«\frac{1}{2}n(n+3)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)-\alpha\beta=$$

$$(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(2n+3)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)-1$$

«Punkte b gehen soll; also bei $\alpha=\beta$, durch
«$(n+1)(n+2)-\alpha(2n+3)+\alpha^2-1$, und bei $\alpha=\beta=n-1$
«durch 5 Punkte b gehen soll, was nur für $n=2$ nicht stimmt. —
«Um die analogen Sätze für die Flächen zu finden, habe ich mich
«wochenlang verrechnet, darob die Besinnung verloren, dass ich nicht
«weiss, was wahr oder falsch ist. Im Folgenden einige Proben, und
«dann wenden Sie den Entwurzler an.

«8. Enthält ein Flächenbüschel $B(f^n)$ zwei zerfallene Glieder

«$f^n = f^a + f^\alpha$ und $f^n = f^b + f^\beta$, so besteht seine Grundcurve aus «vier Theilen $= R^{ab} + R^{a\beta} + R^{\alpha b} + R^{\alpha\beta}$. Daher: «*Eine Fläche f^n «erleidet denselben Zwang — wofern ihre freie Natur dadurch be«schränkt wird — ob sie durch die gegebene Vollcurve R^{ab} oder $R^{a\beta}$ «oder $R^{\alpha b}$ oder $R^{\alpha\beta}$ gehen soll; denn enthält eine dieser Curven, so «sind auch die drei andern auf ihr möglich.*» (Dabei ist $a + \beta =$ «$b + \beta = n$, und fortan sei $a > b > \beta > \alpha$.)

«Gehen durch die Vollcurve R^{ab} zweier gegebenen Flächen f^a, f^b «irgend zwei (höhere) Flächen f^m und f^n, $m > n$, *so schneiden sich «diese noch in einer R^{mn-ab}, durch die allemal eine Fläche $f^{m+n-a-b}$ «geht,* die zugleich auch noch durch die auf vorige Weise durch f^a und «f^b auf f^m und f^n bestimmten Curven $R^{(m-a)(m-b)} = {}^{\alpha\beta}$ und $R^{(n-a)(n-b)}$ «geht. — Daraus viele Sätzli, wenn $m = n$ und $a = b$, oder $m = n$ «$= a + 1 = b + 1$.

«Geht f^n durch die R^{ab}, so schneidet sie die gegebene f^a noch «in $R^{a(n-b)} = {}^{\alpha\beta}$, durch die eine f^{n-b} geht und (mehr als) bestimmt «ist; für sich ist sie durch $\frac{1}{6}(n - b + 1)^{3|1} - 1$ auf der f^a beliebig «gewählte Punkte q bestimmt; da nun durch $R^{ab} + R^{a(n-b)}$ eine $S^2(f^n)$ «gehen, der Gesammtschnitt von f^n mit f^a aber durch

$$«\frac{1}{2}a(n-a)(n+4) - 2 + \frac{1}{6}(a+1)^{3|1} \text{ Punkte}$$

«bestimmt ist (6), so zählt die Bedingung, dass f^n durch R^{ab} gehen «muss, für

$$«\frac{1}{2}a(n-a)(n+4) - 2 + \frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1} - \left[\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1} - 1\right]$$

$$« = \frac{1}{2}an(n-a+4) + 1 + \frac{1}{6}(a-1)^{3|-1} - \frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}$$

«bestimmende Punkte p; und werden auf der R^{ab} so viele «Punkte p frei gewählt, so enthält jede durch dieselben «gehende f^n die R^{ab} ganz. Oder auch so: Die f^a und f^b haben «Schnitt R^{ab}. Auf f^a nehme beliebige $\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1} - 1$ Punkte q, so «bestimmen sie die f^{n-b}, und diese mit f^a die $R^{a(n-b)}$. Auf f^{n-b} be«liebig gewählte $\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1} - 1$ Punkte r bestimmen eine f^{n-a}, und «diese mit f^{n-b} eine $R^{(n-a)(n-b)}$ und mit f^b eine $R^{(n-a)b}$. Nun ist «durch (die ganze) R^{ab} und durch alle Punkte q und r ein $B(f^n)$ be«stimmt, folglich ist die Zahl bestimmender Punkte p, die durch R^{ab} «vertreten werden

$$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-2-\left[\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1}-1+\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}-1\right]$$

$$=nab+\frac{1}{6}(a+b-n-1)^{3|-1}-\frac{1}{2}ab(a+b-4)\ldots=P,$$

«*so dass durch so viele auf ihr frei gewählte Punkte p jede durch-*
«*gehende f^n die ganze R^{ab} enthalten muss.* Lässt man einen dieser «Punkte p ganz weg, so entsteht ein $G(f^n)$, das die R^{ab} (ausser in «den übrigen Punkten p) in

$$\frac{1}{2}ab(a+b-4)+1-\frac{1}{6}(a+b-n-1)^{3-1}\ldots.=P_0$$

«nothwendigen Punkten p_0 schneidet (was Ihr zweiter Donnstigs-«Satz ist).

«9. Enthält ein $G(f^n)$ eine *partielle Grundcurve* R^{ab}, so zählt sie «ebenfalls für P bestimmende Punkte p; aber wieviele von den «$n^3+3-\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}$ *nothwendigen* Punkte p fallen dann in R^{ab}, «etwa $ab(2n-a-b)$?, und wieviele liegen auswärts, im Freien?

«10. Durch wieviele der abc-Schnitte dreier Flächen f^a, f^b «u. f^c muss eine f^n gehen, damit sie *nothwendig* auch durch alle «übrigen geht? — Gehen drei Flächen f^m, f^n und f^p durch eine «gegebene *Vollcurve* R^{ab}, so schneiden sie sich auswärts noch in «$mnp-ab(m+n+p-a-b)$ Punkten (?). Gehen aber die drei Flächen «durch eine *Theilcurve* R^ν — wie dann?

«11. Schon vor Jahren fand ich, dass ein $N(C^n)$ im Besondern «höchstens n^2-n+1 Grundpunkte haben kann, und zwar wird ein «solches Netz z. B. bestimmt 1) durch zwei C^n, von deren Schnitten «$n-1$ in einer Geraden liegen, durch die n^2-n+1 übrigen geht «dann $N(C^n)$; 2) die gesammten Pampolaren in Bezug auf $B(C^r)$ bilden «ein $N(C^{2r-1})$ mit $(2r-1)^2-(2r-1)+1$ Grundpunkten. — Dem «analog sind $G(f^n)$ und $N(f^n)$ hervorzubringen, die ziemlich hohe «*partielle Grundcurven* haben, nebst andern possirlichen Eigen-«schaften. Als z. B.

I. «Gehen 2 Flächen n^{ten} Grads f^n und f_1^n durch eine gegebene «C^{n-1}, deren Ebene E heissen soll, so schneiden sie sich «noch in einer R^{n^2-n+1}, durch die ein $G(f^n)$ geht. Durch «$C^{n-1}+R^{n^2-n+1}$ geht ein $B(f^n)$, der von der E (ausser der «C^{n-1}) in einem Strahlbüschel $B(g)$ geschnitten wird, dessen «Mittelpunkt g_0 (nicht in C^{n-1} sondern) in R^{n^2-n+1} liegt, «derjenige der n^2-n+1 Schnitte der E und R^{n^2-n+1} ist, der «nicht in C^{n-1} liegt. Jedes Glied f^n des $G(f^n)$ wird von allen «andern in ebenen Curven C^{n-1} geschnitten, deren Ebenen E «sämmtlich durch die derselben angehörige Gerade g gehen; «und umgekehrt: legt man durch irgend eine, durch den «ausgezeichneten Punkt g_0 gehende Gerade g einen B(E), «so schneidet jede E die R^{n^2-n+1}, ausser in g_0, in n(n—1) «Punkten, die in einer C^{n-1} liegen und die $S(C^{n-1})$ liegen «in einem Glied f^n des $G(f^n)$, so dass also $G(f^n)$ durch R^{n^2-n+1} «und G(g) um g_0 sich Glied gegen Glied entsprechen. Der«jenigen Geraden $t(=g)$, welche Tangente der R^{n^2-n+1} in «g_0 ist, entspricht eine $f_0^n(=f^n)$, die g_0 zum Knotenpunkt «hat; die Schmiegungsebene der R^{n^2-n+1} berührt den Kno«tenkegel längs t. Durch zwei frei gewählte Punkte ist eine «f^n bestimmt; drei f^n können ausser R^{n^2-n+1} keinen Punkt «gemein haben (wohl eine C^{n-1}). — Was folgt, wenn die «bestimmenden Flächen f^n und f_1^n durch eine R^{n-1} statt C^{n-1} «gehen? oder nur durch C^{n-2}? etc. — Soll eine f^n durch «$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-3$ beliebig gewählte Punkte in R^{n^2-n+1} gehen, «so enthält sie diese ganz und ist Glied des $G(f^n)$; ist ein «Punkt weniger gegeben, so geht sie durch «$\frac{1}{6}(n^2-1)(5n-12)+1$ nothwendige Punkte auf R^{n^2-n+1}. (?)

II. «*Gegeben* $B(f^n)$. Für jeden Pol p ist die Pampolare eine «Fläche p^{2n-1} die durch die Grundcurve R^{n^2} und durch die «$4(n-1)^3$ Knotenpunkte π des $B(f^n)$ geht, sowie auch durch «die Grundcurve $R^{(n-1)^2}$ des $B(f^{n-1})$ erste Polaren von p auf «$B(f^n)$, und auch durch p selbst. Die erste Polare von p auf «seine Pampolare p^{2n-1} ist eine Fläche $p^{2(n-1)}$, die auch durch «jene R^{n^2} und p geht; der aus p seiner Pampolare p^{2n-1} um«schriebene Kegel K zerfällt in 3 Theile: 1) in die Berühr«ungsebene in p, zählt für 2 Grade; 2) in den durch die «R^{n2} gehenden Kegel K_1^{n2}, der in R^{n^2} selbst berührt; und «3) in einen andern Kegel t^x (dessen Grad x bestimmt ist «und die t-Tangenten im Doppelpampolare der durch p gehen«den in Glieder des $B(f^n)$ berührenden Ebenen sind). *Liegt «p insbesondere in der Grundcurve R^{n2}, so ist er ein d r e i- «f a c h e r Knotenpunkt seiner Pamporalen p^{2n-1}.* Die allen p «des Raumes entsprechenden Pamporalen bilden eine $N(p^{2n-1})$, «das die R^{n^2} zur *partiellen Grundcurve* und jene $4(n-1)^3$ «Knotenpunkt π zu Grundpunkten hat. Die Kernfläche P^x «des $N(p^{2n-1})$ hat die R^{n^2} zur zwei- (oder drei-) fachen Linie, «und die π zu Knotenpunkten. Allen p in einer gegebenen «Ebene E entspricht ein $G(p^{2n-1})$, dessen *Kerncurve* R^y (Ort «der Knotenpunkte) aus R^{n^2} + einer durch die $4(n-1)^3$ «π gehenden Curve R^{y-n^2} besteht; dieses $G(p^{2n-1})$ hat, ausser «der R^{n^2} und den $4(n-1)^3 \cdot \pi$, auch noch die $3(n-1)^2$ Punkte «zu Grundpunkten, in welchen die E von Gliedern des $B(f^n)$ «berührt wird. Die R^{n^2} vertritt daher $(2n-1)^2 - 4(n-1)^3$ «$-3(n-1)^2 = (4n-3)n^2$ Grundpunkte des $G(p^{2n-1})$. — Zum «$B(f^n)$ gehören eine Schaar Kernflächen $P^{4(n-2)^3}$; sie erfüllen «den Raum $4(n-2)^3$-fach, d. h. durch jeden p gehen so viele «derselben; jede $P^{4(n-2)^3}$ schneidet ihre f^n in einer $R^{4n\,(n-2)^3}$ «$= R_0$; liegt p insbesondere in der R^{n^2}, so gehen auch «$4(n-2)^3$ solche R_0 durch ihn und deren zugehörige Rück-«kehrtangenten t_0 (nicht Tangenten der R_0) liegen sämmtlich «im Knotenkegel der zugehörigen Pampolare $p_0{}^{2n-1}$. Ist der «Ort aller R_0 eine Fläche f^z? und hat dieselbe die R^{n^2} zur «4-fachen Linie? [$z = 4n + 4(n-2)^3$?]. — Wie viele Rück-«kehrtangenten t_0 aller Glieder des $B(f^n)$ gehen durch einen «freien Pol p? — Wenn f^m durch die R^{n^2} des $B(f^n)$ geht, «wie viele f^n berührt sie dann in R^{n^2} selbst, und wie viele «auswärts? $m > n$.

«12. Auch sehr viel an Folgendem abgemüht: «Wie viele Glieder «können bei $B(f^n)$ oder $G(f^n)$ oder $N(f^n)$ in Theile zerfallen und wie «mannichfacher Art können die Theile sein?» «Kann bei $B(f^n)$ die «R^{n^2} in Theile zerfallen, ohne dass auch Glieder f^n zerfallen, und «wie?» Näheres:

I. «*Vom $B(f^n)$*. Soll dieser zerfallene Glieder enthalten, so sind «es im Allgemeinen nur zwei, $f^a + f^\alpha$, $f^b + f^\beta$, wobei dann «die R^{n^2} aus 4 Theilen besteht (8). Im Besondern kann aber «$B(f^n)$ mehr zerfallene Glieder enthalten, namentlich wenn «$n = \nu \, . \, \alpha$ ist. Nämlich 1) ist $n = 2\,\alpha$, so kann $B(f^n)$ drei «Glieder von der Form $f^\alpha + f_1{}^\alpha$ haben, wobei die Grundcurve «R^{n^2} aus vier Curven R^{α^2} besteht (die wie die Ecken eines «Vierecks und jene drei Glieder wie die 3 Paar Gegenseiten «desselben anzusehen sind). 2) ist $n = 3\,\alpha$, so kann der «$B(f^n)$ vier Glieder von der Form $f^{2\alpha} + f^\alpha$ haben (durch drei «ist das 4[te] bestimmt); die vier Theilflächen f^{α} gehen alle durch «dieselbe Curve R^{α^2}, und die vier $f^{2\alpha}$ schneiden sich zu 3 und «3 in vier Curven $R^{2\alpha^2}$, jede geht durch drei der letztern, «und durch jede $R^{2\alpha^2}$ geht auch je eine f^{α}; so besteht also «R^{n^2} aus 5 Theilen, $= R^{\alpha^2} + 4\ R^{2\alpha^2}$. 3) ist $n = 4\ \alpha$, so «kann es 5 Glieder $f^{3\alpha} + f^{\alpha}$ geben, wobei alle fünf f^{α} durch «eine R^{α^2} gehen, u. s. w. Und ist $n = x\ \alpha$, so kann es $x + 1$ «Glieder $f^{(x-1)\alpha} + f^{\alpha}$ geben, wobei die $x + 1$ Theilflächen «f^{α} durch eine und dieselbe R^{α^2} gehen und jede f^{α} sich mit «den ihr nicht zugehörigen x Flächen $f^{(x-1)\alpha}$ in einer und «derselben $R^{(x-1)\alpha^2}$ schneidet, so dass

$$R^{n^2} = R^{\alpha^2} + (x + 1)\ R^{(x-1)\alpha^2}$$

«ist. So kann der $B(f^n)$ insbesondere auch $n + 1$ Glieder «von der Form $f^{n-1} + f^1$ haben, wobei dann die $n + 1$ «Ebenen f^1 durch dieselbe Gerade R^1 gehen, und die Grund- «curve R^{n^2} aus diesen Geraden R^1 und aus $n + 1$ ebenen «Curven C^{n-1} besteht. — Durch wie viele dieser $n + 1$ Glieder «werden die übrigen *nothwendig?*

«Der $B(f^n)$ kann aber auch in der Art drei zerfallene «Glieder $f^a + f^{\alpha}$, $f^b + f^{\beta}$ und $f^c + f^{\gamma}$ enthalten, dass sich die «Theilflächen, wie etwa f^a und f^b, nicht in *ganzen* sondern in «*zerfallenen* Curven schneiden, also etwa in zwei Curven A «und B, so dass Schnitt $(f^a\ f^b) = A + B$, oder was wir kurz «so bezeichnen wollen: $a\ b = A + B$. Besteht dergestalt der «Schnitt je zweier nicht zusammgehöriger Theilflächen aus *zwei* «Theilen, so stellt sich die Verbindung wie folgt dar:

$a\ b = A + B$	$a\ c = A + D$	$b\ c = A + H$
$a\ \beta = C + D$	$a\ \gamma = B + C$	$b\ \gamma = B + G$
$\alpha\ \beta = E + F$	$\alpha\ c = E + H$	$\beta\ c = D + E$
$\alpha\ b = G + H$	$\alpha\ \gamma = F + G$	$\beta\ \gamma = C + G$

«Dabei besteht R^{n^2} aus den 8 Curven A, B, C, ... H; «durch jede von diesen gehen 3 Theilflächen der 3 zerfallenen «Glieder, wie f^a, f^{β} und f^c durch D. Sind die Grade a, α, b, «β, c, γ einzeln gegeben und man nimmt den Grad einer der «8 Curven A, B, ... H beliebig an, so sind die Grade der «7 andern bestimmt.

«Wenn ferner die Schnittcurve je zweier Theilflächen in «3 Theile zerfällt, also $(f^a\ f^b)$ oder $a\ b = A + B + C\ (= R^{ab})$ «ist, wobei dann die zwei Glieder $f^a + f^{\alpha}$ und $f^b + f^{\beta}$ zwölf

«solche Partialcurven bewirken, die zusammen die R^{n^2} aus-
«machen, so scheinen mir noch zwei andere zerfallene Glieder
«$f^c + f^\gamma$ und $f^d + f^\delta$ möglich zu sein, so dass dann durch
«jede der 12 Curven vier Theilflächen gehen, und in jeder
«von diesen 6 von jenen liegen. — Welches ist der niedrigste
«Grad n, bei dem dieser Fall eintreten kann? Geht's bei $n = 4$,
«für 4 Paar Flächen $f^2 + f_1^2$, wenn sich jede zwei, die nicht
«zu einem Paar gehören, in $C^2 + 2$ g schneiden? Oder giebt
«es bei $n = 6$ vier Paar Flächen $f^3 + f_1^3$, wovon je zwei
«Paar einander in 12 Partialcurven 3^ten^ Grads (R^3 oder C^3)
«schneiden, und wobei durch jede dieser Curven vier Theil-
«flächen gehen und jede der letztern durch 6 von jenen geht?
«— Ferner ebenso wenn die Schnitte der Theilflächen in 4
«Theile zerfallen, $ab = A + B + C + D$; oder wenn einzelne
«Glieder des $B(f^n)$ aus 3 oder mehr Theilflächen bestehen;
«und s. w. kurz das Zerfallen der Glieder und der Grund-
«curve R^{n^2} des $B(f^n)$ vollständig zu berüsseln; ich kann nicht
«Alles schreiben, was ich versucht habe.

II. «*Vom $G(f^n)$.* Dieses hat, im Allgemeinen, keine zerfallene
«Glieder. Nimmt man aber zwei Glieder an, wovon das eine
«aus α und das andere aus β Theilflächen besteht, so ordnen
«sich demgemäss die n^3 Grundpunkte in $\alpha \, . \, \beta$ Gruppen. Sind
«die $\frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1)$ Curven, in denen die α Theilflächen einander
«schneiden, nicht Bestandtheile der *Kerncurve* R_0^x (Ort der
«Knotenpunkte) des $G(f^n)$? — Wie viele zerfallene Glieder
«kann das $G(f^n)$ haben unter den mannichfaltigsten Bedingungen,
«wie z. B., dass jedes zerfallene Glied nur 2, oder 3, 4, . . .
«Theile haben soll? — Es giebt solche bornirte $G(f^n)$, wo jedes
«Glied zerfällt, alle Glieder eine Theilfläche f^a gemein haben;
«auch solche, die partielle Grundcurven haben. — Zur Er-
«leichterung kann man zur Bestimmung des $G(f^n)$ einen solchen
«$B(f^n)$ annehmen, der nach dem Vorigen (I.) schon viele zer-
«fallene Glieder enthält. Ist $R^{n^2 - n + 1}$ die höchste *Grund-
«curve* die ein $G(f^n)$ haben kann?

«Das Gebüsch 2^ten^ Grads $G(f^2)$ kann im Besondern 6
«Glieder haben, die aus Ebenenpaaren bestehen, wobei dann
«die *Kerncurve* $R^6 = 6$ g ist. Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder
«aus Ebenenpaaren bestehen, ist dann nicht ein 4^tes^ solches
«Glied *nothwendig*, und bei fünfen das 6^te^?

III. «*Vom* $N(f^n)$. Enthält es nothwendig zerfallene Glieder? wie«viele und von welcher Art? Die Selbstschnitte der zerfallenen «Glieder (wie $(f^a f^\alpha) = R^{a\alpha}$) liegen in der Kernfläche $P^{4(n-1)^3}$ «des Gebüschs; dieselbe ist überhaupt der Ort aller Selbst«schnitte, wozu ja auch die Knotenpunkte und vielfachen Linien «gehören. Enthält $N(f^n)$ immer solche Glieder die *vielfache* «*Linien* haben? und wieviele? — Wieviele Grundpunkte kann «$N(f^n)$ höchstens haben? und welches ist seine höchste par«tielle Grundcurve R^x?

«Wählt man in einem $N(f^n)$ drei solche $B(f^n)$, wovon «keine zwei ein gemeinschaftliches Glied f^n haben, so werden «ihre 3 Grundcurven R^{n^2} von einer Schaar andern Grund«curven, $S(R_1{}^{n^2})$, geschnitten, d. h. jede $R_1{}^{n^2}$ schneidet jede «R^{n^2} in n^3 Punkten, und dann werden diese $S(R_1{}^{n^2})$ nicht allein «von jenen dreien, sondern von einer $S(R^{n^2})$ geschnitten, und «beide Schaaren liegen in einer Fläche f^{2n} (wie beim Hyper«boloid, das für $n = 1$ eintritt).

«H. *Borchardt,* dem ich angab, dass beim $N(f^2)$ 10 Glieder «aus $f' + f_1'$ beständen, war erst ganz enchantirt und glaubte «es leicht beweisen zu können; jetzt aber verzweifelt er, weil «er auf 27 kommt und nicht reduciren kann. Er wollte etwas «Spezielles haben, was ich nach meiner Weise so übersetze:

«Wenn zwei in derselben Ebene liegende Kegelschnitte «$N(A^2)$ und $N(B^2)$ einen Büschel $B(C^2)$ gemein haben, giebt «es dann solche Gliederpaare A^2 und B^2, die sich in zwei «Punkten berühren? und wieviele?»

«Eben war *Borchardt* wieder bei mir; er hat die Eli«mination gemacht, 10 gefunden, und für diese spezielle Frage «4. Musste Brief aufweisen.

«Derselbe überbrachte mir vorgestern 2 Abhandlungen «von *Hesse* (aus *Crelle* Bd. 49., was ich noch nicht erhalten) «über die Doppeltangenten der C^4, datirt 1853; er hat endlich «auch die 63 Systeme eingeschriebene C^2 gefunden; bei den «315 C^2 citirt er *Salmons* Werk: «Treatise on the higher «plane curves by George Salmon, M. A., Dublin 1852.» — «Meiner wird nicht erwähnt, durch meine Trödelei, seit 1846 «soll ich leer ausgehen.

«Ich wünsche und hoffe, dass Sie gesunder sind, als ich; «dann haben Sie an dem Vorstehenden auf 14 Tage Futter «genug, und wenn auch wenig Grünes darunter ist, schmeckt «es Ihnen doch, da Sie *Alles* bewältigen und *verschlingen* «*wollen*.

«Leben Sie wohl, d. h. *flott* beir Gräfin und *rennend* «über das Wylerfeld.

«Die üblichen Grüsse an *Rettig, Mutz, Leuenberger* und «*Frau*, (Fr. und H. *Walter*), etc. Ihr hinfälliger

«Berlin 24.—27. Januar 1855. Steiner.»

«N.B. Übersehen Sie nicht den beiliegenden Zettel und «gehen Sie gleich zu *Leuenberger*, bitte!»[1])

1855. Steiner an Schläfli.[2])

Wahrscheinlich 1855, Anfang Januar.

«*Lieber Freund!*

«*Rache ist süss*» sagt ein Sprüchwort. Sie wollen mich wohl «fühlen lassen, wie peinlich einem zu Muthe ist, wenn man keine «Antwort erhält. Desshalb muss ich ein *ernstes Wort* mit Ihnen «sprechen.

«Wer in der Schweiz — wie auch in Preussen — ein *unehe*-«*liches* Kind erzeugt, muss Alimente bezahlen *von Rechts wegen*. Auf «diesen *Rechts-Grund* gestützt, dränge ich Sie hierdurch zum dritten «Mal, für die Erziehung und Ausbildung Ihres Bankerts, den Sie mir «so lieblos halb nackt ins Haus geschoben, väterlich zu bezahlen. Dass «es obendrein noch ein Zwillingspaar ist, will ich nicht einmal in «Rechnung bringen. Aber in seinen alten Tagen noch fremde Kinder, «ja Kinder des *Leichtsinns* — um nicht zu sagen der *Unkeuschheit* — «aufpäppeln zu sollen, ist erschrecklich. Schon wochenlang quäle ich «mich mit den Wechselbälgern ab, und kann sie weder zur Ruhe noch «ins Reine bringen.

«Die vornehmsten Grenzfälle, in die meines Erachtens der (Kno-«ten-) Kegel zweiten Grads, sowie die (Streif-) Curve zweiter Klasse «übergehen kann, sind folgende.

«1° Der Kegel kann sich α) auf seine *erste* oder *Hauptaxen*-«*ebene* reduciren, wobei seine Fläche die Winkel-Axe, d. h. die Winkel-«fläche zwischen den Scheitelkanten dieser Axenebenen doppelt bedeckt,

---

[1]) Derselbe ist natürlich nicht mehr vorhanden.

[2]) Hiezu existirt ein Concept.

«oder β) er kann sich in die *dritte ideelle Axenebene* ausbreiten und «dieselbe doppelt bedecken; oder γ) sich auf die Hauptaxe zusammen-«ziehen (Knotenaxe).

«2° Ferner kann er sich in zwei Ebenen ausbreiten (*Knoten-«ebenen*, ihr Schnitt *Knotenkante*), wobei dann alle Berührungsebenen «durch die Kante der zwei Ebenen gehen, letztere können α) *reell* «sein, β) *aufeinanderfallen*, γ) *imaginär* sein; nun scheint mir syn-«thetisch der Fall (β) mit dem vorigen (1°β), sowie (γ) mit (1°γ) iden-«tisch zu sein, aber (γ) kann vernünftig nur so, wie in (1°) angegeben, «entstehen. Das Polare davon ist:

«I. Der Kegelschnitt (Streifcurve) kann in zwei Gerade über-«gehen, deren Schnitt der Mittelpunkt ist; die Geraden können a) «*reell* (Hyperbel) oder b) *imaginär* (Ellipse, die sich auf ihren Mittel-«punkt zusammengezogen) sein, oder c) *zusammenfallen* (doppelte «Gerade).

«II. Ferner kann sich der Kegelschnitt auf zwei Arten auf eine «doppelte Gerade reduciren; a) auf die doppelte *erste Axe*, oder sich «b) auf den Mittelpunkt oder c) als Hyperbel auf die doppelte *zweite* «*ideelle Axe* reduciren. Die Tangenten des Kegelschnitts bilden zwei «Strahlbüschel, welche die Scheitel der Axe zu Mittelpunkten haben; «im Falle (c) sind sie sämmtlich imaginär, bis auf die Axe selbst, «die reell wird.

«Nun die Schwierigkeiten (für die blosse synthetische Anschau-«ung). Im Fall (II a) finden zwei Kegelschnitte zugleich statt: Die «*Doppelstrecke zwischen den Scheiteln* ist Ellipse, und die äussere *Dop-«pelstrecke*, die durchs Unendliche geht, ist Hyperbel. Wenn nun vor «der Reduction die Streifcurve Ellipse war, so könnte man wähnen, «es wäre nur die *elliptische Strecke* der Streifaxe *reell* und die *hyper-«bolische* ideell oder imaginär. Nun gesetzt, Sie haben Recht, beim «Uebergang der Streifellipse in ihre Axe trete nun auch die Hyperbel «in ihrer Strecke in Evidenz (wie *Plücker* sagt), so hat der aus jedem «Punkt der Axe (Streifaxe) der Fläche umschriebene Kegel die Ebene «zur *Wendeebene* und die Axe zum *Wendestrahl*, und wenn der Punkt «aus der Ellipsenstrecke in die Hyperbelstrecke übergeht, so soll der «Kegel seine Lage gegen die Streifebene ändern; daher wäre also die «letztere eine Art *Wendeebene* der Fläche, aber mit Wechsel von der «einen Strecke zur andern, — was aber findet an den Grenzen, in «den beiden Scheiteln statt? muss hier der Kegel sich nicht *selbst* «*berühren* und die Axe zum Selbstberührungsstrahl und die Ebene «zur Selbstberührungsebene haben? oder was geht vor? — Dieselbe «Ungewissheit quält mich beim entsprechenden Fall ($2^0\alpha$), wo ich auch «nicht weiss, ob die durch die Knotenkante gelegte Ebene in beiden «Paar Scheitelwinkel der Knotenebenen *reell* schneidet oder vielleicht «nur im einen; und ob die Knotenebene selbst nicht mit *Selbstberührungspunkt* (oder etwa mit *zweimaligem* Selbstberührungspunkt) schnei- «det? Etwas anders, als Sie es angegeben haben, muss es sein, ich «möchte drauf wetten.

«So quälen mich alle obigen Fälle, z. B. der Fall (I a oder b, c). «Wird aus irgend einem Punkte in der Streifebene der Fläche ein «Kegel umschrieben, so hat er die Ebene zur *Wendeebene* und den «aus dem Punkt durch den Mittelpunkt (Schnitt der beiden Streif- «geraden) gehenden Strahl zum *Wendestrahl;* was Besonderes tritt «nun aber ein, wenn jener Punkt der Mittelpunkt selbst ist? Oder «andererseits, wie schneiden die Axenebenen in ($1^0\alpha$ und β) die Fläche? «nur mit *schlichtem* dreifachem Punkt, wie Sie sagen, oder anders, «etwa mit dreimaligem Wendepunkt etc.? — Ich bin darüber ganz in «Verwirrung, es ist synthetisch zu schwer oder ich bin zu schwach «und stumpf; ich corrigire und streiche wieder, weil ich nicht weiss, «was wahr oder falsch ist. Setzen Sie an! und geben Sie mir die «Resultate mit der Ihnen sonst *eigenen* Zuverlässigkeit.

«Bei der Definition der Polarflächen möchte ich auch die Eigen- «schaften des der Basis f^m umschriebenen Kegels angeben, nämlich «Grad $= m\,(m - 1)$, Klasse $= m\,(m - 1)^2$, Zahl der Doppel- «ebenen $= \frac{1}{2}\,m\,(m - 1)\,(m - 2)\,(m^3 - m^2 + m - 12)$, Zahl «der Wendeebenen $= w$ (?), Zahl der Doppelstrahlen $= d$ (?) und Zahl «der Rückkehrstrahlen $= r$ (?). Ich glaube Sie sagten es sei $w = 4\,r$, «also werden Sie alle 3 Fragen leicht *richtig* beantworten können. — «Einst theilte ich Ihnen die Eigenschaften der Abwickelbaren mit, welche «der Fläche *m^{ten} Grads* längs des ebenen Schnittes umschrieben «ist: Grad, Klasse und Grad der Rückkehrlinie, im Augenblick weiss «ich sie nicht, werde sie aber wohl notirt haben; Sie haben dieselben «bestätigt und wie mich dünkt noch erweitert. Fasst man die Fläche «nach *Klasse* auf, wird der Fläche *m^{ter} Klasse* längs des Schnitts mit «irgend einer Ebene E die Abwickelbare umschrieben, so ist dieser «eine Fläche $(m - 1)^{ten}$ Grads eingeschrieben, die erste Polare der «Ebene E in Bezug auf die Basis; die letzte Polare ist ein Punkt, «*Polarpunkt* der E in Bezug auf die Basis. Versetzt man E ins Un «endliche, so ist ihr Polarpunkt eine Art *Mittelpunkt* (Schwerpunkt, «Punkt mittlerer Entfernung), *nämlich die Summe der aus ihm auf «je ein System vom m parallelen Berührungsebenen der Basis ist alle-«mal gleich Null* (ist es wahr?). Die Schnittcurve der E mit der «Basis stimmt mit dem vorigen Kegel in den 6 Eigenschaften überein; «die Abwickelbare mit der Berührungscurve des Kegels u. s. w.

«Da ich nicht weiss, ob Sie mich *verworfen* haben, darf ich «nicht weiter schreiben, hoffe aber, dass Sie mich bald aus dieser pein-«lichen Ungewissheit erlösen werden. Ich war damals krank und «ganz unthätig, — Sie sind über solche Zustände Zeitlebens er-«haben, wie Sie selbst meinten.

«Ihr treuer

Steiner.»

«Grüssen Sie Prof. *Vogt* [1]) und sagen ihm, ich hätte mich über «seinen *wackern Carl* [2]) bei Lesung der «*Bilder aus dem Thierreich*» «sehr gefreut, theils aus *collegialischem* Anlass. Unterlassen Sie «es nicht.

«Ein hiesiger Gymnasiums-Professor der Mathematik, *Müller*, «meinte, ich sollte *Geflecht* statt *Gebüsch* oder *Netzbasis* sagen, es «drücke gerade etwas *Räumliches* aus. Was sagen Sie dazu?

«Die gewöhnlichen Grüsse. — Haben Sie Chelini (in den Statuten «steht Ch*i*lini) geschrieben? — Denken Sie, ich habe mich noch nicht «bedankt! es ist schändlich.

«Lassen Sie mich nicht im Stich, damit ich in den, nächste «Woche eintretenden, Ferien die Redaction fortsetzen kann. Ich «werde auch bald mich umsehen, wie ich es anzufangen habe, um «auf Jahr und Tag Urlaub zu erhalten.

«Mein kleiner Aufsatz ist in Liouville's Journal noch nicht er-«schienen, Dr. *Wöpke*[3]) scheint ihn nicht übersetzt zu haben; ich sollte «an *Poncelet* schreiben — aber es geschieht nicht. Auch von Ihren «Sachen scheint noch nichts aufgenommen zu sein. *Crelle* sehe ich «nie. Bei ihm ziehen sich die Sachen lange hin. Ich werde näch-«stens nach der Druckerei gehen und mich beim Setzer erkundigen.

«Zum *Donnstig!* bald Antwort und sollte es eine *Kriegserklärung*

---

[1]) Seit 1835 Professor der Medizin in Bern.

[2]) Bezieht sich auf Carl Vogt, Professor in Genf † 1895.

[3]) Wöpke Franz, geb. 6. Mai 1826, Lehrer der Mathematik, lebte abwechselnd in Berlin und Paris; † 1864.

«sein, nur nicht eine so *tiefdurchdachte Stellung* eingenommen, wie «Preussen; heraus aus der neutralen Passivität, ehe Sebastopol «fällt.»

Steiner an Schläfli.

Berlin, 25. Febr. 1855.

«*Lieber und getreuer Freund!*

«Hollohoh! wo hängt's? Sind Sie böse, oder grasen Sie, oder «mangen Sie Vorsichtskasse [1]), oder waren meine Aufgaben zu schwer, «dass in drei Wochen noch keine Antwort kommt?

«Ich habe die Redaction wieder begonnen. Es geht erbärmlich «langsam. Ihre Definitionen machen mir viel zu schaffen. Es giebt «mehrere Dinge, die ich nicht klar anschauen kann, — und sicher »habe ich schon Falsches geschrieben. Wenn ich Ihren Entwurf lese, «ist es mir gerade wie beim Spazieren: diese *Selbstsucht*, die sich «nicht um den schwächeren Begleiter kümmert! Nun begreife ich «*Borchardt's* Urtheil auf dem Rigi! Um Sie jedoch nicht, wie «früher, zu ärgern, gebe ich mir Mühe, Ihrem Concepte treulich zu «folgen; aber etwas Schulmeisterei wird doch eingeflochten, was Ihnen «unlieb sein mag, da Sie dafür kein Organ haben, wie für schönen «Weg und humane Ruhe auf Ausflügen, worüber *Walter, Rettig* [2]), ich «und Alle zu *weinen und klagen* haben. — Ich sitze gegenwärtig die «8te Leidens-Stör zu Hause ab. Das Alter macht sich schon stark gel-«tend, die frühere Allgewalt der Phantasie ist halb erloschen; ich «kann nicht mehr klar anschauen, und nur mit saurer Mühe. Ich «bitte Sie daher mir folgende Sachen (die mir ehemals leicht ge-«wesen wären) *sicher zu entscheiden.*

«1. Der aus jedem Punkte P in einer f^m dieser umschriebene «Kegel hat die zugehörige Berührungsebene E zur Doppelebene und «*berührt sie längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve in P.* (?) «Wenn nun die E mit *Rückkehrpunkt* schneidet, so ist sie eine *Wende-*«ebene (nicht Rückkehrebene?) des Kegels; und wenn sie mit *Selbst-*«*berührungspunkt* schneidet, so ist sie eine *Selbstberührungsebene* des «Kegels.

«2. Wenn 2 Flächen sich in P berühren, so hat die ihnen ge-

---

[1]) Schläfli war ca. 5 Jahre lang Liquidationsrechner der National-Vorsichts-Kasse.

[2]) Prof. der Philologie in Bern, jetzt noch lebend.

«meinsam umschriebene Abwickelbare die zugehörige E zur Doppel-«ebene und berührt sie längs *der beiden Tangenten der Schnittcurve «der Flächen;* die E wird *Wende-* oder Selbstberührungsebene der Ab-«wickelbaren, wenn P ein *Rückkehr-* oder Selbstberührungspunkt der «Curve ist; dabei ist die Rückkehrtangente eine *Asymptote* in der «Involution, welche durch die zwei Tangentenpaare der Schnittcurven «von E mit den 2 Flächen bestimmt ist; ebenso die *Selbstberührungs-«tangente.*

«3. Die Schnittcurve des Knotenkegels n^{ten} Grads K^n mit der «Fläche f^m sendet n (n + 1) Zweige durch den Knotenpunkt P, deren «Tangenten t (in P) *alle in den K* fallen; berührt eine E den K längs «einer dieser t, so ist diese eine *Selbstberührungstangente ihres «Schnittes* (so verstand ich Ihren rücksichtslos-dunkeln Satz), und für «die vorhergehenden und nachfolgenden, den K berührenden Ebenen «ändert deren Schnittcurve die positive Seite ihrer Rückkehrtangente. «Geht aber eine E frei durch solche t, so hat ihr Schnitt dieselbe «zur *Wendetangente* (?).

«Ich muss hierbei nochmals vom Knotenpunkt 2^{ter} Ordnung «sprechen, der mich sehr würgt, weil ich ihn nicht ganz zu fres-«sen vermag, und sicher Falsches darüber ins Reine geschrieben «habe, wie ich jetzt einsehe. Er heisst *hyperpoloidisch* (nicht hyper-«polisch) oder *ellipsoidisch*, nachdem der K^2 reell oder imaginär ist. «Nun kann ich mich damit nicht zufrieden geben, obschon Sie mich «in Bern abschnauzten und wiewohl ich bereits ins Reine schrieb, «dass der Uebergangsfall zwischen beiden der *paraboloidische* Knoten-«punkt sei — was offenbar Unsinn ist. Mit träger Vorstellung sah «ich Folgendes, was Sie controlliren und sicher begründen wollen.

«Der hyperb. Knotenpunkt hat zwei *Grenzfälle:* 1^0) wo K^2 sich «auf eine einzige Gerade = Knotenkante, reducirt, welche dann *Selbst-«berührungs-* oder *Rückkehrtangente* des Schnittes jeder durch sie «gehenden Ebene ist, so dass also die Fläche einen Selbstberührungs-«Knotenpunkt oder Rückkehr-Knotenpunkt (eine Spitze, die im Kno-«tenpunkt endet) hat (Beispiele an Umdrehungsflächen); 2^0) wo «K^2 sich in eine Ebene=Knotenebene ausbreitet, welche von jeder «durch den Knotenpunkt gehenden Ebene in einer *Rückkehrtangente* «oder Selbstberührungstangente (?) geschnitten wird, und insbesondere «drei durch den Knotenpunkt gehende solche Gerade enthält, welche «für jede durchgehende Ebene Selbstberührungstangenten sind, so dass «die Fläche drei glatte Spitzen hat, die im Knotenpunkt enden (wie «unten, bei Ihrem Fall). Oder wird hier die von jeder durch den «Knotenpunkt gehenden andern E in einer Selbstberührungstangente «(statt rt) geschnitten? Beispiel: wenn man eine Curve und die Nor«male in einem Wende- (oder Selbstberührungs-) Punkt herumbewegt. «— Zerfällt K^2 in 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, so heisst «jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Ist nun dieser «elliptische Fall mit dem vorigen (1°) identisch? oder wodurch unter«scheiden sie sich? Und ist ebenso der hiesige hyperbolische Grenz«fall, wo beide Knotenebenen zusammenfallen, mit dem vorigen (2°) «*identisch* oder *verschieden?* Wie schwer es mir wird einzusehen, «dass in jeder der beiden Ebenen drei famöse t liegen, habe ich «Ihnen bereits im vorigen Brief unterbreitet und erwarte bald sichere «Auskunft. — Statt *Dehnebene* bin ich jetzt auf den Namen *Streifebene* «gekommen; *Streifcurve.* Ihre *Umschreibungsebene* wäre auch sach«gemäss.

«Hat die f^3 einen Kp=P, so wird sie vom K^2 längs dreien Strah«len t berührt (?); daher hat f^3 die sie längs diesen t berührenden «drei Ebenen zu *Streifebenen.* — Hat f^3 vier Knotenpunkte (wie z. B. «die 2^{te} Polarenveloppe eine E in Bezug auf Basis F^3), die ein Te«traeder T bestimmen, so berührt jeder Knotenkegel längs der drei «anliegenden Kanten, und je zwei Knotenkegel berühren sich längs «der ihnen gemeinsamen Kante und haben daher noch einen (durch «die beiden anderen Knotenpunkte gehenden) ebenen Schnitt C^2. Die «Ebenen der sechs C^2 gehen durch *einen* Punkt. Die 4 Knotenkegel «sind irgend einer f^2 umschrieben, welche alle 6 Kanten des T be«rührt; endlich hat f^3 sechs Streifebenen, die sie längs der 6 Kanten «streifen und die respectiven Ecken des T zu Mittelpunkten der donn«stigs Strahlbüschel haben. — Für die F^3 (3^{te} Klasse) alles analog. «Was daran Wahres ist, werden Sie bald erkennen; gleich nach der «Ankunft in hier habe ich so was angeschaut; jetzt sehe ich nichts «deutlich.

«4. Der einer f^m aus freiem P umschriebene Kegel K ist vom «m $(m-1)^{ten}$ Grad. Ist P insbesondere ein Kp n^{ter} Ordnung von f^m, «so besteht $K^{m\,(m-1)}$ aus $(n+1)\ K^n + K^{m\,(m-1)\,-\,n\,(n+1)}$ d. h. aus «dem $(n+1)$fachen Knotenkegel K^n und aus einem andern Kegel «$[m\,(m-1) - n\,(n+1)]^{ten}$ Grads, der für das Maximum von n, für «$n = m - 1$, verschwindet.

«5. Braucht man *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen, «*eine Doppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt werden «*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*», oder liegt dies schon drin?

«Kann man bei einer Doppelschaar Flächen «*von drei successiven* «*Flächen*» sprechen, da ja jede gleichsam von einer Schaar nächst«folgender umgeben ist?

«6. Da wir die Klasse der einer gegebenen f^m doppelt umschrie«benen Abwickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berüh«rungscurve R^x zu finden sein. Dann ist jene Klasse $=\mu$, so gehen «durch jeden P μ Doppelebenen der f^m, und daher schneidet die erste «Polare von P, f^{m-1}, die R^x in 2μ Punkten, so dass $(m-1) \times x =$ «2μ, also $x = \frac{2\mu}{m-1}$ ist. (?) — Von welchem Grad ist die Abwickel«bare? und von welchem ihre Rückkehrlinie? Muss zu finden sein.

«Sind f^m und f^n gegeben, so ist die ihnen gemeinsam umschrie«bene Abwickelbare von der $m\,(m-1)^2 \times n\,(n-1)^{2\text{ten}}$ Klasse; ihre «Berührungscurven $R\mu$ und $R\nu$ mit f^m und f^n werden also von den er«sten Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes P in $m\,(m-1)^2\,n\,(n-1)^2$ Punkten «geschnitten, so dass danach $\mu = m\,(m-1).\,n\,(n-1)^2$ und

«$\nu = m\,(m-1)^2.\,n\,(n-1)$ wäre. (?)

«Die den Flächen f^m und f^n längs ihrer Schnittcurve R^{mn} umschrie«benen Abwickelbaren sind beziehlich von der $m\,n\,(m-1)^{\text{ten}}$ und «$m\,n\,(n-1)^{\text{ten}}$ Klasse. Daher müssen bei zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Klasse «F^m und F^n die Berührungscurven $R\mu$ und $R\nu$ der ihnen gemeinsam «umschriebenen Abwickelbaren vom $m\,n\,(m-1)^{\text{ten}}$ und $m\,n\,(n-1)^{\text{ten}}$ «Grad sein. (?) — Ich wollte von da aus weiter gehen und finden, «*um wieviel die Doppel- und Rückkehrlinie einer* F *deren Klasse er*«*niedrigen*, aber ich bin zu sehr abattu und confus, vielleicht gelingt «es ein andermal.

«Wenn Ihr Stillschweigen keinen andern Grund hat, als dass Sie «sich an einigen schwierigern Fragen verbissen haben, so bitte ich «recht sehr, mir vorerst die leichteren bald zu beantworten, damit «ich mit der Redaction vorwärts komme.

«*Fetscherin's* Tod hat mich frappirt; er war noch so rüstig und «kaum oder nur wenig älter als ich; 96er. Woran starb er?

«Sollten den Herren *Rettig, Leuenberger*, *Dr. Schneider* oder *Vogt*, «*Ries*, Signore etc. Dissertationen in ihren respectiven Fächern genehm «sein, so würde ich durch Buchhändler Ihnen ein Pack zuschicken «und Sie könnten das Porto repartiren nach Stückzahl und Inhalt. «Einst gab ich *Schlatter* (=Post-Heiri) in Solothurn circa 30 Stück.

«Leben Sie wohl, bleiben Sie *ewig gesund, jung und rüstig* — «wie Sie selbst meinten — und *antworten* Sie bald

Ihrem dankbaren *J. Steiner.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich nehme herzlichen Antheil an Ihren Leiden und bewundere «die Selbstüberwindung und den Heroismus, mit dem Sie, denselben «trotzend, die schwersten Fragen der Geometrie angreifen, von denen «es mir fast unmöglich scheint, dass sie in der Anschauung allein «sollten abgethan werden können.

«*Ad 1*°. Der aus einem beliebigen Punkte P einer *nach Grad* «*freien* Fläche f dieser umschriebene Kegel K hat die zu P gehörende «Berührungsebene E der f zur Doppeltangentialebene, und die zwei «Berührungsstrahlen derselben sind die Tangenten im Doppelpunkt P «des Berührungsschnitts der E. — Fällt aber P in den Durchschnitt «der Kernfläche und wird daher zum Rückkehrpunkt des Schnitts E, «so zählt die Rückkehrtangente für *vier vereinigte Strahlen*, welche «K mit E gemein hat (analytisch sicher!). — Ist endlich P einer der «Punkte π, wo die Curve (E, f) diesen zum Selbstberührungspunkt «hat, so sendet K durch die Selbstberührungstangente *zwei* Lappen, «welche beide längs derselben von der E oskulirt werden. (Analytisch «ist dieses wenigstens das Mindeste, was geschehen muss; ich glaube «aber nicht, dass es im Allgemeinen noch höher gehe. Den Ueber«gang vom vorigen Falle zu diesem speziellsten vermag ich freilich «in der Anschauung nicht zu verfolgen. Doch! denn in π wird die «Curve R d. h. (Q, f) von der Berührungscurve S der doppelt um«schriebenen Abwickelbaren berührt.) — Fällt der Punkt P irgendwo «in die S, so ist die E dreifache Berührungsebene des Kegels K; zu «den zwei sonst bekannten Berührungsstrahlen kömmt nämlich als «dritter noch der Strahl hinzu, welcher beide Berührungspunkte der «E (mit f) verbindet.

«*Ad 3*°. Wenn eine Fläche f (m^{ten} Grades) einen Knotenkegel «N (n^{ten} Grades) hat, und man wählt den Scheitel desselben zum Eck «(x, y, z) des Fundamentaltetraeders und nennt w die gegenüberliegende «Ebene, so bekömmt das Polynom der Fläche, nach den fallenden «Potenzen von w geordnet, die Form: $f = Nw^{m-n} + Pw^{m-n-1} +$ etc. «Dann ist also P ein Kegel $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, der mit dem Knoten«kegel den Scheitel gemein hat, aber sonst von ihm durchaus unab«hängig ist. Von den $n(n+1)$ gemeinschaftlichen Strahlen beider «können also bis auf die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nothwendigen alle übrigen «beliebig auf N angenommen werden; wenn demnach dieser N nur «vom zweiten Grade ist, so giebt es *keinen* nothwendigen Strahl, «sondern alle 6 können beliebig auf den N gesetzt werden, selbst «noch wenn dieser ein *Ebenenpaar* ist; nur wenn N aus zwei *ver-«einigten* Ebenen besteht, und dem P keine Gewalt angethan werden «soll, können in der Ebene N nur 3 Strahlen beliebig gesetzt wer-«den, deren jeder für zwei vereinigte Strahlen gilt. Frägt man nun «(im allgemeinen Fall), wie die Curve aussieht, in welcher die Basis «f vom Knotenkegel N geschnitten wird, so hat man für dieselbe das «System ($N = o$, $Pw^{m-n-1} + Qw^{m-n-2} +$ etc. $= o$), also mit erster «Annäherung ($N = o$, $P = o$), d. h. die erwähnten $n(n+1)$ Strahlen «sind Tangenten der Zweige, welche die Curve durch den Knoten-«punkt sendet. Wählt man die Fundamentalebene x so, dass sie den «N berührt, und lässt die y durch den Berührungsstrahl gehen, so «bekömmt man $N = xz^{n-1} + pz^{n-2} +$ etc., wo p ein homogenes «Polynom zweiten Grades in x, y bedeutet. Ist nun Q ganz frei, so «ist sein niedrigstes Glied z^{n+1}; in der Gleichung des Schnitts $x = o$ «sind also die niedrigsten Glieder $y^2z^{n-2}w^{m-n-1}$, $z^{n+1}w^{m-n-2}$ (mit «Weglassung der constanten Coefficienten), oder gekürzt: y^2w, z^3, d. «h. der Berührungsstrahl (x, y) ist Rückkehrtangente des ebenen Be-«rührungsschnitts (x) der Basis f. Geht aber der Kegel P durch «diesen Strahl (x, y), so ist sein niedrigstes Glied yz^n; aber das nied-«rigste Glied von Q im Allgemeinen immer noch z^{n+2}; man hat dann «im Ganzen drei Glieder von derselben niedrigsten Ordnung, in ge-«kürzter Form: y^2w^2, yz^2w, z^4, welche zusammen in die Gestalt des «Products $(yw + \alpha z^2)(yw + \beta z^2)$ gebracht werden können, d. h. die «Gleichung des ebenen Schnitts zerfällt in erster Annäherung in die «zwei Curven $yw + \alpha z^2 = o$, $yw + \beta z^2 = o$, mit andern Worten, «der Schnitt hat hier einen Selbstberührungspunkt, dessen Tangente «der Strahl (x, y) ist. — Geht eine schneidende Ebene frei durch «einen der $n(n+1)$ Strahlen (N, P), und nehmen wir sie als Ebene «x an und lassen auch noch die Ebene y durch diesen Strahl gehen, «so fällt in N das Glied z^n und in P das z^{n+1} weg; aber Q wird ein «Glied z^{n+2} haben; die auf die niedrigsten Glieder beschränkte (und «gekürzte) Gleichung der Basis f wird demnach für $x = o$ zu $yw^2 +$ «$z^3 = o$; d. h. der Strahl (x, y) ist eine Wendetangente der Schnitt-«curve. — Für das Mass eines Briefs konnte ich diese Sache nicht «wohl ausführlicher erörtern; aber ich hoffe, dieses reiche hin, um «die Dunkelheit zu verscheuchen.

«Ist ein *Knotenpunkt* (zweiten Grades) K *reell* und geschieht «ihm weiter keine Gewalt, so ist nur zweierlei möglich: 1^0 entweder «ist der Knotenkegel N *reell*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 - z^2$; also «der Knotenpunkt *reell verbunden* (hyperboloidisch); 2^0 oder der Knoten-«kegel N ist *imaginär*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 + z^2$; also der «Knotenpunkt *isolirt* (ellipsoidisch). Der vermittelnde Gränzfall zwischen «beiden kann offenbar *nur* der sein, wo $N = x^2 + y^2$ wird, d. h. wo «der Knotenkegel aus zwei *conjugirten imaginären* Ebenen besteht; «consequent müssten Sie ihn einen *elliptisch-paraboloidischen* Knoten-«punkt nennen; ein solcher entsteht z. B. wenn man die *Neil*'sche «Parabel um ihre Rückkehrtangente herumdreht (man kann dann «nachträglich die auf der Umdrehungsaxe senkrechten kreisförmigen «Querschnitte zu Ellipsen ausstrecken). Der Uebergang ist leicht in «der Anschauung zu verfolgen. Setzt man nämlich $N = x^2 + y^2 - \alpha z^2$, «wo α einen *sehr kleinen* pos. Coefficienten bedeutet, so werden in «der Nähe des K die Verhältnisse $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sehr klein, der Knotenkegel «wird also sehr spitz und zieht sich gleichsam auf seine Axe (x, y) «zusammen; für eine erste Annäherung braucht man daher in P nur «das niedrigste Glied z^3 zu berücksichtigen (für dessen Coefficient ich «kurz 1 setze); man bekömmt so für die Basis annähernd

$$-\alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right)^3 = o, \text{ d. h. } \frac{z}{w} = \alpha,$$

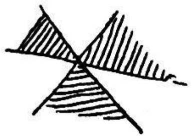
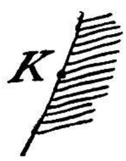
«der *eine* Lappen oder Trichter der Basis bildet einen sehr kleinen «geschlossenen Sack, dessen Länge in der Richtung der Axe von «der Ordnung α, die Querdimensionen hingegen von der Ordnung «$\frac{z}{w}\sqrt{\alpha}$ sind. Setzt man hingegen

«$N = x^2 + y^2 + \alpha z^2$, $P = - z^3 +$ etc., so erhält man für die Basis «annähernd: $-\left(\frac{z}{w}\right)^3 + \alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{x^2+y^2}{w^2} +$ etc. $= o$, d. h. für

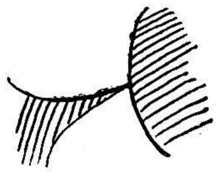
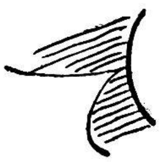
«$o < \frac{z}{w} < \alpha$ ist in unmittelbarer Nähe des Strahls oder der Axe (x, y)

«die Fläche unterbrochen, während sie jenseits, für $\frac{z}{w} > \alpha$, reelle Aus-«dehnung erhält, sie kömmt also mit einem stark gekrümmten Buckel «dem isolirten Knotenpunkt (x, y, z) entgegen, ohne ihn wirklich zu «erreichen.

«Nehmen wir jetzt den Fall, wo der Knotenkegel N in zwei ver-«schiedene Ebenen zerfällt, so sind nur zwei Arten möglich. *Ent-«weder* ist $N = x^2 + y^2$, der schon besprochene Gränzfall, wo die «zwei Ebenen conjugirt imaginär sind, *elliptischer* Kantenknotenpunkt; «ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt immer eine Ellipse; «ein frei durch K gehender Schnitt bekömmt den Punkt K zum *isolirten* «Doppelpunkt; jeder durch die Kante geführte ebene Schnitt hat K «zum Rückkehrpunkt, dessen Oeffnung die Richtung nie wechselt. «Einen ebenen Schnitt mit Selbstberührungspunkt kann es ohne «höhern Zwang nicht geben. (Dieser Zwang bestände nämlich in «der einzigen Bedingung, dass in P das Glied z^3 wegfiele, d. h. dass «der Kegel P dritten Grades durch die Knotenpunkte selbst gienge. «Dann sind allerdings für $x = o$ die niedrigsten Glieder $y^2 w^2$, $y z^2 w$, «z^4; und jede durch die Kante gelegte Ebene schneidet die Basis mit «Selbstberührungspunkt.) — Oder es ist $N = x^2 - y^2$, die zwei «Ebenen ($x + y = o$, $x - y = o$) sind reell, *hyperbolischer* Kanten-«knotenpunkt; ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt eine Curve, «die in der Nähe mit einer Hyperbel übereinkömmt; ein frei durch «K gehender ebener Schnitt bekömmt ihn zum *verbundenen* Doppel-«punkt; ein frei durch die Knotenkante geführter ebener Schnitt «hat diese Kante zur Rückkehrtangente in K, und zwar ist in zwei «Scheitelkeilen die Oeffnung des Rückkehrpunktes nach der einen «Seite, in den zwei andern nach der andern Seite der Kante ge-«wendet. Jede Ebene des Knotenkegels endlich schneidet die Basis «in einer Curve, welche die Zweige frei durch K sendet; die Tangenten «derselben sind die drei Strahlen, welche diese Ebene mit dem Kegel «P dritten Grades gemein hat.

«Als Gränzfall zwischen dem elliptischen und hyperbolischen «Kantenknotenpunkt steht der Planknotenpunkt in der Mitte; der «Knotenkegel reducirt sich auf zwei vereinigte Ebenen, es ist $N = x^2$; «jeder frei durch K geführte ebene Schnitt hat K zum Rückkehr-«punkt, dessen Tangente in die Knotenebene fällt; diese Ebene selbst «schneidet in einer Curve, welche drei freie Zweige durch K sendet, «von denen wenigstens einer reell ist; ihre Tangenten sind durch «$x = o$, $P = o$ bestimmt. Geht eine Schnittebene frei durch eine dieser «Tangenten, so hat der Schnitt K zum Selbstberührungspunkt. — Will «man ohne Ausübung von Zwang hier noch Arten unterscheiden, so «kann es nur zwei geben. Das System $x = o$, $P = o$ giebt näm-«lich für das Verhältniss $y : z$ drei verschiedene reelle Werthe *oder* nur «einen reellen; dem ersten Fall entsprechen die drei platten Spitzen , dem zweiten eine platte Schneide, 

in K völ-«lig scharf, weiter davon weg immer mehr abgestumpft. Der zwischen-«liegende Gränzfall ist der, wo zwei Lösungen von $x = o$, $P = o$ «zusammenfallen; dann ist der Schnitt der Knotenebene eine Curve, «welche in K einen Rückkehrpunkt hat, durch den noch ein Zweig «frei durchgeht; also entweder

 oder 

«Fallen alle drei Lösungen zusammen, so wird die Gleichung «des Schnitts der Knotenebene in erster Annäherung von der Form «$y^3w + z^4 = o$, ein $\left(\frac{3}{4}\right)$punkt, der jeder frei durchgehenden Ge-«raden für drei, aber die ächten Tangente ($y = o$) für vier ver-«einigte Punkte zählt. — Um mich den von Ihnen angeführten sehr «starken Specialitäten zu nähern, muss ich annehmen, dass der Kegel «P dritten Grades zerfalle in die Knotenebene x selbst und einen «Kegel zweiten Grades, d. h. dass P durch x theilbar sei. Die Basis «erscheint dann in der Nähe von K wie *zwei sich in K berührende* «*Flächen zweiten Grades.* Doch halte ich es für rathsam, sich hier «nicht zu tief in Specialitäten einzulassen.

«Obgleich ich durch das bisherige Ihre Fragen über Identität «oder Verschiedenheit gewisser Fälle hinreichend beantwortet glaube, «will ich doch noch ausdrücklich bemerken, dass der *hyperbolische* «*Knotenpunkt* (hyperbolisch - paraboloidischer Knotenpunkt) nur ein «Gränzfall ist zwischen zwei verschiedenen Lagen des hyperboloidischen «(reell verbundenen) Knotenpunkts. Halbiren wir die Winkel des «reellen Ebenenpaars durch zwei Ebenen, nennen diese x, y und «legen durch K senkrecht auf die vorigen noch eine Ebene z, so «können wir uns den Uebergang in einen ächten Kegel auf doppelte «Weise vorstellen, entweder so, dass die Ebene x den Kegel elliptisch «(d. i. nur in einem reellen Punkt) schneidet, oder dass die Ebene y «es thut.

«Um kein Missverständniss übrig zu lassen, gebe ich noch fol-«gende Uebersicht: *Knotenpunkt*; I. im Allgemeinen (Knotenkegel «ächt vom 2ten Grade, d. h. untheilbar) entweder α) reell verbunden, «oder β) isolirt; II. im Besondern: Kantenknotenpunkt (der Knoten-«kegel zerfällt in zwei Ebenen): 1^{0} im Allgemeinen, die zwei Ebenen «sind verschieden und entweder α) beide reell, oder β) beide con-«jugirt-imaginär; 2^{0} im Besondern: Planknotenpunkt (der Knotenkegel «besteht aus zwei vereinigten Ebenen); A. im Allgemeinen entweder «α) Dreispitzpunkt, β) Messerschneidepunkt; B. im Besondern, die «Knotenebene schneidet die Basis mit Rückkehrpunkt, durch den ein «freier Curvenzweig geht, und zwar entweder α) der Rückkehrpunkt «hat eine volle, oder β) leere Höhlung.

«Ueber die Fläche dritten Grades, welche *einen* Knotenpunkt hat, «sind Sie im Irrthum. Der Knotenkegel schneidet die Basis (im All-«gemeinen) in *sechs* verschiedenen Geraden; jede von diesen zählt «für *zwei sich nicht schneidende Cayley*'sche Gerade; alle 6 Paare ver-«einigter Geraden bilden einen Doppelsechser (Gitter) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ «wo immer je zwei entsprechende (sich also nicht schneidende) «Strahlen wie a_1 und b_1 zusammenfallen. Die 15 übrigen Geraden «c_{12}, etc. hingegen sind sämmtlich verschieden. Durch den Knoten-«punkt gehen 30 *Caylay*'sche Ebenen, welche paarweise zusammen-«halten, wie (a_1 b_2 c_{12}) und (a_2 b_1 c_{12}); hingegegen die 15 übrigen «Ebenen wie (c_{12} c_{34} c_{56}) sind sämmtlich verschieden.

«Was Sie über die Fläche dritten Grades mit *vier* Knotenpunk-«ten sagen, erkenne ich alles als richtig an, nur dass ich noch nicht «merke, was Sie mit den Strahlbüscheln meinen. Im Knotenpunkt-«tetraeder zählt jede Kante für 4 *Cayley*'sche Gerade. Nimmt man die «Polarebenen der Knotenpunkte in Bezug auf die den 4 Knotenkegeln «eingeschriebene Fläche zweiten Grades, so sind diese 4 *Sylvester*'-«sche Ebenen; und die 4 Geraden, in denen sie die entsprechenden «Tetraederebenen schneiden, liegen in der fünften *Sylvester*'schen «Ebene, und bilden hier ein Vierseit, dessen Diagonalen die drei «noch übrigen (einzelnen) *Cayley*'schen Geraden sind; durch jede von «diesen gehen zwei durch Gegenkanten gelegte Streifebenen der Basis. «Mich dünkt aber fast, ich habe Ihnen dieses schon geschrieben.

«*Ad 4.* Dass im Knotenpunkt n^{ten} Grades den Grad des von ihm «aus der Basis umschriebenen Kegels um n (n + 1) erniedrigt, hat «seine volle Richtigkeit; aber zu der Erklärung, die Sie beifügen, «dass nämlich der Knotenkegel selbst n + 1 mal dazu zu zählen sei, «kann ich nicht beistimmen, weil die Elimination nichts davon an-«zeigt. Wollten Sie denn auch bei einer ebenen Curve, die einen «n fachen Punkt hat, behaupten, wenn man sie als Schaar ihrer Tan-«genten auffasst, so sei jede der n Tangenten des Knotens n + 1 «mal zu zählen? Sie würden eher sagen, der Knoten sei ein n (n + 1) «mal zu zählender Strahlbüschel.

«*Ad 5.* Sie haben selbst das Wort *Schaar* in den Sprachge-«brauch eingeführt und wollen nun, nachdem Sie es unzählig oft ge-«braucht haben, erst noch definiren! Verstehen Sie denn unter *Schaar* «nicht eine unzählige Menge unendlich nahe auf einander folgender «geometrischer Gebilde, die des *allmäligen* Uebergangs in einander «fähig sind? In analytischer Sprache würde ich sagen: wenn in einer «Gleichung oder einem Systeme von Gleichungen, welches ein geo-«metrisches Gebilde darstellt, eine Constante variirt wird, so entsteht «eine Schaar, wenn deren 2, 3 . . . unter sich unabhängige variirt «werden, so entsteht eine Doppel-, dreifache, . . . Schaar. Dass Cur-«ven oder Flächen, die des allmäligen Uebergangs in einander fähig «sind, von gleichem Grade sein müssen, versteht sich dann von selbst. «— Die Franzosen gebrauchen das Wort successif, wenn ich nicht irre, «im Sinne vo *unendlich nahe auf einander folgend;* ich habe nun das «kurze Wort dem ellenlangen vorgezogen. Ich weiss nicht bestimmt, «ob sie im Gegenssatze dazu das Wort consécutif im Sinne von *durch* «*Zwischenräume getrennt auf einander folgend* gebrauchen. Es wäre «aber bequem, wenn man zwei einfache Wörter hätte, um diesen «Unterschied zu bezeichnen. — Ich kann mich nicht mehr erinnern, «wo ich von *drei successiven Flächen einer Doppelschaar* gesprochen «habe; doch denke ich, ich werde den schleppenden Beisatz, dass «der Ausdruck *im Allgemeinen* zu verstehen sei, weggelassen haben; «wäre hingegen die *Bedingung* hinzugekommen, dass die drei succes-«siven Flächen einer und derselben einfachen Schaar angehören soll-«ten, so würde ich dieses wohl ausdrücklich gesagt haben.

«*Ad 6.* Ich bin erstaunt darüber, dass Ihre einfache Betrach-«tung über den Grad x der Berührungscurve der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren einer Basis n^{ten} Grades mir nicht eingefallen ist. Ich «habe das System von Gleichungen, welches diese Berührungscurve «darstellt, durch Nachahmung des *Jacobi*'schen Verfahrens für die

«Doppeltangenten einer ebenen Curve erhalten — die Discussion ist «freilich viel schwieriger als bei den Curven — und habe genau den «Grad gefunden, den Sie so leicht geschlossen haben, ohne nur den «Zusammenhang mit der Classe der Abwickelbaren zu bemerken. Es «folgt dann ferner daraus, dass die Anzahl der Ebenen, welche die «Basis in einer Curve schneiden, die zugleich einen Rückkehrpunkt «und einen Doppelpunkt hat, $4\,n\,(n-2)\,(n-3)\,(n^3+3n-16)$ ist, al- «so 1920 für die f^4. — Wenn α den *Grad* der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren und β die Anzahl der dreifach berührenden Ebenen be- «zeichnen, so ist demnach

$$2\alpha + 3\beta = \frac{1}{2}\,n\,(n-2)\,(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45\,n^4 + 118\,n^3 - 115\,n^2 + 508\,n - 912).$$

«Für $n = 4$ sehe ich die Möglichkeit vor, α zu bestimmen; aber ich bin «noch nicht im Stande gewesen, die Discussion der betreffenden Systems- «gleichungen befriedigend abzuschliessen. Für $n > 4$ verzweifle ich «daran, α oder β je finden zu können. — Wenn in meinem Schlüssen «nicht irgendwo ein Trug untergelaufen ist, so hat jene Berührungscurve «der doppelt umschriebenen Abwickelbaren die merkwürdige Eigenschaft, «dass sie eine *Vollcurve* ist, und mein Verfahren, dieselbe darzustellen, «führt, auf die Fläche dritten Grades angewandt, direct zur Auffindung «einer (aus einer vielfachen Schaar) Fläche 9ten Grades, welche durch «die 27 *Cayley*'schen Geraden geht.

«Ihren Schluss auf die Grade der zwei Berührungscurven der «zweien Flächen umschriebenen Abwickelbaren muss ich als richtig «anerkennen.

«Ist n der Grad der Basis (nach Classe frei), g, k Grad und Classe «einer Doppellinie oder Rückkehrlinie desselben, so erniedrigt jene «an sich die Classe der Basis um $g\,n + 2\,k$, diese an sich um $2\,g\,n + 3\,k$, «d. h. abgesehen von singulären Punkten einer jeden. — Jede Stelle, «wo drei Lappen der Fläche sich frei durchschneiden, an sich erniedrigt «die Classe um 3. Die Berührungsebene π, die mit Selbstberührungs- «punkt schneidet, sieht polarisirt so sonderbar aus, dass ich keine Be- «schreibung wage; mit grosser Mühe habe ich bewiesen, dass dieser «complicirte Punkt die Classe um 6 erniedrigt. — Jeder Punkt endlich, «wo ein Lappen der Fläche ihre Rückkehrlinie frei durchschneidet, «ihre Doppellinie also einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt hat, erniedrigt «die Classe der Fläche um 4.

«*Ad* 2⁰ Ich werde Ihnen über die gemeinsam umschriebene «Abwickelbare zweier Flächen, die sich berühren, später antworten. «Ich hatte sogleich nach Empfang Ihres zweiten Briefes angefangen, «diese Abwickelbare für zwei sich berührende Flächen zweiten Grades «aufzusuchen; da ich aber nicht weiss, wie lange mich noch die Ent- «wicklung einer 5-stelligen Determinante, die erst nach Entfernung «eines jetzt noch nicht sichtbaren linearen Factors das Gradespolynom «jener Abwickelbaren geben wird, aufgehalten hätte, so beeile ich mich «Ihnen endlich einmal zu antworten. Für jetzt nur so viel, dass mir «die Wendeebene der Abwickelbaren, die einem Rückkehrpunkt der «Durchschnittscurve entsprechen soll, spanisch vorkömmt!

«Nun sollte ich auf Ihren ersten Brief antworten. Es sind aber «darin theils Sachen, die kaum einer Bestätigung bedürfen, oder die «ich Ihrer freien Willkür überlassen muss, theils Betrachtungen, in «denen ich keine grössere logische Kraft zu erkennen vermag, als in «den entsprechenden eigenen, theils Betrachtungen, denen ich noch nicht «habe folgen können. Ich werde später im Einzelnen zu antworten «suchen. — Ihren Auftrag an *Leuenberger* habe ich besorgt. — Die «versprochenen Berliner-Dissertationen nehme ich recht gerne an und «werde sie an die betreffenden Herren vertheilen.

«Ihnen Glück, Kraft und gute Gesundheit wünschend

«Bern, den 7. März 1855. Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich vermuthe zwar, dass Sie meinen Brief, den ich wahrschein- «lich am 6. März Morgens um 9 Uhr auf die Post gethan habe, so- «gleich nach dem Abgang des Ihrigen werden erhalten haben. Da er «aber auch verloren sein könnte, so muss ich Sie nun bitten, mir so «zu sagen mit umgehender Post anzuzeigen, ob Sie ihn erhalten haben. «Ich habe mich darin bemüht, vorzüglich die auf den Grad bezüglichen «Eigenschaften des Knotenpunkts einer sonst *nach Grad möglichst* «*freien* Fläche, und seiner nächsten Degenerationen in den *Kanten-* «*knotenpunkt* und (noch spezieller) in den *Planknotenpunkt* deutlich «und in logischer Ordnung anzugeben. Ihr letzter Brief offenbart mir «aber eine so tiefe Verschiedenheit unserer Auffassungen dieses Gegen- «standes, dass ich mich bewogen fühle, noch einige Worte beizufügen.

«Wenn wir einer (als Doppelschaar von *Punkten* gefassten) Fläche die «geringste Beschränkung auflegen, so ist es die Existenz eines Kno-«tenpunkts. Halten wir nun diesen fest und setzen ihm irgend eine «feste Ebene gegenüber, so wird diese vom Knotenkegel in irgend «einem Kegelschnitt geschnitten. Da wir aber die Fläche nach *Grad* «aufgefasst haben, so müssen wir konsequenter Weise den Knotenkegel «als Schaar von Strahlen, den Kegelschnitt also als Schaar von Punkten «auffassen. Nun möchte ich fragen, ob denn da nicht die nächste, mit «einer einzigen neuen Bedingung zu erreichende Degeneration die «eines Paares verschiedener Gerader sei, und ob nicht erst zuletzt «die ärgste, weil drei Bedingungen erfordernde, Degeneration in zwei «vereinigte Gerade zu setzen sei. Im letzten Falle ist es der Punkt-«oder Gradesauffassung völlig fremd, den Punkt auf der, durch Vereini-«gung zweier, entstandenen Geraden irgendwo anhalten zu wollen, «mag nun das Gebilde aus der Ellipse oder aus der Hyperbel degene-«rirt sein. Ein Paar geschiedener Punkte, also ein Gebilde *nullten* «Grades, dürfen wir gewiss nicht an die Stelle einer Curve zweiten «Grades setzen! — Die Sache verhielte sich freilich anders, wenn wir «den Kegelschnitt als Schaar seiner Tangenten (nach Klasse) auffassten; «dann wäre die nächste Degeneration ein Paar geschiedener Strahl-«büschel, und erst die letzte ein Paar vereinigter Strahlbüschel; aber «auch bei diesem würden Sie doch gewiss nicht die Strahlen auf die «zwei leeren Scheitelwinkel der Hyperbel beschränken wollen; sondern «wenn Sie einmal den Strahlbüschel gesetzt haben, so dreht sich der «Strahl ohne Aufenthalt ringsum; ein Paar verschiedener Geraden, «als Gebilde *nullter* Klasse, an die Stelle eines Kegelschnittes gesetzt, «wäre nun bei der Klassenauffassung eben solcher Unsinn, wie das «Punktenpaar bei der Gradesauffassung. — Ich halte daher an dieser «Rangordnung fest: Zuerst der Knotenpunkt schlechthin (zweiten Gra-«des), 1 Bedingung für die Fläche; dann der Kantenknotenpunkt, «2 Bedingungen (im Ganzen); zuletzt der Planknotenpunkt, 4 Bedin-«gungen. Der erste erniedrigt die Klasse der Fläche um 2, der zweite «um 3, der letzte um 6. — Die Scheidung zwischen Reellem und Ima-«ginärem ist untergeordneter Natur, und darf daher nicht die Haupt-«eintheilung abgeben.

«Das Polare, Streifebene einer nach Klasse möglichst freien Flä-«che, ist entweder reine Uebersetzung alles für die Gradesauffassung «Gesagten; oder aber, wenn wir diese neuen Gebilde nun auch nach «Grad anschauen wollen, so müssen wir vorher am Knotenpunkt der

«Gradesfläche die von ihm oder sehr nahen Punkten aus umschriebe-«nen Kegel gehörig studirt haben; dieses ist aber gar nicht leicht; «und ich bin jetzt noch nicht im Stande, darüber zergliederte Aus-«kunft zu geben.

«Bei dem einer Gradesfläche n^{ten} Grades umschriebenen Kegel «ist $r = n(n-1)(n-2)$; denn der Rückkehrstrahl berührt die Basis «da, wo die erste und zweite Polare des Kegelscheitels durchgehen; «$w = 4n(n-1)(n-2)$; denn die Wendestrahlen berühren die Basis «da, wo erste Polare und Kernfläche Q durchgehen;

$$d = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

«Wird diese Fläche von einer Ebene geschnitten und werden «längs des Schnitts Berührungsebenen an sie gelegt, so bilden diese «eine Abwickelbare $n(n-1)$ ter Klasse und $n(3n-5)$ ten Grades; «ihre Rückkehrlinie scheint nur vom $6n(n-2)$ ten Grade zu sein; «denn sie berührt die Ebene in den Wendepunkten des Schnitts, und «ich wüsste nicht, wo sie ihr sonst begegnen könnte.

«Wenn bei der Klassenauffassung eine Ebene die Rolle des Pols «übernimmt, dürfte man ihr vielleicht einen andern Namen, etwa *Po-«lane* geben. Ihr Satz über den (letzten) Polarpunkt der unendlich «entfernten Ebene ist richtig; nur sind die Worte «gefällten Perpendikel» «aus Versehen weggelassen.

«Ihren Auftrag an Prof. *Vogt* werde ich sogleich besorgen. Herrn «*Chelini* habe ich leider noch nicht geschrieben. Bleiben Sie nun «einmal bei *Büschel, Gebüsch, Netz* stehen; denn *Geflecht* ist um kein «Haar besser als Gebüsch; sonst entsteht zwischen uns zweien baby-«lonische Sprachverwirrung.

«Wenn eine f^3 einen Kantenknotenpunkt hat, so enthält jede «Knotenebene drei vom Knotenpunkt ausgehende Gerade (von freier «Lage), deren jede *drei* sich nicht schneidende Cayley'sche Gerade in «sich vereinigt. Die übrigen 9 Cayley'schen Geraden sind vereinzelt «und werden von einem Triederpaar gebildet. Jede Knotenebene «vereinigt in sich 6 Dreiseite. Legt man durch je eine Gerade der «einen und irgend eine der andern Knotenebene eine Ebene (was 9 «mal geschieht), so vereinigt diese Ebene 3 Dreiseite in sich. Es «bleiben nur noch 6 vereinzelte Dreiseite übrig, die vom Triederpaar «gebildet werden und nicht durch den Knotenpunkt gehen. — Beim «Planknotenpunkt vereinigt jede der drei in der Knotenebene befind-«lichen Geraden in sich 4 Paare sich schneidender Cayley'scher Ge-«raden, so dass nur noch 3 vereinzelte Cayley'sche Gerade übrig bleiben, «welche ein getrenntes Dreiseit bilden. Durch jene 3 ersten Geraden «gehen 3 Streifebenen der Fläche. In die Knotenebene fallen 32 Dreiseite «(von den 3 Streifstrahlen gebildet, also nullen Inhalts); in jede Streif- «ebene fallen 4 Dreiseite (schmal und lang); 1 Dreiseit ist vernünftig. «— Sie herzlich grüssend

«Bern, den 13. März 1855, Abends 7 Uhr.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

18. März 1855. [1])

«*Treuer Freund!*

«Kaum hatte meine Dienstbare das Haus mit meinem Brief ver- «lassen, als mich der Briefträger mit dem Ihrigen herausklingelte. «Ich danke sehr für die schätzbaren und willkommenen Aufschlüsse.

«Dass Sie aber seit zwei Monaten meinen ersten Brief unbe- «achtet gelassen — *müht* mich sehr. Ueber den zweiten machen «Sie mir den Kopf gross, dagegen den ersten erklären Sie am Ende «Ihres vorletzten Briefes — wenn auch nur indirect für Blödsinn. «Dennoch hat mir der erste ungleich mehr Mühe gemacht; er ist «aus einem Wust von 9 Bogen Manuscript ausgezogen, und schwellte «meine Brust mit froher Hoffnung: Sie würden schöne Ergänzungen «und Erweiterungen darauf bauen! Er muss Sie bei reichem anderm «Lieblingsfutter getroffen haben. Beweist er nicht die zwei Sätze, «welche Sie im Entwurf in Klammern ( ) nur *als wahrscheinlich* an- «gaben? Zudem enthält er den Stoff zur reichhaltigen, eines Schul- «meisters würdigen Erweiterung und Ausstaffirung des „§ *über die* «*Bestimmbarkeit der Flächen durch Punkte*“. Da ich eben mit Redi- «giren daran komme, so bitte ich sehr auch diesem Plunder einige «Theilnahme zu schenken. Lassen Sie für kurze Zeit andere Partien «des Universums fahren, um mir recht bald das Ergebniss der Ver- «besserung zuzusenden. Die analytischen Deductionen können Sie «meist sparen, und nur die *sichern Resultate* angeben, da ich — im «Bewusstsein meines hocherhabenen synthetischen Standpunkts — doch «nirgends davon Gebrauch machen darf. Daher beurtheilen Sie mich «auch falsch, wenn Sie oft wähnen, ich schaue die Gegenstände eben- «falls in ihren analytischen Gründen an.

---

[1]) Dazu existirt ein Concept vom 17.—19. März 1855.

«Diesmal habe ich keine neue Fragen vorzulegen; nur sah ich «beim Vorbeifliegen den folgenden Satz:

«Wird einer f^3 aus beliebigem Pol P ein Kegel umschrieben, «der sie in einer R^6 berührt und nebstdem in einer $R_1{}^6$ schneidet, «so gehen durch diese zwei Curven beziehlich zwei Flächen f^2 und «$f_1{}^2$, welche einander umschrieben sind, und zwar liegt ihre Berühr-«ungscurve in der allen drei Flächen f^3, f^2 und $f_1{}^2$ gemeinsamen «Polarebene des Pols P in Bezug auf dieselben, so dass also der den «Flächen f^2 und $f_1{}^2$, längs der Berührungscurve gemeinsam umschrie-«bene Kegel seinen Scheitel im Pol P hat.

«Allerdings zählt jede der n-Tangenten im n-fachen Punkt einer «C^m für $n+1$ Tangenten, wofern man die C^m als von der $m(m-1)$ «Klasse ansehen will, was häufig erforderlich ist. Die von Ihnen ge-«machte Unterscheidung ist mir nicht recht klar, vielleicht wird es «nachträglich noch kommen.

«Morgen werde ich meine Vorlesungen schliessen. Es harrten «nur 3 Zuhörer bis an's Ende aus; davon sind zwei Eidgenossen: der «Sohn des alten *Sidler*[1]) (Zug-Zürich, Commissär in Mailand) und der «Sohn meines Universitätsgenossen Prof. *Hagenbach*[2]) in Basel; sie sind «die einzigen bezahlenden, alle übrigen gestundet. Ich stand also in «diesem Semester pekuniär nicht viel besser als Sie.

«Heute früh fiel hier starker warmer Regen, von Süd und Süd-«west her; der Schnee schmolz mit Macht; jetzt um 12 Uhr scheint «die Sonne schön, wie über Lord *Raglan's* Lager vor Sebastopol. — «Indem ich Ihnen das Wylerfeld[3]) auch schneefrei wünsche, grüsse ich «dankbarlich und herzlich

«Ihr

J. Steiner.»

«Berlin, den 18. März 1855.

«Wer am 18. März 1796 geboren, verlebt heute seinen 60ten Ge-«burtstag. — Es ist erschrecklich die Arbeiten und Pläne noch un-«vollendet herumliegen zu haben! Die Unfähigkeit nimmt zu — wie

---

[1]) Professor Dr. G. Sidler, mein verehrter Lehrer und Kollege.

[2]) Professor E. Hagenbach-Bischoff in Basel.

[3]) Bevorzugter Spaziergang Schläfli's.

«lange wird's noch dauern bis der *jüngste* Tag — die *Auflösung* «eintritt!

«Lese ich recht, proponiren Sie für die Ebene, welche die Rolle «des Pols übernimmt, den Namen *Polane* und nicht *Polare?*

«Oh Gedächtniss! Oh Schafskopf!»

4$^{\text{ter}}$ Brief[1]). März 17—19. Cima's vom 13. erst 17. 2 Uhr erhalten.

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

«Wenn z. B. eine Curve sammt ihrer Ebene sich um eine «ihrer Tangenten herumbewegt (auch eine Raumcurve mit dem «ganzen Raume sich um eine ihrer Tangenten, als feste Axe.) «Der andere Fall könnte so erzeugt werden, dass die Curve um die «Normalen in einem ihrer Wendepunkte oder in einem Selbstberüh- «rungspunkt herumbewegt wird. — Es sind nicht Übergangsfälle, «sondern Grenzfälle des hyperboloidischen Knotenpunkts, und daher «habe ich gefehlt, dass ich in der Reinschrift den ersten Fall *para- «boloidisch* genannt habe.

«Zerfällt der Knotenkegel in 2 Ebenen die *reell* oder *imaginär* «sind, so heisst jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch.* Wie «schwer es mir wird einzusehen, dass dabei in jeder der beiden Ebenen «drei t liegen, habe ich Ihnen schon unterbreitet und erwarte *sichere* «Auskunft.

«Hat die f^3 einen kp, so wird sie vom Kk längs dreien Strahlen «s berührt; und daher hat f^3 die längs diesen s berührenden 3 Ebenen «zu *Dehn-Streifebene* (oder Voll- oder wie man sie heissen soll) Ebenen. «Hat f^3 vier Knotenpunkte, die ein Tetraeder T bestimmen, so berührt «jeder Knotenkegel längs der 3 anliegenden Kanten, und je zwei be- «rühren sich längs einer Kante und haben daher noch einen durch «die zwei andern kp gehenden ebenen Schnitt C^2. Die Ebene der sechs «C^2 gehen durch einen Punkt Q. Die 4 Knotenkegel sind einer f^2 «umschrieben, welche die 6 Kanten des T berührt; und die f^3 hat 6 «Dehnebenen, die sie längs der 6 Kanten von T berühren und die «Ecken zu Grenzpunkt haben. — Für die Fläche *dritter Klasse* ist alles «analog.

---

[1]) Zum Teil ein Concept zum Brief vom 18. März 1855 wenigstens bis zum Ausdruck «analytischen Gründen an».

4. «Braucht (man) *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen «*eine* «*Doppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt worden «gleichen «Grads» oder «gleicher Klasse»? oder liegt dies schon drin? Kann «man bei einer Doppelschaar Fläche «von drei successiven Flächen» «sprechen, da doch jede gleichsam von einer Schaar nächstfolgenden «umgeben ist?

5. «Da wir die Klasse der einer f^m doppeltumschriebenen Ab«wickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berührungscurve «R^x zu finden sein. Denn ist jene Klasse $= \mu$, so gehen durch jeden «P μ-Doppelebenen und daher schneidet die erste Polare f^{m-1} von P «die R^x in $2 \times \mu$ Punkten, so dass $(m - 1) \times x = 2 \mu$, also «$x = \dfrac{2 \mu}{m - 1}$ ist.

«Bei zwei gegebenen Flächen f^m und f^n ist die ihnen gemeinsam «umschriebene Abwickelbare von der $m (m - 1)^2 \times n (n - 1)^{2\text{ten}}$ «Klasse; ihre B. C. M^μ und N^ν mit den Flächen werden also von

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

Schläfli an Steiner.

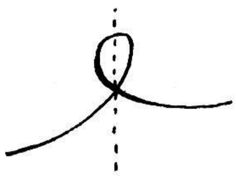
Lieber Freund!

«(18. März.) Ich fühle mich veranlasst, eine falsche Vorstellung «über die *Streifebene* wegzuräumen, die sich voriges Jahr in Bern uns «im Gespräch über diesen Gegenstand aufgedrungen hatte, als ob «nämlich ihr Berührungs- oder Streifkegelschnitt als *dreifacher* (!) «Bestandtheil ihres ganzen Schnitts mit der Basis zu zählen wäre. «Um die Sache zu entscheiden, ziehen wir in der Streifebene eine «beliebige Gerade und fragen uns, wie oft jeder der zwei Punkte «zählt, in denen sie den Streifkegelschnitt schneidet. Ist die Basis «von der nten Classe und rücksichtlich dieser möglichst wenig be«schränkt, so muss die vom Grade $n (n - 1)^2 - 2$ sein; die Gerade «schneidet also die Basis im Ganzen nur in soviel Punkten.

«Polarisiren wir nun zurück, so heisst die Frage: Wie viele «Berührungsebenen können an eine Basis nten Grades, die einen «Knotenpunkt hat, durch einen von diesen ausgehenden Strahl gelegt «werden? Die Analysis antwortet: Nur $n (n - 1)^2 - 6$, deren Be«rührungspunkte nicht mit dem Knotenpunkt zusammenfallen. Es «gehen also nur 4 Berührungsebenen verloren, nicht 6; denn die

«Classe der Fläche ist nur $n\ (n-1)^2-2$. Diese 4 verlorenen «Ebenen sind wohl in den zwei durch jenen Strahl an den Knoten-«kegel gelegten Umschreibungsebenen wieder zu finden, wenn jede «doppelt gezählt wird. — Demnach schneidet die Streifebene einer «Basis nter Classe dieselbe in dem *doppelt* zu zählenden Streifkegel-«schnitt und ausserdem noch in einer Curve vom Grade $n\,(n-1)^2-6$ «und der Classe $n\ (n-1)-6$. Ist die Basis von dritter Classe, «so besteht diese Curve nur aus den 6 ausgezeichneten Tangenten des «Streifkegelschnitts.

«Gradesauffassung: Der aus dem Knotenpunkt einer Fläche drit-«ten Grades dieser umschriebene Kegel besteht aus dem doppelt zu «zählenden Knotenkegel und denjenigen 6 Ebenenbüscheln, in deren «Axen sich je zwei entsprechende (also sich nicht schneidende) Strahlen «des durch den Knotenpunkt gehenden Doppelsechsers vereinigen. — «Mich dünkt, diese Ansicht sei auch durch geometrische Betrachtung «zu rechtfertigen. Denken wir uns eine Curve mit Knotenpunkt, «welche von einem durch diesen gehenden Strahl symmetrisch ge-«theilt wird,



nehmen auf diesen Strahl nahe beim «Knotenpunkt (auf der convexen Seite der Zweige) einen Punkt an und «ziehen von da aus die 4 gewöhnlichen Tangenten, deren Berührungs-«punkte in der Nähe liegen. Indem wir jetzt die Figur um die Axe der «Symmetrie herumdrehen, erhalten wir auch zugleich *zwei* umschriebene «Kegel, die beim Zusammenfallen ihres Scheitels mit dem Knoten-«punkt sich endlich im Knotenkegel vereinigen.

«(23. März.) Da ich fürchte, es möchte zu lange dauern, bis ich «alle die *Streifebene* betreffenden Einzelheiten erledigt habe, so fange «ich an, das sicher gewordene niederzuschreiben.

«1⁰. Die *gemeine Streifebene berührt* die Fläche nter Classe längs «eines Kegelschnitts und zwar in 6 Intervallen abwechselnd von oben «und von unten. Diese Intervalle sind durch die Berührungspunkte «der 6 *ausgezeichneten Tangenten* getrennt, längs denen 6 Lappen «der gemeinsamen Abwickelbaren des Kegelschnitts und der Basis «die Streifebene berühren. Diese 6 t haben dieselbe Eigenschaft in «Beziehung auf die der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebenen

«Abwickelbaren, und sind zugleich höchst wahrscheinlich Tangenten «dieser Rückkehrlinie. — Die Streifebene schneidet die Basis ausser- «dem in einer Curve Grades $n (n - 1)^2 - 6$ und Classe «$n (n - 1) - 6$.

«2°. Die *Gerad-Streifebene* (mit reellem Punktpaar A, B) *osculirt* «die Basis längs der Streifgeraden A, B und schneidet sie ausserdem «in einer Curve Grades $n (n - 1)^2 - 6$ und Classe $n (n - 1) - 6$. «(Der Gerad der Fläche ist nämlich nur $n (n - 1)^2 - 3$). Denkt «man sich A B vorwärts gerichtet, und ist zwischen A und B der «Sinn der Wendung von links unten nach rechts hinauf, so ist er ausser- «halb von links oben nach rechts hinunter. Von den 6t gehen drei durch «A, drei durch B (sonst ihre Lage frei). Verbindet man je eine von «jenen mit einer von diesen, so erhält man ein Dreieck F G U (auf 6 «Arten; ich spreche aber nur von irgend einer aus diesen), so dass nun «A F, A G, A U; B F, B G, B U die sechs ausgezeichneten Strahlen «(Tangenten) sind. Man betrachte die Streifgerade A B als Transver- «sale des Dreiecks F G U, und nehme den zugeordneten Punkt F «(Schwerpunkt, wenn A B unendlich entfernt). Die *Classen-Kernfläche* «hat dann das Dreieck A B Γ zur *Dreipunkt-Streifebene* (dritter Classe). «Man zeichne nun eine Curve u dritten Grades, welche Γ zum Doppel- «punkt und die Seiten des Dreiecks F G U zu Wendungstangenten «hat, deren Punkte auf der Streifgeraden A B liegen und ziehe end- «lich aus A und B an die u die *acht gewöhnlichen Tangenten* τ. «(Diese werden immer dieselben Geraden sein, welches von den 6 «möglichen Dreiecken F G U man auch gewählt haben mag.) Nun, die «der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare sendet «8 Lappen hin, um die Streifebene längs den 8 soeben construirten «τ zu berühren. Wie die Rückkehrlinie in A und B selbst aussieht «und was sie da für Tangenten hat, wage ich noch nicht zu ent- «scheiden. Es wird unten (Kernflächen!) etwas kommen, das Sie «hieher beziehen können.

«3°. Die *Punkt-Streifebene* (mit zwei vereinigten Punkten O) «hat 3 ausgezeichnete Punkte F, G, U (eine noch unklare Art von «Knotenpunkten), *berührt* die Fläche längs der Strahlen O F, O G, O U «und schneidet sie ausserdem in einer Curve Grades $n (n - 1)^2 - 12$ «und Classe $n (n - 1) - 6$; (denn der Grad der Fläche ist nur «$n (n - 1)^2 - 6$.) Man umschreibe dem Dreieck F G H einen «Kegelschnitt K harmonisch zum Streifpunkt O, (d. h. wenn O der «Schwerpunkt ist, so sind die Tangenten des Kegelschnitts in den

«Ecken parallel mit den Seiten). Die Classen-Kernfläche hat dann die «Streifebene zu einer solchen 4ter Classe, indem die Streifcurve aus K «und dem doppelten Punkte O besteht. Die der Basis längs ihrer «Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare *osculirt* die Streifebene «längs der von O aus an K gehenden zwei Tangenten und *berührt* «*sie zweilappig* längs jeder der Geraden OF, OG, OH; jede von «diesen (eigentlich ein t paar) ist Selbstberührungsstrahl der Ab-«wickelbaren.

«Sie sehen aus dem Bisherigen, dass ich die Kernfläche einer «Fläche n^{ten} *Grades* für den gemeinen, den Kanten- und den Plan-«knotenpunkt untersucht habe. Da bei der Classenauffassung manches «nicht deutlich vorgestellt werden kann, was für die Gradesauffassung «leicht ist, so suche ich das Vorige noch durch einige *vom Grad aus* «gemachte Bemerkungen zu ergänzen. Sie erinnern sich vielleicht «aus dem perhorrescirten analytischen Beweise für die *freie* Lage der «6 ausgezeichneten Strahlen des Knotenkegels, selbst wenn dieser «in ein Ebenenpaar übergeht, (den ich, unschuldig genug, in der «guten Absicht anbrachte, um Sie von der Richtigkeit meiner An-«schauung zu überzeugen), dass ich ausser dem Knotenkegel N noch «einen Kegel P dritten Grades mit gleichem Scheitel gebrauchte, um «die 6 ausgezeichneten Strahlen jenes N darzustellen. Nun dieser P «ist in allen drei Fällen vollkommen frei, hat aber an sich keine Be-«deutung; sondern wenn man zu N noch irgend eine durch den «Knotenpunkt gehende Ebene hinzunimmt, um einen Kegel dritten «Grades zu haben, der mit P einen Büschel bestimmt, so *darf* P durch «jeden Kegel dieses Büschels ersetzt werden. Ist N ächt, so sind in «diesem Büschel 15 Trieder; 6 wenn N ein Paar getrennter Ebenen «ist; endlich nur 1 Trieder, wenn N eine doppelte Ebene ist. Im «letzten Falle bekömmt das Trieder wesentliche Bedeutung; der Schnitt «einer Ebene desselben wird (im Unendlichkleinen betrachtet) von «der Selbstberührungstangente (in der Knotenebene) symmetrisch ge-«theilt, so dass die Krümmungshalbmesser der sich berührenden Zweige «der Schnittcurve gleich und entgegengesetzt sind: während jeder «andere durch denselben ausgezeichneten Strahl geführte ebene Schnitt «zwar auch noch den Knotenpunkt zum Selbstberührungspunkt hat, «aber auf allgemeine Weise. Ich schreibe nun diesem Trieder einen «Kegel zweiten Grades ein, so dass jeder Berührungsstrahl mit dem «entsprechenden ausgezeichneten Strahl der Knotenebene harmonisch «ist in Bezug auf die zwei betreffenden Kanten des Trieders. Dieser

«Kegel J möge die Knotenebene in den zwei Strahlen i schneiden. «Dann hat die *Kernfläche* hier einen Knotenpunkt 4^{ten} Grades, be«stehend aus der doppelten Knotenebene und dem Kegel J; und ihr «Schnitt mit der Basis sendet 1. zwei Paare von Zweigen in den «Knotenpunkt, welche die Strahlen i zu Rückkehrtangenten haben, «aber den Kegel J auf gewöhnliche Weise berühren; 2. drei Paare «von Zweigen, welche die drei ausgezeichneten Strahlen (in denen «das Trieder die Knotenebene schneidet) zu Selbstberührungstangenten «haben, aber die Triederebenen auf gewöhnliche Weise berühren.

«Beim Kantenknotenpunkt will ich, was den Schnitt der Kern«fläche und Basis betrifft, nicht das schon Gesagte zurück polarisiren; «es ist bei der Classenauffassung wohl deutlich genug ausgedrückt.

«Nun etwas, was für die Classenaufführung auch von Wichtig«keit wäre, indem es die Stellen der Rückkehrlinie betrifft, wo ihre «Tangente zusammenfällt mit dem Strahl der längs ihr der Basis um«schriebenen Abwickelbaren. Sie wissen, dass eine freie Fläche n^{ten} «Grades $2n(n-2)(11n-24)$ Stellen π hat, wo sie von der Be«rührungsebene mit Selbstberührungspunkt geschnitten wird. Ich «habe nun analytisch sicher bewiesen, dass ein gemeiner Knotenpunkt «24 solche π verschlingt, ein Kantenkontenpunkt 36; für den Plan«knotenpunkt ist mir die Discussion des verwickelten Systems von «Gleichungen noch nicht gelungen; aber, wenn man von der Fläche «3^{ten} Grades aus schliessen darf, so muss er 48 π verschlingen.

«Beim gemeinen Knotenpunkt bekömmt wohl jeder der 6 Curven«zweige, welche die Kernfläche mit der Basis gemein hat, 4 solche «verschlungene π; aber beim *Kantenknotenpunkt* entsteht die wun«derliche Frage, wie man die 36 π auf die 8 Curvenzweige ver«theilen soll.

«Ich habe die Classengleichung einer Fläche 3^{ten} Grades mit «Planknotenpunkt (die also durch 15 gegebene Punkte bestimmt wird) «entwickelt und mittelst derselben eine klare Anschauung gewonnen, «wie eine Fläche 6^{ten} Grades und 3^{ter} Classe mit einer Punkt-Streif«ebene in der Nachbarschaft des zweieinigen Streifpunkts aussieht. «Um schulmeisterlich zu reden, denke ich mir ein reguläres Tetraeder «FGHZ und fälle aus der Spitze Z auf die Basis FGH die senkrechte «ZO. Dann soll die Basis die Streifebene, O der zweieinige Streif«punkt, und OF, OG, OH, die drei ausgezeichneten (zweieinigen) «Strahlen sein. In der Basis brauche ich Polarcoordinaten, wo der «Leitstrahl (radius vector) r von O ausgeht und mit dem ersten Strahl

«OF den Winkel $180^{0} + \varphi$ bildet; die dritte Coordinate z sei der «senkrechte Abstand eines Punkts der Fläche von der Basis. Be-«deutet nun a eine constante Linie, und ist $\frac{r}{a}$ unendlich klein, so «hat die Fläche hier einen obern und einen untern Lappen (wenig-«stens wenn man nur positive Werthe von r betrachtet), deren «Gleichungen

$$«2a^2z = -r^3 \cos^2 \frac{3\varphi}{2} \text{ und } 2a^2z = + r^3 \sin^2 \frac{3\varphi}{2}$$

«sind. Die Streifebene wird also ringsum von der Fläche doppelt oscu-«lirt, vom obern Lappen längs der positiven Strahlhälften OF, OG, OH «gestreift, vom untern längs den negativen Hälften. Ich muss aber «zwischen hinein etwas corrigiren. Nur die Basis FGH soll ein regu-«läres Dreieck sein, die Wände FGZ, GHZ, FHZ soll darauf senkrecht «stehen und um a von O entfernt sein; der Scheitel Z liegt also un-«endlich weit weg; er ist der einzige freie Triederknoten der Fläche, «welche die Geraden ZF, ZG, ZH enthält. Die Classen-Kernfläche «reducirt sich auf den doppelt zu zählenden Streifpunkt O und den «aus diesem Centrum durch F, G, H gelegten Kreis. Die ihr und der «Basis gemeinschaftliche Abwickelbare ist der letztern längs ihrer «Rückkehrlinie umschrieben, welche eigentlich vom 24sten Grade sein «sollte; ihr ächtes untheilbares Stück ist aber nur vom 6ten Grade; «es gehen nämlich durch eine Fläche dritten Grades und eine Um-«drehungsfläche zweiten Grades, deren Gleichungen

$$«(6a - z)\, r \cos 3\varphi + 9a^2 + 4az - z^2 = o,$$
$$«9r^2 + 4z^2 - 24az = o$$

«sind. Der Verlust ist zum Theil zu erklären, durch die drei Geraden «OF, OG, OH, deren jede 4 mal zählt; aber das fehlende 6 weiss ich «nicht herauszubringen. Aus der Gradesauffassung durch Polari-«sirung hinüber zu schliessen, müssten die vom Centrum O an den «Kreis gehenden zwei Tangenten eine Rolle spielen, indem jede die «Zahl 3 verschlänge; aber diese liegen gar nicht in der Basis, son-«dern schneiden sie nur im Centrum 6-punktig. — So weit die Schul-«meisterei. Verwandeln Sie nun perspectivisch nach Belieben, und Sie «haben den wahren Begriff von der Sache.

«Ich habe auch die Polarisirung der Fläche dritten Grades mit «Kantenknotenpunkt (also 9ter Classe) unternommen. Merkwürdiger «Weise gelingt sie mittelst der *Steiner-Hesse-Aronhold*'schen Theorie «der Wendepunkte der Curve dritten Grades. Aber die hiezu nöthigen «Entwicklungen werden noch längere Zeit in Anspruch nehmen.

«(25. März.) Um nichts zu unterlassen, was bei den classischen «Flächen mit Streifebene zur Veranschaulichung beitragen kann, habe «ich die Gegend des Punkts untersucht, wo der Streifkegelschnitt «von einer seiner 6 ausgezeichneten Tangenten t berührt wird, also «die Längsberührungs- oder Streifungsweise der Basis aus einer obern «(über der horizontal gedachten Streifebene) in eine untere übergeht. «Der Punkt ist ein sehr specialisirter Planknotenpunkt P der Basis, «wo nämlich alle drei ausgezeichneten Strahlen der Knotenebene mit «t zusammenfallen. Ein durch P frei geführter ebener Schnitt schnei- «det die Basis mit Rückkehrpunkt; aber ein durch t geführter ebener «Schnitt sendet zwei horizontale Zweige durch P, welche beide hier «einen Wendepunkt haben. Will man die Gegend der Fläche um P «herum im unendlich kleinen in erster Annäherung ausdrücken, so «bedarf man hiezu einer Fläche 6$^{\text{ten}}$ Grades. Nehmen wir die t als «erste Axe, senkrecht darauf in der Streifebene eine zweite, und senk- «recht auf diese Ebene eine dritte Axe des Coordinatensystems an, «und setzen dann die der ersten Axeparallele Abmessung als unend- «lich klein erster Ordnung, so sind die zwei folgenden Abmessungen «oder Coordinaten resp. zweiter und dritter Ordnung. Hebt man «durch Dehnung der zweiten und dritten Axe das Missverhältniss auf, «so dass die Fläche nach allen Richtungen von gleicher Ordnung er- «scheint, so zeigt sie eine Doppellinie, welche in P die Axe t und «die Streifebene berührt, und durch eine Art enger in P sich zu- «spitzender Röhre entsteht, aus welchem Vorgang, wie ich glaube, Sie «sich das Umschlagen der Streifungsweise aus oben in unten werden «veranschaulichen können. Da hier 4 π zu Grunde gehen, so muss «ausser der Rückkehrlinie auch noch die Doppellinie hieher gelangen, «aber ihr beiderseitiges Verhalten vermag ich mir nicht recht klar «zu machen. Vielleicht später! Sie mögen hieraus entnehmen, welche «Arbeit es kosten wird, auch bei der Geradstreifebene die Gegend «um einen der zwei Streifpunkte aufzuklären.

«Ich glaube mit diesen Mittheilungen wenigstens einem Theile «Ihrer Wünsche zu entsprechen, und nehmen Sie es mir nicht übel, «dass ich nicht mit allem auf einmal fertig werden kann. Ich bin die «verflossene Woche mit Examen beschäftigt gewesen, und auch diese «noch werde ich es sein; dazu werden meine Vorlesungen bis Mai «fortdauern. Ihren ersten Brief werde ich noch, soweit es mir mög- «lich ist, beantworten; nur werden Sie mir nicht zumuthen, dass ich «so schwierige Vorstellungen im ersten Anlauf zu durchdringen ver-

«möge. Ihren letzten Satz habe leider noch nicht geprüft. Unter-«brechen Sie die Correspondenz nicht zu lange.

«Vergessen Sie die Zusendung der Dissertationen nicht.

«*Polane* mit n habe ich mit Fleiss geschrieben, weil das Ding «dem *Pol* und nicht der Polare entsprechen soll.

«Ich sollte mich noch gegen eine Masse von Vorwürfen ver-«theidigen; aber der Raum fehlt dazu. Seien Sie herzlich gegrüsst «und halten mich immer für

«Ihren treuen Schüler

«Bern, den 25. März, Abends. *L. Schläfli.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(27. März.) Endlich versuche ich, auf Ihren werthen Brief vom «28. Jan. zu antworten. Sie werden wohl kaum eine Abschrift des-«selben haben; aber ich muss mich doch der Kürze wegen auf die Num-«mern desselben beziehen, um nicht Ihre eigenen Worte wiederholen «zu müssen. Es mag mir auch manchmal begegnen, dass ich Ihnen «dieselben Dinge zweimal schreibe, weil ich mich nicht daran erin-«nere, sie Ihnen schon geschrieben zu haben. Zur Sache!

«*Ad 4.* Stimme bei.

«*Ad 5.* An Ihrer Stelle liesse ich diese künstliche, nicht über-«zeugende Ableitung fahren. Wenn Sie einmal eine f^n dadurch, dass «Sie $\binom{n+2}{2}$ Punkte derselben in einer Ebene annehmen, gezwungen «haben, diese Ebene zu enthalten, so dünkt mich, seien Sie auf rein «anschaulichem Boden nicht befugt zu wissen, ob nun die Aufgabe «bestimmt oder unbestimmt oder unmöglich sei. Da ich keine Vor-«stellung davon habe, wie man eine algebraische Fläche anders defi-«niren kann als durch ihr Polynom, so dünkt mich hier das einzig «Natürliche, sich an die Zahl der Glieder des Polynoms zu halten; «diese liegt aber ganz klar vor als Zahl der Combinationen mit Wie-«derholung von 4 Elementen zu je n, also $\binom{n+3}{n} = \binom{n+3}{3}$; «folglich ist $\binom{n+3}{3} - 1$ die Zahl der Bedingungen, durch welche «die f^n bestimmt wird.

«*Ad 6.* Sie setzen die Zahl der Bedingungen, damit eine Fläche «in drei von den Graden α, β, γ zerfalle, doppelt an; sie ist bloss

$$«\frac{1}{2}\left\{\left(\sum\alpha+4\right)\sum\beta\gamma-\alpha\beta\gamma\right\}.$$

«Alle Flächen nten Grades, die durch eine Vollcurve $\alpha\times n^{\text{ten}}$ «Grades gehen, bilden eine $\binom{n-\alpha+3}{3}$ fache Schaar, nicht eine «$\left\{\binom{n-\alpha+3}{3}-2\right\}$fache.

«*Ad 7.* Der von Ihnen bemerkte Widerspruch rührt nur daher, «dass Sie den Satz über nothwendige Punkte nicht vollständig aus- «sprechen. Er muss heissen: «Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen «α, β übertroffen wird, und es soll eine C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte «einer C^α und C^β gehen, so ist unter diesen *keiner* nothwendig, wenn «$n>\alpha+\beta-3$; aber $\binom{\alpha+\beta-n-1}{2}$, wenn $n<\alpha+\beta$ ist.» Für $\alpha=\beta$ «$=1$, $n=2$ giebt es daher *keinen* nothwendigen Punkt. — Der ähn- «liche Satz über Flächen heisst so:

«Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen α, β, γ übertroffen «wird, und es soll eine f^n durch die $\alpha\beta\gamma$ Schnittpunkte einer f^α, f^β, «f^γ gelegt werden, so kann es unter diesen nothwendige geben. Um «deren Anzahl zu bestimmen, lasse man im Aggregat

$$«(1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-n-1}-(1+x)^{\alpha+\beta-n-1}-(1+x)^{\alpha+\gamma-n-1}$$
$$-(1+x)^{\beta+\gamma-n-1}$$

«diejenigen Glieder weg, deren Exponenten *negativ* sind, und ent- «wickle den Rest nach den Potenzen von x, dann ist der Coefficient «von x^3 die gesuchte Anzahl.»

«Mich dünkt, ich habe Ihnen diesen Satz schon geschrieben. «Er ist eine nothwendige Folge aus der freilich noch unbewiesenen «einzigen Hypothese, auf der unsere ganze Raumcurventheorie etc. «beruht.

«*Ad 8.* Anfang; stimme bei. — Aber: mein Satz über die «Zahl der nothwendigen unter den nab Punkten, in denen eine f^n «eine Vollcurve (f^a, f^b) schneidet, ist nicht unbedingt so, wie Sie ihn «aussprechen, sondern: Diese Zahl ist $\frac{1}{2}ab(a+b-4)+1$, wenn «$n>a+b-4$ ist; hingegen $\frac{1}{2}ab(a+b-4)+1-\binom{a+b-n-1}{3}$,

«wenn $n < a+b$ ist. Der Binomialcoefficient ist nur dann abzuzie-
«hen, wenn der Exponent $a+b-n-1$ positiv ist, was wiederum für
«dessen Werthe 0, 1, 2 unnöthig wird, weil dann der Binomial-
«coefficient verschwindet. Aber für einen negativen Werth von
«$a+b-n-1$ verschwindet der Binomialcoefficient nicht, und die For-
«mel ist falsch, wenn sie ihn dann noch enthält.

«*Ad 10.* Muss vor Nr. 9 beantwortet werden. — Es sei ϱ
«eine Raumcurve g^{ten} Grades und k^{ter} Classe; durch diese mögen
«drei Flächen M, N, P resp. m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades gehen. Dann
«schneiden sich M, N ausser ϱ noch in einer R Raumcurve $(mn-g)^{ten}$
«Grades. Um zu wissen, wie viele nicht in der ϱ liegende Punkte
«diese R mit der Fläche P gemein hat, müssen wir zuvor die Zahl $\varkappa$
«der gemeinschaftlichen Punkte von R und ϱ kennen. Denken wir uns
«nun eine beliebige Gerade l gegeben, so wird der Ort eines Punkts
«X, dessen auf M, N bezüglichen Polarebenen mit l einen Punkt gemein
«haben, eine Fläche $(m+n-2)^{ten}$ Grades sein und 1° die ϱ in allen
«k Punkten schneiden, in denen sie von einer durch l gelegten Ebene
«berührt wird, 2° durch alle $\varkappa$ Punkte, in denen ϱ und R sich begeg-
«nen, also die Flächen M, N sich berühren. Folglich ist

$$«k+\varkappa=g\,(m+n-2).$$

Es war aber $p\,(mn-g)-\varkappa$ die Zahl der freien Punkte, in denen
«die Curve R von der Fläche P geschnitten wird, mit andern Worten,
«die Zahl der freien Schnittpunkte der Flächen M, N, P; diese ist also

$$mnp + k - g\,(m + n + p - 2).$$

«Da für eine Vollcurve $\varrho^{a \times b}$ die Classe $k = ab\,(a + b - 2)$
«ist, so ist Ihre Formel trotz des Fragezeichens richtig. Im Allgemeinen
«muss ich noch bemerken, dass wenn die ϱ gewöhnliche Doppel-
«punkte hat, in der Zahl k jeder derselben mit dem Betrage 2 mit-
«gezählt werden muss; oder, wenn k die reine Classe darstellt, so
«muss man zu der vorliegenden Formel noch die doppelte Anzahl der
«Doppelpunkte der ϱ addiren. — Nebenbei gesagt: wenn Sie die
«Zahl der Punkte, in denen eine *Abwickelbare* von einer Geraden ge-
«schnitten wird, den *Grad* derselben nennen, so müssen Sie conse-
«quenter Weise unter *Classe* einer Raumcurve dasselbe verstehen
«wie ich, nämlich die Zahl ihrer Berührungsebenen, welche durch
«eine Gerade gehen. Die Zahl der Schmiegungsebenen hingegen,
«welche durch einen gegebenen Punkt gehen, ist im Allgemeinen ein
«hohes Ding, das wegen der Schwierigkeiten, denen seine Betrach-
«tung unterliegt, einen so vertraulichen Namen, wie *Classe*, nicht
«verdient; es implicirt ja schon die Abgeleiteten dritter Ordnung.

«*Ad 9.* Wenn ein Flächengebüsch n^{ten} Grades eine Grundcurve «R enthält, deren Grad g, die Classe k ist, und welche unter den gn «Schnittpunkten irgend einer f^n Θ nothwendige zählt, so beträgt die «Anzahl der im Freien liegenden nothwendigen Grundpunkte des «Gebüschs

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \left\{ 2\,g\,(n-1) + \Theta - k - 1 \right\},$$

«also für eine Vollcurve $a \times b^{ten}$ Grades

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \frac{1}{2}\,a\,b\,(4\,n - a - b - 4),$$

«wenn $n > a + b - 4$ ist; aber um $\binom{a+b-n-1}{3}$ mehr, wenn «$n < a + b$ ist.

«Ich erinnere übrigens daran, dass die Zahl Θ durch g, k, n «noch nicht bestimmt ist; ich habe früher Beispiele geliefert ver«schiedener Arten von Raumcurven desselben Grades und derselben «Classe, welche sich durch die Zahl der nothwendigen Punkte unter«schieden.

«(28. März) *Ad 11.* Dass ein ebenes Curvennetz n^{ten} Grades «nicht mehr als $n^2 - n + 1$ Grundpunkte haben kann, vermag ich «nicht einzusehen; obgleich ich leicht deren bilden kann, welche «$n^2 - \alpha\,n + \alpha^2$ Grundpunkte haben. — *Absatz I.* Stimme vollständig «bei. Ich verwundere mich nur, dass Sie nicht gleich die Sache etwas «allgemeiner gefasst haben. Sie konnten in ähnlicher Weise eine «Theilcurve Grades $n^2 - n\,\alpha + \alpha^2$ construiren von der Eigenschaft, «dass alle durchgelegten Flächen n^{ten} Grades bloss ein Gebüsch bilden, «und dass je zwei derselben sich in einer Vollcurve $(n - \alpha) \times \alpha^{ten}$ «Grades schneiden, und dass irgend drei keinen *freien* Schnittpunkt «haben. Bei der Zahl der nothwendigen Punkte Ihrer R^{n^2-n+1} können «Sie das Fragzeichen weglassen.

«*Absatz II.* Bei dem aus Pol p seiner Pampolare umschriebenen «Kegel K würde ich die Berührungsebene in p ganz weglassen; der «Theilkegel t^x hat den Grad $3\,n\,(n-2)$ und geht durch die Theil«curve des $(3\,(n-1)^2 - 1)^{ten}$ Grades, in der die Pampolare von ihrer «ersten Polare aus p geschnitten wird. Was bezeichnen Sie mit der «Kernfläche P^x des $N\,(p^{2n-1})$? Wohl dasselbe, was Sie sonst mit «dem Q bezeichneten, den Ort der Knotenpunkte aller Pampolaren; «dann ist ja der Grad $x = 8\,(n-1)$! Ist diese gemeint, so kann «sie die Grundcurve des Büschels nicht zur Doppellinie haben, sondern «wenigstens zur dreifachen.

«Ich muss hier abbrechen, da der schwieriger werdende Rest «mich noch längere Zeit beschäftigen könnte, und andere dringende «Arbeiten mich abrufen. In der Meinung, dass Sie dieses Wenige viel-«leicht schon benutzen können, und um Sie nicht zu lange warten zu «lassen, sende ich Ihnen diese Zeilen schon jetzt.

«In der Hoffnung, Sie werden mich immer für Ihren treuen Freund «halten, grüsse ich Sie herzlich Ihr

«Bern, den 28. März, Abends spät. *L. Schläfli.*»

Steiner an Schläfli. 6. IV. 1855.

«*Treuer Freund!*

«Indem ich Ihnen für die Correctionen und die aufopfernden ge-«waltigen Anstrengungen herzlich danke, muss ich daneben bedauern, «dass Sie stellenweise meinem Gedächtniss zu viel zumutheten. Weiss «ich ja oft nicht, was ich vor 3 Tagen geschrieben habe — geschweige «denn vor 3 Monaten. Jener erste Brief ist die Quint-Essenz aus «einem confusen Brouillion von 9 Bogen; aber was darin ad 4., ad «11. Absatz I.. etc. steht, weiss ich nicht; desgleichen ad 10. «*Die* «*Formel mit Fragezeichen.*» Leider weiss ich auch nicht mehr genau «wie ich Ihren zweiten Satz bewiesen habe. Kurz ich bin weit «dümmer, als Sie wähnen. Daher geht die Redaction erbärmlich lang-«sam, nur des Vormittags und da noch matt — ohne Kraft, ohne Ge-«dächtniss und ohne Phantasie; am Abend fast ganz stumpf.

«Neue Fragen fallen mir im Augenblick nicht ein, nur folgendes «altes Spiel mit Büscheln.

«1. Bekanntlich schneidet der $B(C^2)$ jede Gerade G in einem «Punkt-System (Involution). Ein guter Oekonom verfolgt nun alle «speziellen Fälle, die zahlreich sind. Hier nur der: Wenn die 4 «Grundpunkte in *einen* P zusammenfallen, wird dann aus $B(C^2)$ noth-«wendig ein Strahl-System? oder wenn der $B(C^2)$ durch zwei «spezielle Glieder die Doppelgerade $(A)^2$ und $(B)^2$ sind, bestimmt «wird, folgt dann nothwendig, dass jedes andere Glied C^2 aus einem «Paar Geraden $C + C_1$ besteht, die zu jenen (als den Asymptoten) «harmonisch sind?

«2. Ebenso schneidet nun $B(C^3)$ jede G in einem Dreipunkt-«System, welches 4 Asymptotentenpunkte hat. Ist dasselbe durch zwei

«Trippel von Punkten bestimmt? und welche Relation findet zwischen «drei Trippeln statt (entsprechend der Involution in 1.)? — Die Spe- «zialisirung der zwei Glieder, durch welche B (C^3) bestimmt wird, «gewährt noch mehr Fälle, als vorhin (1.), und jeder fast giebt ein «Sätzchen. Einst war dieser Gedanke dem *Schmützer* (Aronhold) will- «kommen und half ihm zu Etwas. Jene Glieder lässt man aus C^2 und «aus einfachen, doppelten und dreifachen G bestehen. Für Sie das: «Wenn die 9 Grundpunkte sich in Einen P vereinen, geht dann B (C^3) «in ein Dreistrahlsystem um P über? mit wie viel Asymptoten (4?) «und welcher metrischen Relation? so dass, wenn umgekehrt zwei «Trippel durch P gehende Strahlen A, A_1, A_2 und B, B_1, B_2 als be- «stimmende Glieder aus $A + (A_1)^2$ und $B + (B_1)^2$ oder aus 3-fachen «Geraden $(A)^3$ und $(B)^3$ bestehen? Ihr Mächtiger wird dies leicht ent- «wurzeln, selbst für B (C^n).

«3. Ist $n = \alpha\beta$ und wird der B (C^n) insbesondere durch zwei «Glieder $(A^\alpha)^\beta$ und $(B^\beta)^\alpha$ bestimmt, so ist von deren $\alpha\beta$ Schnitten «P jeder nur ein Doppelpunkt (?) jedes andern Gliedes C^n. Nun bilden «jene 2 Glieder in jedem P ein unendlich kleines Gitter mit $\alpha\beta$ «Schnitten p, und durch diese müssen die zwei Zweige jeder C^n gehen «— davon berührt der eine die einfache A^α α-punktig der andern «(einfache) B^β β-punktig: aber nun weiss ich nicht, wie viel punktig «sich die entsprechenden Zweige zweier Glieder C^n daselbst berühren!?.

«Ist $n = 2\alpha$ und man bestimmt den B (C^n) durch zwei Glieder «$(A^\alpha)^2$ und $(B^\alpha)^2$, so ist jeder der α^2 Schnitte P ein Doppelpunkt «von jedem Glied C^n; aber muss dabei jedes Glied nothwendig in C^α «$+ C_1^\alpha$ zerfallen? und sind diese Paare so bestimmt, dass sie zu «A^α und B^α harmonisch sind? oder waltet eine höhere Relation ob, so «dass es ausser A^α und B^α noch mehr Asymptoten giebt?

«Wie stehts, wenn $n = 3\alpha$ und B (C^n) durch $(A^\alpha)^3$ und $(B^\alpha)^3$ «bestimmt wird? etc.

«Bei den Flächen kann man ähnlicherweise schulmeistern, aber «ich drang noch weniger durch. Hier nur ein Fall. Wird der B(f^n) «durch n Ebenen A und n Ebenen B bestimmt, die sämmtlich durch «einen Punkt P gehen, so müssen wohl alle Glieder f^n Kegel sein; «der Schnitt einer durch P gehenden Ebene E ist ein n-Strahl- «System, in welches ein B (C^n) übergeht, wenn die n^2 Grundpunkte «sich in P vereinen; daraus ist klar, wie das System durch zwei «n tupel bestimmt ist. Machen Sie es, ich verstehe doch nichts davon, «es ist mir wie im Traum.

«Es kam mir der Gedanke, statt einer Abhandlung, lieber eine «kleine selbstständige Schrift zu verfassen, darin vor den Flächen zu- «erst alle meine Witze über ebene Curven aufzutischen; dazu müsste «ich aber eben so schriftstellerisch vorwärts kommen und arbeiten «können, wie Sie. Wenn wir nur gemeinschaftlich arbeiten könnten, «so dass Sie immer auf der Stelle oder doch am selben Tag meiner «Unbehülflichkeit im Ausdruck Worte verliehen — dann würde es «schnell gehen. Freilich blieb die letztjährige Probe hinter meiner «Erwartung zurück. Wenn durch Friedensschluss die Zeiten günstiger «werden, so dürfte ein Verleger zu finden und ein Honorar zu er- «halten sein, durch welches Sie fast so knapp, wie von der Vorsichts- «kasse entschädigt würden. Zudem könnten Sie den Gegenstand ana- «lytisch ordnen, mit weitern Zuthaten versehen und darauf beim «*selben* oder einem andern Verleger herausgeben. Ein Buch hat «immer mehr Gewicht und macht mehr bekannt, als einzelne zer- «streute Abhandlungen.

«Ob ich auf Jahre fortbleiben kann, weiss ich nicht, da der «Urlaub, ohne den König, nur für ein Semester bewilligt werden kann; «im Herbst würde die Verlängerung hoffentlich gewährt werden, ob «aber übers Jahr weiter — wer weiss das! Zumal wenn indessen «keine Arbeit zu Stande käme. Desshalb bin ich auch in Verlegen- «heit, ob ich meine Wohnung aufgeben, oder unnütz jährlich 600 Fr. «bezahlen soll. Welche Curen ich machen werde, weiss ich nicht; «der Arzt wird im Attest von *Teplitz*, Gastei und Pfeffers sprechen. «Sollte ich Paris sehen und es günstig finden, d. h. *Liouville* etc. da «treffen, so müssen Sie nachkommen, das Honorar in spe muss die «Kosten decken.

«Da Sie mit Arbeiten überhäuft und nur glücklich sind, wenn «Sie recht überladen: so möchte ich bitten, mit einigen kurzen Wor- «ten das im Nachfolgenden verlangte Attest zu verfassen, was mir un- «möglich ist. Dasselbe kann deutsch oder französisch sein. Es kann «etwa gesagt werden: die mir von ihm bekannten Arbeiten in *Crelle's* «und *Liouville's* Journal zeugten von mathematischem Genie (ich habe «wenig davon gelesen), die englischen verstände ich leider nicht. — «Er kann uns später auch nützlich sein.

«*Monsieur!*

«Je prends la liberté de vous adresser cette lettre — «je viens de m'offrir comme candidat pour une des Exa-

«minerships in Mathematics for civil Appointments in In-«dia. Cela me serait un grand honneur et je serais on «ne peut plus obligé si vous voudriez bien me donner «une attestation par rapport à mon caractère de géomètre «et ma capacité pour remplir cet office.

«Je suis Monsieur

«votre très humble serviteur

2 Stone Buildgs Londres *A. Cayley.*
28 mars 1855.

«Unermüdlicher Signore baldige Antwort.

«Herzlichen Gruss

«von Ihrem dankbaren

«Berlin, 6ten April 1855. *J. Steiner.*

«NB. Die Dissertationen habe ich nicht vergessen, aber noch «nicht zusammengesucht, soll nächstens geschehen.»

Berliner Poststation 6. April. Bern erhalten den 9. April, Mittags[1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(8. April.) Es thut mir leid, inzwischen keine Nachricht von «Ihnen erhalten zu haben. Sind Sie vielleicht mir etwas gram, weil «ich mit der Beantwortung Ihres Briefes vom 28. Januar so lange zu «thun habe? Ich kann Sie aber versichern, dass mir diese Dinge «immer wie eine schwere Last auf dem Herzen gelegen haben. Hier «erhalten Sie endlich den vollständigen Rest meiner Antworten.

«*Ad 4.* Sie können zu der geradlinigen Fläche nten Grades «(also auch nter Classe) noch bemerken, dass sie nothwendig eine «*Doppellinie* (welches Grades?) hat, die von jeder erzeugenden Geraden «in 1— 2 Punkten getroffen wird; Aehnliches gilt von ihrer doppelt «umschriebenen Abwickelbaren.

«*Ad 11.* Meine Versuche, Ihren Satz, «dass drei unter sich «unabhängige ebene Curven nten Grades nicht mehr als $n^2 - n + 1$ «Punkte gemein haben können,» zu beweisen, sind vergeblich ge-«wesen. Es würde mich sehr freuen, wenn Sie mir Ihren Beweis «mittheilten. Können Sie vielleicht auch drei verschiedene C^n durch «$n^2 - n$ gemeinschaftliche Punkte legen, welche nicht auf einer

[1]) Notiz von L. Schläfli.

«C^{n-1} liegen? — Sie sollten übrigens hier nicht zwei Fälle unter-«scheiden, da das Netz der Pampolaren, schon als sehr spezieller Fall «im ersten allgemeinen Falle enthalten ist.

«*Ad 11, I.* Wenn Sie Ihr Gebüsch nten Grades in der Weise «verallgemeinern, dass je zwei Flächen desselben sich in einer Voll-«curve $(n - \alpha) \times \alpha^{\text{ten}}$ Grades und überdiess in der festen Theil-«curve (Grundcurve) R vom Grade $n^2 - \alpha n + \alpha^2$ schneiden, so «werden die Flächen $(n - \alpha)^{\text{ten}}$ und α^{ten} Grades, welche jene Vollcurve «bestimmen, entsprechende Glieder zweier quasi perspektivischer Ge-«büsche sein. Für $n - \alpha > \alpha$ ist das niedrigere Gebüsch unver-«änderlich; das höhere hingegen kann natürlich auf mannigfaltige Arten «mittelst des niedern umgewandelt werden.

«Ist nun l der Grad irgend einer die R schneidenden Fläche, «so sind unter den $l\,(n^2 - n\alpha + \alpha^2)$ Schnittpunkte

$$(n - 1)(n^2 - n - 1) - \frac{1}{2}\,\alpha\,(n - \alpha)(3n - 4) - ?$$

$$\binom{2n - \alpha - 1 - 1}{3} - ?\binom{n + \alpha - 1 - 0}{3}$$

«nothwendige. Die Fragezeichen vor den zwei Binomialcoefficienten sollen «bedeuten, dass dieselben wegzulassen sind, sobald ihre oberen Zahlen «negativ sind, d. h. wenn der Exponent des Binoms negativ ausfällt.

«Sie haben bei Ihrem Gebüsch von einer einzigen Gebüschfläche «gesprochen, die ihren Knotenpunkt auf der $R^{n^2 - n + 1}$ in jenem «Grundpunkt g_0 des auxiliären Ebenengebüsches hat, und bemerken «dazu, dass der betreffende Knotenkegel von der Schmiegungsebene «der R längs ihrer Tangente berührt wird. Dasselbe gilt aber über-«haupt für jeden Punkt der R, weil das andere auxiliäre Gebüsch «$(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades seinen $(n - 1)^3$ Grundpunkten auf der R freien «Lauf lässt. Ich will aber diese Sache sogleich allgemein für meine «$R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ aussprechen.

«Wenn ein Gebüsch von Flächen nten Grades eine Grundcurve «rten Grades hat, so kann man im Allgemeinen nur zeigen, dass seine «Knotencurve $6\,(n - 1)^2$ten Grades $r\,(3n - 4)$ Punkte mit jener «Grundcurve gemein hat. Aber bei meinem erwähnten speziellen «Gebüsch gehört die ganze $R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ der Knotencurve an; und «in jedem Punkte der R berührt die Schmiegungsebene derselben den «Knotenkegel der betreffenden Gebüschfläche längs der Tangente «der R.

«*Ad 11, II.* Wegen des von Ihnen betrachteten Netzes aller

«Pampolaren eines Flächenbüschels muss ich zum voraus einen allge-«meinen Satz aussprechen.

«Wenn ein Netz algebraischer Flächen eine Grundcurve hat, «mag diese nun eine Vollcurve oder Theilcurve sein, so ist die-«selbe eine *dreifache Linie* der Knotenfläche des Netzes.»

«Ich habe diesen Satz streng bewiesen; die vielfache Linie ist «im Allgemeinen sicher nicht höher. Ausser diesem kann ich von «der Knotenfläche ($Q^{8(n-1)}$) Ihres Pampolarennetzes nichts Eigen-«thümliches aussagen.

«Sie nehmen einen Punkt X der R als Pol der Pampolare an, «und dann bekömmt diese in X einen Knotenkegel dritten Grades K. «Nun, die Strahlen dieses K sind die Doppelpunktstangenten der hier «geführten ebenen Berührungsschnitte aller Flächen des ursprüng-«lichen Büschels. Fällt die eine dieser Doppelpunktstangenten mit der «Tangente t der R zusammen, so wird die betreffende Büschelfläche «von der Schmiegungsebene berührt.

«Rücken Sie jetzt den Pol A der Pampolare auf der t fort, so «hat sie in X einen unveränderlichen Knotenkegel *zweiten* Grades, «nämlich den Polarkegel der Tangente t (XA) in Bezug auf jenen K.

«Wenn der Pol der Pampolare an eine Ebene gebannt ist, so zählt «die Grundcurve R als *doppelter* Bestandtheil der Knotencurve des Pam-«polarengebüsches. Der freie Rest dieser Knotencurve ist also vom «Grade $24\,(n-1)^2 - 2\,n^2$, geht aber *nicht* durch die $4\,(n-1)^3$ «Knotenpunkte π des Büschels. — Was Sie hingegen von den (freien) «Grundpunkten dieses Pampolarengebüsches sagen, ist richtig.

«Sie lassen die *Pol*kernfläche P einer Fläche des urprünglichen «Büschels diese in einer R_0 schneiden und betrachten die Ortsfläche «dieser R_0; hier kann ich nicht folgen. Wenn ich auch den Kernpol «P in die Grundcurve R rücke, so giebt es wenigstens *keine* Büschel-«fläche, für die dann P mit dem Knotenpunkt X seiner auf jene be-«zogenen ersten Polare zusammenfiele; so lange aber P und X geschieden «sind, ist es mir unmöglich, etwas auszusagen. Daher ist mir auch die «Bedeutung der Rückkehrtangenten t_0 unverständlich.

«Es ist ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben. Bei jeder Fläche «nehmen Sie die osculirend umschriebene Abwickelbare und fragen «nun, wie oft diese nun einen gegebenen Punkt passire. Die Antwort ist

$$4\,n^3 - 19\,n^2 + 25\,n - 8$$

«mal, also für $n = 3$ z. B. 4 mal.

«Wenn durch die Grundcurve R des vorigen Büschels eine feste «f^m geht, so wird sie auf der R von *jeder* Hälfte des Büschels in $(m-n)\,n^2$ «Punkten berührt. Die Anzahl der einzelnen Büschelflächen, welche «sie überdiess noch ausserhalb berühren, ist

$$(m+2)(m-2)^2+2(m-4)(n-1)(m-n-1)$$
$$=(m-4)(m^2+2mn-2n^2)+6m.$$

«Die Formel gilt aber nur für $m > n$; für $m = n$ wird sie un- «sinnig, was Sie aber nicht als Argument gegen ihre Richtigkeit an- «sehen dürfen. Setzen Sie z. B. $n = 1$, $m = 3$, so bekommen Sie «die richtige Zahl 5.

«*Ad 12.* Sie wissen es gewiss ganz gut, dass die Grundcurve «eines Flächenbüschels in zwei Theilcurven oder eine Theilcurve und «eine Vollcurve zerfallen kann, und dass es in diesem Falle eine reine «Unmöglichkeit ist, dass ein Glied des Büschels zerfalle.

«Wenn ich auch in einem Flächenbüschel zwei zerfallene Glieder «annehme, so ist doch das Zerfallen eines dritten Gliedes eine so «furchtbare Grausamkeit, dass der Schreck meinen analytischen Ver- «stand lähmt. Sie sagen in Ihrem Briefe kein Wort über das leitende «Princip, nach dem Sie diese gewiss höchst speciellen Büschel con- «struiren.

«Wenn in einem Gebüsch eine Fläche zerfällt, so versteht es sich «ja von selbst, dass die Schnittcurve ihrer Bestandtheile der Knoten- «curve des Gebüschs angehört.

«Die Frage nach der höchsten Grundcurve eines $G(f^n)$ ist mir «zu schwer.

«Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder Ebenenpaare sind, so vermag ich «die Nothwendigkeit eines vierten solchen durchaus nicht einzusehen.

«Dass ein $N(f^n)$ *nothwendig* zerfallene Glieder enthalten sollte, «ist für $n > 2$ entschieden zu verneinen. Ebenso wenig kann von «Doppellinien die Rede sein.

«Der Satz über die drei in einem Netz enthaltenen Büschel, deren «keine zwei ein Glied gemein haben, ist hübsch und analytisch leicht «zu verificiren.

«Ich möchte Sie ersuchen, künftig bei Flächennetzen die Pol- «kernfläche P und die Knotenkernfläche (oder: Knotenfläche) Q deutlich «zu unterscheiden. Jene wäre der Ort des Punkts, in welchem die «Polarebenen eines Knotens Q in Bezug auf sämmtliche Netzflächen sich «schneiden. Ueberdiess wäre dann noch eine dritte Fläche zu be-«trachten, die ich *reciproke Fläche* genannt habe, nämlich der Ort des «Punkts, welcher die 4 arbiträren Constanten, deren drei Verhältnisse «die Netzfläche bestimmen, zu Coordinaten hat. Beim Pampolarennetz «ist diese reciproke Fläche der Ort derjenigen Pole A, deren Pampo-«laren einen Knotenpunkt X (oder Q) haben. Beim Netze der ersten «Polaren einer gegebenen Basis fällt sie hingegen mit der Polkern-«fläche P zusammen.

«Darf ich nun hoffen, Sie werden mit diesen freilich sparsamen «Resultaten einer mühsamen Arbeit zufrieden sein und mich bald mit «einer Antwort erfreuen? Oder soll morgen die quälende Ungewiss-«heit mein Stück Krautkuchen vergällen? — Mit freundschaftlichem «Gruss Ihr treuer und dankbarer Schüler

«Bern, den 8. April 1855. *L. Schläfli.*»

«Abends 11 Uhr geschlossen.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(11. April.) Ihren werthen Brief vom 6^ten^ habe am 9^ten^ Mit-«tags erhalten, nachdem ich am Morgen meinen auf die Post gegeben «hatte. Ich beeile mich auf die darin enthaltenen Fragen zu ant-«worten.

«1. Wenn die 4 Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten «sich in einen Punkt vereinigen, so sind nur zwei Fälle möglich.

«A. Der Büschel ist bestimmt durch einen Kegelschnitt und eine «doppelt gezählte Tangente desselben; alle Curven haben also hier «eine vierpunktige Berührung und schneiden eine freie Gerade wie «gewöhnlich.

«B. Der Büschel ist bestimmt durch zwei Doppelgeraden, besteht «also aus lauter Geradenpaaren, die ein involutorisches Strahlensystem «bilden, dessen Asymptoten jene Doppelgeraden sind.

«2. Für das Punktdreiersystem einer Geraden ist es ganz gleich-«gültig, ob es von einem schneidenden Curvenbüschel dritten Grades, «oder von dessen Ausartung in ein System von je drei Strahlen, die «alle von den in einen vereinigten 9 Grundpunkten ausgehen, hervor-«gebracht werde. Indess kann die Vereinigung auch geschehen, in-«dem man den Büschel bestimmt durch eine freie Curve und eine «dreifach gezählte Wendungstangente derselben; er besteht dann aus

«Curven, die sich alle hier 9-punktig berühren. Das Punktsystem auf «der freien Transversale ist natürlich durch zwei beliebig zu setzende «Dreier vollständig bestimmt. Die metrischen Relationen zwischen den «Punkten dreier Dreier sind zwar algebraisch sehr einfach; aber ich «weiss noch keinen passenden geometrischen Ausdruck dafür. Da«gegen wird Sie interessiren, was ich vor der Hand über die gegen«seitige Lage derjenigen 4 Punktdreier AAA′, BBB′, CCC′, DDD′, in «deren jedem je zwei Punkte zusammenfallen, angeben kann. Es «giebt zwei (nicht zum System gehörende) Punkte M, M′, für welche «alle 4 Paare AB, A′B′, CD, C′D′, harmonisch sind, ebenso zwei Punkte «N, N′ für die Paare AC, A′C′ BD, B′D′ und endlich zwei Asymp«toten-Punkte P, P′ für die Paare AD, A′D′, BC, B′C′; und von den «Punktpaaren MM′, NN′, PP′ ist jedes in Beziehung auf jedes har«monisch. Hieraus ist sofort klar, dass, wenn alle 4 Berührungs«punkte des Büschels A, B, C, D reell sind, dann von den drei letzten «Paaren zwei reell und eines conjugirt-imaginär ist. Wird ein Punkt «aller Dreier dadurch festgebannt, dass man die Transversale durch «einen Grundpunkt sendet, so bleiben natürlich ausserdem nur invo«lutorische Punktpaare übrig. Ein dem dritten Grad eigenthümlicher «spezieller Zustand des Punktsystems tritt nur dann ein, wenn die «Transversale an einer oder an zwei Stellen osculirt wird; im letzten «Falle ist aus jedem Dreier immer nur ein Punkt reell, und die Lage «jedes der zwei übrigen gegen den vorigen und jene zwei dreifachen «Punkte ist durch ein perspectivisches Doppelverhältniss bestimmt, «welches der einen oder andern imaginären Cubikwurzel aus 1 «gleich ist.

«3. Wenn n $= \alpha\beta$ und α, β keinen gemeinschaftlichen Faktor «haben, so sei ein Büschel bestimmt durch eine β fache C^α und eine «α fache C^β. Wenn $\alpha < \beta$, so ist jeder Grundpunkt ein spezieller «α facher Punkt der freien Büschelcurve, insofern diese hier von «einer frei durchgehenden Geraden in α vereinigten Punkten ge«schnitten wird; aber mit der einfachen C^β hat sie hier mehr, näm«lich β vereinigte Punkte gemein; und irgend zwei Büschelcurven «haben natürlich hier $\alpha\beta$ Punkte gemein. Die α Zweige einer und «derselben Büschelcurve sehen so aus, als hätten sie hier alle die «Tangente der C^β gemein; aber die Krümmung ist eine ungewöhn«liche und hängt von der Natur des Bruchs $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ab; der *Taylor*'sche «Satz ist en défaut. — Wenn hingegen α, β den grössten gemein-

«schaftlichen Faktor ε haben, so zerfällt jede Büschelcurve in ε ver-
«schiedene Curven $\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}^{\text{ten}}$ Grades.

«Wenn Sie den Büschel durch zwei Paare vereinigter Curven «bestimmen, so zerfällt Ihnen jedes andere Glied desselben nothwen- «dig in zwei verschiedene Curven $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades; und wenn Sie in «einem Grundpunkte die Tangenten ziehen, so haben Sie ein involu- «torisches Strahlensystem. — Wenn n einen Factor α hat, und Sie «setzen zwei Curven p, q vom $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grade, nehmen jede α fach und «bestimmen damit einen Büschel, so zerfällt jedes andere Glied in «α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades; die Tangenten in einem Grund- «punkt bilden ein höchst spezielles Strahlensystem α^{ten} Grades. Für «ein ungerades α ist immer eine der Curven, aus denen das Glied «besteht, reell, alle übrigen sind imaginär; für ein gerades α sind «zwei Curven reell, die $\alpha-2$ übrigen imaginär. In einem Grundpunkt «bilden die Tangenten der zwei reellen Punkte ein Strahlensystem «zweiten Grades (eine Involution). — Ich möchte Ihnen aber ab- «rathen, solche Dinge zu publiziren, denn es dreht sich hier alles nur «um die elementarsten Begriffe von der Gleichung $x^{\alpha} - 1 = 0$ herum. «Zudem müssten Sie die Sache etwas allgemeiner angreifen, z. B. aus «dem Büschel (p, q) irgend α verschiedene Curven herausnehmen und «daraus eine Curve A vom n^{ten} Grade zusammensetzen, ferner ebenso «eine Curve B, und nun einen Büschel (A, B) bilden; jedes Glied «dieses wird dann wieder in α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades «zerfallen; aber $2(\alpha-1)$ Male wird es begegnen, dass zwei von den «α Componenten eines Gliedes sich vereinigen; auch kann es jetzt «geschehen, dass alle α Componenten zugleich reell sind. Die Tan- «genten in einem Grundpunkt bilden ein Strahlensystem α^{ten} Grades; «und das Punktsystem auf einer Transversalen ist zwar vom n^{ten} Grade, «aber so spezialisirt, dass es in α Systeme $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades zerfällt.

«Wenn Sie durch einen und denselben Punkt O zuerst n Ebenen «legen, deren Gesammtheit A heissen soll, dann wieder so eine Ge- «sammtheit B, so ist der Büschel (A, B) ein ungeheurer spezialisirter «Kegelbüschel. Hier ist weiter nichts zu machen; denn die Sache «spielt eigentlich nicht im Raume, sondern ist nur so, wie wenn Sie «auf einer beliebigen Transversalebene einen Curvenbüschel durch «zwei n seite bestimmen.

«Wenn ich es wagen darf, zu Ihren Entschliessungen mit meinem «Rath etwas beizutragen, so möchte ich Sie wirklich bewegen, gegen «die Akademie Ihre Pflicht zu erfüllen. Ich hätte es in Ihrem In«teresse sehr gerne gesehen, wenn Sie die projectirte Abhandlung «bereits im Dezember vorgelegt hätten; und es thut mir leid, wenn «die Unvollständigkeit meiner Verifikationen an dem Aufschub Schuld «gewesen ist. Wenn Sie nun einen nahen Termin vor sich haben, «so thun Sie das Mögliche, um die Abhandlung bis dahin vorzulegen, «drängen Sie darin alles auf die einfachen und schönen Resultate zu«sammen, die uns nun seit langem schon gut bekannt sind, und «lassen complicirtere, für Laien unfassliche Sachen bei Seite. In der «Einleitung lassen Sie den Begriff der algebraischen Fläche auf die «natürlichste Weise von der Welt sich selbst entwickeln. Zwei Auf«fassungen: als Doppelschaar von Punkten, und als solche von Ebenen. «In jenem Sinn ist die Fläche frei, wenn jeder sehr kleine Theil als «Ebene (verlängert: Berührungsebene) annähernd sich darstellt; in «diesem, wenn alle unendlich wenig von einander abweichenden «Ebenen annähernd durch einen einzigen Punkt (Berührungspunkt) «gehen, oder vervollständigt als Ebenengebüsch gefasst werden dürfen. «Dann wird gezeigt, wie über dem zweiten Grade beide Freiheits«begriffe sich nothwendig widersprechen.

«I. *Gradesauffassung.* Die Berührungsebene schneidet die Fläche «in einer C^n mit Doppelpunkt; die zwei Tangenten desselben sind «entweder reell oder conjugirt-imaginär. Daher theilt sich die Fläche «in zwei Regionen: eine hyperboloidische (Krümmungsmaass negativ) «und eine ellipsoidische (Krümmungsmaass positiv), geschieden durch «die $R^{4n(n-2)}$, über deren Construction mittelst der Kernfläche später. «Längs der R *cylindrische* Natur; Berührungsschnitt mit Rückkehrpunkt «(als natürlicher Uebergang zwischen beiden Arten von Doppelpunkt); «also *osculirende Abwickelbare;* erster Widerspruch gegen den Klassen«freiheitsbegriff, da die Osculation in der Drehbarkeit der Ebene einen «Halt verursacht. — Die Berührungsebene hat doppelte Beweglichkeit, «ein zweiter Doppelpunkt ihres Schnitts ist nur eine Bedingung; also «eine Schaar Doppelberührungsebenen; *doppelt umschriebene Abwickel«bare* und darunter eine bestimmte Zahl dreifach berührender Ebenen;

«zweiter Widerspruch; denn successive Ebenen können sich in mehr «als einem Punkte schneiden. Die Berührungscurve S der doppelt «umschriebenen Abwickelbaren berührt die R in einer gewissen An- «zahl Punkte π und schneidet sie in noch andern Punkten ϱ. Der «Berührungsebeneschnitt in π hat einen Selbstberührungspunkt, dessen «Tangente diejenige der R. Die Berührungsebene in ϱ schneidet hier «mit Rückkehrpunkt und anderswo noch mit Doppelpunkt. Hiemit «sind alle singulären Zustände, in welche die Berührungsebene einer «nach Grad freien Fläche kommen kann, erschöpft.

II. *Klassenauffassung.* Rückkehrlinie; Doppellinie; triedrische «Knoten; Stellen, wo die Rückkehrlinie und Doppellinie so zusammen- «treffen, dass die zwei Berührungsebenen der letztern sich mit der- «jenigen der erstern vereinigen; Knoten, wo die Rückkehrlinie frei «von einem Lappen der Fläche geschnitten wird. — Jetzt über ein- «fachen Zwang bei Gradesfreiheit; gewöhnlicher oder gemeiner Knoten- «punkt; doppelter Zwang: Kantenknotenpunkt; vierfacher Zwang: «Planknotenpunkt. Dann für Klassenfreiheit: gemeine Streifebene; «Strahlstreifebene (Zweipunktstreifebene, Osculationsstreifebene); Ein- «punktstreifebene. — Nur erste Polaren (bloss für Gradesauffassung); «ihr Verhalten zu Knotenpunkten; Knotenfläche derselben (Kernfläche «Q); entsprechende Polfläche (Polkernfläche P). — Begriff des Büschels, «Gebüschs, Netzes; nothwendige Punkte. — Pampolaren. Jetzt in «specie die Fläche dritten Grades. Voran jene Berührungscurve S, «dessen Grad schon zum Voraus für f^n bestimmt ist, muss in lauter «Gerade zerfallen, weil eine C^n die zwei Doppelpunkte hat, nothwen- «dig in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Darauf mannig- «faltige Constructionen der f^3 gebaut, welche das Vorhandensein der «Geraden schon voraussetzen. Für das übrige reiche Material weiss «ich selbst nicht Rath. Nur thäte es mir leid, wenn Sie die mühsam «errungenen 5 Gattungen der freien f^3 wegliessen: 1. 27 Strahlen, «45 Ebenen reell; 2. 15 Strahlen, 15 Ebenen reell (gegründet auf «ein imaginäres Gitter, wo je zwei entsprechende [sich nicht schnei- «dende] Strahlen conjugirt sind; 3. 7 Strahlen, 5 Ebenen reell «(nämlich 1 Strahl, durch den 3 reelle Dreiseite und 2 imaginäre, «deren Ebenen reell sind, gehen); 4. 3 Strahlen, 13 Ebenen reell «(ein einziges reelles Dreiseit, und durch jede Seite noch 4 reelle «Ebenen); 5. 3 reelle Strahlen und 7 reelle Ebenen (ein reelles Drei- «seit, und durch jede Seite nur noch zwei reelle Ebenen). — Machen «Sie von meinen Sachen freien Gebrauch und denken Sie mehr an «die sachgemässe Abrundung des Stoffs, als dass Sie ängstlich fragen. «wo er hergekommen ist. Seien Sie nicht ein Baumeister, der ein «Haus nicht zusammenfügen will, weil er nicht alle Steine dazu selbst «gehauen hat. — Doch es ist wohl Zeit, dass ich mit dieser langen «Predigt aufhöre. In den Abhandlungen der Berlinerakademie ist «die Mathematik so spärlich vertreten. Es wäre gut, wenn wieder «einmal ein tüchtiger Aufsatz hineinkäme und sich keck neben hotten-«tottische Sprachstudien, *Ehrenberg*'sches unsichtbares Leben und Be-«richte über alte Mährchen hinstellte.

«Wenn Sie der Akademie ihren Tribut entrichtet haben, so «bleibt es uns ja noch unbenommen, einen ausführlichen Tractat über «die alg. Flächen en compagnie zu schreiben. Nur bauen Sie nicht «auf den Friedensschluss.

«Bis Ende Sept. muss ich mit der Liquidationsrechnung der vor-«sichtigen Gesellschaft pro 1854 zu Ende sein. Wie das mit dem «Abstecher nach Paris zusammengeht, weiss ich nicht; er müsste sich «etwa auf 14 Tage beschränken; am sichersten im Anfang Oct., wenn «man *Liouville* in den Ferien besuchen kann.

«*Attest.* «Ich rechne es mir zur Ehre an, einem so wackern «Geometer, wie Herrn C.[1]), ein Zeugniss ausstellen zu können. Seine «mir zugänglichen Arbeiten in den Journalen von *Crelle* und *Liouville* «beurkunden eine grosse Gewandtheit in Handhabung der Analysis «für geometrische Zwecke und eine vollkommene Bekanntschaft mit «den gegenwärtigen Methoden der Geometrie, zu deren Förderung «Herr C. selbst wesentlich beigetragen hat. Seine in englischen Jour-«nalen erschienenen Arbeiten kann ich leider der Sprache wegen nicht «lesen; aber was mir davon durch Mittheilung Anderer bekannt ge-«worden ist, sind zum Theil geniale Entdeckungen, die in der Ge-«schichte der Geometrie Epoche machen. Nach meiner Ueberzeugung «ist demnach dieser ehrenwerthe Mann wohl befähigt, um als Exami-«nator in der Mathematik für bürgerliche Anstellungen in Indien ge-«wählt zu werden.»

«Was wollen Sie aber zu seinen übereilten Behauptungen, z. B. «in Betreff seiner wirklich genialen Theorie der Hyperdéterminants, «und dazu sagen, dass im Dublin Math. Journal ganze Seiten mit fal-«schen Formeln angefüllt sind?

«Sie haben zu meiner Beschreibung der Streifebene kein Wort

---

[1]) Cayley.

«gesagt; ich glaube doch nun die gröbsten Schwierigkeiten für die «Anschauung, namentlich bei der Strahlstreifebene, die uns voriges «Jahr während unseres Umgangs so sehr zu schaffen machte, beseitigt «zu haben. Ich habe wirklich hier etwas überwunden, was ich an- «fangs meine Kräfte zu übersteigen glaubte.

«Die Ernennungen an das eidg. Polytechnikum werden Ihnen «bekannt geworden sein. Ich habe mir von Anfang gedacht, dass «*Raabe* darauf aspiriren werde.

«Warten Sie nicht zu lange mit der Correspondenz, und lassen «Sie mich es wissen, wann Sie wieder vorzutragen haben. Schreiben «Sie mir jedenfalls noch, bevor Sie Berlin verlassen.

«Sie herzlich grüssend

«Bern, den 12. Apr. 1855.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

«*Treuer Freund!*

«(13. April.) 1. Die alte Windhundsnase freut sich, dem Gewalts- «Rüssel auch einmal helfen zu können. Das $N(C^n)$ mit n^2-n+1 «Grundpunkten wird unter andern einfach dadurch bestimmt, dass «durch $n-1$ Punkte, die in einer Geraden liegen, zwei beliebige C^n «gelegt werden; ihre übrigen Schnitte sind alsdann jene Grundpunkte. «Dass umgekehrt bei einem Netz mit n^2-n+1 Grundpunkten je zwei «Glieder sich noch in $n-1$ Punkten auf einer Geraden schneiden, «folgt leicht. Sei $n=4$. Gehen drei Curven A^4, B^4 und C^4 durch 13p «und wird A^4 nebstdem von B^4 in q, r, s und von C^4 in t, u, v ge- «schnitten, und man zieht die Geraden $qr=C$, $tu=B$, so sind B^4+B «und C^4+C zwei Curven 5^{ten} Grads, B^5 und C^5, welche die A^4 in den- «selben 17 Punkten, nämlich $13p+q+r+t+u$, schneiden, folglich «müssen auch beide durch dieselben 3 nothwendigen Punkte gehen, «daher muss C durch s, B durch v gehen, und B und C müssen ihren «Schnitt, etwa a, auf der A^4 haben. Alle Geraden, welche die A^4 auf «diese Weise mit sämmtlichen übrigen Curven bestimmt, gehen durch «denselben Punkt a, den ich bei einer andern Betrachtung den *Leibpol* «der A^4 genannt habe; die Betrachtung ist mir im Augenblick nicht «gegenwärtig; aber die gesammten Leibpole spielten dabei eine Rolle, «auch eine der beiden Kerncurven des Netzes, welche die 13 p zu dp «hat. — Für n beliebig verfährt man ebenso; die Geraden $qr=C$ und «$tu=B$ bilden mit C^n und B^n Curven C^{n+1} und B^{n+1}, welche die A^n «in denselben $(n^2-n+1)\,p+q+r+t+u=n^2-n+5$ Punkten schnei-«den; jede hat mit A^n noch $n\,(n+1)-(n^2-n+5)=2n-5$ Schnitte, «was für $n>4$ weniger als die Zahl der nothwendigen $\frac{1}{2}(n-1)\,(n-2)$ «ist, nämlich um $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ weniger, also müssen umsomehr «C^{n+1} und B^{n+1} die $2n-5$ Schnitte als *nothwendige* gemein haben, und «zwar sind sie Schnitte der Geraden C und B mit A^n. — Jetzt disku-«tiren Sie und ergänzen was oberflächlich ist. Danach kann $G\,(C^n)$ «nicht mehr als n^2-n+1 Grundpunkte haben.

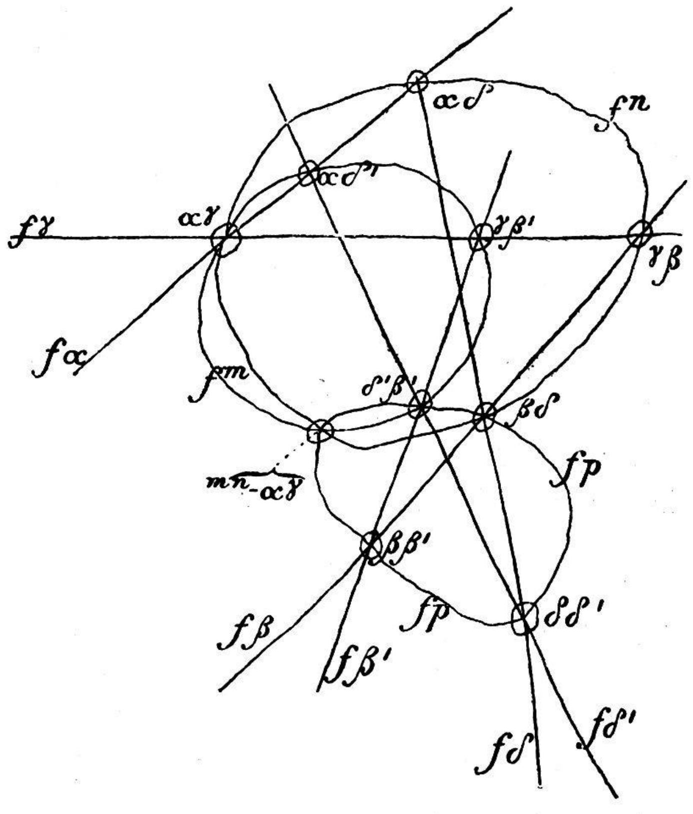
«Daraus folgt nun auch (mittels ebener Schnitte), dass wenn ein «$N\,(f^n)$ eine partielle Grundc. R^{n^2-n+1} hat, dann jedes Glied A^n von «jedem andern noch in einer ebenen Curve C^{n-1} geschnitten wird, «deren Ebene stets durch eine in A^n liegende Gerade a geht. Die «Grundcurve kann auch nicht höher sein.

«2. Wenn $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, und $\alpha\geqq\gamma\geqq\delta\geqq\beta$ und man bestimmt durch «die Glieder $f^\alpha+f^\beta$ und $f^\gamma+f^\delta$ ein $B\,(f^n)$, so dass dessen Grundc. «$R^{n^2}=R^{\alpha\gamma}+R^{\alpha\gamma}+R^{\beta\gamma}+R^{\beta\delta}$, so ist für ein freies Glied f^n des Büschels «die niedrigste Curve $R^{\beta\delta}$ (so wie auch $R^{\beta\gamma}$), im Allgemeinen, wohl «eine einzige ihrer Art, d. h. f^n enthält keine andere ihrer Art, und «sie ist wohl auch überhaupt die niedrigste Vollcurve auf f^n; dagegen «finden von den höheren Curven $R^{\alpha\gamma}$ und $R^{\alpha\beta}$ Schaaren statt. Wann «findet nur eine einzige $R^{\beta\delta}$ statt? und wann eine bestimmte Anzahl? «wie z. B. 27, wenn $n=3$ und $\beta=\delta=1$ ist.

«Legt man durch die gegebene Vollc. $(f^\alpha\,f^\gamma)=R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige «f^n, so schneidet sie f^α und f^γ noch in neuen Curven $R^{\alpha(m-\gamma)=\alpha\delta}$ «und $R^{\gamma\beta}$, durch welche neue (mehr als bestimmte) Flächen f^δ «und f^β gehen und deren Schnitt $(f^\delta\,f^\beta)=R^{\beta\gamma}$ *nothwendig* auf der «f^n liegt. Sei ferner $m=\alpha+\beta_1=\gamma+\delta_1$ und $\gamma\geqq\delta_1\geqq\beta_1$, und man legt «durch dieselbe $R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige f^m, so schneidet sie f^α und f^γ eben «so in neuen Curven $R^{\alpha\delta_1}$ und $R^{\gamma\beta_1}$, durch welche neue Flächen f^{δ_1} «und f^{β_1} bestimmt sind, deren Schnitt $(f^{\delta_1}\,f^{\beta_1})=R^{\beta_1\delta_1}$ nothwendig in «f^m fällt; und f^n und f^m schneiden sich noch in einer neuen Curve «$R^{mn-\alpha\gamma}$, *welche mit $R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ zusammen in einer Fläche f^p* «$(p=m+n-\alpha-\gamma=\beta+\delta_1=\beta_1+\delta)$ *liegt*. Aber noch mehr: *auf diese* «*Fläche f^p fällt auch der Schnitt* $(f^\beta\,f^{\beta_1})=R^{\beta\beta_1}$, *sowie der Schnitt*

«$(f^{\delta}\ f^{\delta_1}) = R^{\delta\delta_1}$. [Beweis: die drei Flächen $f^n + f^{\delta}$, $f^m + f^{\delta_1}$, $f^p + f^{\alpha}$, «sind von gleichem Grad und haben $R^{\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta_1} + R^{\beta_1\delta_1} + R^{mn-\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta}$ «$+ B^{\beta\delta}$ gemein, und daher müssen sie auch noch $R^{\delta\delta_1}$ gemein haben, «d. h. diese muss auf f^p liegen.] Ferner. Während $R^{\alpha\gamma}$, f^{α} sowie f^m, «f^n fest bleiben, kann sich f^{α} unendlichfach ändern, und dann ändern «sich auch f^{δ} und f^{δ_1}; aber diese gehen stets durch die festen Curven «$R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ und ihr Schnitt $R^{\delta\delta_1}$ bewegt sich auf der festen Fläche «f^p, so dass also f^p eine vielfache Schaar Curven $R^{\delta\delta_1}$ enthält, oder «durch zwei quasi projektivische Gebüsche G (f^{δ}) und G (f^{δ_1}) um die «festen partiellen Grundcurven $R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ erzeugt wird. — Was folgt «noch weiter daraus? Wenn eine blinde Sau eine Eichel findet, so «weiss sie dieselbe zu fressen — ich nicht recht. Machen Sie weitere «Verse daraus, wenn's geht. (Für m=n wird die Sache interessant, «f^p wird wie ein einfaches Hyperboloid, etc.)

«Zur Anschauung, wenn Sie solche nöthig haben.



«3. Wenn in n Ebenen in jeder eine Curve n^{ten} Grads gegeben, «und wenn je zwei Curven auf der Kante ihrer Ebenen sich in n «Punkten schneiden, *so sind die n Curven zusammen die Grundcurve* «*R^{n^2} eines Büschels B (f^n).* Versteht sich dieser Satz analytisch von «selbst? Synthetisch habe ich ihn bewiesen. Umgekehrt ist klar, dass

«durch n Ebenen und durch eine f^n ein B (f^n) bestimmt und $R^{n^2} =$
«n C^n ist.

«Lässt man eine C^n weg, so bestimmen die n—1 übrigen ein «G (f^n) (oder N (f^n)?), von dessen Gliedern sich je zwei in noch einer «C^n schneiden.

«4. Aus alter Zeit. Spezielle Flächen f^n, die projectivisch er«zeugt werden. Werden B (f^α) und B (f^β) projectivisch bezogen, so «erzeugen sie eine $f^{\alpha+\beta=n}$, welche durch die Grundcurven R^{α^2} und «R^{β^2} geht, eine einfache S ($R^{\alpha\beta}$) und, wofern $\alpha > \beta$, eine SS (R^{α^2}) [oder «nur S (R^{α^2})?], aber im Allgemeinen nur die einzige R^{β^2} enthält. Was «spielt weiter? — Wenn $\alpha = \beta = \frac{1}{2}n$, so sind dabei drei Nüancen zu «unterscheiden, nämlich

I. «die B (f^α) und B ($f^{\beta=\alpha}$) haben kein gemeinschaftliches Glied «sind in *allgemein schiefer Lage;* oder

II. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied f^α_2, welchem be«ziehlich zwei andere f_1^α und f_1^β entsprechen, sind noch in «*beschränkter schiefer Lage;* oder

III. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied f_2^α, welches *sich selbst*, «*entspricht* und sind in *perspectivischer Lage.*

«Bei (I.) ist f^n wie das Hyperboloid beschaffen, sie enthält 2 «Curvenschaaren α^2 Grads, S (R^{α^2}, R^{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$), in welche eine «Schaar-Schaar von Flächen f^α und f^β wechselweise einhacken, oder «es finden zwei Schaaren von Büscheln statt, S [B (f^α), B (f^β)] und »S [B (f^α f^β)], von denen je zwei aus *gleicher* Schaar allgemein «projectivisch sind; je zwei aus verschiedenen Schaaren dagegen wohl «ein gemeinschaftliches Glied haben, aber nicht projectivisch bezogen «sind?

«Bei (II.) wird f^n von den Gliedern f_1^α und f_1^β (bei dem f_2^α ent«sprechen) beziehlich in den Grundcurven R^{α^2} und R^{β^2} der gegebenen «Büschel berührt; die zwei Curvenschaaren S (R^{α^2}, R^{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$) «fliessen in einander, in jeder wird f^n von einem Gliede f_1^α (oder «f_1^β) berührt, so dass f^n für diese Schaar S (f_1^α, f_1^β) die *Umschrei«bungsfläche* ist; (aber wie kann man diese Schaar für sich be«stimmen?).

«Bei (III.) zerfällt die f^n in f_2^α und in einen *perspectivischen* «*Durchschnitt* $= f^{\frac{1}{2}n}$, in welchem die S ($R^{\alpha\beta}$) liegen, und deren ge«meinsames Glied aller Büschel B (f^α f^β) ist. — Sonst noch was?

«Mit der kurzen Abfertigung der Flächenbüschel Ad 12 bin ich «nicht so sehr zufrieden, denn gerade darüber hoffte ich viel von «Ihrem Witz, weil ich im Moment wähnte, Sie könnten auch das «Unmögliche möglich machen; nun soll ich glauben, es sei nicht so. «Sie verlangen mein leitendes Prinzip zu wissen: Windhundsnase, «unmittelbare Anschauung, Formenlehre. Es sollte gezeigt werden, «dass die angegebenen Fälle (die ich als möglich anschaute) in der «That möglich sind, wenn die Grade der Theilflächen, so wie die «Grade der Theile, in welche ihre Schnittcurven zerfallen, von ge-«wisser Grösse sind. Z. B. wird verlangt, es soll der durch $f^\alpha + f^\beta$ «und $f^\gamma + f^\delta$ besimmte $B(f^n)$ noch ein drittes Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ ent-«halten (wo $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = n$), ohne dass die Voll-«curven $R^{\alpha\gamma}$, $R^{\alpha\delta}$, $R^{\beta\gamma}$, $R^{\beta\delta}$ (aus denen die R^{n^2} besteht) selbst in «weitere Theile zerfallen, so ist der Fall nur möglich, wenn $\alpha = \beta =$ «$\gamma = \delta = \varepsilon = \varphi$ ist. Wird dagegen gestattet (oder verlangt), dass jede «der genannten vier Vollcurven in zwei Theile zerfalle, etwa in «$R^{\alpha\gamma-u} + R^u$, $R^{\alpha\delta-x} + R^x$, $R^{\alpha\gamma-y} + R^y$, $R^{\alpha\delta-z} + R^z$, ohne dass «die Flächen f^α, f^β, f^δ, f^γ selbst auch zerfallen, so ist die Frage, «ob das dritte Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ auch nur dann möglich sei, wenn $\alpha = \gamma = \varepsilon$ «und $u = x = y = z$ und dazu noch $x = \frac{1}{2}\alpha^2$? Für $n = 4$ sind z. B. «leicht 3 Paar Flächen zweiten Grads $f^\alpha + f^\beta$, $f^\gamma + f^\delta$, $f^\varepsilon + f^\varphi$ «($\alpha = \gamma = \varepsilon = 2$) anzuschauen, die sich in 8 Kegelschnitten C^2 schneiden, «welche die Grundcurve R^{16} des $B(f^4)$ bilden. Erlaubt man, dass «jede der vier Vollcurven der Glieder $f^\alpha + f^\beta$ und $f^\gamma + f^\delta$ in drei «Theile zerfallen darf, so schien mir, es müssen noch zwei der glei-«chen Glieder möglich sein $f^\varepsilon + f^\varphi$ und $f^\eta + f^\lambda$, und es ist die «Frage, wie sich dabei die Grade (α, γ, . . . λ) der Theilflächen und «die Grade der 12 Curven (aus denen die genannten 4 oder die R^{n^2} «bestehen) zu einander verhalten. U. s. w. — Ein tappen. Es ist wie «die Entdeckung von besondern Polyedern, regelmässigen und halb-«regelmässigen.

«Dass, wenn $n = \mu\alpha$, dann ein $B(f^n)$ mit $\mu + 1$ Gliedern «von der Form $f^{(\mu-1)\alpha} + f^\alpha$ möglich ist, dessen R^{n^2} aus einer R^{α^2} «und $\mu + 1$ Curven $R^{(\mu-1)\alpha^2}$ besteht, ist von mir angeschaut und «wird von Signore nicht bestritten — sondern bewiesen werden. «Durch μ Glieder ist das letzte nothwendig.

«Mit tiefstem Bedauern Ihnen das schöne Stück Krautkuchen «hiedurch zu vergällen — grüsst Sie

«Ihr dankbarer schrecklich aufgeblähter

«15. April 55, Abends. *J. Steiner.*

«NB. Setzen Sie fortan auf meine Adresse «Kronenstrasse 55»,
«dann erhalte ich die Briefe schneller, auf der Post schreibt man es
«immer erst darauf, weil die Briefträger ihre Tour stets wechseln.

«(16ten April.) Das Trödeln hilft; heut Morgen 8 Uhr erhielt
«ich Ihren Brief, wofür meinen besten Dank.

«In diesem Jahr komme ich in der Akademie nicht an die
«Ramme, weder im Plenum noch in der Klasse; indessen wäre das
«kein Hinderniss, wenn die Abhandlung fertig wäre, — davon bin
«ich aber weiter entfernt, als vor einem Jahr. Die Streifebenen (wo-
«rauf Sie *mit Recht* stolz sind) und Knotenpunkte sind *sehr schön* ins
«Reine geschrieben — aber falsch, — und nun soll es geändert wer-
«den, was für mich besonders schwer ist, von je her.

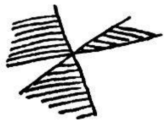
«Vor Juni werde ich kaum von hier abreisen, wo soll ich hin,
«da Sie wieder an der verfluchten Vorsichtskasse zu fressen haben
«um $\frac{1}{3}$ Löhnung? nach Paris? ist auch nicht viel zu machen. — Im
«October ist *Liouville* noch in Toul, man müsste ihn da besuchen;
«die Curse beginnen glaube erst Ende Octoder oder Anfang November.

«Nicht wahr wenn f^3 nur zwei Knotenpunkte p und q hat, so
«berühren sich die Knotenkegel p^2 und q^2 schon längs der Geraden
«pq und für die längs diese berührende Streifebene reducirt sich der
«Schnitt auf die dreifache pq, oder diese zählt für 3 *Cayley*'sche G. Os-
«culirt die Streifebene dabei die f^3?»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Ihren werthen Brief vom 10. April habe am 14ten erhalten und
«freue mich, daraus Ihr Wohlsein zu vernehmen. Indem ich sogleich
«anfange, Ihre Fragen zu beantworten, möchte ich zuerst einige Namen
«und Definitionen Ihrem Urtheil vorlegen. Eine ebene Curve hat einen
«*Selbstberührungspunkt* (eine *Autapse*), wenn zwei Zweige derselben
«sich auf gewöhnliche Weise berühren; er erniedrigt die Classe um
«4 und verschlingt 12 Wendepunkte. Eine Fläche hat einen *Horn-*
«*punkt*, wenn jede frei durchgehende Ebene die Fläche mit *Doppel-*
«*punkt* schneidet, und alle mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen
«einen freien Kegel zweiten Grades umhüllen; unter diesen Ebenen
«können immerhin einige bestimmte mit *Autapse* schneiden. Wenn

«aber insbesondere die mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen alle «dieselbe *Gerade* gemein haben, so heisse der singuläre Punkt *Kanten-«punkt,* und die Gerade seine *Kante;* es gehen dann zwei Ebenen «durch diese Kante, welche die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneiden; «sind diese imaginär, so hat hier die Fläche eine fadendünne Stelle. «Schneidet endlich jede durch den Punkt gehende Ebene die Fläche «mit *Rückkehrpunkt,* so liegen alle Rückkehrtangenten in einer Ebene «welche selbst die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneidet  ; «wenn alle drei Tangenten des dreifachen Punkts reell sind, so treffen «hier drei platte Spitzen der Fläche zusammen, und jeder liegt eine «entsprechende Lücke gegenüber; darf man ihn wohl *Dreispitzpunkt* «und die Ebene, welche die Fläche eigentlich zweimal mit dreifachem «Punkte schneidet, dessen *Platte?* — Wenn eine algebraische Curve «nie als vollständiger Durchschnitt zweier Flächen dargestellt werden «kann, so nenne ich sie *Untercurve,* im Gegentheil *Vollcurve;* wenn «aus dieser oder jener keine Curve niedrigern Grades herausgenommen «werden kann, so heise sie *untheilbar.*

«Verlangt man die Punkte, in denen eine Fläche F^m von einem «$B(f^n)$ berührt wird, so sind diese identisch mit den Durchschnitts-«punkten der F und einer gewissen Untercurve $\{3(n-1)^2 + 2(m-1)$ «$(n-1) + (m-1)^2\}$ ten Grades, des Orts eines Pols, dessen auf F be-«zügliche Polarebene durch die Axe des auf B(f) bezüglichen Polar-«ebenenbüschels geht. Hat F einen *Hornpunkt*, einen *Kantenpunkt,* «einen *Dreispitzpunkt,* so geht die Untercurve durch resp. 1° mit freier «Tangente, 2° die Kante berührend, 3° mit Doppelpunkt, dessen Ebene «die Platte ist; also zählt der singuläre Punkt resp. für 2, 3, 6 Lö-«sungen der Aufgabe. — Hat F eine *Doppellinie*, so zerfällt jene Unter-«curve: 1° in diese Doppellinie, einfach gezählt, 2° in eine untheilbare «Untercurve, welche die Doppellinie in allen (u. nur in diesen) Punkten «schneidet, wo sie von B(f) berührt wird, wobei jeder dieser Punkte «für zwei Lösungen der Aufgabe zählt, und endlich ausserdem die F «in den übrigen Punkten, wo B(f) auf gewöhnliche Weise berührt. — «Zerfällt F in m Ebenen, so sind vorerst aus der vollständigen Unter-«curve die $\frac{m(m-1)}{2}$ Durchschnittsgeraden wegzulassen, die übrige «untheilbare Untercurve ist dann nur vom $\{3(n-1)^2 + 2(m-1)$

«$(n-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}\Big\}$ ten Grade und geht frei durch jeden der «$\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ Durchschnittspunkte (also je 3 Lösungen der Auf«gabe; denn hier ist mehr als Hornpunkt!), schneidet ausserdem jede «Gerade noch in den $2(n-1)$ Punkten, wo sie von B(f) berührt wird «(je 2 Lösungen, für die Gerade im Ganzen $4(n-1)$) und endlich «ausserdem jede Ebene in den $3(n-1)^2$ Punkten, in denen sie allein «von B(f) berührt wird. — Wenn eine Fläche aus B(f) in eine Doppel«ebene von $(e)^2$ und eine g^{n-2} zerfällt, so wird auch jene die Aufgabe «lösende Untercurve theilbar, 1° in eine völlig unbestimmte, der e an«gehörige Curve $(m+3n-5)^{ten}$ Grades, 2° in die ebene Curve «$(e, g)^{n-2}$, 3° in eine untheilbare Untercurve vom Grade

$$3n^2-10n+g+(2n-3)(m-1)+(m-1)^2.$$

«Für $n=2$ reducirt sich diese Zahl auf m^2-m+1. Wenn also «ein $B(f^2)$ eine Doppelebene enthält, so berührt er eine F^m nur in «$m(m^2-m+1)$ Punkten auf gewöhnliche Weise.

«Von einem gegebenen Punkt A gehen an eine F^m nur

$$m(m^2-m+1)$$

«Normalen. Ihre Fusspunkte liegen nämlich auf einer Untercurve «$(m^2-m+1)^{ten}$ Grades, dem Orte eines Pols P, dessen auf F be«zügliche Polarebene auf dem Strahl AP senkrecht steht.

«Eine freie Vollcurve $(F^p, G^q)=C^{p\times q}$ wird von einem $B(f^n)$ «in $pq(2n+p+q-4)$ Punkten berührt. Denn diese liegen auf «einer Untercurve $(2n+p+q-4)^{ten}$ Grades, dem Orte des Poles, «für welchen die zwei Polarebenen von F und G sich auf der Axe des «Polarebenenbüschels von B(f) schneiden. Die Untersuchung für den «Fall einer beliebigen Untercurve C soll etwa später einmal vorge«nommen werden.

«Wenn eine Fläche F^m und ein Halbnetz $(f, f', f'')^n$ gegeben sind, «so ist der Ort des Pols, dessen auf F, f, f', f'' bezüglichen Polarebenen «einen Punkt gemein haben, eine Fläche $H^{m-1+3(n-1)}$; und in jedem «Punkte der Vollcurve (F, H) oder $R^{m(m+3n-4)}$ wird F von einer «Fläche des Halbnetzes berührt.

«Wenn vier beliebige f^n gegeben sind, und P ist ein Pol, für «den die ersten Polarflächen aller vier f einen Punkt Q gemein haben, «so ist der Ort von Q eine Fläche $4(n-1)^{ten}$ Grades.

«Werden durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke der Fläche «dritten Grades Ebenen gelegt, so geht durch die drei Kegelschnitte «immer eine Fläche zweiten Grades. Soll diese ein Kegel sein, so ist «wirklich der Ort seines Scheitels eine Fläche *vierten* Grades, was mir «höchst merkwürdig erscheint. — Was Sie über die schiefen Fünfecke «aussagen, ist Alles richtig. Wird nämlich aus den 27 Geraden eine «f herausgehoben, so giebt es 16 welche sie nicht schneiden; eine «von diesen sei a. Dann giebt es nur fünf Geraden, welche wohl a, «aber f nicht schneiden; eine von diesen sei b, so giebt es nur vier «Geraden, welche b, aber weder a noch f, schneiden. Eine von diesen «sei c, so giebt es noch 3 Geraden, welche c, aber keine der übrigen «schneiden. Eine darunter sei d, dann giebt es nur noch zwei Geraden, «welche a und d, aber keine der übrigen schneiden. Eine von diesen sei e, «so hat man ein schiefes Fünfeck a b c d e. Wird f festgehalten, so hat man also «16 . 5 . 4 . 3 . 2 solche Fünfecke. Da man aber mit jeder der fünf Seiten «anfangen, und von derselben aus sowohl rechts als links fortgehen «kann, so ist soeben jedes Fünfeck 10 mal gezählt worden; folglich ist «die Zahl aller verschiedenen zur Geraden f gehörenden Fünfecke «$16 \cdot 4 \cdot 3 = 192$. Ist umgekehrt das Fünfeck a b c d e gegeben, so «giebt es nur noch zwei Geraden, welche keine Seite desselben «schneiden; ja — das Fünfeck kömmt also in zwei Systemen (f, abcde) «vor und im Ganzen giebt es $27 \cdot 192$ solche Systeme; folglich giebt «es nur $27 \cdot 96 = 2592$ Fünfecke.

«Da es 216 Paare sich nicht schneidender Geraden giebt, «so entsprechen jedem Paare 12 Fünfecke, welche aus den 10 «Geraden, die keine das Paar schneiden, gebildet werden können. «In der That wird die erste Seite des Fünfecks nur von drei «dieser 10 Geraden, die zweite nur von 2 übrigen, die dritte «auch nur von 2 übrigen geschnitten und wenn aus diesen die vierte «gewählt ist, so ist die fünfte Seite nothwendig; also muss die «Zahl der verschiedenen Fünfecke $\frac{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{10} = 12$ sein. «Wenn von jenen 10 Geraden 5 zu einem Fünfeck verwendet wor«den sind, so bilden die 5 übrigen auch wieder ein Fünfeck. Ich «weiss vor der Hand diese Fünfecke nicht weiter zu systematisiren, «wie Sie sagen; ich sehe keine Beziehung derselben, weder zu den 40 «Gruppen von je drei Triederpaaren, noch zu den 360 Flächen zwei«ten Grades, deren jede die cubische Fläche in 6 Geraden schneidet. «Ich glaube, Ihnen einmal ein Verzeichniss der 45 Dreiecke, wo die

«27 Geraden mit Ziffern bezeichnet sind, gegeben zu haben. Tabellen «der Fünfecke, etc. in ähnlichem Sinne würden ganze Bogen anfüllen; «wenn Sie etwas der Art verlangen, so bitte ich Sie, es mir näher «zu bezeichnen; ich würde es Ihnen dann ungesäumt ausfertigen und «zuschicken.

«Wenn Sie von Einem Systeme der Sylvester'schen 5 Grund-«ebenen sprechen, so müssen Sie das Prädicat *reell* weglassen; denn «es giebt überhaupt nur *ein* System; und wenn die 19 Gleichungen «dritten Grades mehrere Lösungen haben, so können sie sich nur «durch *Permutation* der 5 Grundebenen unterscheiden. Die 10 Schnitt-«punkte der Grundebene sind allerdings gewöhnliche Hornpunkte. «Nimmt man zu dem Berührungskegel zweiten Grades eines solchen Horn-«punkts seinen in Beziehung auf das entsprechende Trieder harmonischen «Strahl, so bekömmt man 10 Strahlen; je 4 von diesen, welche einem «Tetraeder entsprechen, treffen in einem Punkt zusammen; es «giebt also 5 solche Punkte. Wenn nämlich ein Kegelschnitt einem «Dreieck umschrieben ist, so entspricht jedem Punkt des Kegelschnitts «in Beziehung auf das Dreieck eine harmonische Transversale, und «während jener Punkt sich auf der Curve bewegt, dreht sich die «Transversale um einen festen Punkt. Diesen nenne ich den har-«monischen Punkt für den Kegelschnitt in Beziehung auf das Dreiseit. «Aehnlich für das Trieder und den umschriebenen quadratischen Kegel. «Analytisch dargestellt wird dieses

«Nimmt man die Polynome v, w, x, y, z der Grundebenen so an, dass

$$v^3 + w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

«die Gleichung der Fläche wird und ist dann

$$av + bw + cx + dy + ez = 0$$

«die identische Relation zwischen den fünf Polynomen, so ist

$$vwxyz\left(\frac{a^2}{v} + \frac{b^2}{w} + \frac{c^2}{x} + \frac{d^2}{y} + \frac{e^2}{z}\right) = 0$$

«die Gleichung der Kernfläche; folglich

$$c^2yz + d^2xz + e^2xy = 0$$

«z. B. die Gleichung des quadratischen Berührungskegels im Horn-«punkt (x y z) und

$$x : y : z = c^2 : d^2 : e^2$$

«sind die Gleichungen des harmonischen Strahls. — Der Schnitt R^{12} oder

$$\left(\sum v^3 = 0, \quad \sum a^2wxyz = 0\right)$$

«*geht* nicht bloss *durch* die zwei Asymptotenpunkte jeder der 27 «Cayley'schen Geraden, sondern *berührt* sie in denselben, die Curve «R hat also die 27 Geraden zu *Doppeltangenten*. Die Curve 4^{ten} «Grades, in welcher jede der 45 Cayley'schen Ebenen die Kernfläche «schneidet, gehört einem Büschel an, der einerseits vom Vierseit, «dessen 6 Ecken jene Asymptotenpunkte sind, anderseits vom Cayley'-«schen (Diagonalen-) Dreiseit und noch einer vierten Geraden bestimmt «ist. Die Kernfläche geht überdies durch die 240 Scheitel der 120 «Cayley'schen Triederpaare. Das Cayley'sche System liefert also im «Ganzen 348 Punkte der Kernfläche; das Sylvester'sche System liefert «ihre 10 Geraden und die Berührungskegel in ihren 10 Hornpunkten. — «Wenn P, Q auf der Kernfläche befindliche conjugirte reciproke Pole «der ursprünglichen Fläche sind, und P bewegt sich auf der Curve «R, so durchläuft Q eine Curve S, durch die ich bis jetzt keine «niedrige Fläche als siebenten Grades habe legen können, deren «Gleichung

$$\sum a\,b\,c\,(v^3 + w^3 + x^3)\,y^2\,z^2 = 0.$$

«Wenn P und Q je zusammenfallen sollten, so würde die ursprüngliche «Fläche bornirt; in den Durchschnitten von R und S vereinigen sich «daher nicht conjugirte P und Q. Ueber die Lage der Polarkegel «von P und Q gegen einander weiss ich nichts besonderes anzugeben. — «Die Curve R kann wenigstens keine Doppelpunkte, etc. haben; denn, «wenn man verlangt, dass die ursprüngliche Fläche von ihrer Kern-«fläche berührt werde, so kann dieser Forderung *unter Anderem* «durch die sehr einfache Bedingung

$$a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2} + d^{3/2} + e^{3/2} = 0$$

«entsprochen werden; aber immer wird dadurch die ursprüngliche «Fläche bornirt [1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie haben leider Ihren Beweis für den Satz, dass drei ebene Cur-«ven n^{ten} Grades, welche nicht n^2 Punkte gemein haben, nicht mehr als «n^2-n+1 Punkte gemein haben können, nicht in strengen Formen «ausgeführt; und was Sie davon mittheilen, vermag mich nicht zu

[1]) Unterschrift fehlt.

«überzeugen. Der Mangel liegt darin, dass Sie vom Satze über die «nothwendigen Punkte eine unerlaubte Anwendung machen. Dieser «Satz darf nämlich nur so ausgesprochen werden:

«Wenn $m \gtreqless n$, so sind *unter* den mn Punkten, welche eine C^m «mit einer C^n gemein hat, $\binom{n-1}{2}$ nothwendig.» Daraus folgt aber «noch nicht, dass, wenn von den gemeinschaftlichen Punkten $mn - \binom{n-1}{2}$ oder sogar mehr fixirt sind, dann alle übrigen nothwendig «sind. Der Schluss würde nur gelten, wenn die $mn - \binom{n-1}{2}$ «Punkte *frei* auf der C^n gewählt werden. Wenn aber diese schon «gegenseitig bedingt sind, so können im Besondern unter ihnen so «viele nothwendige Punkte vorkommen, dass immer noch von den «übrigen einige *nach Belieben* auf der C^n gesetzt werden dürfen. «Den Gedankengang, den Sie mir an die Hand geben, hatte ich schon «vorher durchlaufen, aber eben die erwähnte Schwierigkeit veranlasste «mich zu der Klage, dass ich für Ihren Satz keinen Beweis habe fin«den können. Zum Ueberfluss füge ich noch hinzu, dass für $n > 4$ «stets $\binom{n-1}{2} > n-1$ ist, und dass also, wenn Ihre Fassung des «Satzes von den nothwendigen Punkten richtig wäre, und drei Curven «n^{ten} Grades A, B, C schon $n^2 - n + 1$ Punkte gemein haben, dann die «$n-1$ übrigen nothwendig wären, also alle drei A, B, C zum selben «Büschel gehören müssten. — Sie sagen kein Wort zu dem von mir «zur Sprache gebrachten Falle, wo A, B, C nur $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Punkte «gemein haben $\left(\alpha < \frac{n}{2}\right)$; ungeachtet die Construction der Ihrigen «ganz ähnlich ist; nämlich je zwei Glieder des Netzes schneiden sich «ausser jenen Grundpunkten noch in $n-\alpha$ auf einer C^α liegenden «Punkten. Wenn man nun versucht, durch zwei von diesen Punkten «eine Gerade zu legen und mittelst dieser eine C^{n+1} zu bilden, so «kann man wiederum mittelst Ihrer weiten Fassung des Satzes von «den nothwendigen Punkten den schönsten Unsinn herausbringen. «Also noch einmal: Haben Sie die Güte, für Ihren interessanten Satz «einen logisch gegliederten Beweis zu geben, zu dem ich von ganzem «Herzen Ja und Amen sagen kann. Wenn das Netz mehr als $\binom{n+2}{2} - 3$

«Grundpunkte hat, so sind diese gewiss gegenseitig bedingt, und «es wäre nun wichtig zu wissen, ob alle Zahlen von hier an bis «n^2-n+1 möglich sind, oder nur einige derselben, wie z. B. alle von «der Form $n^2-n\alpha+\alpha^2$.

«Wenn A, C, D, B vier Flächen sind, deren fallende Grade eine «arithmetische Proportion bilden, und man bildet aus den zwei zusam«mengesetzten Gliedern n^{ten} Grades AB und CD einen Flächenbüschel, «so ist wirklich auf einem freien Gliede dieses Büschels (B, D) die «niedrigste Vollcurve und unbeweglich (also einzig). Auch (C, B) ist «unbeweglich und einzig; hingegen (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ «fache Schaar, und (A, D) eine $\binom{\alpha-\gamma+3}{3}$ fache. *Ausnahmen:* Wenn «$\alpha=\gamma$, $\delta=\beta$, aber $\alpha>\delta$, so ist immer noch die Vollcurve (B, D) einzig «und (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ fache Schaar; aber (A, D) und (C, B) «sind Glieder einer und derselben einfachen Schaar. Wenn endlich «$\alpha=\gamma=\delta=\beta$, so sind auch (A, C) und (D, B) Glieder einer einfachen «Schaar. — Wenn $n>3$, so sind die unbeweglichen Vollcurven nur in «der Anzahl 1 vorhanden; um deren mehrere zu haben, müsste man «Gewalt brauchen.

«Mit Ihrem Schema $\left\|\begin{matrix} A \,.\, D \,.\, D_1 \\ C \,.\, B \,.\, B_1 \end{matrix}\right\|$ einer Theilcurve haben Sie die «R^3 im Allgemeinen nachgeahmt. Wenn Sie meine frühern Briefe «nachsehen, werden Sie finden, dass ich schon von solchen Schema«ten von Theilcurven mit mehr als zwei Horizontalzeilen gesprochen, «aber dann auch alle diese Darstellungsweisen als unzureichend für «eine möglichst allgemeine Classification der Theilcurven erkannt habe.

«Es sind n Ebenen gegeben, und in jeder soll eine Curve n^{ten} «Grades so gezeichnet werden, dass je zwei Curven die Kante ihrer «Ebenen in denselben n Punkten schneiden. Diese Aufgabe bietet «eine sonderbare Schwierigkeit dar. Giebt man nämlich zuerst in «jeder Ebene $\binom{n+2}{2}-1$ Punkte zur Bestimmung der Curve, so sind «dann wegen der Bedingung auf jeder Kante n Punkte abzuziehen. «Es bleiben so nur $2\,n^2$ Punkte übrig, welche zur Bestimmung des «ganzen Curvensystems hinzureichen scheinen. Aber dann würde nicht «bloss ein *Büschel* von Flächen n^{ten} Grades durchgehen. Das Umge-

«kehrte hingegen, dass eine f^n und eine Gruppe von n Ebenen einen «Büschel bestimmen, ist vollkommen klar.

«Eine f^n und eine Gruppe von n—1 Ebenen bestimmen nicht «ein Netz, sondern eine *vierfache* Schaar.

«Wenn Sie zwei Büschel B (f^α), B (f^β) projectivisch auf einander «beziehen, und es ist $\alpha > \beta$, so erzeugen sie eine $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ fache «Schaar von Vollcurven $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades.

«Es sei F die Fläche $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Grades, Ort des Durchschnitts «je einer Fläche des einen Büschels mit der entsprechenden des «andern; schneiden Sie F mit einer beliebigen Fläche $(\alpha-\beta)^{\text{ten}}$ Grades «und nehmen diese Vollcurve zu der Grundcurve des B (f^β) hinzu, «so haben Sie eine zusammengesetzte Curve $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades, welche der «erwähnten vielfachen Schaar angehört. Nehmen Sie aus dieser viel«fachen Schaar irgend zwei Vollcurven frei heraus, so schneiden sich «dieselben in $\alpha^2(\alpha-\beta)$ Punkten, welche alle auf derselben Fläche «$(\alpha-\beta)^{\text{ten}}$ Grades liegen. Jede solche Vollcurve wird von jeder «$R^{\alpha\times\beta}$ in $\alpha^2\beta$ Punkten geschnitten; aber keine zwei $R^{\alpha\times\beta}$ haben «einen Punkt gemein. — Es seien A, A′, A″ irgend drei Glieder «des höhern, B, B′, B″, die entsprechenden des niedrigern Büschels. «Sie setzen auf der F nach Belieben $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ Punkte und legen «durch diese und jeweilen durch eine der Vollcurven (A, B), (A′, B′), «(A″, B″) resp. die Flächen α^{ten} Grades $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, so bestimmen diese «einen neuen Büschel α^{ten} Grades, der mit dem unveränderlichen Büschel «β^{ten} Grades projectivisch ist und zwar so, dass $\mathfrak{A}$, B; $\mathfrak{A}'$, B′; $\mathfrak{A}''$, B″ «sich paarweise entsprechen; durch drei Paare ist aber hinreichend «bestimmt, welche Fläche des Büschels ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$) jeder Fläche des un«veränderlichen Büschels (B, B′) entspricht. — Doch ich bin hier«über wohl weitläufiger als nöthig ist. Sie haben es durch Ihre «Frage, *was weiter spiele*, veranlasst. Die Fläche F ist jämmerlich be«schränkt; und diese Vorstellung ist bei unsern frühern Unter«suchungen schon häufig benutzt worden. Ich kann daher nicht recht «begreifen, warum Sie wieder darauf zurückkommen; Sie repetiren «damit nur die einfachsten analytischen Hülfsmittel, die für andere «Untersuchungen dienen mögen, aber an sich nicht werth sind, viel «besprochen zu werden.

«Sie setzen nun $\alpha=\beta$ und specialisiren stufenweise. I. Die «projectivischen Büschel (A, A′, A″) und (B, B′, B″) haben kein ge-

«meinschaftliches Glied. Die von ihnen erzeugte F Fläche $2\alpha^{ten}$ «Grades enthält zwei geschiedene Schaaren (A, A′) und (A, B) von «Curven α^{2ten} Grades; je zwei Curven derselben Schaar können «durchaus keinen Punkt gemein haben; aber jede Curve der einen «Schaar wird von jeder der andern in α^3 Punkten geschnitten; und «durch diese zwei Curven geht immer eine Fläche C‴, welche sowohl «dem Büschel (C, C′, C″, . . .) als auch dem Büschel (A‴, B‴, C‴, . . .) «angehört.

«II. Die projectivischen Büschel (p, q) und (q, r) haben ein ge-«meinschaftliches nicht entsprechendes Glied q. Dann enthält die F eine «einzige Schaar von Curven α^{2ten} Grades, welche sämmtlich durch die «α^3 (festen) Knotenpunkte der F gehen. Daher bilden alle Flächen «der Büschelschaar zusammen ein *Gebüsch*, und jede solche Fläche «geht durch *zwei* Curven R^{α^2} und ist durch diese bestimmt, ausge-«nommen, wenn sie die F längs einer R^{α^2} berührt. Alle solche «Flächen P (α^{ten} Grades), welche die F längs einer R berühren, bilden «natürlich eine einfache Schaar von der zunächst auf den *Büschel* fol-«genden Ordnung, indem durch irgend einen im Raume gegebenen «Punkt nicht nur eine (wie beim Büschel), sondern *zwei* Flächen P «gehen. Man könnte also diese Schaar einen quadratischen Büschel «nennen, wenn man den gewöhnlichen Büschel mit Grundcurve einen «*linearen Büschel* nennen wollte. Ich kann nicht umhin, die an sich «sehr klare Sache analytisch auszudrücken. Wir haben $F = pr - q^2$ «als Polynom der erzeugten Fläche $2\alpha^{ten}$ Grades. Sind nun λ, μ «irgend zwei Projectivitätsfactoren, und setzt man

«$P = p + 2\lambda q + \lambda^2 r$, $Q = p + (\lambda + \mu)q + \lambda\mu r$, $R = p + 2\mu q + \mu^2 r$, «so ist auch

$$(\lambda - \mu)^2 F = PR - Q^2.$$

«D. h. die Fläche F wird von der Fläche P längs der Curve $(p + \lambda q,$ «$q + \lambda r)$ und von der Fläche R längs der Curve $(p + \mu q,\ q + \mu r)$ be-«rührt, und die Fläche Q geht durch diese zwei Curven. Da $\lambda + \mu$, «$\lambda\mu$ jede beliebigen zwei Zahlen sein können, so ist Q jede Fläche «des Gebüschs (p, q, r); hingegen P bildet eine einfache Schaar, dar-«gestellt durch die Gleichung $p + 2\lambda q + \lambda^2 r = o$.

«III. Wenn die Büschel (p, q) (p, r) projectivisch sind und das «Glied p gemein haben, so ist $F = p(q - r)$, und was noch klarer «als diese Formel sein kann, weiss ich nicht.

«Wenn die zusammengesetzten Flächen AB, CD einen Büschel bil-«den sollen, der wieder ein zusammengesetztes Glied EF enthält, so ist «dieses freilich, wenn (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) lauter Vollcurven «sein sollen, nur möglich, indem alle 6 Polynomen A, B, C, D, E, F «vom gleichen Grade sind und alle 6 Flächen demselben Gebüsch «angehören.

«Antwort verspätet wegen Examenreisen, und daherigen beim «Witterungsumschlag vom 20. April zugezogenen Katarrh. Leider nur «aus Pflicht geschrieben, sonst unfähig in diese verhexten Zer-«fällungen einzutreten, bei denen ich kein treibendes Interesse «verspüre. Ihr treuer

«Bern, den 1. Mai 1855.

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

7.—12. V. 1855.

«*Gestrenger Signore!*

«Ihr ungnädiges Gripp-Schreiben nimmt mir fast den Muth neue «Fragen zu stellen. Sie haben keinen Massstab für die Verstandes- «und Gedächtnissschwäche Anderer, urtheilen bloss nach sich, da-«her keine Nachsicht. Bei meiner Erschlaffung kann ich nicht «immer mit hohen Sätzen rumpeln; zudem besteht meine *Grösse* ja «nur im *Kleinen*, im sorgfältigen allseitigen Erforschen desselben; und «wahrlich ich sage Euch», wer nur Grosses fressen will, sieht das «Gras nicht wachsen, kann die Welt nicht unmittelbar belehren. «Die meisten Menschen steigen vom Kleinen aufwärts; es giebt wenige «Bevorzugte, die Alles auf einmal und von Oben herab verschlingen, «es sind Elephanten, mehr als der alte Mezzo-Elefanti in Rom war.

«Ob Sie mir alle Fragen beantwortet haben, weiss ich nicht. «Von Ihren Katarrh-Formeln kann ich keinen Gebrauch machen, wie «schon früher bemerkt worden, glücklicherweise hatte ich mich schon «zuvor erinnert, wie sich die Sache verhält. — Einiges scheinen Sie «zu flüchtig angesehen zu haben, wie ich zeigen werde. Halten Sie «zu Gnaden, wenn ich dabei vielleicht Dinge vorbringe, die schon in «Früherem enthalten; in meinen Manuscripten kommt manches 3 bis «7 Mal vor. Uebrigens macht mich dies Kapitel über die nothwendi-«gen Punkte und Curven bei Flächen halb verrückt, ich drehe und «wende mich fortwährend noch darin, ohne zu Ende zu kommen.

«1. «Warum ich zu den $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Punkten dreier C^n nichts «sage?» weil ich sie schon zuvor betrachtet habe, sammt dem ana-

«logen Fall bei Flächen, worüber, wie mich dünkt, auch Andeutungen «in meinen Briefen enthalten; da ich aber vom Maximum sprach, so «war dieses $n^2 - n + 1$.

«Wenn Sie aus meinem angegebenen Verfahren «den schönsten «Unsinn» herleiten, so erinnere ich an das Echo: «Wie man in den «Wald hineinschreit, so schallt es zurück». Bei $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ darf «man nicht durch *zwei* der übrigen Punkte eine Gerade legen wollen, «sondern sachgemäss durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkte eine «Curve C^α, dann sind die Schlüsse gleich und führen zum richtigen «Resultat. Dass Sie dies übersahen, bezeugt Ihre Krankheit und Miss«muth. Wenn Sie von Ihrer gestrengen Forderung abstehen wollen «*einen logisch gegliederten Beweis zu geben*, — was ja doch nicht «eigentlich Sache meiner Nase ist — so werde ich es noch einmal «versuchen, Ihnen das Verfahren ausführlicher anzudeuten. Das Ganze «ist ein Spiel mit Curvenbüscheln und Netzen, theils mit zerfallenen «Gliedern, ähnlich demjenigen, welches Sie am Ende Ihres Briefes «so sehr ennüirt, dass Sie es mit Formeln in die Luft sprengen, als «wäre es Sebastopol. Die *übergrosse Zahl Grundpunkte* des Netzes «fand ich schon in den 30er Jahren; sie brachten mich erst in grosse «Verwirrung; in Rom wurde darüber mit Rex [1]) verhandelt; 1846—49 «stiess ich von verschiedenen Seiten wieder darauf, theilte auch einiges «dem Schmützer [2]) mit. Indessen kam die Frage nicht vor, auf welche «Signore jetzt sehr drängt: *alle Ueberzahlen anzugeben*. Zur Sache.

«Der Hauptfall entsteht einfach so: Legt man durch die α^2 Grund«punkte p eines B ($B^\alpha\ C^\alpha\ D^\alpha \ldots$) eine beliebige Curve A^n, $n > \alpha$, «so schneidet sie jedes Glied des Büschels, wie etwa B^α, noch in «$n\alpha - \alpha^2$ Punkten b, und wird durch diese Punkte b eine beliebige «Curve B^n gelegt, so schneidet sie die A^n noch in den *donnstigs* «($n^2 - n\alpha + \alpha^2$) Punkten q, durch welche ein G (C^n) gehen, wo«von jede das Mitglied A^n in *gleicher* Gruppe von $n\alpha - \alpha^2$ Punkten «(b, oder c, oder d, ...) schneidet, wie je ein Glied B^α, C^α, D^α, ... «des gegebenen Büschels, [und durch die q, und durch jede dieser «Gruppen geht je ein B (C^n)].

«Haben nun irgend drei Curven n^{ten} Grads A^n, B^n, D^n eine «solche Zahl m Punkte q gemein, die

$$«> \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 \text{ und } < n^2,$$

«so hat A^n mit B^n, D^n noch $n^2 - m$ Schnitte, beziehlich b, d; man «suche dasjenige α, für welches

[1]) Jakobi. — [2]) Aronhold.

«$m > n^2 - n(\alpha - 1) + (\alpha + 1)^2$ und $m < n^2 - n\alpha + \alpha^2$,
etwa $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2 + x$, (wo $x = +$ und ganz),
«und lege sodann durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ der Punkte b sowie «d beziehlich die Curven B^α und D^α: so sind $B^n + D^\alpha$ und $D^n + B^\alpha$ «zwei Curven $B^{n+\alpha}$ und $D^{n+\alpha}$, welche die A^n in denselben «m Punkten q und $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkten b sowie d «schneiden, zusammen in $m + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$ Punkten, «also in mehr als

$$«\frac{1}{2}(n + 1)(n + 3) - 3 + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$$

«und auch, wie leicht zu zeigen in mehr als

$$«n(n + \alpha) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

«Punkten, daher haben sie auch noch ihre übrigen Schnitte mit der «A^n gemein, im Ganzen $n(n + \alpha)$ Schnitte; diese weiteren Schnitte «bestehen aus solchen, welche 1) B^n und B^α, 2) D^n und D^α, 3) B^α «und D^α jeweilen mit A^n gemein haben; es können aber B^n und B^α «höchstens nur die $n^2 - m$ Punkte b mit A^n gemein haben (da B^n «nicht mehr hat), und D^n und D^α nicht mehr als die $n^2 - m$ Punkte «d, daher müssen B^α und D^α die noch übrigen

$$n(n + \alpha) - m - 2 \times (n^2 - m) = m + n\alpha - n^2 = \alpha^2 + x$$

«Punkte mit A^n gemein haben, allein da B^α und D^α nicht mehr als «α^2 Schnitte haben können, so muss $x = 0$ sein. «*Folglich giebt es,* «*wenn kein Glied zerfallen darf, keine andere übergrosse Zahl m von* «*Grundpunkten q des G (C^n), als von der Form $n^2 - n\alpha + \alpha^2$*». «Dies ist das Verfahren; sollte demselben oder der Logik des Be«weises, oder der Rechnung was fehlen, so ergänzen Sie es; meine «Nase ist zum Spüren — wozu haben Sie den Entwurzler? Signore, «c'est à vous d'y mettre la main!

«Bei Theilcurven stellt es sich z. B. so. Eine C^β hat (für sie «schneidende höhere Curven) $\frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ nothwendige Punkte «r; nehmen *in ihr* $n\beta - \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ beliebige Punkte p, «und *ausser ihr* noch

$$«\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 \text{ ——— } n\beta + \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$$

«willkürliche Punkte q an: so geht durch beide (p und q) ein G (C^n), «welches *nothwendig* auch noch jenen Punkt r gemein hat, also im «Ganzen

$$«\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-3+\frac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2)=M$$

«Grundpunkte hat. Je zwei Glieder desselben, etwa A^n und B^n, «schneiden sich ausserdem noch in $n^2 - M$ Punkten q_1, welche jedes«mal mit jenen festen Punkten q in einer $C^{n-\beta}$ liegen, so dass «stets $C^\beta + C^{n-\beta}$ ein Glied des durch A^n und B^n bestimmten «Büschels ist, (wobei also nur $C^{n-\beta}$ veränderlich, dagegen C^β «stereotyp ist). — Auch hier ist das Maximum der Ueberzahl «$M = n^2 - n + 1$, und tritt ein, wenn $\beta = n - 1$. Ein ande«rer Fall, wo beide Ueberzahlen m und M gleich werden, ist der, «wo $\alpha = 2$ und $\beta = n - 2$. Das Weitere — c'est encore à «vous . . . !

«Darüber noch *Eins* aus den höhern Staatsgeheimnissen. Ein «Prozess, wobei das G (C^n) mit $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2$ q in Evidenz «tritt, fällt mir aus alter Zeit ein. Werden zwei Netze (= Gebüsch) «in einer Ebene N (C^n) und N (C^α), mit irgend einem dritten ebe«nen Netze N (C^α) [auch N (g) oder N (p), d. i. Gerade oder Punkt] «projektivisch bezogen, so sind sie dadurch auch unter sich projek«tivisch, so dass je zwei sich entsprechende Büschel B (C^n) und «B (C^α) eine Curve $C^{n+\alpha}$ erzeugen und die gesammten $C^{n+\alpha}$ «bilden ein N ($C^{n+\alpha}$) mit $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Grundpunkten q. «(Quatsch! Die zwei Netze werden einfach unter sich projektivisch «bezogen, die Vermittlung ist nicht nöthig).

«Für diesen Hochverrath wird mich Signore durch gütige Aus«führung der analogen Betrachtung über Flächen belohnen, was, wie «ich glaube, mir nicht ganz gelungen ist. Bei G (f^n) und G (f^α) «entsteht, wenn ich nicht irre, ein G ($f^{n+\alpha}$) mit übergrosser Grund«curve $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$. — Dann: Werden zwei Netze N (f^n) und N (f^α) «mittels [unter sich] eines dritten N (f^n) projektivisch bezogen, so «erzeugen je zwei entsprechende Büschel B (f^n) und B (f^α) eine bor«nirte Fläche $f^{n+\alpha}$; je zwei entsprechende G (f^n) und G (f^α) ein «G ($f^{n+\alpha}$) mit $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$: und diese Gesammten R (sowie auch «alle $f^{n+\alpha}$) gehen durch eine bestimmte Anzahl N fester Grund«punkte. *Diese Zahl N zu finden.* Wahrscheinlich steht sie schon «in einem Ihrer Briefe, da je zwei $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$ in einer $f^{n+\alpha}$

«liegen, — aber Sie können sie doch wiederholen. Bei $N(f^2)$ und «$N(f_1^2)$ ist $N = 4$, das bekannte Quadrupel.

«*Zweiter Theil des Geheimnisses,* dem Ersten analytisch wohl «gleich, synthetisch durch die Farbe verschieden und speziell. — *Sind «zwei Basen* $f^n + 1$ *und* $f^\alpha + 1$ *gegeben, so giebt es dieselbe Zahl N «von solchen Polen P, deren Polarebenen (letzte Polaren) zusammen- «fallen.*

«*Zugabe.* Ort von P, dessen Polarebenen 1) in Bezug auf drei «gegebene Basen f^α, f^β, f^γ sich in einer Geraden g schneiden, und «Ort dieser g? oder 2) in Bezug auf 4 gegebene Basen sich in einem «Punkte Q schneiden und Ort des letzteren? Auch: wieviele g giebt «es noch bei 4 Basen? keine! — So noch Anderes, was ich im «Augenblick nicht weiss.

«2. Die Nase kann nochmals helfen. Dass durch n gegebene C^n, «die in n Ebenen E liegen und sich auf den Kanten in je n Punkten q «schneiden, ein $B(f^n)$ geht und bestimmt ist, folgt so:

«In der ersten Ebene E_1 ist C^n_1 bestimmt durch

«$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 \quad = \quad N$ Punkte p;

«In E_2 ist C^n_2, ausser den n Punkten q in der «(E_1, E_2), bestimmt durch $\quad = \quad N - n$ » p;

«In E_3 ist C^n_3, ausser den $2 \times n \cdot q$ in zwei Kan- «ten, bestimmt durch $\quad = \quad N - 2n$ » p;

«In E_4 ist von den $3 \times n$ q *einer nothwendig,* also die C^n_4 bestimmt durch $\quad = \quad N - 3n + 1$ » p;

«In E sind von den $(n-1) \times n$ q nothwendige «$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, also C^n_n betimmt durch =

«$N - (n-1)n + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Punkte p;

«Also die Gesammtzahl der bestimmenden Punkte

$$p = nN - \frac{1}{2}(n-1)n^2 + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 2,$$

«wodurch gerade der $B(f^n)$ bestimmt wird. — (Legt man durch die n Cur- «ven C^n eine f^{n+1}, so schneidet sie jede E noch in einer Geraden g und «alle ng liegen in einer Ebene; also die f^{n+1} sehr bornirt; des- «gleichen $f^{n+\alpha}$.) Sind in $n+1$ Ebenen *gleicherweise* $n+1$ Curven «C^n gegeben, so liegen sie in *einer bestimmten* f^n.

«3. *Warnung:* Sind im Raume 4 Punkte und eine f^2 gegeben, «so giebt es 8 solche $f_1{}^2$, welche durch die Punkte gehen und der «f^2 umschrieben sind; auch bilden die 8 Berührungsebenen mit den «4 Flächen des durch die 4 Punkte bestimmten Tetraeders eine nette «Configuration. — Von unten herauf folgt dies leicht — analytisch «schwer — daher setzen Sie lieber an den folgenden Sätzen an, die «für Sie leicht und für mich nöthiger sind.

«4. Wenn von 3 Flächen 2 n^{ten} Grads A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei sich «in zwei Theilcurven gleichen (also 2 n^{2ten}) Grads schneiden, etwa (AB) «in $\gamma^{2n^2} + \gamma_1{}^{2n^2}$, (AC) in $\beta^{2n^2} + \beta_1{}^{2n^2}$, (BC) in $\alpha^{2n^2} + \alpha_1{}^{2n^2}$, so dass «also durch diese Curven 3 Flächenpaare n^{ten} Grades gehen, c^n und $c_1{}^n$, «b^n und $b_1{}^n$, a^n und $a_1{}^n$, die Glieder des durch jene 3 Flächen be«stimmten $G(f^{2n})$ sind, so gehören diese 3 Paare zu *einem Büschel* «dieses Gebüsches, d. h. von den 6 Theilflächen schneiden sich 4 mal «3 in einer Vollcurve R^{n^2}, und alle 6 Flächen gehören zu einem kleinen «$G(f^n)$, in dessen n^3 Grundpunkten q sich alle 4 Curven R^{n^2} schnei«den (?). Die $(2n)^3$ Grundpunkte p des grossen $G(f^{2n})$ zerfallen in «8 Gruppen zu je n^3 p, in jeder R^{n^2} liegen Gruppen. Die 3 Flächen«paare a und a_1, b und b_1, c und c_1 im $G(f^n)$, sind wie die Gegen«flächen eines vollständigen *Vierkants*.

«Fallen nun die Curven γ und γ_1 in *eine* γ_0 zusammen, so sind «die Flächen A und B sich längs derselben umschrieben und die durch «dieselbe gehende Fläche $c_0{}^n$ ist als Doppelfläche (c^n und $c_1{}^n$ vereint) «anzusehen; ebenso vereinigen sich die 4 Curven R^{n^2} paarweise, etc. «Vereinigen sich ferner auch β und β_1 in eine β_0, längs der sich A «und C berühren und durch die eine doppelt gedachte Fläche $b_0{}^n$ «geht, so vereinigen sich die 4 R^{n^2} in eine einzige $R_0{}^{n^2}$, Schnitt ($b_0{}^n$ «$c_0{}^n$), und alsdann ist das Flächenpaar a^n und $a_1{}^n$ zu den Berührungs«flächen $c_0{}^n$ und $b_0{}^n$ zugeordnet harmonisch (alle 4 gehören zu einem «Büschel um R_0). Also: „*Wird eine gegebene Fläche A^{2n} von beliebigen* «*zwei Flächen $b_0{}^n$ und $c_0{}^n$ in zwei Curven* $\beta_0{}^{2n\cdot n}$ und $\gamma_0{}^{2n\cdot n}$ *ge*«*schnitten, und werden ihr längs diesen Curven irgend zwei Flächen* «*B^{2n} und C^{2n} umschrieben, so schneiden sich diese allemal* p l a n, «*d. h. in 2 Theilcurven α^{2n^2} und $\alpha_1{}^{2n^2}$, durch welche zwei (mehr als* «*bestimmte) Flächen a^n und $a_1{}^n$ gehen, die sich allemal mit jenen* «*Flächen b_0 und c_0 in derselben Curve R_0 schneiden und zu ihnen har*«*monisch sind.*“ Alle Paare a^n und $a_1{}^n$ bilden also ein Involutions«System, welches $b_0{}^n$ und $c_0{}^n$ zu Asymptoten hat. — Darf man um«kehren? und sagen: Wenn zwei Flächen $2n^{ten}$ Grads A^{2n} und B^{2n} «einander *voll umschrieben* sind, so geht durch die Berührungscurve «immer eine Fläche n^{ten} Grads, $c_o{}^n$. und wenn zwei Flächen B^{2n} und «C^{2n} einer dritten A^{2n} voll umschrieben sind, so schneiden sie sich «*plan,* und die beiden Planflächen a^n und $a_1{}^n$ gehen durch den Schnitt «R_o der Berührungsflächen $b_o{}^n$ und $c_o{}^n$, und sind zu diesen harmo-«nisch. He!? für $n = 1$ ist es so. Folgende Umkehrung ist er-«laubt: „*Schneiden sich zwei Flächen B^{2n} und C^{2n} plan und man legt* «*durch den Schnitt $R_o{}^{n^2}$ ihrer Planflächen a^n und $a_1{}^n$, irgend ein Paar* «*zu diesen harmonischen Flächen $c_o{}^n$ und $b_o{}^n$, so schneiden letztere jene* «*ersten Flächen B^{2n} und C^{2n} (oder auch C^{2n} und B^{2n}) in solchen Curven* «*γ_o und β_o, längs denen ihnen eine und dieselbe Fläche A^{2n} umschrie-*«*ben ist.*“ Also giebt es eine $S(A^{2n})$, welche den 2 gegebenen B^{2n} «und C^{2n} gemeinsam und vollumschrieben sind, und die Schaar Paare «Berührungsflächen $c_o{}^n$ und $b_o{}^n$ haben die Planflächen a^n und $a_1{}^n$ zu «Asymptoten. Fixirt man aus der Schaar $S(A^{2n})$ irgend zwei Glieder «A^{2n} und $A_1{}^{2n}$, bezeichnet die Berührungsflächen von $A_1{}^{2n}$ mit B^{2n} und «C^{2n} beziehlich durch $c_1{}^n$ und $b_1{}^n$, so müssen sich auch A^{2n} und $A_1{}^{2n}$ «plan schneiden und ihre Planflächen, etwa d^n und $d_1{}^n$, müssen (mit «$c_o{}^n$, $b_o{}^n$, a^n, $a_1{}^n$) durch dieselbe $R_o{}^{n^2}$ gehen, und sowohl zu $c_o{}^n$ und «$c_1{}^n$, als $b_o{}^n$ und $b_1{}^n$, als a^n und $a_1{}^n$ harmonisch sein. Also: «Ist ein «Flächenpaar B^{2n} und C^{2n} einem andern A^{2n} und $A_1{}^{2n}$ voll umschrie-«ben, so schneidet sich jedes Paar plan, und die Planflächen, a^n u. $a_1{}^n$, «des einen Paars, sind zu denen des andern, d^n u. $d_1{}^n$, harmonisch.» Etc. «— Haben Sie die Güte dies bald ergänzend zu verifiziren; mir wird's «sauer — Ihnen ist es Erholung, oder wie man sagt «ein gefundenes «Fressen». Stossen Sie sich nicht an «*plan*», hab' es bloss hier zur «Kürzung gebraucht. Schon vor 30 Jahren, in meiner ersten Ab-«handlung, habe ich vom ersten Satze den Anfang gegeben, s. *Crelle*'s «Journ. Bd. I. S. 46, Satz VI.

«Ferner noch die vielleicht unsinnige Frage: Wenn sich f^m und «f^n längs einer Curve R_1 berühren und längs R_2 schneiden, sind dann «diese Curven selbständige (organische) Theile der $R^{m \times n}$, d. h. «sind sie solche $R_1{}^x$ und $R_2{}^y$, wo $2x + y = mn$, und durch welche «etwa solche Flächen f^α und f^β gehen, wo $2\alpha + \beta = m > n$ ist? «— Können von 3 Flächen A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei einander voll um-«schrieben sein? scheint nicht; geht es für 3 Curven $2\,n^{ten}$ Grads? «Für Kegelschnitte schon vor 30 Jahren ausgebeutet.

«5. Durch drei beliebige Curven C^2 ist das $N(C^2)$ bestimmt; «zunächst die Trippelcurve $C_o{}^3$ und durch diese die Basis C^3. Wenn «nun aber von den gegebenen drei C^2 1) zwei einander *doppelt* be-

«rühren, oder 2) wenn zwei die dritte *doppelt berühren,* oder 3) wenn «je zwei sich *doppelt berühren*, wie ist dann die Basis C^3 und die «Trippelcurve $C_0{}^3$ beschaffen? — Von drei f^2 können zwei der dritten «voll umschrieben sein und *einander* selbst in zweien Punkten be-«rühren. Wie müsste f^3 beschaffen sein, wenn sie dieselben zu Po-«laren haben sollte?

«Oder welche besondere Eigenschaft hat dort das $N(C^2)$ und «hier das $G(f^2)$?

«6. Wenn ein Kegel K^2 durch 5 feste Punkte p gehen und eine «feste Ebene E *streifen* soll, welches ist dann der Ort seines Scheitels «(eine Curve in der Ebene E)? Oder: Wenn eine Curve C^2 fünf «feste E berühren und durch einen festen p gehen soll, welchen Ort «hat dann ihre Ebene? (einen Kegel, dessen Scheitel in p), und in «welcher Fläche liegen alle C^2?

«7. Welche Enveloppe hat die $S(K^2)$, die durch 5 feste p gehen «und ihre Scheitel in einer festen Geraden g haben? Oder: zu welcher «Fläche liegt die $S(C^2)$, welche 5 gegebene E berühren und deren «Ebenen sämmtlich durch eine feste g gehen?

«Aus Furcht, dass diese Fragen (6 u. 7) schwierig sind und ich «die Antwort im Augenblick nicht gerade nöthig habe, darf ich nicht «weiter gehen.

«Die grössten Mathematiker werden erkannt und berufen: *Wolf,* «*Lazarus* und *Marquis*; ich grüsse und gratulire dem «Nous vivons «entre nous», dass er einen ihm widerlichen Anblick los wird.

«Sie haben mir nie gesagt, was aus der Schuster-Forderung ge-«worden ist!

«Ueber meine Reise habe ich noch keinen definitiven Plan ge-«fasst. Nichts lockt mich an; Urlaub noch nicht durch die Kanzlei «angelangt (natürlich habe ich die Vorlesungen nicht begonnen); Gastei «ist mir verordnet, kann auch nichts helfen, ganze Darmkanal ist «futsch; Paris wird unverschämt theuer sein, müsste zuvor an Jemand «schreiben, aber geschieht nicht; Bern ist auch nichts, giebt Rheu-«matismen und Gicht und Signore taglöhnert: also wohin? was «machen? Hier komme ich mit der Arbeit auch nicht vorwärts, kann «nur ein paar Stunden täglich arbeiten, ohne Kraft, Gedächtniss und «Phantasie, am Abend, was sonst die beste Zeit war, gar nicht mehr. «Es ist schade, dass der fromme Wunsch, den ich schon voriges Jahr «hegte, nicht zu realisiren ist, nämlich meine Redaction gewisser-«massen unter Ihren Augen auszuführen, unter Ihrer plötzlichen (täg-«lichen) Hülfe im Ausdruck, in der Anordnung und Combination, in «der Richtigkeit der Formeln (Gedächtniss), wobei aber doch meine «Schulmeister-Methode befolgt würde, was ohne Zweifel später auch «Ihre eigenen Arbeiten etwas *herablassender* gestalten und sie dem «Publikum leichter und zugänglicher machen müsste (denn selbst «*Nudel* bezeugte, dass er sehr viel von meinem *Spinnen* gelernt). «Aber wenn diess auch nur je in einer Stunde geschehe, etwa spät «Abends, und Sie sonst mit allem Spazieren verschont blieben, da «mir rasches Gehen immer saurer wird, so würden Sie sich doch «schwer darein finden, weil es oft mehr Kleinliches, Ihnen werthlos «Scheinendes zu ordnen, als Stämmiges zu entwurzeln gäbe. Sonst «scheint mir, müsste auf diese Weise etwas zu Stande kommen.

«Mit einem andern Wunsch, dass diese Lieferung Sie ohne «Katarrh und Grippe, in guter Laune treffen möge, grüsst Sie und «die Andern

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«Berlin, vom 7.—12. Mai 55.

(Das Ende von Nr. 1 und Nr. 4. 5 bald.)

Steiner an Schläfli.

12. Juni 1855.

«*Lieber Freund!*

«Diesmal ist mir Ihr Schweigen unerklärlich. Auf Ihren Brief «vom 1. Mai antwortete ich am 12. Mai, gab Ihnen ausführliche Aus-«kunft über das beanstandete $n^2 - n\,\alpha + \alpha^2$ und über die n C^n in n E, «nebst andere Dinge, und fügte neue (für Sie leichte) Fragen bei mit «der dringenden Bitte, sie nach wenig Tagen zu *bejahen*, weil ich sie «im Augenblick nöthig brauche. Umsonst harre ich seitdem auf Be-«scheid; weiss nicht, ob Sie krank sind, oder Launen haben, oder den «Brief nicht erhalten. Was es auch sein mag, werde ich hoffentlich «mit umgehender Post aus dieser Nichtwissens-Qual befreit werden.

«Schon am 18. und 19. Mai wollte ich Ihnen meinen Triumph «über die 10 Glieder $f^2 = 2$ E im allgemeinen $N(f^2)$ nebst vielen andern «Eigenschaften des letztern melden; allein da ich täglich Ihrer Antwort «gewärtig war, so schob ich es auf; jetzt muss ich es lassen, bis mir «kund wird, wie es steht. —

«Seitdem habe ich mich in's Gebüsch verloren und schrecklich «gequält um mich darin zurecht zu finden und wieder herauszukommen; «nämlich ich habe das allgemeine $G(f^2)$ und seine R^6 *secirt* und *anatomirt;* «es ergaben sich dabei fast gespensterhafte geradlinige (theils abwickel- «bare) Flächen, die einander längs charakteristischer Curven umschrieben «sind; die Schaar Quintupel, $S(Q_5)$, habe ich so ziemlich aufgefressen, «sie spielen eine Hauptrolle; jedes Q_5 hat 10 Diagonalebenen und allen «insgesammt ist von der Natur eine sehr tiefdurchdachte Stellung an- «gewiesen. — Jedoch Eins, was vielleicht ganz leicht, macht mich seit «5 Tagen halb verrückt, nämlich folgendes. Die Pole Q einer E in «Bezug auf die einzelnen Glieder eines $G(f^2)$ liegen in einer f^3; und «bewegt sich ein Pol P in derselben E, so schneiden sich seine ge- «sammten Polarebenen stets in je einem Punkte Q, dessen Ort die «nämliche f^3 ist, so dass also jeder Punkt Q einerseits der Pol eines «bestimmten Gliedes f^2 ist und andererseits einem bestimmten Pol P «in der E entspricht, und damit auch P und f^2 sich entsprechen und «projectivisch sind; *zudem berührt die Polarebene von P in Bezug auf* «*f^2 die Fläche f^3 in Q.* Nun folgt leicht, dass wenn sich P längs einer «Geraden G (in E) bewegt, dann sein conjugirter Q eine R^3 (auf f^3) durch- «läuft; und dass die Pole Q jedes in dem $G(f^2)$ enthaltenen Büschels «$B(f^2)$ ebenfalls in einer R^3 liegen; *aber nun vermag ich nicht zu be-* «*weisen: «dass die diesem $B(f^2)$ entsprechenden Punkte P in einer G* «*liegen; oder dass im ersten Falle die den Punkten P in der gegebenen* «*G entsprechenden f^2 einen Büschel bilden.»* Meine Bemühungen darum «lieferten viele curiose Schulmeister-Sätze.

«Mein Aufsatz über Normalen aus P auf C oder f^n ist endlich «im Februarheft des *Liouville* Journals erschienen, übersetzt von einem «Preussischen premier Lieutenant *v. Horn,* bei den schwereren Stellen, «wie er mir schreibt, mit Dr. *Wöpke's* Hülfe. Kürzlich ersuchte ich «den Hauptsetzer des hiesigen Journals, den Redacteur desselben ge- «legentlich an Ihre Abhandlung zu erinnern; er versprach mir es zu «thun, obschon *Crelle* nur bei ihm imponirenden Persönlichkeiten von «der chronologischen Folge abweiche.

«Prof. *Schönemann,*[1]) der Ende Mai einige Tage hier war, meinte «ich sollte versuchen, Sie hieher zu bringen. Es ist schwer, weil «Sie zu wenig bekannt sind, und doch wären Sie in vieler Hinsicht «der geeignetste (z. B. über Arbeiten Anderer zu berichten). Ich werde «Morgen oder Uebermorgen bei einem Ministerialrath auf den Busch «schlagen. Von solchen, die bisher im Ministerium genannt worden

[1]) Schönemann, Theodor, geb. 4. IV. 1812. Prof. der Mathematik.

«sein sollen, wären *Kummer* (Breslau), *Weierstrass* (in Braunsberg), «der grosse *Heine* (in Bonn). — *Schönemann*, der sich selbst mit Eli- «mination beschäftigt hat, klagt, dass Sie ihm kein Exemplar Ihrer «Wiener-Abhandlung geschickt haben. Was soll man da sagen? — «Ziegel!

«In *Crelle* finden sich Aufsätze vom besagten *Weierstrass*; eli- «miniren Sie ihn!

«Im vorigen Brief habe ich Ihnen über mein Befinden, über «meine Unschlüssigkeit, etc. gemüthlich geklagt; Ihr Schweigen hat «diesen Jammer noch vermehrt, jetzt weiss ich erst recht nicht, was «ich *thun* oder *lassen* soll. Am 22. oder 23. d. Monats muss ich wohl «endlich nach Gastein abreissen, zuvor erwartet Antwort

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«Bern, den 17. Juni 1855.

«Mein Unwohlsein hat einen entsetzlichen Schlendrian nach sich «gezogen. Da ich nicht *sogleich* die Antwort auf Ihren Brief vom 12. «Mai in Angriff nahm, so ist durch stetes Aufschieben diese lange «Verzögerung entstanden. Um mich einigermassen zu entschuldigen, «will ich anführen, dass ich an den 4 ersten Wochentagen Morgens «von 6—8 und von 10—12 Unterricht habe, dass der Nachmittag «durch die grosse Hitze die ernste Arbeit erschwert, und dass in «die letzte Zeit auch allerlei Commissionsgeschäfte gefallen sind. «Mein Schnupfen hat auch auffallender Weise während der grossen «Hitze fortgedauert und mir den Schlaf gestört. Ich hoffe nun, die «jetzige Abkühlung werde zu meiner Erholung beitragen; aber leider «kommt nun die Vorsichtsrechnung.

«Da ich die Antwort nicht länger aufschieben kann, so ant- «worte ich für jetzt nur auf Ihren letzten Brief vom 12. Juni. — «Sie betrachten da die Pole Q einer Ebene E in Bezug auf die Glieder «f eines Gebüsches zweiten Grades; jedem Punkt Q entspricht in «der Ebene E ein Punkt P, dessen sämmtliche Polarebenen sich in Q «schneiden. Es ist *richtig*, dass die Polarebene von P in Bezug auf «die entsprechende Gebüschfläche f die Ortsfläche Q dritten Grades «im entsprechenden Punkt Q *berührt*. Aber, wenn Sie aus dem «Gebüsch einen Büschel herausnehmen, so liegen die entsprechenden

«P nicht in einer Geraden, sondern in einer Curve *fünften* Grades. «Setzen Sie nämlich als Ort von P zuerst eine Gerade, so durchläuft «Q eine auf jener Fläche^3 liegende R^3; setzen Sie dann irgend einen «Büschel aus dem Gebüsch der f, so durchläuft der Punkt Q wieder «eine auf derselben Fläche^3 liegende Curve S^3. Beide R^3 und S^3 «liegen auf einer und derselben Fläche zweiten Grades, gehören aber «hier zu verschiedenen Schaaren und schneiden sich daher in 5 Punkten «Q; diesen entsprechen also 5 auf jener Geraden befindlichen Punkte «P; folglich entspricht dem Büschel f eine in E liegende Ortscurve «P 5^{ten} Grades. Ich würde es nicht wagen, die Punkte P und die «ihnen entsprechenden Gebüschflächen f *projectivisch* zu nennen, weil «keine *Proportionalität* der beide Doppelschaaren characterisirenden «Constanten stattfindet.

«Sie gehen gar nicht auf die Mängel ein, die ich mit vollem «Recht an dem Beweise für das Maximum $n^2 - n + 1$ gerügt habe. «Es frägt sich ja eben, wie wir in den Wald hineinschreien sollen. «Wenn die logische Kette nicht geschlossen ist, so giebt es keinen «electrischen Strom.

«Die Sachen sind immer noch zu schwer und zu bunt, und ich «jetzt durchaus nicht fähig, sie zu bewältigen. — Gastein liegt im «Salzburgischen; wenn ich einmal Ihre Adresse weiss, so werde ich «dorthin schreiben können. — Wenn Sie bereit sind, später einmal «einen Aufsatz von mir der Berliner-Akademie vorzulegen, so arbeite «ich gerne für diesen Zweck etwas aus.

«Ich danke Herrn *Schönemann* für sein Wohlwollen und lasse «ihn grüssen.

«Die Schusterforderung ist als verjährt anerkannt, wie mir «*Leuenberger* gesagt hat.

«Sie wegen meiner Schläfrigkeit in der Correspondenz um Nach- «sicht bittend, und Sie herzlich grüssend

«Ihr treuer und dankbarer

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Diesmal dauerte es lange bis ich Berlin verliess, bis 5. Juli, «wiewohl ich schon am 18. Mai im Besitz des Urlaubs war. Ohn- «mächtig quälte ich mich mit theils schon früher behandelten Be-

«trachtungen ab, bis ich zuletzt gar nichts mehr davon verstand und «nicht mehr wusste, was ich eigentlich wollte. Dann kramte ich 8 «Tage herum mit Ordnen und Einpacken, und ebenso lange trödelte «ich auf der Reise bis hieher, in Leipzig, München und Salzburg. «Durch Ihren Missmuth ist meine Arbeit sehr ins Stocken gerathen; «Sie verschmähten die Kleinigkeiten, wollen immer nur Neues und «Grosses fressen, während ich nicht umhin kann, an kleinlicher Ab«rundung und möglicher Vollständigkeit zu knabern. Eigentlich bin «ich jetzt fast weiter zurück, als voriges Jahr; an die Flächen 3ten «Grads bin ich noch gar nicht gekommen, und die Ausstellung war«tete nicht auf mich.

«Heute nahm ich das 11te Bad; verspüre noch keinen grossen «Erfolg; die ersten Bäder bewirkten den Buckel voll Rheumatismus, «der noch nicht ganz weg ist. Die Flora kommt mir hier einfältig «vor; einige Cimen, von der Höhe des Ochsen, wären hübsch, wenn «man erst oben wäre; aber meine Kraft langt nicht. Am 5ten August «werde ich wohl das 21ste und letzte Bad nehmen und am 6ten oder «7ten von dannen ziehen. An der Dauer dieses Briefes ist zu ermes«sen, ob Zeit genug ist, falls Sie mir hieher etwas melden wollen.

«Es war mein Plan, von hier nach dem Engadin und Chur zu «gehen, aber die ersten 8 Stunden müssen zu Fuss oder à cheval und «theils über Schnee gemacht werden, was mir nicht ansteht. Will «ich nach der Schweiz kommen, so muss ich also über Salzburg nach «München zurück. Was habe ich aber davon, wenn ich schon wieder «nach Bern komme? Die gräulichste Langeweile! Signore taglöhnert «um schnöden Sold, macht Hausknechts-Rechnungen, bis ihm Kopf und «Herz bricht; bleibt mir nur übrig, mit *Rettig* Klaglieder zu singen, «oder mit Mutz auf die St. Petersinsel zu gehen. Wo bekäme ich «ein gesundes Sonnseitzimmer? Ist der Stern nicht zu ordinär? Spre«chen Sie mit *Leuenberger*. — Wenn ich komme, werde ich mich «wohl in St. Gallen, Zürich, Aarau, Langenthal, Burgdorf oder Kirch«berg je 1—3 Tage aufhalten.

«Am 2ten Juli der *Reimer*'schen Buchhandlung das versprochene «Päckli Dissertationen übergeben: es enthält nebst Gutem auch Schund; «was für Sie und Andere spezifisch ist, können Sie gleich ausschei«den und vertheilen; das Uebrige ordnen und sich *auch einmal ob«jectiv verhalten* und *klug überlegen*, für wen jedes Stück am besten «passe, damit wir dann zusammen berathen, wem es angeboten wer«den soll; meine Grossmutter, eine Elsässerin, pflegte zu sagen: «es

«giebt der Nasen zwoo, was die eine nicht will, ist die ander' froh.»
«Die Medicinischen werde ich selbst theilen oder loosen lassen.

«Einige Aufgaben, die ich in Berlin noch hatte, weiss ich im «Augenblick nicht mehr, Ihre Laune lähmte mich noch mehr; viel«leicht liegen sie unten in der Koffer — in Bern werde ich aus«packen.

«Frisch! täglich gerechnet bis Sie sturm werden, dann mag am «Abend die Gräfin ergötzen.

«Seien Sie freundlichst gegrüsst und desgleichen Rettig, Schni«der, Mutz, Leuenberger *und Frau*, etc.

«*Bad Gastein*, den 25$^{\text{ten}}$ Juli 1855.

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«N. B. Bei der Abgabe der Dissertationen sprach ich Reimer «selbst, erzählte ihm eine $^1/_2$ Stunde von Monsignore und klagte, dass «Ihre Abhandlung — die doch wichtiger als Vieles des Erschienenen «sei — noch nicht gedruckt worden sei. Er interessirte sich dafür «und versprach die Aufnahme zu beschleunigen. Da immer 2—3 «Hefte in Arbeit sind, ehe sie ausgegeben werden, so kann es also «doch noch 6 Monat dauern, bis Ihre höchste Arbeit erscheint.

«Bei meiner Abreise war Dr. *Borchart* zum Mitglied der Akade«mie vorgeschlagen.»

Schläfli an Steiner.

«*Herr Professor!*

«Ich habe früher einmal gegen Sie Zweifel geäussert, über den «Satz von den Brennpunkten dreier einem Vierseit eingeschriebener «Kegelschnitte (*Crelle* 45. Mai 1852). Was einen stutzig machen kann, «ist, dass man auf den ersten Blick glaubt, der Satz gelte ausschliess«lich von den Distanzen. Er ist aber dort unvollständig ausgedrückt, «insofern auch von den Projectionen der Distanzen etwas ausgesagt «werden kann.

«Es seien a, α die zwei reellen Brennpunkte des ersten Kegel«schnitts, p die Strecke auf der Mittelpunktsgeraden vom Mittelpunkt «des zweiten bis zum Mittelpunkt des dritten Kegelschnitts; b, β, q «und c, γ, r haben der Reihe nach ähnliche Bedeutung; est ist also «$p + q + r = o$. Den Winkel, den die Distanz (ab) mit der als

«positiv angenommenen Richtung der Mittelpunktsgeraden bildet, be-
«zeichne ich mit $<$ (ab). Dann ist

$$\begin{aligned}
&< (a\,b) + < (a\,\beta) + < (\alpha\,c) + < (\alpha\,\gamma) = < (\alpha\,b) + < (\alpha\,\beta) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + < (a\,c) + < (a\,\gamma) \\
&= < (b\,c) + < (b\,\gamma) + < (\beta\,a) + < (\beta\,\alpha) = < (\beta\,c) + < (\beta\,\gamma) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + < (b\,a) + < b\,\alpha) \\
&= < (c\,a) + < (c\,\alpha) + < (\gamma\,b) + < (\gamma\,\beta) = < (\gamma\,a) + < (\gamma\,\alpha) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + < (c\,b) + < (c\,\beta)
\end{aligned}$$

«und die drei Werthe

$$\begin{aligned}
&«(a\,b)\,(a\,\beta)\,(\alpha\,c)\,(\alpha\,\gamma) = (\alpha\,b)\,(\alpha\,\beta)\,(a\,c)\,(a\,\gamma), \\
&«(b\,c)\,(b\,\gamma)\,(\beta\,a)\,(\beta\,\alpha) = (\beta\,c)\,(\beta\,\gamma)\,(b\,a)\,(b\,\alpha), \\
&«(c\,a)\,(c\,\alpha)\,(\beta\,b)\,(\gamma\,\beta) = (\gamma\,a)\,(\gamma\,\alpha)\,(c\,b)\,(c(\beta
\end{aligned}$$

«sind mit $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ proportional, so dass also die Summe der drei «umgekehrten Werthe gleich Null ist. Die Vorzeichen der Distanzen «sind so einzurichten, dass obige sechs Winkelsummen nach dem Modus «$2\,\pi$ congruiren. Vom Brennpunkt der Parabel gilt nicht nur, dass «das Product seiner Entfernungen von beiden Brennpunkten irgend «eines andern Kegelschnitts constant ist, sondern dass eine feste Ge-«rade den Winkel zwischen diesen Entfernungen halbirt.

«Bern, den 7. Juli 1857.

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich kann nun den Punkt U, wo die bekannte Fusspunktlinie «ihre Umhüllte berührt, bestimmen. Er liegt eben so weit von «dem Scheitel der Parabel als der Berührungspunkt jenes dem Drei-«seit eingeschriebenen Kegelschnitts, welcher die Leitlinie der Parabel «im Höhenpunkt berührt.

«Ich möchte Sie bitten, diesen Abend um 8 Uhr zur Gräfin zu «kommen.

«Mit freundlichem Gruss *L. Schläfli.*»

Bern, 11. September 1855.

Der Briefwechsel stockte den ganzen Winter 1855/56. Zum nachfolgenden Brief finden sich 2 Concepte, eines vom 31. Oktober 1855 und eines vom 20.—23. April 1856. Es bestätigt dies die Behauptung *Steiners*, dass er *Schläfli* stets habe schreiben wollen, aber nichts zu Stande gebracht habe.