

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1896)
Heft: 1399-1435

Artikel: Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schäfli
Autor: Graf, J. H.
Kapitel: 1854
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319085>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

«jedem ein Exemplar, *vergessen Sie es nicht.*¹⁾ Von Raabe können Sie aus der Zürcher-Bibliothek jedes Buch haben, gegen ein kleines jährliches Geschenk für den Packer, wie er sagt. *Valentin*²⁾ bezieht auch.

«Mittwoch (19^{ten} Oct.) Nachmittag etwa 5 oder 6 Uhr werde ich in Basel im *Storchen* eintreffen und hoffe Sie da zu treffen; Ihre Vorlesungen und Zuhörer können kein Hinderniss sein. Bringen Sie die verlangte Uebersicht des Buchs über die «*Geometrie mit n Dimensionen*» endlich mit. Können Sie oder wollen Sie nicht kommen, so denken Sie an das, was ich Ihnen so oft gesagt habe: einen Auszug von 4—6 Bogen nach Wien, meinetwegen an *Herrn von Ettingshausen*, sich auf mich berufen, mit einem Gruss; oder nach Paris.

«Auf baldiges Sehen

Ihr

J. Steiner.»

1854. Steiner an Schläfli.

Der nachfolgende Brief Steiner's vom 10. März 1854 ist im 1. Theil an Schläfli, im 2. an Professor Ris gerichtet ³⁾.

Berlin, den 10. März 1854.

«*Mein lieber selbstmörderischer Freund!*

«Die mir mitgetheilten Sätze waren mir sehr willkommen, besonders der eine, den ich falsch hatte und bald nach Paris an *Terquem* geschickt hätte. Nämlich ich hatte: dass die Fläche f^m von $B(f^n)$ in $m[3(n-1)^2 + 3(n-1)(m-1) + (m-1)(m-2)]$ Punkten berührt werde, wo Sie, gewiss richtig, nur $m[3(n-1)^2 + 2(n-1)(m-1) + (m-1)^2]$ angeben. Aber damit kann ich in den speziellen Fällen nicht zu Recht kommen, wo die f^m in Theile, Ebenen, etc. zerfällt. In dem Betracht entsteht die Frage: a) Wenn f^m einen Hornpunkt δ hat, für wie viele Berührungen zählt denn die durch denselben gehende f^n , etwa für 3 oder 6? und b) für wie viele Berührungen zählt es, wenn eine f^n die Doppellinie l_2 der f^m berührt? Z. B. die f^4 wird von $B(f^3)$ in 132 Punkten berührt; besteht nun f^4 aus 4 Ebenen E , so hat sie 4 δ und 6 l_2 ; jede E wird 12 mal

¹⁾ Raabe gedachte der philosoph. Fakultät der Hochschule Zürich Schläfli zur Ehrenpromotion vorzuschlagen. (Siehe Biogr. Bern. Mitth. S. 131, 132.)

²⁾ Professor der Physiologie an der Hochschule Bern. † 23. V. 1883.

³⁾ Dieser wichtige Brief ist nach den Poststempeln erst am 11. April 1854 von Berlin ab und am 14. in Bern angekommen.

«berührt, macht $=48$; jede l_2 wird 4 mal berührt, zählt $6.4 \times x$, und die 4 δ zählen $4 \times y$; also $24x + 4y = 132 - 48 = 84$. — Dabei hätte ich sehr nöthig zu wissen: «In welcher Curve R^x die Punkte liegen, in denen f^m von einer $SS(f^n)$, d. h. von den durch irgend 3 gegebene f^n bestimmten Schaar-Schaar (was ich ein «Halbnetz» $=HN(f^n)$ nenne) berührt wird». Oder mein Zweck wird auch dadurch erreicht: «Wenn 4 beliebige f^n gegeben, so giebt es solche Pole P , deren 4 erste Polaren f^{n-1} sich in irgend einem Punkte Q treffen; den Ort dieses Punktes Q anzugeben, die Fläche Q^m ?». Der Ort von P ist eine Fläche $P^4(n-1)^3$. — Wenn oben der $B(f^n)$, oder insbesondere nur $B(f^2)$ sich in einer C^2 berührt, statt in R^4 schneidet, so ist die doppelt gedachte Ebene der C^2 als eine spezielle Fläche f^2 anzusehen, und es ist die Frage, wie viele von den $m[3 + 2(m-1) + (m-1)^2]$ Berührungspunkten auf ihren Schnitt C^m mit der f^m kommen? Ich glaube 2 m . Ist es so, so ist eine weitere Folge: «Dass aus jedem Punkte P , im Allgemeinen, m^3 Normalen auf die f^m möglich sind.» Nun schwebt mir vor, dass Terquem irgendwo bewiesen habe: dass aus P auf f^2 nur 6 Normalen gehen, statt nach meinem Satze $2^3 = 8$. Wer hat recht? Durch eine andere Betrachtung kam ich auch auf m^3 .

«Als ich vor 6 Wochen wieder auf die f^3 kam, schien mir, wie schon in Bern, dass ich die 27 Geraden g schon früher müsse beobachtet haben. Nach wiederholtem Durchstöbern meiner Papiere fand ich endlich, dass ich schon im J. 1846 und nachträglich 1850 dieselben ziemlich ausführlich behandelt habe, jedoch nicht mit dem Bewusstsein, dass es die allgemeine f^3 sei. Die 45 Dreiecke werden da schon aufgezählt, und ihnen entsprechend 45 Systeme Flächen f^2 , $45 \Sigma(f^2)$, welche die f^3 in je 3 ebenen Curven C^2 schneiden. Unter jedem System $\Sigma(f^2)$ soll sich eine Schaar Kegel, fo^2 , befinden, mit der unbewiesenen Angabe: «Dass ihre Scheitel in einer f^4 liegen.» Ferner wird da bemerkt: «Dass die f^3 durch die 5 Seiten a, b, c, d, e eines schiefen 5 Ecks (keine 3 Seiten in einer Ebene) und durch irgend eine 6te Gerade f bestimmt sei.» Nämlich jede Ebene E durch f schneidet die Seiten in 5 p , die eine C^2 bestimmen, welche die f^3 beschreibt. Auch sind die 5 Paar Geraden g (von den 27 g), welche die f schneiden, sehr einfach bestimmt; nämlich die Seite a schneide die Ebene (cd) in α , und die durch α und f gelegte Ebene schneide b, c, d, e in $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$, so sind $\alpha \gamma \delta$ und $\beta \epsilon$ eins der genannten 5 Paare, 2 g . Es wird ferner behauptet: «Die der Geraden f gegen-

«überstehenden 16 Geraden g sollen unter sich 192 schiefe 5 Ecke bilden, und im Ganzen sollen die 27 g 2592 solche 5 Ecke bilden.»
 «Ich bitte dies zu controliren und systematisiren, es fehlt mir jetzt die Kraft dazu. Im Manuscript von 1850 stehen auch die Sylvester'schen 5 Grundebenen E_0 , aber ohne klares Bewusstsein. Die 10 Schnittlinien l derselben liegen in der Kernfläche f_0^4 und «ihre 10 Schnittpunkte p sind Hornpunkte derselben»; ist das Letzte wahr?
 «Nicht wahr: es giebt nur Ein System von 5 reellen Grundebenen E_0 , trotz der 19 Gleichungen dritten Grads, aus denen sie folgen? —
 «Der Schnitt der Basis f^3 mit der Kernfläche f_0^4 ist eine R^{12} , mit der ich mich schon ehemals sehr gequält habe; sie geht durch die 54 Asymptotenpunkte π der 27 g . Die Pole, deren Polaren Kegel f_0^2 sind, sind sich conjugirt, reciprok, P und Q . Liegt nun P im Schnitt R^{12} , so ist die Frage, welchen Ort Q habe, und wie sich die beiden Polarkegel f_0^2 (von P und Q) zu einander und gegen die Basis f^3 verhalten? Ich komme dabei immer auf Widersprüche. Es muss in R^{12} eine bestimmte Anzahl ausgezeichnete Punkte P_0 geben, ausser jenen 54 π . —

«Ueber die Flächen und Raumcurven seufze ich nicht minder als Sie, und zwar schon seit Jahren; doch: «Ich seh', dass Du zu einer Last, noch sehr gesunde Schultern hast; entschlossen bist, mich hochzutragen, drum werd' ich Dir die Wege sagen.» Ihre Raumcurve $R^m \times n$ ist sehr speziell und die allgemeine R^p , kann nur sehr künstlich erzeugt werden; daher rührt all' unser Elend. Schon die R^3 entsteht künstlich; durch 2 Hyperboloide (oder Kegel), die eine g gemein haben. Die R^4 ist frei, entsteht durch 2 f^2 . Die R^5 künstlich, nämlich sie entsteht: a) durch f^3 und f^2 , die nebstdem eine g gemein haben; b) durch f^3 und f_1^3 , die nebstdem entweder 1) eine R^4 ; oder 2) $R^3 + g$; oder 3) $C^2 + C_1^2$; 4) $C^2 + 2g$; oder 5) 4 g gemein haben. Von diesen sechs R^5 ist die erste (a) die beschränkteste und (b, 1) die freieste; durch die 5 unter (b) begriffenen R^5 kann keine f^2 gehen. Vergleichen Sie alle sechs. Wie viele solche Gerade γ giebt es, welche die R^5 (b) in 3 Punkten schneiden? Aber noch mehr: selbst die in f^3 liegenden R^4 hat man vielleicht dabei auch noch zu unterscheiden, danach nämlich, ob die durch R^4 gehende f^2 die Basis f^3 nebstdem noch α) in einer C^2 (deren Ebene durch eine der 27 g geht) oder β) in 2 nicht in einer Ebene liegenden g schneidet. Ferner: «Ist durch R^5 und irgend eine Gerade f die f^3 bestimmt?» d. h. jede E durch f schneidet R^5 in 5 p ,

«die eine C^2 bestimmen, deren Ort die f^3 ist. Oder muss zu diesem Zwecke f gegen R^5 eine bestimmte Lage haben? glaube nicht. -- Die R^6 ist a) als Schnitt von f^3 und f^2 beschränkt $= R^3 \times 2$; allgemeiner, aber künstlich wird sie erzeugt b) durch f^3 und f_1^3 , wenn diese nebst dem 1) eine R^3 ; 2) $C^2 + g$; 3) $3g$; oder 4) C^3 (ebene) gemein haben. In den 4 Fällen (b) geht keine f^2 durch die R^6 . Bei 2) und 3) giebt es noch Nüancen, je nachdem C^2 und g oder die $3g$ sich schneiden oder nicht. Frage: *«Liegen in der freien f^4 solche allgemeinere R^6 (b)?»* Dann könnte ich die f^4 erzeugen; sie würde x -Systeme von R^6 enthalten. Es wird keine allgemeine R^6 , als die unter (b, 1) geben! — Bei einer R^6 (es wird wohl die allgemeinste oder freieste sein) fand ich: *«Dass durch jeden Punkt π in ihr drei solche Gerade γ gehen, wovon jede sie noch in irgend 2 andern Punkten π trifft»*; so dass es also drei Schaaren von dreimal schneidenden Geraden γ giebt; aber von allen diesen Geraden können sich keine zwei ausserhalb der Curve R^6 treffen; keine Gerade γ kann die R^6 in 4 π treffen, und keine E kann sie in 6 π schneiden, die in einer C^2 liegen.¹⁾ — So fahren Sie nun fort, mit R^7, \dots etc. — Aber dazu die Frage: *«Durch wie viele Punkte ist die freie R^n bestimmt?»* In Rom habe ich mich damit befasst, kann mich aber nicht erinnern und heute die Papiere nicht finden; mich dünkt, ich schwankte damals zwischen 2 Antworten, nach der einen war R^n durch $2n$ Punkte bestimmt, wie dies bei R^3 und R^4 der Fall ist.

«Ihre drei Sätze über die $R^m \times n$ sind sehr schön; der vierte dazu betrifft die Klasse dieser Curve, d. h. die Zahl ihrer Schmiegungebenen, welche durch irgend einen Punkt im Raume gehen; sie ist $= 3mn(m+n-3)$.

«Wird f^n von beliebiger Ebene E in C^n geschnitten und werden längs dieser die Berührungsebenen an jene gelegt, die eine abwickelbare Fläche bilden, *«so ist diese vom $n(3n-5)^{ten}$ Grad und von der $n(n-1)^{ten}$ Klasse, und ihre Knotenlinie ist vom $3n(n-2)^{ten}$ Grad.»* Ich bitte zu controliren, es ist wesentlich, weil es zugleich der Charakter der Asymptotenfläche jeder f^m ist.

«Bei der freien f^4 giebt es doppelt berührende Ebenen E_2 , die sie in 2 Punkten a und b berühren. Der Ort der E_2 ist eine abwickelbare Fläche; den Grad und die Klasse, sowie den Grad der

¹⁾ In welcher Fläche liegen die dreieinige Schaar Geraden γ ?

«Knotenlinie dieser Fläche zu finden; desgleichen den Ort der Berührungspunkte a und b.

«Der C^3 können Schaaren vollständige Vierseit eingeschrieben werden. «*Können der freien C^4 auch vollständige Fünfseit eingeschrieben werden? giebt es eine Schaar oder nur eine bestimmte Anzahl?*» Desgleichen der C^5 vollständige Sechseit, etc.

«Ueber die nothwendigen Punkte 1) bei Flächen, 2) bei Curven R^n und Flächen f^m , die sich schneiden, und 3) bei Curven R^n und R^m , die in derselben Fläche liegen, habe ich auch noch nichts Erhebliches gefunden, und in diesem Moment ist mir gar nichts gegenwärtig, ich hoffe aber nächstens daran zu kommen. In Crelle's Journ. hat Jacobi lateinisch darüber geschrieben, d. h. über die Flächen (1), aber es wird nur das Einfachste, Allgemeine sein, was sich von selbst versteht.

«Ihre Angabe: «dass die Doppellinie einer f^ν vom $\frac{1}{2}\nu(\nu-4)^{ten}$ Grad sei», macht mich stutzen, da sie also bei f^5 vom $2\frac{1}{2}$ Grad sein müsste.

«Es thut mir leid Ihren Herzenswunsch in Rücksicht der Relation zwischen den Abständen der Brennpunkte nicht genügend befriedigen zu können. Denn Einmal ist der Satz mehr durch Divination entdeckt, als streng bewiesen, und zum Andern entsprang er aus sehr complicirten Betrachtungen über die Curven 3^{ten} Grads, betreffend involutorische Eigenschaften, eingeschriebene vollständige Vierseit und dazu noch — mich fast erdrückende — Schaaren und Netze von Kegelschnitten. Dies waren bisher theils noch Staatsgeheimnisse, aber in diesem Augenblicke sind sie mir selbst fast unbekannt. An Bekanntes anknüpfend, kann ich Ihnen kurz folgendes andeuten. Sie wissen die Trippelcurve C^3 (und somit jede C^3 überhaupt) hat conjugirte Punkte p und q; «*alle Paare p und q bestimmen mit jedem Punkt a in C^3 ein (Involutions-) Strahlensystem.*» Nun liegen die Brennpunkte der dem vollständigen 4Seit eingeschriebenen C^2 in einer *besondern* Co^3 , bei welcher eine bestimmte Gerade im Unendlichen liegt, und bei welcher die Brennpunktenpaare gerade jene conjugirten Punkte p und q sind; was dann den Satz zur Folge hat. Er muss demnach in allgemeinerer Form bei jeder C^3 stattfinden, rücksichtlich je 3^{er} Paare conj. Punkte p und q und vielleicht eines Paares conj. Geraden. Das können wir einmal mündlich verhandeln; lassen Sie es für jetzt. — Von Ihrer «Aussage, die Sie

«einst über die Brennpunkte gethan haben wollen», weiss ich leider
«nichts, und verstehe auch nicht, was Sie dabei weiter behaupten. —
«Ihr Satz über die Zahl der E, welche $R^m \times n$ 4punktig berühren, ist
«mir neu, ich werde ihn kaum beweisen können. Aber wie steht
«es mit R^p ?

«Noch ein Sätzchen: «Bei der freien C^n ist die Evolute von
«der n^{2ten} Klasse und vom $3n(n-1)^{ten}$ Grad; sie hat $3n(2n-3)$
«Rückkehrpunkte, wovon n auf G_∞ liegen, und zwar G_∞ die Rück-
«kehrtangente in jedem ist. Es giebt $2n(3n-5)$ Kreise, welche die
« C^n 4punktig osculiren etc.» «Bei $B(C^n)$ ist der Ort aller Doppel-
«tangente eine Curve $2n(n-2)(n-3)^{ter}$ Klasse, und der Ort ihrer
«Berührungspunkte ist vom $(n-3)(2n^2-5n-6)^{ten}$ Grad.

«Sie haben mich kühn herausgefordert — ich habe 3 Tage
«hieran geschrieben — nun mangen Sie alles! Besonders bitte ich
«Sie, die am Rande durch Vertikalstriche markirten Sachen ¹⁾ bald zu
«machen, weil ich dieselben nach Paris senden will; ich hoffe die f^3
«mit den 27 g nebst Anhang wird Beifall finden; ich habe *Poncelet*
«schon davon geschrieben, er freut sich. Da die Correspondenz mehr
«in meinem als Ihrem Interesse geschieht, so brauchen Sie nicht zu
«frankiren.

Ihr

Steiner.

«Herr Professor Ris! Wenn Ihnen Urias diese Zeilen über-
«bringt, so stellen Sie ihn nicht gerade an die Spitze, wo der Kampf
«am heissesten ist, damit er umkomme, wohl aber mögen Sie auf
«ihn Acht haben (wie Jehova's Meisterknecht auf Hiob) und etwa alle
«8 Tage bei ihm nachfragen, ob Folgendes geschehen sei:

«1. Die Exemplare der Wiener Abhandlung zu versenden, be-
«sonders an die ihm einst in meinem Zimmer (im Adler) diktirten
«54 Adressen, und andere die er selbst wählen sollte. Die Exemplare
«für Frankreich können in ein Paket gepackt, darauf geschrieben:
«A Monsieur le Président de l'académie de Sciences à Paris, und der
«Gesandtschaft übergeben werden. Auf jedes Exemplar ist zu schrei-
«ben: A Monsieur N. Hommage de l'auteur, desgleichen auf das für
«die Akademie: A l'académie des sciences, Hommage de la part de
«l'auteur. Ebenso für England an die Société Royale à Londres durch
«Gesandtschaft oder Buchhändler.

¹⁾ Es sind dies die hier Cursiv gestellten Sätze.

«2. Kleine Aufsätze von einer, 2, 3 oder x Seiten gross, die
«irgend ein bemerkenswerthes Resultat enthalten, neu oder ein pi-
«quanten Satz aus der Wiener- oder einer Crelle'schen Abhandlung
«entnommen, französisch an Liouville zu schicken, damit sein Name
«(Schläfli's) erst in Umlauf kommt.

«3. Sodann aus der Weltüberstürmenden, aus der Erdewälzenden
«Abhandlung¹⁾ einen verständlichen Auszug, der alle Hauptresultate ent-
«hält — möge derselbe 4 oder 12 Bogen stark werden — an Liou-
«ville zur Vorlegung der Akademie, oder unmittelbar an diese schicken.

«Das sind Dinge, die ich auf jedem Spaziergang, gewiss 30 Mal
«gepredigt habe; aber er ist ein Ziegel²⁾ — ein Selbstmörder aus Fahr-
«lässigkeit — er will sein Licht nicht leuchten lassen. Den Zürcher
«Doctorhut vertrödelt: Er soll die Exemplare nach Zürich spediren,
«vielleicht geht es noch.

«In der Hoffnung, dass Sie trotz der Maiwahlen hierfür sorgen
«werden, grüsse ich Sie freundlichst.

J. Steiner.»

NB. Nach einem Beschluss der Wiener Akademie vor 1 oder
1¹/₂ Jahren zahlt dieselbe an Auswärtige kein Honorar mehr.

Das Nachfolgende ist ein unvollständiges Conzept eines Briefes
Steiners an **Professor Ris** vom 25. III. 1854; wir vermuthen, es
ist dies der Anfang eines Conceptes zum vorigen Brief, der allerdings
vom 10. März datirt ist, aber erst den 11. April von Berlin abge-
gangen und am 14. in Schläfli's Hände gelangt.

Berlin, 25. März 1854.

Veehrter Herr Professor und Freund!

«Ich habe Veranlassung, etwas seltenes zu thun, nämlich mich
«zu zwingen, ein paar Zeilen zu schreiben. Wenn ich nicht irre, so
«waren Sie so freundlich, zu verlangen, dass wenn ein gewisses Er-
«eigniss eintreten sollte, Ihnen davon Nachricht zu geben. Demzufolge
«beehre ich mich nun, Ihnen anbei eine Copie der erhaltenen freudi-
«gen Botschaft zuzustellen. Vielleicht haben Sie die Sache schon aus
«den gestrigen Berliner Zeitungen erfahren. Das fast einstimmige Votum
«hat mich sehr frappirt. Falls Sie von dieser Mittheilung Gebrauch

¹⁾ Ueber das vielfache Continuum.

²⁾ Uebername, den Steiner Schläfli gab, weil der letztere auf äussere Formen
nicht viel Gewicht legte.

«machen, verlasse ich mich auf Ihre umsichtige Klugheit, dass ich nicht als Helfer erscheine. Die Mathematische Section hat im Ganzen (für die ganze Welt ausser Paris) nur 6 Correspondenten; die ganze Akademie der Wissensch. bestehend aus 11 Sectionen, nur 100.

«Ueber Politik schreibe ich nicht, die deutsche ist zum K . . Brechen; das hiesige Kraut-Junkerthum hat vorläufig gesiegt — aber das Ende vermag kein Sterblicher zu weissagen, und der Bölima — ich wollte sagen die Vorsehung verkündet es nicht zuvor.

«Das Muggerparteisystem hat es hier soweit gebracht, dass *Vatke* und *Benari*, die sonst volle Auditorien hatten, im letzten Semester theils gar keine Vorlesungen hielten, theils nur vor 3—5 Zuhörern. Denn die bei ihnen hören, kommen schon beim Examen und später bei der Anstellung übel weg.

«Unserm Freunde Schläfli sagen Sie gefällt: «*ich hätte ihn ganz verworfen*». Denn alles Reden, Bitten, Donnern, Flehen hilft nichts. Gewiss hat er die 100 Exemplare noch nicht versendet. Nach Basel ist er nicht gekommen und hat mir nicht einmal geantwortet; auch nicht den vollständigen Titel seines schönen Werks (die 23 bogige Abhandlung) geschickt. So weiss ich nicht, was ihm in Kopf gefahren, ob er mir etwas übel genommen und mich plötzlich verworfen hat. Die Sache ist mir sehr fatal, weil er auf seine Beförderung doch etwas loslassen musste. Raabe hatte die Absicht, ihm in Zürich den Dr. hon. caus. zu erwirken (als Gegenehre von W.)¹⁾, desshalb forderte ich ihn auf, auch an *Mousson* und *A. Müller* Exempl. zu schicken — aber —

«Es ist nicht genug, dass er mit ungeheurer Kraftanstrengung mir behilflich ist, sondern er muss auch für sich selbst bedacht sein, und meine Behauptungen über seine wissenschaftlichen Leistungen, die ich höhern Ortes aufstellte, rechtfertigen, um seine Stellung ferner zu bessern. — Vielleicht hat er mir übel genommen, dass ich darauf drang, er soll sich mit Mareli vereinen, damit er in Ordnung gehalten und stets an das erinnert würde, was er zu arbeiten hätte. Unter fremden Leuten ist es ein Jammer, besonders wenn er erst noch älter ist.

«Mit meiner Gesundheit geht es so ziemlich; nur fehlt die Jugendkraft und die Phantasie. Ich habe mich diesen Winter viel mit Arbeiten abgemüht, bin aber nicht auf geeignete Probleme gestossen, welche ich Schläfli zur Lösung senden konnte. Nur etwa folgende, wenn er mich nicht «verworfen» hat.

¹⁾ Von Wolf, der von Bern den Doctorhut erhielt.

«Hoffentlich wird es Herr Schläfli nicht übel nehmen (wie 1848),
«aus Ihrer Hand folgende Aufgaben zu erhalten:

«1. Wenn in einer Ebene 6 beliebige Kegelschnitte C^2 gegeben
«sind, so können im Allgemeinen, nicht 6 Flächen 2^{ten} Grads, f^2 , durch
«dieselben so gelegt werden, dass sie irgend 6 Punkte, p , im Raum
«gemein haben.

«2. Dass die allgemeine f^4 keine Gerade g enthält, haben Sie,
«wenn ich nicht irre, schon in Bolligen verificirt. Aber zu meinem
«grossen Leidwesen kann dieselbe f^4 auch keine Raumcurve 4^{ten} Grads,
« R^4 , (d. h. Schnitt zweier f^2) enthalten, und demzufolge auch keine R^8 ,
«durch welche eine f^3 gehen kann. — Noch weniger wird also die
«allgemeine f^5 solche R^4 enthalten können. Dadurch bin ich leider
«ausser Stand gesetzt, diese allgemeinen f^4 , f^5 , . . . auf synthetischem
«Wege, nämlich durch niedrigere Flächenbüschel, zu erzeugen. Es
«wäre fatal, wenn hier die Geometrie ein Ende hätte.

«Es schwebte mir in Bern und seither immer vor, als habe ich
«die 27 g und die 5 Grundebenen in f^3 schon früher gehabt. Vor
«3 Wochen stöberte ich endlich meine Papiere durch und fand dann
«in Untersuchungen v. J. 1850 alles vor, jedoch schien das Bewusst-
«sein zu fehlen, dass es die allgemeine f^3 sei. Auch die 45 Ebenen,
«in denen die 27 g zu 3 liegen, sind angezeigt, aber nicht die Eigen-
«schaften der Trieder, welche Sie hinzugefügt haben. Dagegen wieder
«andere Eigenschaften von f^3 u. s. w.»

Die **Notizen**, welche sich hier anschliessen, sind Concepte von
Fragen Steiner's an Schläfli vom 28. März und 31. März 1854 und
beziehen sich auf Sätze, die Steiner vor Terquem entdeckt hatte.

28. März 1854.

f^3 .

«Endlich die A_s -fläche der f^3 .

«Werde f^3 von E in C^3 geschnitten; längs E die B. E.¹⁾ A . an f^3 ,
«umhüllen einen fo^x , enthaltend eine Knotenlinie α^z und Schaar
«Gerade a , = Schnittlinien der sich folgenden A und = Tangenten
«der α^z , und Fläche y^{ten} Grads bildend, $a^y = f^x$; wo also x die
«Klasse, nämlich die Zahl der durch jeden beliebigen Punkt π gehenden
«B. E. A . bezeichnet.

¹⁾ B. E. = Berührungsebene.

«Da alle B. E., die durch π gehen, die f^3 längs einer R^6 berühren, und diese die C^3 (weil ihre E) in 6 Punkten β schneidet, so gehen 6 A durch π , und folglich ist

$$x = 6; f^x = f^6.$$

«Rücken 2β sich näher, bis sie sich vereinen in β_0 , so werden die zugehörigen 2 A sich entsprechend, und ihre a geht durch π . In diesem Falle aber schneidet die Polare f^2 von π (auf f^3) die E in einer C^2 , welche die C^3 in β_0 berührt; und umgekehrt, findet diese Berührung statt, so geht die dem β_0 entsprechende a durch π .

«Bewegt sich π in einer beliebigen Geraden g, so bilden seine Polaren einen $B(f^2)$, der die E in einem $B(C^2)$ schneidet, unter denen sich 12 solche Co^2 befinden, welche die C^3 in 12 β_0 berühren; und die diesen β_0 zugehörigen a treffen die ihnen entsprechenden π in g; folglich begegnet jede g im Ganzen 12 a, und folglich ist

$$y = 12; a^y = a^{12} = f^6.$$

«Läge π in der Knotenlinie α^z , wäre es eine α , so müsste die entsprechende Co^2 die C^3 osculiren, d. h. in einem Punkte β_3 3-punktig berühren. Um den Grad z zu finden, hat man demnach wie folgt zu verfahren: *«Bewegt sich π in einer beliebigen Ebene g, so bilden seine Polaren f^2 auf f^3 ein HN (f^2), welches die E in einem $N(C^2)$ schneidet; so viele C_3^2 sich in dem letztern befinden, welche die C^3 in irgend einem Punkte β_3 3-punktig berühren, in ebenso vielen Punkten a schneidet g die α^z , und ebenso gross ist folglich z.»* Die Beziehung der C^3 und HN(f^2) zu f^3 , bringt wohl nicht C^3 und $N(C^2)$ in gegenseitige Abhängigkeit? sondern sie sind als frei anzusehen. Dies bleibt also noch zu lösen.

«So ist also auch die $(A_s F)$ der $f^3 = A_s^6 = a_s^{12}$, d. h. von der 6^{ten} Klasse und vom 12^{ten} Grad.» — Die α^z ist mindestens 9^{ten} Grads, $z =$ oder >9 . Denn fällt g auf E, so gelten die wp der C^3 für α , also 9 α in E. Es wäre schön, wenn $(A_s F) = A_s^6 = \alpha^9 = a_s^{12}$. Da a^{12} von jeder Ebene g in einer γ^{12} geschnitten wird, so muss bei E zu der C^3 noch eine γ^9 kommen, sind es die 9 wt der C^3 ? wahrscheinlich.

«Ebenso folgt bei f^4 , wenn sie von E in C^4 geschnitten und längs dieser alle B. E. A. gelegt werden, dass die

$$(AF) = A^{12} = a^{28} = \alpha^z; z = 24?$$

«Und für f^n :

$$«(AF) = A^{(n-1)n} = a^{n[n+2(n-1)-3]} = a^{n(3n-5)} = \alpha^z = 3n(n-2) ?$$

«wobei immer $a^{n(3n-5)}$ von der E in $C^n + 3n(n-2)$ wt geschnitten
«wird.

«Umgekehrt, von R^n ausgehend. Es ist $R^3 = \alpha^3 = A^3 = a^4$;
« $R^4 = \alpha^4 = A^{12} = a^8$; wie weiter? Wie wird R^5 erzeugt?

«*Le lieu de tous les points P_0 , dont la première polaire est un
«cône S_0^2 , est une surface du 4^{me} degré, P_0^4 .*» L'intersection des deux
«surfaces f^3 et P_0^4 est une courbe à double courbure du 12^{me} degré
«qui joue de propriétés intéressantes.

«II. La surface générale du 3^{me} degré, S^3 , contient en tout 27
«droites d, propriété qui est déjà énoncée, comme on m'a dit par
«M. Cayley. Ces 27 droites jouissent des propriétés suivantes :

- «1. La surface S^3 contient 27 systèmes de sections coniques ;
«car chaque plan qui passe par une des droites d coupe la
«surface en outre dans une conique C^2 . Donc, les plans des
«27 systèmes de coniques, $S(C^2)$, passent respectivement par
«les 27 droites d.
- «2. Chacune des 27 droites d est coupée par 10 autres, qui se
«trouvent deux à deux dans un même plan et se coupent
«par conséquent elles mêmes et forment avec la première
«un triangle. Il y a en tout 45 fois 3 droites d qui forment
«un triangle ou qui sont situées dans un même plan, E, et
«chaque droite appartient à 5 plans ou est côté de 5 triangles.
«Désignons la première droite par d_1 , les 5 paires qui la cou-
«pent par d_2 , il reste encore 16 droites d, que nous appel-
«lerons «les 16 droites opposées à la première d_1 . La droite
« d_1 est coupée par les 5 paires.

31. März 1854.

- «1. Haben f^3 und H_1^2 eine g gemein, so haben sie noch R^5 ,
«aber diese ist nicht die allgemeine R^5 .
- «2. Haben f^3 und f_1^3 eine R^4 gemein, so schneiden sie sich
«noch in einer R^5 ; durch diese geht keine f^2 ; — warum
«soll nicht ein H_1^2 durchgehen und noch durch g und g_1 ?
«Weil für R^5 wenigstens 10 p willkürlich anzunehmen sind ;
«für f^2 nur 9. — Auch wenn f^3 und f_1^3 eine $R^3 + g$ oder
« $C^3 + g$ gemein hat.
- «3. Der Schnitt von f^3 und f^2 , oder von f^3 und f_1^3 die C^3 gemein
«haben, ist nicht die allgemeine R^6 ; ist der Schnitt von f^3

«und f_1^3 , die R^3 (oder $3g$, oder C^2 und g , die nicht in E)
 «gemein haben, die allgemeine R^6 ? — Können f^3 und f_1^3
 «auch $2 R^4 + g$ gemein haben? oder $3 R^3$? — Müssen sich
 « $2 R^4$, die in f^3 liegen, nothwendig schneiden? wenn sie zu
 «gleicher Schaar gehören, oder nicht? Dito R^6 und R^3 in f^3 ?
 «4. *Giebt es R^6 in der allgemeinen f^4 ?* Durch eine R^6 wären
 « ∞ viele bedingt; vorausgesetzt, dass durch die allgemeine
 « R^6 immer f^3 , oder $SS(f^3)$ gehen; denn diese schnitten die
 « f^4 in neuen $SS(R_1^6)$, und durch jede R_1^6 ginge $SS(f_1^3)$ und
 «gäbe $SS(R^6)$, zu der jene R^6 gehörte. Gehen $3 f^3$ durch
 « R^6 , so haben sie paarweise noch $3 R^3$: wie viele gp haben
 «diese $3 R^3$? — Daraus zu schliessen, wie viele gp die R^6
 «zählt, da die $3 f^3$ nur 27 gp haben.

«5. Die f^2 wird vom $B(f_1^2)$ 12 mal berührt. Wenn $f^2 = K^2$,
 «wieviel zählt dann die durch den M des K^2 gehende f_1^2 ?
 «für $2, 3, 4$ etc.? Wenn $f^2 = 2 f^1 = 2E$, so wird jede
 « E von $3 f_1^2$, ist $= 6$; die Schnittlinie l wird von $2 f_1^2$
 «berührt, muss $2 \times 3 = 6$ zählen. Der $B(f^2)$ berührt
 «die f^3 $27 + x$ mal. Für f^3 und $3 E_1$ jede E 3 mal, $=$
 « 9 ; jede l 2 mal, $= 3 \cdot 2 \times 3 = 18$; die durch p gehende
 « f^2 zählt x ; macht $27 + x$. Bei $f^3 = f^2 + E$; die f^2
 « $= 12$ mal, $E = 3$ mal, $= 15$; Schnitt $C^2 = 12 + x$ mal,
 (bricht hier ab) — — — — —

«nämlich der Schnitt von $B(f^2)$ und E ist $B(C_1^2)$ und dieser berührt
 « C^2 6 mal, zählt je 3 fach, so ist $x = 6$. Dann zählt also auch vor-
 «hin die Ecke p 6 mal.

«Also berührte $B(f^2)$ den K^2 6 mal und die durch den Mittel-
 «punkt M gehende f^2 zählte für 6 mal. Und $B(f^2)$ berührte die f^3
 « $27 + x = 33$ mal. Danach würde weiter folgen, dass:

« $B(f^2)$ die $f^4 = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72$ mal berührt,
 «abgezählt nach dem speziellen Falle, wo $f^4 = 4 E$.

— «Wenn $f^4 = f^3 + E$, so kommen auf $f^3 = 33$; auf $E = 3$;
 «ihr Schnitt C^3 wird von Schnitt $B(C^2)$ 12 mal berührt macht, als
 « 3 fach zählend $= 36$; zusammen $33 + 3 + 36 = 72$, richtig.

— «Wenn $f^4 = f_1^2 + f_2^2$; für $f_1^2 = 12$ und $f_2^2 = 12$; für
 «Schnitt $R^4 = 48$, wonach er von $B(f^2)$ wohl 16 mal berührt werden
 «müsste; wenn aber $R^4 = 2 C^2 = R^2 + R_1^2$, so werden diese von
 « $B(C^2)$ und $B(C_1^2)$ in $2 \cdot 6$ Punkten berührt $= 12$, aber die Schnitte
 « 2δ von R^2 und R_1^2 zählen dazu noch doppelt, was 16 giebt; und

«die durch δ gehende f^2 zählt dann für 6. Also: R^4 wird von $B(f^2)$ 16 mal berührt.

— «Wenn $f^4 = f_1^2 + 2E$, so wird $f_1^2 = 12$, die $2E = 6$ mal, die $2C_1^2$ (deren Schnitte) $= 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$; die 1 der $2E$ wird 2 mal berührt, zählt $= 2 \cdot 3 = 6$; die 2δ (der 1 und f_1^2) zählen $2 \cdot 6 = 12$ mal, also $12 + 6 + 36 + 6 + 12 = 72$.

«So würde folgen; dass f^n von $B(f^2)$ im Allgemeinen:

$$nE \quad \frac{1}{2} n(n-1)l \quad \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)\delta$$

$$3n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6$$

$= n[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 3] = n(n^2 + 2)$ mal berührt wird.

«6. Nun haben wir zu sehen, wie oft $B(f^3)$ eine f^n berührt. Der Schnitt mit E ist $B(C^3)$ mit 12δ , was anzeigt, dass $12f^3$ die E berühren.

— «Daher wird f^2 $2 \cdot 12 + x = 24 + x$ mal berührt, nämlich für $f^2 = 2E$ zählt die 1 für x mal; in der That wird 1 4 mal berührt, zählt jede für y (vorhin $= 3$), so ist $x = 4y (= 4 \cdot 3 = 12?)$.

— «Ein f_1^3 würde danach $3 \cdot 12 + 3 \cdot 4y + z$ mal berührt $= 36 + 36 + z = 72 + z$ mal; wobei für $f_1^3 = 3E$, die z mal auf δ kommen. Für $f_1^3 = f^2 + E$, hat man $24 + 12 = 36$ (in f^2), 12 (in E), $= 48$ und im Schnitt C^2 durch $B(C^3) = 10$ Berührungen jede zu 3 gezählt, $= 30$, also $48 + 30 = 72 + z$, folglich auch hier $z = 6$, d. h. die durch δ gehende f^3 zählt für 6 Berührungen, so dass $B(f^3)$ eine f_1^3 im Allgemeinen

78 mal berührt.

— «Danach wird f^4 von $B(f^3) = 4E \quad 6l \quad 4\delta$
 $= 4 \cdot 12 + 6 \cdot 12 + 4 \cdot 6$
 $= 144$ mal berührt.

— «Und ebenso f^n von $B(f^3) = n \cdot 12 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 12 + \frac{6n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
 $= n[(n-1)(n-2) + 6(n-1) + 12]$
 $= n(n^2 + 3n + 8)$ mal berührt.

«7. Der $B(f^n)$ berührt eine $E = 3(n-1)^2$ mal; eine $g = 2(n-1)$ mal. Daher wird eine f^2 , als $2E$ mit 1, $= 2 \cdot 3(n-1)^2 + 2(n-1) \times 3 = 6n(n-1)$ mal berührt.

— «Eine f^3 oder $3E$ mit $3l$ und δ wird

$3 \cdot 3(n-1)^2 + 3 \cdot (2n-2) \times 3 + 6$ mal berührt.

— «Die f^4 oder $4E$ mit $6l$ und 4δ wird

$4 \cdot 3(n-1)^2 + 6 \cdot (2n-2) \cdot 3 + 4 \cdot 6$ mal berührt.

— «Und eine f^m oder $mE + \frac{1}{2} m(m-1)1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta$

$$\text{wird } m \times 3(n-1)^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \times 2(n-1) \cdot 3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 6,$$

$$= m [3(n-1)^2 + 3(m-1)(n-1) + (m-1)(m-2)],$$

$$= m [(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)] \text{ mal berührt.}$$

$$\parallel = m[3(n-1)^2 + 2(n-1)(m-1) + (m-1)^2] \text{ nach}$$

«Cima Bue (Schläfli).

«Für $m = n$ kommt:

$$= 6n(n-1)^2$$

«dass f_1^n von $B(f^n) = n(n-1)(7n-8)$ mal berührt wird.

«Daraus ist zu schliessen, dass im $HN(f^n)$ der Ort der B. P.

«oder der Hornpunkte ¹⁾ δ eine R^2 ist, wo

$$«n \cdot x = 6n(n-1)^2, \text{ also}$$

$$«x = 6(n-1)^2, \text{ folglich}$$

«eine $R^{6(n-1)^2}$ ist.

«Auch ist nun zu finden, wie oft eine R^y von $B(f^n)$ berührt wird.

«Der $HB(f^n)$ hat nothwendige n^3 Grundpunkte q ; durch

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3 \text{ derselben ist der Büschel bestimmt, und}$$

«damit auch die übrigen

$$n^3 - \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3) + 3 = \frac{n-1}{6} (5n^2 - n - 12)$$

«Punkte q . Oder man hat den Satz (analog, wie Curve in E):

$$«\text{Durch } \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3) - 3 \text{ beliebig gegebene Punkte } q$$

«geht eine $S(f^n)$, welche Hornpunkte δ haben, und der Ort der letztern

«ist eine Raumcurve 6 $(n-1)^{\text{ten}}$ Grads, R_1^{6n} , (— aber sie geht

«nicht durch die q und hat sie zu dp , wie ich anfangs glaubte). Erst

«bei $N(f^n)$, wenn es $\frac{1}{6} (n+1)(n+2)(n+3) - 4$ Grundpunkt q hat,

«und der Ort der δ eine Fläche δ^2 ist, hat diese die q zu Horn-

«punkten, weil zur Bestimmung einer f^n der angenommene hp für 4

«bestimmende Punkte zählt, also jeder jener q als hp angenommen

«werden kann und dadurch die f^n gerade bestimmt ist.

¹⁾ Siehe Brief von 30. April 1854. Hornpunkte = Knotenpunkte.

«8. Welche Modificationen treten ein, wenn der $B(f^n)$ ein besonderer wird? z. B. wenn, für $n = 2\nu$, er sich in einer $R^{\frac{1}{2}n^2}$ berührt, statt in R^{n^2} schneidet? wobei eine Doppel- f^ν durch $R^{\frac{1}{2}n^2}$ geht und zu $B(f^n)$ gehört. Diess ist dadurch bestimmt, dass man eine f^n und $f^\nu = \frac{1}{2}n$ annimmt; ihr Schnitt ist $R^{\frac{1}{2}n^2} = 2\nu^2$. «Ist dabei der ganze Schnitt von f_2^ν mit der f^m als Berührung anzusehen? oder nur diejenigen Punkte, in welchen $R^{\frac{1}{2}n^2}$ die f^m schneidet?» Das wären $m \cdot \frac{1}{2}n^2$ Punkte δ , und die übrigen f^n in $B(f^n)$ berührt, dann die f^m nur noch

$$\begin{aligned} & m[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)] - \frac{1}{2}mn^2 \text{ mal.} \\ & = m(m-1)(m-2) + 3m(m-1)(n-1) + 3m(n-1)^2 - \frac{1}{2}mn^2 \\ & \quad \left| \frac{1}{2}m(5n^2 - 12n + 6). \right. \end{aligned}$$

«Für $B(f^2)$ insbesondere wird $f_2^\nu = E$ und $R^{\frac{1}{2}n^2} = C^2$ in E Schnitt von E mit $f^m = C^m$, und von C^2 mit f^m d. i. bloss mit C^m , $= 2 \cdot m$ Punkte δ_1 , so dass, wenn diese allein zählen, noch $m[(m-1)(m-2) + 3m] - 2m = m(m^2 + 2) - 2m = m^3$ Punkte δ bleiben.

«Daraus würde folgen, wenn $B(f^2)$ concentrische Kugeln sind (also nach Poncelet E à l'infini und C^2 imaginär), dass jeder Punkt p der Mittelpunkt von m^3 Kugeln ist, welche eine gegebene f^m berühren; Oder: Dass aus jedem Punkte p m^3 Normalen auf die Fläche m^{ten} Grads gehen.»

«Dies stimmt mit dem andern Prinzip überein, wenn f^m um 2 Axen durch p unendlich kleine Drehungen macht; sie schneidet sich selbst in 2 R. C., R^{m^2} und $R_1^{m^2}$, und diese schneiden einander in dem m^3 Punkte δ . Also Terquem geirrt.

Schläfli an Steiner.

Mein theurer Freund!

Aus einem Brief von Ihnen an Ris bekomme ich zwei Aufgaben, an deren Stelle ich theils Schwereres, theils Mittheilungen erwartet hätte:

Ad 1^o Flächen zweiten Grades, welche 6 Punkte gemein haben, sind ein spezieller Fall einer dreifachen Schaar; eine solche

ist durch 4 willkürlich gegebene Flächen bestimmt. Wird die dreifache Schaar durch irgend eine Ebene geschnitten, so sind auch die entstandenen Kegelschnitte eine dreifache Schaar, d. h. wenn vier derselben bekannt sind, so ist die Gesammtheit aller übrigen schon bestimmt, und wenn von irgend einem fünften z. B. drei Punkte gegeben sind, so ist er schon bestimmt. Wenn demnach in einer Ebene auch nur 5 Kegelschnitte beliebig gegeben sind, so gehen keine 5 Flächen zweiten Grades durch, welche einer dreifachen Schaar angehören, also in specie keine, welche 6 Punkte gemein haben. Sind aber in der Ebene nur 4 Kegelschnitte gegeben und von den 6 Punkten, welche die durchgelegten Flächen zweiten Grades gemein haben sollen nur drei beliebig gegeben, so durchlaufen die drei übrigen eine Curve.

Ad 2° Es kommt hier Alles auf die Richtigkeit dieses Axioms an: «Wenn V das Polynom einer algebraischen Fläche bedeutet, welche den Durchschnitt zweier Flächen, deren Polynome F, f sein mögen, ganz enthält, so ist $V = F \varphi + f \Phi$, wo Φ und φ wieder zwei Polynome bedeuten.» Besteht dieses Axiom, so seien die vier Hülfspolynome, in fallender Reihe geordnet, Φ, φ, F, f von den Graden $m - p, m - n, n, p$. Man setze $S = \frac{1}{2} p (p^2 + 11) - (m - n) np - 1$.

Nehmen wir jetzt die Fläche V als beliebig gegeben an und verlangen von ihrem Polynom die obige Form, so ist die Zahl der nach Abzug aller Bedingungen noch übrigen verfügbaren Grössen

1° S , wenn $m - p > m - n \geq n > p$.

2° $S - 1$, wenn $n = p$ $m > 2p$.

3° $S - 2$, wenn $n = p$ $m = 2p$.

Im ersten Fall hat S immer einen negativen Werth, die Fläche V ist also immer bornirt; z. B. für $m = 4, n = 2, p = 1$ ist $S = -1$, d. h. die Fläche vierten Grades ist einfach bornirt, wenn sie von einer Ebene in 4 Punkten berührt werden kann (wo dann die Ebene die Fläche in 2 Kegelschnitten schneidet). Im zweiten Fall ist $S - 1$ immer negativ, sobald $p \geq 2$ genommen wird; für $p = 1$ ist die einzige mögliche freie Fläche diejenige dritten Grades, d. h. sie enthält die bekannten 27 Geraden. Die Fläche vierten Grades wird für $p = 1$ schon einfach bornirt; für $p = 2$ ist schon die Fläche 5. Grades vierfach bornirt, d. h. wenn sie eine $C^2 \times 2$ enthalten soll. Im dritten Fall ist $S - 2 = 0$ für $p = 1$, die Fläche

zweiten Grades also frei, wenn sie Geraden enthalten soll; aber schon für $p = 2$ wird $S - 2 = -1$, d. h. die Fläche 4. Grades ist einfach bornirt, wenn sie Durchschnitte zweier Flächen zweiten Grades ($C^2 \times 2$) enthalten soll; die Fläche 6. Grades wird 10 fach bornirt, wenn sie $C^3 \times 3$ enthalten soll u. s. f.

Dass ich das erwähnte Axiom und andere ähnliche nicht beweisen kann, erschwert mir die Aufgabe, für Flächen und räumliche Curven etwas aufzustellen, was der Theorie der nothwendigen Punkte bei den ebenen Curven entspräche. Unter vielen zum Theil verwickelten Sätzen lege ich Ihnen folgenden zur Beurtheilung vor:

«Wenn durch die n p q Durchschnittspunkte von drei Flächen n^{ten} , p^{ten} , q^{ten} Grades eine Fläche m^{ten} Grades, die keiner der vorigen an Grad nachsteht, gelegt werden soll, so findet man die Zahl der nothwendigen Punkte auf folgendem Wege. Man entwickle den Ausdruck

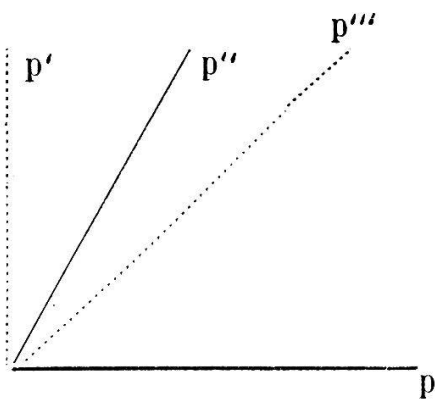
$$y^{-m-1} (y^n - 1) (y^p - 1) (y^q - 1),$$

lasse die Potenzen von y , welche negative Exponenten haben daraus weg, setze dann $y = 1 + x$ und entwickle nach den Potenzen von x ; dann ist der Coefficient von x^3 die Zahl der nothwendigen Punkte.»

Vielleicht interessirt Sie folgender Satz über die Punkte einer freien Curve $m \times n^{\text{ten}}$ Grades, in denen sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. Sie liegen auf einer Fläche $[6(m + n) - 20]^{\text{ten}}$ Grades, so dass ihre Zahl $mn [6(m + n) - 20]$ beträgt; dieses ist ein Satz, weil dadurch unter den genannten Punkten $\frac{mn}{2}$ $(m + n - 4) + 1$ nothwendig werden.

Es ist aber auch klar, dass die Fläche bei weitem nicht bestimmt ist. Unter den unzähligen möglichen Flächen kann man eine durch folgende Bedingungen angeben. Es seien A , B zwei Flächen m^{ten} und n^{ten} Grades, die sich in jener Curve schneiden, μ ein noch zu bestimmender Punkt. Seine in Beziehung auf A , B genommene Polarebenen a , b , die Polarflächen zweiten Grades α , β . Es sei ferner in Bezug auf die Basis B , wenn man α als Direktrix annimmt, P , die erste Polarenvelope, dagegen P' die zweite Polarenvelope für die Basis A und die Ebene b als Direktrix; endlich sei P'' der Ort jedes Pols, dessen in Bezug auf B genommene Polarebene seine in Bezug auf A genommene Polarfläche zweiten Grades berührt. Nimmt man nun in Bezug auf alle drei Flächen P , P' , P'' als Basen die Polarebenen des Punktes μ , nämlich p , p' , p'' , so werden sich diese in einer

und derselben Geraden schneiden. Man lege eine vierte Ebene p''' so durch, dass



$$\frac{\sin \angle [p \ p''']}{\sin \angle (p''' \ p'')} = 2 \frac{\sin \angle (p \ p')}{\sin \angle (p'' \ p')}$$

wird.

Wenn man dieselbe Konstruktion mit Vertauschung der Flächen A, B wiederholt, so erhalte man die Ebene q''' . Verlangt man nun, dass alle vier Ebenen a, b, p''', q''' einen Punkt gemein haben, so ergibt sich als Ort des Punktes μ eine Fläche $[6(m + n) - 20]^{\text{ten}}$ Grades, welche die ursprüngliche Curve in den Punkten schneidet, wo sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. [Für $C^2 \times 2$ sind es die Quadrupelebenen.]

Wenn eine Fläche m^{ten} und ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben sind, so enthält dieses

$$m [3(n - 1)^2 + 2(n - 1)(m - 1) + (m - 1)^2]$$

Flächen, welche jene berühren. Es mögen sich zwei Flächen F und f berühren, so schneiden sie sich in einer räumlichen Curve, welche den Berührungspunkt zum Doppelpunkt hat; man ziehe hier die zwei Tangenten an die Curve. Legt man nun noch eine Berührungsebene an derselben Stelle, so erhält man als Durchschnitte F und f zwei ebene Curven, welche hier auch jede einen Doppelpunkt haben, dem je ein Tangentenpaar zugehört. Alle drei Tangentenpaare sind in Involution.

Alle Tangenten einer $C^m \times n$ bilden eine abwickelbare Fläche D , deren Grad $m \cdot n [m + n - 2]$ ist; alle Ebenen, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten berühren, erzeugen ebenfalls eine abwickelbare Fläche E . Ist r der Grad der Fläche D , so wird ihre Doppellinie von einer beliebigen Ebene in $\frac{1}{2} r [r - 4]$ Punkten geschnitten. An die Fläche E gehen durch irgend einen gegebenen Punkt

$$\frac{m n}{2} [m n (m + n - 2)^2 - 10 (m + n) + 28]$$

Berührungsebenen.

Ihr Satz über Distanzen der Brennpunkte von drei, einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitten hat mich sehr gequält; ich habe ihn noch nicht gefunden und ersuche Sie daher, mir ihn sobald wie möglich zu schreiben. Von den Aussagen, die ich früher einmal über die Brennpunkte gethan, kann ich nicht zurückgehen. Es sind zwei Gegeneckenpaare eines umschriebenen Vierseits, deren drittes Gegeneckenpaar die zwei, allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkte sind (haben Sie einen kurzen Namen für dieselben?); ist der Kegelschnitt gegeben, so ist das Vierseit durchaus bestimmt, wenngleich jede Seite mit sich selbst jeden beliebigen Winkel bildet und daher ihre Lage in der Ebene nicht ändert, wenn auch der Kegelschnitt um einen Brennpunkt herum gedreht wird.

Von meiner Wiener Abhandlung habe ich schon seit längerer Zeit einen Haufen dem Buchhändler zum Versenden übergeben, nach Zürich und Basel habe ich freilich noch keine geschickt, weil ich dazu einige Zeilen schreiben muss. Da keine Aussicht auf Abnahme der ungedruckten Abhandlung vorhanden ist, so will ich sie dem *Crelle* schicken, muss Sie aber ersuchen, dafür zu sorgen, dass er sie nicht unter das Eis fallen lässt. Die erste Begeisterung für diese n Dimensionen ist bei mir schon verflogen, obschon die Untersuchungen über Flächen mir auch nach jener Seite neue Wege aufzuschliessen scheinen; daher die Zögerung mich wieder in diese hirnverrickenden Vorstellungen hinein zu arbeiten, was doch geschehen muss, wenn ich einen Auszug dem *Liouville* zuschicken soll.

Ich gratulire Ihnen zu Ihrer wohlverdienten Auszeichnung und zu der gerechten Anerkennung, die Ihnen selbst Ihr Fachgenosse *Chasles* in so unumwundenen Ausdrücken ausspricht.

Erfüllen Sie mir den Wunsch und schreiben (Sie) mir recht bald einige Zeilen, namentlich über die Brennpunkte; auch Aufgaben; denn die zugesandten zähle ich Ihnen nicht. Die Frühlingsferien sind mir weggenommen, weil ich theils mit Examen, theils mit der Nationalvorsichtskasse zu thun habe.

Bern, den 2. April 1854.

L. Schläfli.

Steiner an Schläfli.

Berlin, 30. April 1854.

Mein lieber kräftiger Freund!

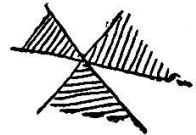
«Er hat andern geholfen, aber
«hilft sich selber nicht.»
«Der brave Mann denkt an sich
«selbst zuletzt.» *Teil.*

«Dass ich Ihnen etwas über die Brennpunkte, der einem 3 Seit
«eingeschriebenen Kegelschnitte gesagt haben soll, kann ich mir nicht
«denken, denn ich weiss von nichts. In beiden Briefen sprechen Sie
«von den 2 Grundpunkten eines Kreisbüschels, wovon ich auch keine
«Silbe verstehe; wie kann ich behalten, was Sie mir je einst ge-
«sagt haben, da ich nicht einmal das weiss, was ich selbst ge-
«schrieben habe.

«Was Sie «*Untercurve*» nennen wollen, habe ich bereits früher
«*Theilcurve*» genannt; sie ist ein Theil des ganzen Schnitts, der
«Ganz- oder «*Vollcurve*». «Unter» harmonirt mit «Ober», nicht mit
«Voll».

«Den Namen «Hornpunkt» habe ich irgendwo aufgeschnappt, jetzt
«finde ich ihn unpassend, und halte «*Knotenpunkt*» für angemessener,
«natürlicher. Demgemäss hätte man weiter den «*Knotenkegel* K^2 », der
«in Extreme übergehen kann: 1) sich auf eine Gerade K_0 redu-
«zieren, = «*Rückkehr-Knoten-Kante (Tangente)*», im «*Rückkehr-Knoten-*
«*punkt*», oder «*Rückkehrkante*» im «*Rückkehrknoten*»; 2) in zwei
«Ebenen 2 K^1 zerfallen, deren Schnittlinie eigentlich eine «*Knotenkante*»
«wäre; 3) die 2 Ebenen fallen zusammen 2 (K^1), = *ebener* oder

«*platter Knotenpunkt* mit dreispitziger Knotenebene



«(auf diese kam ich auch schon früher, weiss im Augenblick nicht wobei,
«aber ich konnte sie nicht recht überwältigen). Zudem giebt es auch noch
«*Doppel-Rückkehrknoten* = *Selbstberührungsknoten*», z. B. bei der Ring-
«fläche, die entsteht, wenn sich die Ebene eines Kreises (oder einer C^2
«oder C^n) um eine Tangente desselben herumbewegt. Weiter 3 *facher*,
«*n facher Knoten*, wenn er in jedem durchgehenden Schnitt ein 3-
«oder *nfacher Punkt* bewirkt. Ferner wäre danach auch die

«*Doppellinie*» füglich «*Knotenlinie*» zu nennen; dagegen müsste der «*arête de rebroussement*, welche ich bisher so genannt habe, der Name «*Bindelinie*», «*Bindecurve*» oder «*Selbstschnittscurve*» aller die Fläche «bildenden Geraden, gegeben werden. — Sie sind Sprachkenner, machen Sie bessere Vorschläge. Bei Einführung neuer Namen ist Umsicht nöthig, sie müssen sachgemäss sein. Man sollte wissen, welche in deutschen Büchern bereits gebraucht worden sind.

«Mit der famosen R^{12} kann ich mich noch nicht beruhigen, vielmehr soll's erst recht drauf losgehen. Liege ich auch wie ein Halb-
«todter im Schneegestöber — so fasse ich meinen treuen, starken
«Bernhardiner beim Schwanz und er wird mich aus der dustern Kluft
«herausreissen. Der Schnitt der Basis f^3 mit ihrer Kernfläche f_0^4 ,
«muss allerlei schöne Eigenschaften haben, die meine Nase schon 1846
«und 1850 witterte, aber nicht klar zu erkennen vermochte; Sie
«werden jetzt leicht triumphiren, selbst wenn mein Phantasie-Gebilde
«grossentheils falsch wäre. — Liegt ein Pol Q in R^{12} , so ist seine
«erste Polare ein Kegel P^2 , dessen Scheitel der conjugirte Pol P ist,
«und die zweite Polare ist die Ebene E , welche die f^3 in Q und
«den Kegel P^2 längs des Strahls $QP = t$ berührt. Dieser Strahl t
«hat die wesentliche Eigenschaft: 1) dass die erste Polare, f^2 , jedes in
«ihm liegenden Pols die f^3 in Q berührt; 2) dass er die Rückkehr-
«tangente (?) des Schnitts E^3 , von E und f^3 im Punkt Q ist; 3) dass
«er die f_0^4 in P zwei- und die f^3 in Q dreipunktig berührt; und
«4) dass sein Ort eine Fläche 30^{ten} Grads, $= t^{30}$, ist, welche die
«27 g zu Doppellinien hat, so dass der Schnitt von t^{30} mit f^3 aus
«3 $R^{12} + 2 \cdot 27 g = R^{30}$ besteht. Nun kann ich aber mit blossen
«Augen nicht erkennen: ob t Selbstschnitt der Ebene E und ob P
«Selbstschnitt des Strahls t sei? Der Ort des Punkts P , $= P^x$, geht
«durch die 54 Asymptotenpunkte π der 27 g , oder er berührt diese
« g in den π , so dass er also mit der f^3 im Ganzen 54 oder 108
«Punkte gemein hat, und daher $x = 18$ oder $= 36$ sein muss (nach
«Ihrer Angabe, dass eine f^7 durch P^x gehe, wäre $x = 28$). Die
« P^x geht durch jeden der 10 Sylvester'schen Punkte dreimal. Da t die
« f_0^4 in P berührt und in Q schneidet, so muss sie noch in einem 4^{ten}
«Punkte S schneiden, so dass der Schnitt von t^{30} mit f_0^4 aus
« $R^{12} + 2 P^x + S^y$ besteht und $12 + 2x + y = 4 \cdot 30$, also
«wenn $x = 36$ auch $y = 36$ ist. Diese S^y muss auch durch die
«54 π gehen, was aber nicht gut passt. — Dass t die f_0^4 in P 3punktig
«berührt, scheint auch nicht zu gehen? Oder sind t und $E = Tangente$

«und Schmiegungeebene der R^{12} im Punkte Q ? und haben nicht die
 «Polarkegel P^2 u. Q^2 von Q und P den Strahl t gemein? so dass t
 «eine Doppeltangente der f^4 ist. Zum donnstig! es muss so was sein!
 «Die R^{12} ist charakteristisch für die Basis f^3 ; sie muss diejenigen Punkte
 « Q enthalten, welche in Rücksicht auf den Schnitt E^3 der Berührungs-
 «ebene E einzig sind in ihrer Art, also Rückkehrpunkte, und in wel-
 «chen allein die Polare f^2 eines nicht in f^3 selbst liegenden Pols die
 «letzte berühren kann. Denn in diesem Betracht ist die R^{12} für
 «die f^3 das, was für die C^3 ihre 9 Wendepunkte sind. — (Wie steht es
 «mit der Berührungsebene E_0 der f^4 in Q ?) **Der Ort von t**
 «**ist = t^{30} .**

«Eben so muss es sich bei Basis f^m verhalten. Sie wird von
 «der Kernfläche $Q^4 (m-2)$ in einer charakteristischen $R^{4m(m-2)}$ ge-
 «schnitten; für jeden Punkt Q in dieser muss die berührende Ebene
 « E eine absonderliche sein; ihr Schnitt E^m muss Q zum rp und den
 «Strahl $QP = t$ zur rt haben; für jeden in t liegenden Pol muss
 «die erste Polare f^{m-1} die Basis f^m in Q berühren, so dass daher
 «der Ort von t eine Fläche $m [3 (m-2)^2 + 2 (m-2) (m-1)$
 « $+ (m-1)^2] - m = 2m(m-2)(3m-4)^{ten}$ Grads sein muss,
 «welche die f^m längs $R^{4m(m-2)}$ dreipunktig und die andere (erste)
 «Kernfläche $P^{4(m-2)^3}$ längs der Curve P^x zwei- (oder drei-) punktig
 «berührt u. s. w. Auf die Mensur! Los!

«Bei f^3 fallen in jede der 45 Ebenen $\triangle 16$ Trieder-Scheitel P ,
 «die in einer C^4 liegen, welche die 3 g zu dt hat und sie in den
 «6 π berührt; die den 16 P conjugirten 16 Q liegen in einer R^6 ,
 «welche durch die 6 π geht (der ganzen C^4 ist die R^6 conjugirt).
 «Die 6 π liegen zu 3 in 4 Geraden l und sind die Berührungspunkte
 «je dreier solcher Schnitte C^2 der f^3 , durch welche ein Kegel L^2 geht,
 «der die Ebene \triangle längs l berührt; liegen die Scheitel der 4 Kegel
 « L^2 in einer Geraden?

«Ich unterscheide die Punktsysteme (wie die Strahlsysteme)
 «in hyperbolische und elliptische, nachdem die Asymptoten¹⁾ π reell
 «oder imaginär sind. — Von den 3 g in jeder \triangle sind entweder 1) alle
 «3 hyperb., oder 2) nur eine hyperb. und die andern elliptisch. Wenn
 «alle 27 g reell: wie viele sind von jeder Art? ist die Anzahl jeder
 «Art nothwendig bestimmt, oder kann sie variiren? und nach welcher
 «Regel? Können alle hyperbolisch sein? — Wie viele g werden zu-
 «gleich imaginär? giebt es dafür ein Gesetz?

¹⁾ Soll wohl heissen: Asymptotenpunkte.

«Die 6 Normalen N aus einem Punkte p auf f^2 liegen in einem Kegel p^2 , welcher auch durch den Mittelpunkt der f^2 geht. Wie verhält es sich mit den m ($m^2 - m + 1$) N aus p auf f^m ?

«Da Sie nun die Polaren so tüchtig verschlungen haben, so können Sie gelegentlich die weitem reciproken Kerncurven bestimmen, d. h. den Ort des Pols P , dessen x^{te} Polare in Bezug auf die Basis C^m einen Doppelpunkt Q hat, und den Ort dieses Q , dessen $(m - x - 1)^{\text{te}}$ Polare jenen P zum $d p$ hat. So viel ich mich im Augenblick erinnere, ist es mir nicht gelungen. Ebenso sind die reciproken Kernflächen P^x und Q^y für die Fläche f^m aufzufinden. — *Die Kerncurven und Kernflächen haben grosse Bedeutung: Denn sie sind Enveloppen der Polar-Enveloppen andern Ranges für beliebige Directricen.* Z. B. die Trippel- oder Kerncurve Co^3 der Basis C^3 wird von der 2^{ten} Polare Ao^2 jeder Geraden A in drei Punkten α berührt; ebenso von der 2^{ten} Polare Do^y der gegebenen Directrix D^r in 3 r Punkten α etc. Da haben Sie wieder ein Staatsgeheimniss. — Daher ursprünglich der Name «Kern», weil sich Alles um sie versammelt, sich an sie anlehnt.

«Haben Sie den Urias-Zettel Herrn Prof. Ries gezeigt? was ich im Vertrauen auf Ihre grosse Gewissenhaftigkeit getrost erwartete. Sie schweigen darüber und Ries hat auch kein «Ja» unter Ihren Brief gesetzt.

«Ich bin wieder für diesen Sommer um Urlaub eingekommen, weiss aber selbst noch nicht recht, wo ich herumbummeln werde; der Arzt hat mir nochmals Ems vorgeschlagen.

«Mit freundlichem Gruss

«Ihr

«Steiner.»

Schläfli an Steiner.¹⁾

«Um die Absendung dieses Briefs nicht zu lange zu verzögern, will ich Ihnen nur kurz meine Ansichten über die *Untercurven* mittheilen, und die schwierige Ergründung Ihrer Fragen mit der erforderlichen Zeit und Reife für einen späteren Brief vorbereiten. Es seien A, B, C drei Polynome resp. von den Graden a, b, c ; und A^1, B^1, C^1 drei Polynome von den Graden $a + h, b + h, c + h$, so stellen die Proportionen $A:B:C = A^1:B^1:C^1$ eine Untercurve vom Grade

¹⁾ Der Eingang fehlt.

$h^2 + (a + b + c)h + bc + ca + ab$ dar. Hier ist freilich nur das
 niedrigste Polynom fest, die übrigen bilden vielfache Schaaren. Das-
 selbe kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass man verlangt, dass
 alle im Schema $\begin{vmatrix} A & B & C \\ A^1 & B^1 & C^1 \end{vmatrix}$ enthaltenen Determinanten, $BC^1 - B^1C$,
 $CA^1 - C^1A$, $AB^1 - A^1B$, verschwinden. Dieses scheint aber nur der
 leichteste Fall einer allgemeinen Darstellungsweise von Untercurven
 zu sein. Man kann sich nämlich ein Schema denken, wo jede Vertical-
 zeile n Polynome und jede Horizontalzeile deren $n + 1$ enthält, in-
 dem zugleich die Grade der Polynome äquidifferente Zeilen bilden,
 und dann verlangen, dass alle $n + 1$ Determinanten, welche durch
 das Weglassen je einer Verticalzeile entstehen, zugleich verschwinden:
 eine Untercurve wird diesen Bedingungen genügen. Man kann zwar
 diese Darstellung auf die vorige einfachere zurückführen, aber nicht
 ohne bedeutende Erhöhung der Grade der Ausdrücke und daherige
 Verdunklung der Natur der Untercurve. Mit andern Worten: durch
 eine Untercurve A gehen zwei Flächen p, q , und der übrige Theil
 B ihres vollständigen Durchschnitts ist auch wieder nur eine Unter-
 curve, die sich ähnlich verhält, u. s. f., bis man erst die n^{te} Curve
 als Vollcurve antrifft. Will man aber das Ganze in zwei Tempo ab-
 thun, so muss man jede der Flächen p, q mit einer passenden Fläche
 zusammensetzen, so dass dann B durch die neu hinzutreten-
 den Durchschnitte zur Vollcurve ergänzt wird, durch deren einmalige
 Wegnahme aus dem vollständigen Durchschnitt der durch Zusammen-
 setzung verstärkten Flächen p und q sogleich die ursprüngliche
 Untercurve A erhalten wird. Bei einer solchen Reduction zieht man
 aber wohl den Knoten nur stärker zusammen, statt ihn zu lösen. —
 Ob die erwähnte allgemeinere Darstellungsweise einer Untercurve
 wirklich die allgemeinste ist, wage ich nicht zu entscheiden; und
 wenn sie es auch wäre, so hätte man dann bei der Classification
 der Untercurven immer noch artige zahlentheoretische Schwierigkeiten
 zu überwinden.

«Die Frage über die abwickelbare Fläche S , welche eine freie
 Fläche f^n längs eines ebenen Schnitts C^n berührt, habe ich noch
 nicht ganz zweifellos entscheiden können. Der Grad $g = n(3n - 5)$
 und die Classe $K = n(n - 1)$ sind richtig. Wenn Sie unter Knoten-
 linie die arête de rebroussement verstehen, wo jede freie Ebene die
 S mit Rückkehrpunkt schneidet, so können wir ihren Grad mit r be-

«zeichnen, und haben $r = w + 3$ ($g - K$). Ist nun $w = 0$, d. h. hat
 «ein ebener Schnitt der S keine Wendepunkte, so folgt $r = 6n(n-2)$.
 «Dieses scheint richtig, weil für jeden der $3n(n-2)$ Wendepunkte
 «von C die erzeugende Gerade von S in die Ebene von C fällt und
 «daher diese Ebene die *Knotenlinie berührt*. (Die Ebene der C be-
 «rührt die Knotenlinie in den Wendepunkten der C ; daher wird die
 « S hier mit Wendepunkt sammt Wendungstangente geschnitten.) Die
 «Formel $g(g-1) = K + 2d + 3r$ giebt nun

$$d = \frac{3}{2} n(n-2)(n+1)(3n-7)$$

«als Grad der *Doppellinie* von S . Zieht man hievon die

$$\frac{3}{2} n(n-2)(3n^2-6n-1)$$

«Durchschnitte der Wendungstangenten von C ab, durch welche offen-
 «bar die Doppellinie geht, so bleiben noch

$$3n(n-2)(n-3)$$

«Punkte übrig, in denen die Ebene der C die Doppellinie schneidet.
 «Dieses sind die übrigen Punkte, in denen C von den Wendungs-
 «tangenten geschnitten wird.

«Ihre Sätze über die Evolute der C^n sind richtig. Der Satz
 «über den Ort der Doppeltangenten eines $B(C^n)$ ist mir noch zu
 «schwer. Die Ortcurve der Brennpunkte der einem Dreieit einge-
 «schriebenen Kegelschnitte war mir bekannt; aber das Involutions-
 «strahlensystem haben Sie mir endlich verrathen. Den Satz über
 «Brennpunktsdistanzen haben Sie in ihren gedruckten Schriften für
 «das Vierseit ausgesprochen; aber ich meine von Ihnen mündlich ge-
 «hört zu haben, dass er für drei einem Dreieit eingeschriebene
 «Kegelschnitte in allgemeinerer Form gelte. Zur Darstellung von
 «Distanzen gebrauche ich ein Produkt von zwei dreizähligen¹⁾ Deter-
 «minanten, worin die Coordinaten der gegebenen Punkte und
 «überdiess noch diejenigen der zwei Grundpunkte aller Kreise
 «vorkommen; aber selbst mit diesem Hilfsmittel konnte ich an
 «den Brennpunktsdistanzen keine Relation herausbringen. — Sie
 «haben gut gethan, einige der schwersten Aufgaben in Ihrem
 «Briefe nicht anzustreichen, da sie wohl noch beträchtliche Zeit
 «erfordern werden. — Wenn meine Angabe über eine gewisse
 «Doppellinie Sie stutzig macht, so beruht dieses auf einem Missver-

¹⁾ Soll wohl heissen: dreizeiligen.

«ständniss, nämlich: alle Tangenten einer Vollcurve $C^{m \times n}$ bilden
 «eine abwickelbare Fläche vom Grade $r = mn (m + n - 2)$; und
 «diese hat eine Doppellinie vom Grade $\frac{1}{2} r (r - 4)$.

«Ich benutze den Raum des Papiers noch für einige Sätzchen.

«Wenn 3 Flächen m^{ten} , n^{ten} , p^{ten} Grades eine Vollcurve $C^{\alpha \times \beta}$
 «gemein haben, so haben sie ausserdem noch
 « $m n p - \alpha \beta (m + n + p - \alpha - \beta)$ Durchschnittspunkte gemein.

«Wenn $m \geq n \geq p$, und es soll eine ebene Curve m^{ten} Grades
 «durch die np Durchschnittspunkte einer Curve n^{ten} und einer p^{ten} Gra-
 «des gelegt werden, so sind für jene höchste Curve von diesen Durch-
 «schnittspunkten $\frac{1}{2}(n + p - m - 1) (n + p - m - 2)$ nothwendig,
 «vorausgesetzt, dass $m \leq n + p - 3$ ist; sonst ist *keiner* nothwendig.

«Wenn $m \geq n$, so dürfen auf einer Fläche F^n nur

$$\frac{1}{2} m n (m - n + 4) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$$

«beliebige Punkte gegeben werden, wenn eine freie f^m durchgehen soll.

«Wenn der Grad m nicht niedriger ist, als einer der Grade n
 «und p , und es soll durch Punkte einer Vollcurve $C^n \times p$, eine
 «Fläche F^m gelegt werden, so sind unter den Durchschnittspunkten
 « $\frac{1}{2} np (n + p - 4) + 1$ nothwendig, wenn $m > n + p - 4$ ist; aber

$$\text{«nur } \frac{1}{2} np (n + p - 4) + 1 - \binom{n + p - m - 1}{3}, \text{ wenn}$$

« $m \leq n + p - 4$ ist.

«Durch jede $C^{2 \times 2}$ kann eine F^4 gelegt werden, deren Polynom
 «als Summe von vier Biquadraten darstellbar ist.

«Wird eine $C^{m \times n}$ von einem beliebigen Punkte aus auf eine
 «beliebige Ebene projecirt, so ist für die Projection $g = mn$,
 « $k = mn (m + n - 2)$, $r = 0$, $w = 3 mn (m + n - 3)$,
 « $d = \frac{1}{2} mn (m - 1) (n - 1)$. Wenn aber der Mittelpunkt des
 «projicirenden Strahlenkegels der C^{mn} angehört, so gehen an g , k ,
 « w , d , t resp. 1, 2, 3, $mn - 2$, $2mn (m + n - 2) - 8$ Einheiten
 «verloren.

«Jede Tangente der $C^{m \times n}$ wird von $mn (m + n - 2) - 4$
 «andern Tangenten geschnitten.

«Die Mahnungen am Schlusse Ihres Briefes will ich bald be-
«folgen und danke Ihnen für die näheren Anweisungen. Da es be-
«quemer ist, die Briefe nicht zu frankiren, so unterlasse ich es jetzt,
«aber dann dürfen auch Sie es nicht thun. Vom 19.—21. Apr. war
«ich an den Examen in Biel, vom 26.—29. muss ich an denen in Thun
«sein; Sie müssen sich daraus erklären, dass ich etwas unvollständig
«geantwortet habe, um bei den Arbeiten, die mir wegen der Examen
«obliegen, Sie nicht zu lange auf eine Antwort warten zu lassen. Ich
«bin diesen Augenblick ziemlich abgespannt und weiss Ihnen daher
«nichts zu berichten, als dass sich bis jetzt noch keine Studenten zu
«meinen Vorlesungen gemeldet haben.

«Unterlassen Sie es nicht, mir bald wieder zu schreiben, und
«genehmigen Sie die Versicherung der Hochachtung von

«Bern, den 23. April 1854.

Ihrem dankbaren Schüler

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Da es Ihnen vielleicht dienlich ist, so beeile ich mich, Ihnen
«einige nähere Angaben über die Beziehung sämtlicher *Cayley'scher*
«Strahlen zu Ihrem Fünfseit zuzusenden.

«Ich habe das Fünfseit sammt Axe auch analytisch behandelt und
«die Reduction bis zur Gleichung 3^{ten} Grades fortgeführt, ungeachtet
«anfänglich die Fläche vom 8^{ten} Grade zu sein scheint, weil die durch
«die Axe und jedes Eck des Fünfseits gelegten Ebenen noch dazu
«kommen.

«Ich bezeichne die fünf Seiten der Ordnung nach mit $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$,
«die Axe mit e . Durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_3 a_4)$ von
«den Strahlen a_1, e geschnitten wird, geht der Strahl b_1 ; durch die
«Punkte, in denen die Ebene $(a_1 b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten wird, geht
« c_1 , u. s. f. Dann wird c_1 von c_3, c_4 geschnitten (ein *Satz!*), so dass
« $c_1 c_3 c_5 c_2 c_4$ ein neues Fünfseit ist. Durch die Punkte, wo die Ebene
« $(b_1 e)$ von a_5, a_2, c_3, c_4 geschnitten wird, geht der Strahl d_1 , u. s. f.;
«durch die Punkte, wo die Ebene $(a_2 d_3)$ von $a_5, c_3, c_4, d_5, d_2, d_4$ ge-
«schnitten wird, geht d_1^1 , u. s. f.; durch die Punkte endlich, wo die
«Ebene $(b_1 d_1^1)$ von den übrigen Strahlen b und d^1 geschnitten wird,
«geht e^1 . Also fünf a , fünf b , fünf c , zehn d oder d^1 , zwei e, e^1 ,
«zusammen 27 Strahlen. Die Dreiseite sind: fünf $(a_3 a_4 b_1)$, fünf $(a_1$

« $b_1 c_1$), fünf ($b_1 c_5 c_2$), zehn ($a_1 d_5 d'_2$), zehn ($c_1 d_3 d'_4$), zehn ($b_1 d_1 e$)
 « oder ($b_1 d_1 e'$), zusammen 45. — Alle 12 zum Paar $e_1 e'$ gehören-
 « den Fünfseite ergeben sich durch Permutation der fünf Strahlen b ;
 « ist z. B. $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5$ die gewählte Permutation, so geht durch b_1 ,
 « b_3, b_4 die Seite a_1 , durch $b_2 b_4 b_5$ die Seite a_2 , u. s. f. ($b_2 b_3 b_1 b_4 b_5$)
 « giebt $a_4 c_4 c_1 c_3 a_3$ (fünf solche) ($b_2 b_1 b_3 b_4 b_5$) giebt $c_3 c_5 a_5 a_4 a_3$ (fünf
 « solche); endlich giebt ($b_1 b_3 b_5 b_2 b_4$) das einzige Fünfseit $c_1 c_3 c_5 c_2 c_4$.

« Mit der F^3 hängt auch folgender Satz zusammen, von dem ich
 « vergeblich einen elementaren Beweis gesucht habe.

« Durch einen Strahl a_1 gehen fünf beliebige Strahlen b_2, b_3, b_4 ,
 « b_5, b_6 . Lässt man nun von diesen der Ordnung nach je einen weg,
 « so geht durch die 4 übrigen ausser a_1 immer noch ein Strahl, und
 « man erhält so die fünf Strahlen a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 . Nun kann durch
 « a_3, a_4, a_5, a_6 ausser b_2 noch ein Strahl gelegt werden; dann wird
 « dieser (b_1) von selbst auch durch a_2 gehen.

« Werden nämlich auf a_1 vier beliebige Punkte, und auf jedem
 « der durchgehenden Strahlen b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 deren beliebige drei
 « gegeben, so ist durch alle 19 Punkte eine F^3 bestimmt, und man
 « erkennt sogleich, dass alle sechs Strahlen ganz darein fallen, u. s. f.
 « Ich nenne dieses System von 2×6 Cayley'sche Strahlen, wo je
 « einer der einen Hälfte den gleichnamigen der andern nicht, aber
 « alle fünf übrigen schneidet, während die sechs Strahlen derselben
 « Hälfte sich nicht schneiden, — einen *Doppelsechser*. Die F^3 hat
 « deren 36. — Der gemeinschaftliche dritte Strahl der Ebenen ($a_1 b_2$)
 « und ($a_2 b_1$) heisse c_{12} . Man hat dann 30 Dreiseite ($a_1 b_2 c_{12}$) und
 « 15 ($c_{12} c_{34} c_{56}$). Von den übrigen Doppelsechsern haben 20 die Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{46} & c_{45} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \text{ und 15 die Form } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ a_2 & b_2 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \end{pmatrix}$$

« Jeder Doppelsechser enthält 20 Hyperboloide (Doppeldreier), und
 « jedes Hyperboloid ist zweien Doppelsechsern gemein.

« Die 40 Gruppen von je drei Triederpaaren theilen sich in Be-
 « ziehung auf den gegebenen Doppelsechser in zwei Haufen.

« Der erste Haufen enthält 10 Gruppen wie

c_{12}	b_2	a_1
a_2	c_{23}	b_3
b_1	a_3	c_{13}

c_{45}	b_5	a_4
a_5	c_{56}	b_6
b_4	a_6	c_{46}

c_{14}	c_{25}	c_{36}
c_{26}	c_{34}	c_{15}
c_{35}	c_{16}	c_{24}

«und 30 Gruppen wie

a ₃	b ₅	c ₃₅	a ₅	b ₁	c ₁₅	a ₁	b ₃	c ₁₃
b ₆	a ₄	c ₄₆	b ₂	a ₆	c ₂₆	b ₄	a ₂	c ₂₄
c ₃₆	c ₄₅	c ₁₂	c ₂₅	c ₁₆	c ₃₄	c ₁₄	c ₂₃	c ₅₆

«Jede Gruppe des ersten Haufens entspricht einer Theilung der
«sechs Zeiger in zwei Hälften wie (123, 456); und je zwei Gruppen
«des zweiten Haufens (die sich nur durch Perm. von a, b unter-
«scheiden) einer Theilung in drei Paare wie (12, 34, 56). — Die
«Fünfseite ordnen sich so: Zu a₁ b₁ gehören 12 wie c₂₄ c₃₅ c₄₆ c₅₂
«c₆₃, zu a₁ a₂ 12 wie c₃₅ a₅ c₄₅ a₄ c₄₆, zu a₁ c₂₃ sechs wie a₅ c₃₅ c₂₆
«c₃₄ c₂₅ und sechs wie c₃₅ a₅ b₁ a₆ c₂₄; zu c₁₂ c₁₃ sechs wie c₁₅ a₅
«b₄ a₆ b₅ und sechs wie b₄ a₅ c₁₅ c₂₃ c₁₄.

«Wie gefällt Ihnen dieser Doppelsechser? 12 Strahlen bilden
«ein an 6 Stellen schadhafes Gitter, jeder der 15 übrigen entspricht
«zwei Maschen derselben.

«Haben Sie so etwas unter dem Systematisiren verstanden? In
«der Hoffnung einer baldigen Antwort bezeugt Ihnen hiemit seine
«Hochachtung

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

B e r n , den 2. Mai 1854.

Schläfli an Steiner.

«Hochgeschätzter Freund und Lehrer!

«Was jene bornirte Curve vierten Grades mit drei Doppel-
«punkten betrifft, wo zugleich jeder von einem Doppelpunkt aus-
«gehende Strahl von der Gegenseite des Doppelpunktendreiecks in
«Beziehung auf die zwei übrigen Durchschnittspunkte der Curve har-
«monisch getheilt wird, so folgt daraus nothwendig, dass jede Doppel-
«punktstangente zugleich Wendungstangente ist, dass also hier jeder
«Doppelpunkt acht Wendepunkte verschlingt, was die volle Zahl 24
«giebt. Diese auf der Hand liegende Bemerkung habe ich das letzte
«Mal zu machen vergessen.

«In Betreff der *Cayley'schen* Geraden auf der Fläche dritten
«Grades habe ich einstweilen Folgendes gefunden. Denkt man sich

«einen durch zwei Ebenendreier bestimmten Flächenbüschel dritten Grades, und wählt eine einzelne Fläche $f = xyz + \lambda uv$ heraus, so zählen die 6 Ebenen x, y, z, t, u, v für 18 Data und der Coefficient λ für eines, zusammen 19. Folglich kann jede freie Fläche dritten Grades auf diese Weise erzeugt werden. (Man hat freilich so erst 9 in der Fläche liegende Geraden). Wird der Scheitel des einen Ebenendreiern als Pol genommen, so ist seine Polarfläche ein Kegel zweiten Grades, der durch die Kanten des andern Ebenendreiern geht. Die in der Fläche liegende Gerade (xt) z. B. werde von den Ebenen y, z in B, C und von den Ebenen u, v in E, F geschnitten; dann seien P, Q die Asymptotenpunkte des von jenen zwei Punktpaaren bestimmten involutorischen Systems (oder $BCPQ$ und $EFPQ$ harmonisch); so wird die Kernfläche (vierten Grades) die Gerade (xt) in P und in Q berühren. Wird P als Pol genommen, so ist Q der Scheitel des Polarkegels; dieser geht durch die Gerade (xt) und durch die Gerade, welche von Q ausgehend die Kanten (yz) und (uv) schneidet. — Liegt ausser den erwähnten 9 Geraden noch irgend eine Gerade auf der Fläche, so muss sie durch drei von den schon bekannten Geraden, wie z. B. durch $(xt), (yu), (zv)$, gehen, also auf der durch $(xt), (yu), (zv)$ bestimmten Fläche zweiten Grades liegen. Die Rechnung zeigt nun wirklich, dass diese Fläche die $f^{(3)}$ noch in 3 neuen Geraden schneidet. Da es aber im Ganzen 6 solche Combinationen, wie $(xt), (yu), (zv)$, giebt, so bekommt man $6 \times 3 = 18$ neue Geraden; im Ganzen $9 + 18 = 27$.

«Die freie Fläche dritten Grades enthält also 27 Geraden. Wird eine Transversalebene um eine solche Gerade herumgedreht, so schneidet sie die $f^{(3)}$ im Allgemeinen noch in einem Kegelschnitt; dieser erscheint aber im Besondern *fünfmal* als Geradenpaar. Es giebt also 45 ebene Schnitte, welche Dreiseite sind. Die zwei Punkte, welche jene Gerade mit dem Kegelschnitt der um sie sich drehenden Schnittebene gemein hat, bilden ein *Involutionssystem*, in dessen Asymptotenpunkten P, Q die Kernfläche ⁽⁴⁾ von jener Geraden berührt wird ¹⁾.

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Um den Briefwechsel nicht zu lange zu unterbrechen, schreibe ich Ihnen hier nur über einige wenige Fragen Ihres letzten Briefs,

¹⁾ Hier bricht der Brief ab, die Unterschrift fehlt.

«deren Beantwortung aber mehr Arbeit gekostet hat, als Sie wohl gedacht haben werden. Wie ich hintenher erkenne, hätte ich freilich durch etwas mehr synthetische Ueberlegung an Zeit ersparen können.

«Was vorerst die Frage auf dem kleinen Papierstreifen betrifft, so liegen die sechs Scheitel je dreier zusammengehöriger Triederpaare nicht in einer Ebene. Dieser Dreier. veranlasst mich zu einer Bemerkung: wenn man nämlich aus jedem Paare nur ein Trieder nimmt, so hat man eine Gruppe von 9 Ebenen, welche die F^3 in den 27 Geraden schneidet; es giebt also 320 solche Gruppen; zur wirklichen Bestimmung der Cayley'schen Geraden käme aber alles darauf an, eine durchgehende Fläche neunten Grades zu finden, d. h. die 220 Coefficienten ihrer Gleichung aus den 20 Coefficienten der gegebenen Gleichung der F^3 auf rationalem Wege herzuleiten. So lange dieses nicht gethan ist, sind auch die 27 Geraden nicht gefunden.

«Die Bedingungen für die hyperbolische Eigenschaft einer jeden reellen Geraden der F^3 können zwar, wenn schon ein Triederpaar bekannt ist, ziemlich einfach ausgedrückt werden, sind aber unter sich verschieden; und ich erkenne einstweilen zwischen denselben keinen andern Zusammenhang, als den, welchen Sie selbst schon ausgesprochen haben. Die Frage hängt mit derjenigen nach der Realität der Geraden nicht zusammen. Ich werde übrigens auf diesen Gegenstand noch ferner Acht geben.

«Die Classification hingegen der reellen Flächen dritten Grades in Beziehung auf die Anzahl ihrer reellen Geraden ist mir vollständig gelungen, und ich freue mich Ihnen hierüber sichern Bericht geben zu können. Die Gränzfälle, in denen die Fläche aufhört frei zu sein, sind hier ausgeschlossen; nach dem gleichen Eintheilungsgrunde würde ich z. B. nur zwei Gattungen von Flächen zweiten Grades annehmen. — Die Fläche dritten Grades zählt nur fünf Gattungen.

«A. Alle 27 Geraden und 45 Ebenen sind reell. (27 G, 45 E.)

«B. 15 G, 15 E. Die 12 imaginären Geraden bilden einen Doppelsechser

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

«wo je eine Gerade der einen Reihe der Zugeordneten der andern Reihe conjugirt ist, wesshalb keine der imaginären Geraden einen reellen Punkt haben kann. Durch je zwei Paare zugeordneter Strahlen

«(wie $a_1 b_2, a_2 b_1$) geht ein reeller (c_{12}), und so oft sich die 6
«Zeiger in drei Paare abtheilen lassen, hat man ein reelles Dreiseit
«(wie c_{12}, c_{34}, c_{56}), ihre Zahl daher 15. Durch jede reelle Gerade
«gehen 3 reelle und zwei imaginäre Ebenen.

«C. 7 G, 5 E. Durch eine bestimmte reelle Gerade gehen 5
«reelle Ebenen, von denen aber nur 3 auch vollkommene Dreiseite ent-
«halten; die 2 andern haben mit der Fläche ausser jener Geraden jede
«nur noch einen isolirten Berührungspunkt gemein, wo sich zwei
«conjugirte Seiten schneiden.

«D. 3 G, 13 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede
«Seite noch vier reelle Ebenen gehen, also 12 Paare conjugirter Ge-
«raden, die sich schneiden.

«E. 3 G, 7 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede
«Seite nur noch zwei reelle Ebenen gehen, also 6 Paare conjugirter
«Geraden, die sich schneiden.

«Diese Aufzählung erschöpft. Vielleicht interessirt es Sie, zu
«sehen, wie diese Gattungen mit den Formen der Triederpaare zu-
«sammenhängen. Es seien u, v, w die Polynome des einen, x, y, z die
«des andern Trieders; sie zählen für 18 Data; giebt man das 19^{te} Datum,
«den Factor, der beide Trieder verbindet, einem der Polynome, so kann
«die F^3 durch die Gleichung $u v w + x y z = 0$ dargestellt werden.
«Die Polynome können aber reell oder imaginär sein; und es fragt
«sich, welche Formen dieser Gleichung sind unter der Voraussetzung
«einer reellen Fläche überhaupt möglich. Die Antwort auf diese Frage,
«die auf den ersten Blick ebenso schwierig erscheint, als die Be-
«stimmung der 27 Geraden selbst, ist in folgender erschöpfender Auf-
«zählung enthalten.

I. u, v, w, x, y, z reell.

II. u mit x , v mit y , w mit z conjugirt.

III. u, v, w, x reell, y mit z conjugirt.

IV. u, x reell, v mit w , y mit z conjugirt.

V. u, x reell; die imaginären Ebenen v, w haben jede ihren reellen
Strahl in x , ebenso haben die imaginären y, z ihre reellen
Strahlen in u .

VI. u, x reell; nur u wird von y, z in reellen Strahlen geschnitten;
 x von v, w bloss in conjugirten.

VII. u, x reell; aber weder u noch x haben ein reelles Dreiseit.

VIII. u mit x conjugirt; v hat mit y , w mit z einen reellen Punkt
gemein.

IX. Nur u ist reell und schneidet x in einem reellen, y, z in conjugirten Strahlen; und nur y hat auch noch mit jeder der Ebenen v, w einen reellen Punkt gemein.

X. Keine Ebene reell und keine zwei conjugirt (wie bei allen folgenden Formen); u hat mit x einen reellen Punkt, v mit y einen reellen Strahl, und w mit z einen reellen Strahl gemein.

XI. Jede Ebene des einen Trieders hat mit jeder des andern einen reellen Punkt gemein.

XII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, überdiess u mit y, u mit z, x mit v, x mit w .

XIII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, v mit y und w mit z .

Ich nenne zwei Formen äquivalent, wenn jede in die andere transformirt werden kann. So sind II, V äquivalent und finden sich in den Gattungen B und C; IV, VI, VIII in C und E; III, VII in D und E; IX, XII, XIII nur in E. Isolirt sind die Formen I in A und B; X in C, XI in D. — Diese Formen von Triederpaaren kommen zu Dreieren vereinigt in den verschiedenen Flächengattungen in folgender Weise vor:

A hat 40 Dreier (I. I. I);

B hat 10 (I. II. II) und 30 (V. V. V);

C hat 4 (II. II. IV), 12 (V, VIII. VIII) und 24 (VI. X. X);

D hat 16 (III. XI. XI) und 24 (VII. VII. VII);

E hat 2 (IV. IV. IV), 4 (III. XIII. XIII), 6 (VII. VIII. VIII), 12 (VI. XII. XII) und 16 (IX. IX. IX).

«Die Triederpaarformen X bis XIII hätten, wie ich eben einsehe, etwas schärfer definirt werden sollen, es hätte angegeben werden sollen, wenn drei reelle Punkte in einer Geraden liegen.

«Was Sie über den Durchschnitt R der Basis f^m mit ihrer zweiten Kernfläche $Q^{4(m-2)}$ anführen, ist alles richtig. Wenn Q die Curve R durchläuft, so beschreibt P eine Curve $6m(m-2)^2$ Grades. Dass t die Fläche $P^{4(m-2)^3}$ zweipunktig berührt, ist ganz natürlich, weil die Berührungsebene der f^m in Q zugleich die Fläche P in P berührt; aber ich glaube durchaus nicht, dass sie die Curve $P^{6m(m-2)^2}$ berührt. Wenn dieses für $m=3$ eintreffen sollte, so müsste die Tangente der R in Q eine erzeugende Gerade des Polarkegels von P sein, was ich nicht glaube. Die Fläche $t^{2m(m-2)(3m-4)}$ ist eine *abwickelbare*; aber ihre Bindecurve ist mir auch für $m=3$ noch unbekannt. Wenn auf der f^n ein Punkt R^1 unendlich nahe bei dem in R befindlichen Punkt Q liegt, so schneiden sich die Be-

«rührungsebenen der f in Q und Q^1 immer in der Rückkehrtangente t ,
 «nach welcher Richtung auch Q^1 abweichen mag. Für $m = 3$ hat
 «der Polarkegel von P nichts mit t zu thun; jener kann diesen
 «Strahl t nur dann enthalten, wenn P in die Fläche f^3 fällt. Die t
 «kann im Allgemeinen nicht Tangente der R sein, sie wird es nur
 «für die 54 Asymptotenpunkte. Die P^{18} geht einfach durch die 54
 «Asymptotenpunkte. Ich denke, der Schnitt von t^{30} mit q^4 besteht
 «aus $R^{12} + 2 P^{18} + S^{72}$, und diese S muss allerdings durch die 54 π
 «gehen. Die Schmiegungebene der R^{12} ist kein leichter Frass! — (Basis
 « f^m) Q beliebig auf der zweiten Kernfläche $q^{4(m-2)}$. Die Berührungs-
 «ebene der Kernfläche q in Q ist zugleich Berührungsebene der zweiten
 «Polarfläche von P in diesem Punkt Q . — Ich erstaune, dass Sie
 «mittelst der abwickelbaren Fläche t^{30} die 27 Geraden wirklich con-
 «struirt haben. Denn es ist klar, dass die Gleichung der t^{30} auf rationalem
 «Wege gefunden werden kann; wenn man dann aus (f^3, t^{30}) und
 « (f^3, q^4) eine Coordinate eliminirt, so ist jene Resultante durch den
 «Cubus von dieser theilbar, und der Quotient das Quadrat des Productes
 «aller 27 Geraden. Ob man vielleicht von hier aus zu der sehnlich
 «gewünschten Gleichung des 9^{ten} Grades gelangen kann. — Was ich
 «von einer f^7 geschwätzt habe, weiss ich nicht mehr; von zwei Grund-
 «punkten eines Kreisbüschels habe ich nie gesprochen, wohl aber von
 «den zwei festen allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkten. Ich werde
 «trachten, mit den rückständigen Sachen aus Ihren beiden Briefen
 «noch vollends aufzuräumen.

«Uriaszettel gezeigt. *Ris* bei Anfang des Semesters als Rector
 «mit Geschäften beladen, trägt mir den Gruss auf und verspricht Ihnen
 «etwas später zu schreiben. Sende an Crelle tom. I der ∞^n und
 «bitte Sie allenfalls bei ihm zu speichen¹⁾. Wenn Sie aber Berlin ver-
 «lassen, wünsche Ihre Adresse zu wissen und bitte überhaupt recht
 «bald zu antworten. — Nach Wien etwas zu schicken (über Resultante
 «u. nothwendige P^n bei Flächen) wird wohl vergeblich sein; dem
 «Liouville werde schicken, sobald der Bernhardiner etwas frei ge-
 «worden. $113 - 113 = 0$.

«Mit freundlichem Gruss

«*L. Schläfli.*

«Muzzopoli il 23 Majo 1854.»

¹⁾ Zu sorgen, dass Crelle vorwärts macht!

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund !*

«Es thut mir leid, dass Sie sich die vergebliche Mühe genommen haben, zweimal über denselben Gegenstand zu schreiben. Bei
«der grossen Eile, die mich drängte, Ihnen zu antworten, habe ich
«einiges unbeantwortet gelassen, was ich jetzt nachholen will. (Bei
«Ihrem Brief vom 30. April war es die Frage, ob vielleicht die 6
«Scheitel des Triederpaardreiers in einer Ebene liegen, die mir zu-
«erst auffiel und mich fast rasend machte (7.—13. Mai), weil die al-
«gebraische Entwicklung in's Aschgraue gieng, bis ich mich endlich
«zu einer numerischen Untersuchung entschloss, welche entschieden
«negativ ausfiel. Dann sprach mich die Eintheilung der F^3 nach Gat-
«tungen hinsichtlich der Realität ihrer Geraden besonders an und
«dauerte 14.—21. Mai; mein anfänglicher Plan war zu weit angelegt
«weil ich sicher sein wollte, alles zu erschöpfen; ich habe jetzt frei-
«lich einige Andeutungen, dass einfache synthetische Betrachtungen
«hinreichen mögen, um sich zu überzeugen, dass es nur die erwähn-
«ten fünf Gattungen giebt; aber bei meinem Verfahren machten mir
«z. B. quadratische Gleichungen mit imaginären Coefficienten viel zu
«schaffen, wie auch, da ich nur mit Triederpaaren operieren konnte,
«die grosse Mannigfaltigkeit ihrer denkbaren Formen, bis endlich die
«bemerkte Aequivalenz einiger derselben mir aus der Noth half.) —
«In Zukunft möge es als Bestätigung gelten, wenn ich eine Ihrer
«Aussagen nicht wiederhole; aber das, was ich noch nicht untersucht
«habe, werde ich erwähnen. — Hinsichtlich der $R^{4(n-2)n}$ zeigt, wie
«ich glaube, die Anschauung, dass, da wo die hyperboloidische Be-
«schaffenheit der f^n in die ellipsoidische übergeht, also conisch oder
«wenn man will cylindrisch wird, einmal die Rückkehrkante t (gleich-
«sam erzeugende Gerade des Cylinders) eine abwickelbare Fläche be-
«schreibt, zweitens im Allgemeinen nicht mit der Tangente der R
«zusammenfällt, dass vielmehr wenn dieses geschieht, der Rückkehr-
«punkt in einen Selbstberührungspunkt ausartet; ist Q ein solcher
«Punkt, so geht dann die *dritte* Polarfläche des conjugirten Pols P
«durch diesen Q ; und es giebt $2n(n-2)(11n-24)$ solche Punkte
«auf der f^n . Wie die Fläche f^n aussieht, da wo beide Zweige des
«Selbstberührungspunkts conjugirt imaginär sind und sich nur in einem
«reellen Punkt berühren, weiss ich nicht anzugeben. — Fl.⁴, einem
«Dreiseitsschnitt der f^3 zugeordnet, Ort des Scheitels L eines Kegels ²,

«der die f^3 in drei Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Seiten
 «des \triangle gehen, schneidet, schneidet diese Ebene \triangle in derselben C^4
 «wie die Kernfläche. Da nun diese C^4 die Diagonalen (Seiten des \triangle)
 «eines Vierseits in dessen 6 Ecken berührt, so müssen die 4 übrigen
 «Durchschnitte der C^4 und des Vierseits in einer Geraden liegen.
 «Fällt L in einen solchen Durchschnitt, so berührt der Kegel die
 «Ebene \triangle längs der Seite des Vierseits. Fällt aber L in ein Vierseits-
 «eck π , so degenerirt der Kegel in die Ebene \triangle und die Ebene,
 «welche f^3 in π berührt; heisst a die \triangle seite, worauf die Zugeord-
 «neten π , π^1 , b, c die zwei übrigen, so ist der durch a gehende
 «Kegelschnitt der, welcher a in π berührt; der durch b gehende ist
 «a \perp c, der durch c gehende a \perp b, und der Durchschnitt ihrer (mit
 « \triangle zusammenfallenden) Ebenen ist die vom Eck (bc) nach π gehende
 «Gerade. — Wenn Q diese C^4 durchläuft, so beschreibt der conjugirte
 «P eine Theilcurve R^6 , welche die Ebene \triangle in den 6 π schneidet.
 «— Vielleicht ist der Grad der mit $R^{4n(n-2)}$ conjugirten Curve im
 «letzten Brief unter die Oblate¹⁾ gekommen; sie ist eine $P^{6n(n-2)^2}$.

«— *Normalen aus A auf die f^n .* R^{n^2-n+1} Ort des Pols P, dessen
 «Polarebene auf der Geraden AP senkrecht steht. Durch diese geht
 «eine Doppelschaar von Flächen n^{ten} Grades, worunter eine A zum
 «Knotenpunkt hat und durch die $(n-1)^3$ ersten Grundpolarpunkte
 «der unendlich entfernten Ebene geht. Bei der f^2 geht durch die R^3
 «unter anderm auch ein Kegel²⁾, worin die drei Hauptaxen der f^2
 «liegen. Die R^3 hat drei den Hauptaxen parallele Asymptoten; es
 «seien A, B, C die Längen der Hauptaxen des Ellipsoids, a, b, c die
 «auf diese bezogenen Coordinaten des Punkts A, von wo die Normalen
 «ausgehen; dann sind die Gleichungen der mit der Axe A (oder x)
 «parallelen Asymptote:

$$y = \frac{B^2}{B^2 - A^2} b, \quad z = \frac{C^2}{C^2 - A^2} c.$$

«(Dass die R^{n^2-n+1} durch A geht und ihre Tangente hier auf
 «der Polarebene von A senkrecht ist, versteht sich von selbst.) Beim
 «Paraboloid geht die R^3 einfach durch den Berührungspunkt der un-
 «endlich entfernten Ebene, die entsprechende Asymptote ist die Haupt-
 «axe selbst. Ueber die zwei andern Asymptoten bin ich im Unklaren;
 «wenn $2x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}$ die Gleichung der Fläche ist, so bekomme ich

¹⁾ D. h. Schläfli hat ihn nicht lesen können.

«für die mit der Axe der y parallelen Asymptote nur eine Gleichung,
 «nämlich $x=a-p$, und für die mit der Axe der z parallele: $x=a-q$;
 «wo die Abscisse a des Punkts A sich auf den Scheitel des Parabo-
 «loids bezieht. (Doch wahrscheinlich für jene noch $z = \frac{qc}{q-p}$ und
 «für diese noch $y = \frac{pb}{p-q}$.) Für die Umdrehungsfläche² reducirt
 «sich die R^3 auf einen in der Meridianebene von A befindlichen Kegel-
 «schnitt und die unendlich entfernte Gerade einer zur Axe senkrechten
 «Ebene, für die Kugel auf die von A nach dem Centrum gehende
 «Gerade, der Rest unbestimmt in der unendlich entfernten Ebene. —
 «Die Projectionen der R^3 auf die Hauptebenen der f^2 sind gleichseitige
 «Hyperbeln.

«*Eine räumliche Curve* scheint mir am allgemeinsten dargestellt
 «zu werden, wenn man n Gleichungen von allerlei Graden, homogen
 «in Beziehung auf $n-1$ zu eliminirende Grössen λ, μ etc. setzt, dann
 «erst jeder von diesen einen beliebigen impliciten Dimensionswerth
 «beilegt und nun statt der Coefficienten allerlei homogene Polynome
 «in x, y, z, w (räumlichen Coordinaten) von allerlei Graden, doch so,
 «dass wenn neben diesen dem angenommenen impliciten Dimensions-
 «werth einer jeden der λ, μ, \dots auch Rechnung getragen wird, alle
 «Glieder einer und derselben Gleichung neuerdings dieselbe Dimen-
 «sion erhalten. Wäre z. B. $[x^2 + 5xy + \text{etc.}] \lambda^p \mu^q$ ein Glied einer
 «Gleichung, so wäre diese in Beziehung λ, μ, \dots allein homogen und
 «vom Grade $p + q$, aber, wenn man λ, μ, \dots die impliciten Dimen-
 «sionen α, β, \dots beigelegt hat, in Beziehung auf $x, y, \dots \lambda, \dots$
 «zusammen von der Dimension $2 + \alpha p + \beta q$, und diese Zahl müsste
 «für alle Glieder der Gleichung dieselbe sein. Lässt man aus dem
 «System eine Gleichung weg, so entspricht der Resultante der übrigen
 «eine Fläche. Da aber nicht jede Lösung, welche zwei solche Re-
 «sultanten annullirt, eo ipso auch dem ganzen Systeme genügt, so wird
 «der Durchschnitt der ihnen entsprechenden Flächen mehr als die
 «wahre Theilcurve R des Systems enthalten. Am durchsichtigsten
 «wird die Sache, wenn wir alle Gleichungen in Beziehung auf λ, μ, \dots
 «linear annehmen; ich schreibe in diesem Falle die Polynome = Co-
 «efficienten von λ, μ, \dots in einer und derselben Gleichung in eine
 «Verticalzeile und erhalte ein rechteckiges Schema mit n Verticalzeilen
 «(Zahl der Gleichungen) und $n-1$ Horizontalzeilen (Zahl der λ, μ, \dots
 «deren Verhältnisse zu eliminiren sind). Wenn ich nun im Schema

«statt der Polynome in x, y, z, w bloss ihre Grade hinschreibe und
«so das Schema

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & . & a_2 + b_1 & . & a_3 + b_1 & . & . & . & . & . & a_n + b_1 \\ a_1 + b_2 & . & a_2 + b_2 & . & a_3 + b_2 & . & . & . & . & . & a_n + b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_1 + b_{n-1} & . & a_2 + b_{n-1} & . & a_3 + b_{n-1} & . & . & . & . & . & a_n + b_{n-1} \end{vmatrix}$$

«erhalte, dann die Summe der Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mit A_n , der b_1, b_2, \dots, b_{n-1} mit B_{n-1} und die Summe der binären Produkte mit $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_{n-1}$
«bezeichne, so ist der Grad der Curve $R: \mathfrak{A}_n + A_n B_{n-1} + B_{n-1}^2 - \mathfrak{B}_{n-1}$.

«Wenn im Schema eine Constante statt eines Polynoms vorkommt, so
«ist dieses so viel, als wenn man die betreffende Horizontal- und Verti-
«calzeile durchstriche; denn so kann dann das Schema reducirt werden.
«Lücken scheinen Beschränkungen mitzubringen, z. B. Zerfallen der
«Curve in zwei. Für die paar ersten Grade hat man folgende Schemate:

$$\begin{aligned} R^3 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad R^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \quad R^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad R^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ u. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \\ R^7 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ u. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \quad R^8 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ u. } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Lassen Sie mich
«Ihren fünf geometrischen Grundgebilden als VI^{tes} die Fläche erster
«Classe, den Punkt mit allen durchgehenden Ebenen, als *Ebenenbusch*
«hinzufügen und zwei solche Büsche *perspectivisch* nennen, wenn sie
«irgend eine feste Ebene in denselben Geraden schneiden, *projectivisch*
«wenn sie aus dieser gegenseitigen Lage verrückt sind. Dann sagt
«das Schema der R^3 , 1^0 dass sie durch drei projectivische Ebenen-
«büschel erzeugt wird, 2^0 dass wenn durch zwei feste Punkte A, B
«der R^3 und jeweilen durch dieselbe veränderliche Sehne der R^3 die
«zwei Ebenen a, b gelegt werden (a durch A und die Sehne), die so
«gebildeten Ebenenbüsche A und B projectivisch sind; jeder Punkt
«der R^3 ist Scheitel eines Kegels 2 , der durch sie geht. — Die R^5
«entsteht nach dem Schema aus projectivischen zwei Ebenenbüscheln
«und einem Flächenbüschel 2 ; sie kann daher sowohl als Durchschnitt
«einer f^2 und f^3 mit Weglassung einer Geraden, wie auch als Durch-
«schnitt zweier f^3 mit Weglassung einer $R^4 \parallel 2.2 \parallel$ gefasst werden;
«das Zerfallen dieser letzten scheint mir etwas Spezielles. Wie Sie
«eine R^5 construiren, durch die keine f^2 geht, vermag ich nicht zu
«errathen. Die durch meine R^5 gehende f^2 ist einzig, nämlich die
«durch die zwei projectivischen Ebenenbüschel bestimmte, und alle
«ihre Geraden γ , welche mit den Axen dieser Büschel zur gleichen

«Schaar gehören, schneiden die R^5 in drei Punkten; durch jeden
 «Punkt der R^5 scheinen aber noch andere Geraden von dieser Eigen-
 «schaft zu gehen (vielleicht 4?). — $(f^2, f^3) = g \vdash R^5$; die R^5 soll
 «feststehen, so ist auch f^2 fest; g kann diese durchlaufen: aber ich
 «halte für jetzt g fest, nehme zu f^2 eine beliebige Ebene E hinzu,
 «um mit der f^3 einen Büschel³ zu bestimmen; wenn ich nun aus
 «dem Büschel eine f_1^3 herausnehme, so habe ich sie mit 4-facher
 «Freiheit gewählt; eine *Cayley'sche* Gerade, die g nicht schneidet,
 «bewegt sich also mit 4-facher Freiheit, d. h. kann mit jeder beliebig
 «gegebenen Geraden zusammenfallen; da die g selbst eine einfache
 «Bewegung hat, so ist die durch R^5 gehende f^3 *fünffach* unbestimmt.
 «Sie können also zu der R^5 jede Gerade l , welche Sie wollen, hinzu-
 «nehmen, und dann auf die angegebene Weise eine f^3 erzeugen. —
 «Dass mein ganzer hier angelegter Plan noch Stümperei ist, ersehe
 «ich aus Ihrer R^4 , in welcher die f^3 von jedem durch zwei sich nicht
 «schneidende *Cayley'schen* Geraden gelegten Hyperboloid geschnitten
 «wird; sie passt nicht in die Form $\parallel 2.2 \parallel$, weil kein anderes Hyper-
 «boloid durchgeht; Sie sehen dieses aus dem speziellen Falle, wo
 «diese R^4 sich in eine *Cayley'sche* Gerade verwandelt, die von drei
 «andern unter sich freien *Cayley'schen* Geraden geschnitten wird. Ich
 «kann bis jetzt diese R^4 nur als eine R^5 , aus der vermöge einer be-
 «sondern Abhängigkeit der Hülfspolynome eine Gerade sich ablöst,
 «darstellen. — Auf mein Schema der Theilcurve R^6 passt nur (f^3, f_1^3)
 « $= R_1^3 \vdash R^6$. Sie wird erzeugt durch 4 projectivische Ebenenbüsche,
 «wenn man dieselben durch die Bedingung, dass je 4 entsprechende
 «Ebenen einen Punkt P gemein haben, zu einfachen Schaaren de-
 «gradirt; der Punkt P beschreibt dann die R^6 . Was Sie von den
 «Geraden anführen, welche die R^6 in drei Punkten schneiden, habe
 «ich noch begriffen; für meine R^6 halte ich es im Allgemeinen für
 «unstatthaft; denn wenn der erste Durchschnittspunkt A gegeben ist,
 «erhalte ich als Ort des zweiten eine von A ausgehende Gerade, von
 «der ich nicht einzusehen vermag, dass sie die R^6 noch einmal trifft.

«Die $R^3 \left| \begin{smallmatrix} 1.1.1 \\ 1.1.1 \end{smallmatrix} \right|$ ist durch 12, die $R^4 \left| 2.2 \right|$ durch 16, die

« $R^5 \left| \begin{smallmatrix} 1.1.2 \\ 1.1.2 \end{smallmatrix} \right|$ durch 21, die $R^6 \left| 2.3 \right|$ durch 24, die $R^6 \left| \begin{smallmatrix} 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \\ 1.1.1.1 \end{smallmatrix} \right|$

«durch 27 Data, die $R^7 \left| \begin{smallmatrix} 1.1.1 \\ 2.2.2 \end{smallmatrix} \right|$ durch 28, die $R^7 \left| \begin{smallmatrix} 1.1.3 \\ 1.1.3 \end{smallmatrix} \right|$ durch 32

«Data bestimmt. Ein einfaches Datum wäre etwa eine Gerade, die von
«der R geschnitten werden soll; ein gegebener Punkt zählt für 2 Data;
«aber es dürfen im Allgemeinen nicht lauter Punkte gegeben werden.

«Die f^3 kann durch das Schema $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ dargestellt werden und

«enthält vermöge desselben eine Doppelschaar von R^3 und noch eine
«davon geschiedene; die f^3 wird demnach erzeugt durch 3 projec-
«tivistische Ebenenbüsche. Da das Schema mit Rücksicht auf Trans-
«formation nur 19 Data zählt, so ist seine f^3 die allgemeine. Es
«seien auf der f^3 die Punkte A, B, C, P, P^1 , P^{11} , P^{111} und noch 12
«andere gegeben; man beabsichtigt A, B, C zu Centren projectivischer
«Büsche zu machen. Die 4 durch AP, AP^1 , AP^{11} , AP^{111} gehenden Ebenen
«des Busches A ermangeln noch jede einer Bestimmung, u. s. f.; es sind
«also im Ganzen noch 12 Data unbekannt; diese werden durch die
«12 übrigen Punkte just bestimmt. Da nun die Projectivität zweier
«Büsche durch 4 Ebenen in jedem festgesetzt wird, so kann man
«von jetzt an so viele Punkte der f^3 construiren als man will. Das
«Triederpaar $uvw + xyz = 0$ ist in diesem Schema begriffen, näm-

«lich als $\begin{vmatrix} \cdot & u & x \\ y & \cdot & v \\ w & z & \cdot \end{vmatrix}$. Das Schema $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, welches die f^4 geben

«sollte, zählt leider nur 33 Data statt 34; dieses Schema enthält aber
«eine dreifache Schaar von R^6 und noch eine solche; die freie f^4
«aber wahrscheinlich nicht.

«Es sei P ein Pol, dessen x^{te} Polare in Beziehung auf C^m einen
«Doppelpunkt Q hat, so sind die Grade der Orte von P und Q resp.
« $3x(m-1-x)^2$ und $3x^2(m-1-x)$; für Flächen $4x(m-1-x)^3$
«und $4x^3(m-1-x)$. — Die Orts^{curve}fläche } Q hat mit der $(x+1)^{\text{ten}}$ Po-
«lare von P Punkt und ^{Tangente}_{Ber. Eb.} } gemein, diejenige von P mit der
« $(m-x)^{\text{ten}}$ Polare von Q. — Das Geheimniss der Kerncurven und
«-Flächen war mir schon bekannt.

«Ich glaube nun so ziemlich mit den schuldigen Antworten auf-
«geräumt zu haben; nur etwas über Evoluten und Doppeltangenten ist
«noch übrig geblieben.

«Mir schwebt die Frage vor: welche Curve auf der f^n enthält die
«Berührungspunkte der Ebenen, welche die f^n in zwei gesonderten
«Punkten berühren? — Die P^{18} bei der f^3 trifft jede *Sylvester'sche*
«Ebene mit 6 dreifachen Punkten, was ja sehr gut zu dem ohnehin
«sichern Grad passt. — Helfen Sie mir zu einer f^9 , welche durch die
«27g geht!

«Ich habe möglichst geeilt, Ihnen zu antworten, damit dieser
«Brief Sie noch vor Ihrer Abreise in Berlin erreiche; und wünsche,
«dass Sie mir dann Ihre Adresse geben. In Ems sind Sie näher bei
«der Schweiz; vielleicht könnte ich in den Herbstferien Sie dort
«besuchen.

«Prof. *Rettig* hat mir einen freundlichen Gruss an Sie auf-
«tragen, nehmen Sie auch einen von Ihrem diesen Augenblick Cay-
«lisch-Sylvestrisch-polarisch-schwabblig-verrückten

«Bern, den 27. Mai 1854.

L. Schläfli.

«Abends gegen 6 Uhr.

«Ihren Brief vom 22. Mai erhielt ich gestern den 26. Abends
«um 4 Uhr!»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«(7. Juni.) Täglich und stündlich Ihrer Antwort entgegensehend,
«ergreife ich schon jetzt die Feder, um sogleich nach Kennt-
«niss Ihrer Adresse Ihnen meine Bemerkungen zusenden zu
«können. Wie es mir nämlich fast immer geht, so habe ich auch
«dieses Mal meinen letzten Brief zu ergänzen und theilweise zu
«berichtigen.

«Ich sprach von *projectivischen Ebenenbüschen*, — ich will sie
«fortan lieber *collinear* nennen, — und gab die Definition, dass sie
«in eine solche (*perspectivische*) Lage versetzt werden können, dass
«alle Durchschnitte je zweier entsprechender Ebenen in eine und die-
«selbe Ebene fallen. Es fragte sich aber noch, ob dieses immer aus-
«führbar sei, wenn zwei Ebenenbüsche nach meiner analytischen Vor-
«stellung *collinear* sind. Vorerst war klar, dass sie in der *perspec-*
«*tivischen* Lage einen gleichen und gemeinschaftlichen Ebenenbüschel
«enthalten, dessen Lage ihre Mittelpunkte verbindet; und umgekehrt,
«wenn zwei *collineare* Büsche auch nur einen in beiden gleichen
«Ebenenbüschel enthalten, so war leicht zu zeigen, dass man nur

Bern. Mitteil. 1896.

Nr. 1416.

«diese zwei Büschel zur Congruenz bringen darf, indem man die
 «Mittelpunkte der Büsche getrennt erhält, um diese in die perspec-
 «tivische Lage zu versetzen. Es fragte sich also nur noch: enthalten
 «zwei (in analytischem Sinne) collineare Ebenenbüsche immer wenig-
 «stens *einen* gleichen Ebenenbüschel? Die Antwort war: es giebt immer
 «6 Axen gleicher Ebenenbüschel; und diese werden so construirt:
 «Es seien h, k die Asymptotenkegel aller um die Mittelpunkte A, B
 «der zwei gegebenen collinearen Ebenenbüsche beschriebenen Kugeln
 «(d. h. Kugeln mit nullem Halbmesser); k^1 sei der Kegel, welcher im
 «Busche A dem Kegel k des Busches B entspricht. Nun lege man
 «an h, k^1 die 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen, so sind die 6
 «Kanten dieses vierflächigen Ecks die Axen derjenigen Ebenenbüschel
 «in A , denen gleiche Ebenenbüschel in B entsprechen. Ist die col-
 «lineare Verwandtschaft beider Büsche eine reelle, so haben auch die
 «Gleichungen beider Kegel h, k^1 lauter reelle Coefficienten; daher
 «sind ihre 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen *conjugirt-imaginär*;
 «folglich immer *zwei* Gegenkanten *reell*, die 4 übrigen Kanten imaginär.

«Ich war erstaunt zu finden, dass die Erzeugung der f^3 mittelst
 «dreier collinearen Ebenenbüsche jeweilen mit einem bestimmten
 «Doppelsechser *Cayley'scher* Geraden zusammenhängt, so dass von
 «dieser Seite her keine Hoffnung übrig ist, zu 19 gegebenen Punk-
 «ten einen beliebigen 20^{sten} zu finden. Denn wenn wir auch unter den
 «19 gegebenen Punkten drei A, A^1, A^{11} , als Mittelpunkte collinear-
 «er Büsche setzen, und dann vier andere Punkte K, L, M, N hinzunehmen,
 «so drehen sich die 3×4 Ebenen, mit denen wir die collineare
 «Verwandtschaft anfangen wollen, um die 3×4 Strahlen $AK, AL,$
 « AM, AN , etc.; und um die 12 Unbekannten, die ihre Lage fixiren,
 «zu finden, müssen wir schon 4 sich nicht schneidende *Cayley'sche*
 «Gerade kennen. — Sind mit Bezug auf das Schema der 3×3 an-
 «fänglichen Ebenen

	K	L	M
A	x	y	z
A^1	x^1	y^1	z^1
A^{11}	x^{11}	y^{11}	z^{11}

«(wo wenigstens 4 Buchstaben, wie z. B. y^1, z^1, y^{11}, z^{11} , nicht reine
 «Perpendikel bedeuten, sondern noch gewisse Factoren mit sich führen),

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = 0 \\ \alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = 0 \\ \alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = 0 \end{cases}$$

«drei entsprechende Ebenen, welche in B sich schneiden, so dürfen
 «ihre Polynome unverändert, wie sie hier stehen, z. B. mit der
 «Horizontalzeile A vertauscht werden; u. s. f., was ich nur andeuten will,
 «um nicht weitläufig zu werden. D. h. wie, wenn A, A¹, A¹¹ als Mittel-
 «punkte collinearer Büsche feststehen, die auf f³ liegenden Punkte K, L, M,
 «welche die 3×3 anfänglichen Ebenen des Schemas bestimmen, durch
 «irgend drei andere N, P, Q ersetzt werden können, so können auch um-
 «gekehrt irgend drei unter allen mittelst der collinearen Büsche A, A¹,
 «A¹¹ bestimmten Punkte, z. B. K, L, M als Mittelpunkte collinearer
 «Büschel gebraucht werden, um die Punkte A, A¹, A¹¹ in Fluss zu
 «bringen, und z. B. die Punkte B, B¹, B¹¹ an ihre Stelle zu setzen.
 «Wir haben jetzt ein neues Schema der f³, wo die Verticalzeilen den
 «Punkten N, P, Q, die Horizontalzeilen den Punkten B, B¹, B¹¹ entsprechen,
 «und zwar haben wir es mittelst 12 unbestimmter Substitutionscoeffi-
 «cienten erhalten. Aber trotz der 12fachen Variabilität umfasst der
 «Haufe von Schematen, welche durch lineare Transformation, sowohl
 «der Horizontal- als der Verticalzeilen aus einem anfänglichen Schema
 «hervorgehen, noch nicht alle Schemate der f³; sondern es giebt 36
 «getrennte solche Haufen, wo kein Uebergang aus einem in einen
 «andern durch lineare Transformationen möglich ist; und jeder Haufe
 «ist an einen Doppelsechser Cayley'scher Geraden gebunden. — Halten
 «wir nämlich wieder A, A¹, A¹¹ als Mittelpunkte collinearer Büschel
 «fest und verlangen zwei Verhältnisse $\kappa : \lambda : \mu$, für welche die drei
 «entsprechenden Ebenen

$$\begin{aligned} & \kappa p + \lambda y + \mu z = 0, \\ & \kappa p^1 + \lambda y^1 + \mu z^1 = 0, \\ & \kappa p^{11} + \lambda y^{11} + \mu z^{11} = 0, \end{aligned}$$

«welche den Punkt N bestimmen sollten, sich in einer Geraden B
 «schneiden, so ist die Aufgabe vom 6^{ten} Grade, wir erhalten daher
 «eine Sechserreihe sich nicht schneidender Geraden b₁, b₂, b₃, b₄,
 «b₅, b₆; und können das anfängliche Schema

$$\begin{vmatrix} p & y & z \\ p^1 & y^1 & z^1 \\ p^{11} & y^{11} & z^{11} \end{vmatrix}$$

«durch = 0 ersetzen. Weil aber die Polynome p, p¹, p¹¹ nicht mehr
 «unter sich unabhängig sind, so giebt es eine identische Relation

$$\begin{aligned} & \alpha p + \alpha^1 p^1 + \alpha^{11} p^{11} = 0, \\ & \text{«und diese geht, wenn wir } \alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = t, \\ & \quad \alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = u, \\ & \quad \alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = v \text{ setzen,} \\ & \text{«in } \kappa t + \lambda u + \mu v = 0 \text{ über.} \end{aligned}$$

«Daher schneiden sich auch die drei entsprechenden Ebenen t ,
 « u , v der Büsche K , L , M in einer und derselben Geraden a ,
 «welche der vorigen b conjugirt ist und sie nicht schneidet. Wenn
 «also die der vorigen ähnliche Aufgabe, welche der Vertauschung
 «von Horizontal und Vertical entspricht, die 6 Geraden a_1 , a_2 , a_3 ,
 « a_4 , a_5 , a_6 liefert, so dürfen wir annehmen, dass jede von diesen
 «mit der gleichvielten der Sechserreihe b conjugirt sei; und es
 «ist klar, dass man nicht wieder eine Gleichung 6^{ten} Grades auf-
 «zulösen braucht, sondern dass alle Geraden der zweiten Aufgabe auf
 «linearem Wege aus denen der ersten erhalten werden. Es ist ferner
 «leicht zu zeigen, dass z. B. a_1 von den 5 nicht conjugirten Geraden
 « b_2 , ... b_6 der andern Reihe geschnitten wird. Ich nenne die Sechser-
 «reihe a den *Horizontalzeilen* des Schemas *entsprechend*, weil z. B.
 «im äquivalenten Schema die obige Gerade die erste Horizontalzeile

$$\begin{vmatrix} t & u & v \\ x^1 & y^1 & z^1 \\ x^{11} & y^{11} & z^{11} \end{vmatrix}$$

«annullirt; die conjugirte Reihe b entspricht den Verticalzeilen. Das
 «einfachste Merkmal, dass zwei Gerade beider Reihen, wie a_1 und b_1
 «conjugirt sind, besteht darin, dass, wenn man so transformirt, dass
 «eine Horizontalzeile des Schemas durch a_1 und eine Verticalzeile
 «durch b_1 annullirt wird, im Kreuzungspunkt beider Zeilen eine *Lücke*
 «(Null statt eines Polynoms) entsteht. Transformirt man das Schema
 «so, dass seine drei Horizontalzeilen der Reihe nach von den Geraden
 « a_1 , a_2 , a_3 und seine drei Verticalzeilen von b_1 , b_2 , b_3 annullirt werden,
 «so fallen auf die Diagonale des Schemas drei Lücken; die Deter-
 «minante verwandelt sich in die Summe *zweier* Produkte, und man
 «hat ein *Triederpaar*.

«Mit dieser Anschauung hängt die Anordnung der auf f^3 liegen-
 «den Curven R^3 innig zusammen. Heben wir nämlich aus den colli-
 «nearen Büschen A , A^1 , A^{11} irgend drei projectivische Ebenenbüschel
 «heraus, so erzeugen diese eine R^3 ; sie bildet eine Doppelschaar, die
 «sich der horizontalen Richtung des Schemas oder der Sechserreihe a
 «entsprechend nenne. Von K , L , M aus erhalten wir die conjugirte
 «Doppelschaar. — Jene R^3 schneidet keine der 6 Geraden der ent-
 «sprechenden Reihe a ; sie schneidet jede Gerade der conjugirten
 «Reihe b zweimal, endlich jede der 15 übrigen Geraden c_{12} , etc. nur
 «einmal. Irgend zwei R^3 aus conjugirten Doppelschaaren schneiden
 «sich in 5 Punkten und liegen zusammen auf einem Hyperboloid;

«zwei R^3 , deren entsprechende Sechserreihen keine Gerade gemein
«haben ohne jedoch conjugirt zu sein, schneiden sich in 4 Punkten;
«in 3, wenn die Sechserreihen *eine*; in 2, wenn dieselben *drei* Ge-
«rade gemein haben; endlich zwei R^3 derselben Doppelschaar schnei-
«den sich nur in einem Punkt. Durch 2 beliebige Punkte auf der
«Fläche ist die R^3 bestimmt; aber es gehen deren 72 durch.

«Die R^3 ist eine sehr hübsche Curve; sie hat einmal gar keinen
«ausgezeichneten Punkt; sodann spielt die Schaar ihrer Schmiegun-
«ebenen als *Abwickelbare* ganz dieselbe Rolle wie die Schaar ihrer
«Punkte als Raumcurve. Durch einen freien Punkt gehen 3 Schmie-
«gungsebenen. Durch irgend zwei Durchschnitte von je zwei Schmie-
«gungsebenen geht eine der Abwickelbaren eingeschriebene Fläche
«zweiten Grades; u. s. w. Folgende Aufgaben, 1. wenn 6 Punkte,
«2. wenn 5 Punkte und 1 Sehne, 3. wenn 3 Punkte und 3 Sehnen,
«4. wenn 2 Punkte und 4 Sehnen gegeben sind, die R^3 zu construiren,
«sind leicht zu lösen. Durch 4 Punkte und 2 Sehnen wird keine
«ächte R^3 bestimmt, sondern nur etwa ein Kegelschnitt und eine Ge-
«rade, die aber jenen *nicht* schneidet, und daher keine R^3 mit ihm
«ausmacht. Die übrigen Aufgaben, 5. durch 1 Punkt und 5 Sehnen;
«6. durch 6 Sehnen eine R^3 zu legen, konnte ich nicht lösen.

«Unter den 12 Punkten, in denen die Vollcurve $R^4 \parallel 2 . 2 \parallel$ von
«einer f^3 geschnitten wird, ist einer nothwendig.» Können Sie diesen
«Satz beweisen? Wenn doch diese fundamentale Schwierigkeit nur
«erst in einem speziellen Falle überwunden wäre! Dann Hoffnung
«auf Verallgemeinerung.

«Durch irgend 4 auf der f^3 gegebene Punkte gehen 27 Curven
« $R^4 \parallel 2 . 2 \parallel$, welche den 27 Geraden entsprechen. Alle auf der f^3
«gezogenen Vollcurven R^4 zerfallen also in 27 geschiedene Haufen.
«Zwei Curven desselben Haufens schneiden sich auch in 4 Punkten,
«diese liegen in einer Ebene, und der vierte ist nothwendig, es geht
«nämlich ein schon durch die drei Punkte bestimmter Büschel durch.
«Wird aber der vierte Punkt beliebig auf der durch die drei ersten
«gelegten ebenen C^3 gesetzt, so zerfällt die R^4 in die entsprechende
«*Cayley'sche* Gerade und diese C^3 . Zwei Curven R^4 aus verschiedenen
«Haufen schneiden sich entweder in 6 oder in 5 Punkten, je nachdem
«die entsprechenden *Cayley'schen* Geraden sich schneiden oder nicht;
«im ersten Falle geht die durch die 6 Punkte bestimmte R^3 durch
«den Schnittpunkt der zwei *Cayley'schen* Geraden und hat die dritte
«das Dreiseit ergänzende Gerade zur Sehne. Da die Gerade a , welche

«den Haufen der R^4 bestimmt, in 16 Sechserreihen vorkommt, so
 «kann die R^4 dieses Haufens auf 16 Arten in eine R^3 und diejenige
 «Sehne derselben, welche mit a in Beziehung auf die entsprechende
 «Sechserreihe conjugirt ist, sich auflösen. Sie kann ferner auf 5
 «Arten sich in zwei Kegelschnitte, die zwei Punkte gemein haben,
 «auflösen. U. s. w. 16 Schnittpunkte der 4 Trippelebenen¹⁾ ausge-
 «zeichnet. Durch irgend einen gegebenen Punkt gehen 2 Sehnen.
 «Alle Ebenen, welche in zwei getrennten Punkten die R^4 berühren,
 «bilden eine Abwickelbare (A^8) achter Classe, welche in 4 Kegel K^2
 «zerfällt, deren Scheitel die Tripelpunkte¹⁾ sind. Die von den Tan-
 «genten gebildete Abwickelbare ist eine A^{12} achten Grades. In einer
 «beliebigen Ebene liegen 38 Durchschnitte von je zwei Schmiegun-
 «sebenen der R^4 .

«Die famose Theilcurve R^4 [(2 . 3)—(1 . 1)—(1 . 1)] ist nicht
 «so spröde, wie ich anfangs glaubte; sie zählt nur 16 Data, wie die
 «vorige (*nicht* 18!) und ist daher durch 8 Punkte bestimmt, nur
 «weiss ich nicht, wie viele Lösungen es dann giebt. Für ihre ebene
 «Projection ist $k = 6$, $d = 3$, $w = 6$, $t = 4$. Diese R^4 hat nur 4
 «Punkte, wo sie von einer Ebene 4punktig berührt wird. Ihre Ab-
 «wickelbare A^6 ist zugleich vom 6^{ten} Grade und hat eine Doppellinie
 «6^{ten} Grades. In jeder beliebigen Ebene liegen nur 6 Durchschnitte
 «je zweier Schmiegunsebenen der R^4 . Ich vermute, dass die ge-
 «nannte Doppellinie R^6 ihrem Charakter nach von der A^6 sich nur
 «durch Vertauschung von Grad und Classe unterscheide; sicher ist,
 «dass sie von jeder Tangente der R^4 nur zweimal geschnitten wird.
 «Legen wir hingegen an die R^4 alle Berührungsebenen, welche die-
 «selbe in zwei verschiedenen Punkten berühren, so machen diese eine
 «Abwickelbare $A^{4,2}$, welche die R^4 zur Doppellinie hat und als Ebenen-
 «schaar wahrscheinlich dasselbe ist, wie diese R^4 als Punktschaar;
 «sie wäre demnach vom 6^{ten} Grade; ich kann dieses aber nicht be-
 «weisen. — Von einem gewissen Gesichtspunkt aus erscheint diese
 « R^4 als Glied einer Progression, welche mit der Geraden, dem Kegel-
 «schnitt und der R^3 anfängt. Setzt man nämlich die vier räumlichen
 «Coordinationen gleich ganzen Functionen einer einzigen Variablen und
 «erhöht ihren Grad nach und nach von 1 bis 4, so erhält man die
 «schon genannten Linien und zuletzt die Theilcurve R^4 und zwar
 «ohne Beschränkung ihrer Natur. Sie passt auch in die allgemeine

¹⁾ Soll wohl heissen Quadruplebenen.

«Darstellungsform freier Raumcurven, über die ich Ihnen früher geschrieben habe. Wenn nämlich t bis z lineare Polynome der 4 räumlichen Coordinaten bedeuten, so wird die Curve rein durch das System $[t\lambda^2 + u\lambda\mu + v\mu^2 = 0, w\lambda + x\mu = 0, y\lambda + z\mu = 0]$ dargestellt, wo das Verhältniss $\lambda : \mu$ zu eliminiren ist, ohne dass man etwas auszuschliessen braucht. Das System kann immer so transformirt werden, dass die Polynome w, x, y, z einem beliebigen schiefen Vierseit des festen Hyperboloids auf dem die R^4 liegt, entsprechen und dass zugleich u wegfällt, die erste Gleichung also bloss $t\lambda^2 + v\mu^2 = 0$ ist. Man kann daher die Curve auch als das Erzeugniss dreier Ebenenbüschel betrachten, von denen aber nur zwei unter sich projectivisch sind, beim dritten hingegen das projectivische Verhältniss die Reihe der Quadrate durchläuft, wenn es bei den übrigen nach einer arithmetischen Reihe erster Ordnung variiert. — Um die Curve R^4 auf dem festen Hyperboloid zu bestimmen, reichen 7 Punkte hin, und die Aufgabe hat nur 2 Lösungen je nach der Geradenschaar, auf welche man die Curve bezieht. Sie schneidet nämlich alle Geraden der einen Schaar dreimal, diejenigen der andern nur einmal. Irgend zwei Curven R^4 auf dem Hyperboloid haben 6 oder 10 Punkte gemein, je nachdem sie zum gleichen oder zu verschiedenen Haufen gehören. Die durchgehende f^3 ist 6fach unbestimmt, sie kann durch je zwei beliebige Gerade derselben Schaar des Hyperboloids gelegt werden oder kann auch eine allein zur Doppelgeraden haben.

«(6. Juli.) Ich habe mich schauderhaft lang mit den Raumcurven gequält und desshalb mit der Antwort gezögert, weil ich wenigstens noch mit den Curven 6^{ten} Grades aufräumen wollte. Ich bin zwar noch nicht sicher, dass ich alle R^6 vollständig habe.

«Ich schicke einige allgemeine Bemerkungen voraus. — Bei allen bis jetzt betrachteten auf der f^2 oder f^3 liegenden Curven habe ich immer gefunden, dass sie die durchgehende f^3 beschränken; es ist daher keine Hoffnung vorhanden, von dieser Seite her etwas für die f^3 zu leisten, was der Entdeckung der 27 Geraden auf der f^3 einigermassen ähnlich wäre. Wenn ich lauter Polynome zweiten Grades anwenden will, so brauche ich deren fünf, um die allgemeine f^3 zu construiren, und dann ist das System viel zu beweglich, als dass man etwas Vernünftiges daran sehen könnte. Kurz, die f^3 ist eine sehr harte Nuss. — Ich bezeichne die Raumcurven nach Grad (oben) und Classe (unten); es giebt aber solche von gleichem Grad

«und gleicher Classe, die dennoch streng geschieden sind. Wenn
 «für die Flächen f^m , f^n , welche die Vollcurve bilden, keine Längs-
 •berührungen stattfinden, und die Vollcurve in mehrere bekannte Theil-
 «curven und eine unbekannte R_λ^α zerfällt, so finde ich die Classe λ
 «auf folgendem Wege. Es sei Θ die Zahl der Knoten dieser R^α , d. h.
 «der Punkte, in denen sie von den übrigen Theilcurven geschnitten
 «wird (leicht zu ermitteln), so ist $\lambda + \Theta = \alpha$ ($m + n - 2$).
 «Wenn die R_λ^n keinen ausserordentlichen Punkt (dp oder rp) hat,
 «so ist λ immer gerade. Durch irgend einen Punkt gehen
 « $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lambda}{2}$ Sehnen; von jedem Punkt der Curve aus gehen
 « $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1$ Strahlen, welche die Curve im
 «Ganzen in drei Punkten scheiden. Durch irgend einen Punkt gehen
 « $3(\lambda - n)$ Schmiegungebenen und $4n + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 10)$
 «Doppelberührungsebenen; die von diesen umhüllte Abwickelbare
 «hat die R_λ^n zur $(\lambda - 4)$ fachen Linie. Die Doppellinie, der von
 «den Schmiegungebenen umhüllten Abwickelbaren ist vom Grade
 « $\frac{1}{2}\lambda(\lambda - 4)$. Die Curve R_λ^n hat $6\lambda - 8n$ Planpunkte (wo eine Ebene
 «4 punktig berührt). — Die Zahl der *nothwendigen Punkte* einer Theil-
 «curve wird durch folgenden Satz bestimmt: «Wenn eine Vollcurve
 «in i Theilcurven zerfällt, so ist die Summe der diesen entsprechen-
 «den Zahlen nothwendiger Punkte sammt der Anzahl aller Knoten um
 « $i - 1$ grösser als die der Vollcurve entsprechende Zahl nothwendi-
 «ger Punkte.» Diese letzte Zahl wird durch die Formel

$$\frac{1}{2} np (n + p - 4) + 1 - \varepsilon \binom{n + p - m - 1}{3}$$

«ausgedrückt mit Bezug auf Vollcurve $C^{n \cdot p}$ und Fläche f^m ($m \geq n \geq p$);
 « $\varepsilon = 0$, wenn $m > n + p - 4$, und $= 1$, wenn $m \leq n + p - 4$.

«Dieser Satz lässt mich aber bei Längsberührungen im Stich. —
 «Unter den wenigen Gattungen von Raumcurven, die ich jetzt aufzählen
 «will, sind manche, die ich nicht durch ein geschlossenes System von
 «Gleichungen, worin zu eliminirende Hilfsgrössen vorkommen, so
 «darzustellen vermag, dass das System der Theilcurve äquivalent ist,
 «ohne dass man von der Gesamtheit seiner Lösungen etwas auszu-
 «schliessen braucht. Es bleibt daher nichts anders übrig, als sie nach

«den niedrigsten durchgehenden Flächen zu ordnen, was doch be-
«denklich ist. Auch scheint uns die f^3 für die Fortsetzung dieser
«angefangenen Betrachtung der Raumcurven ein unübersteigliches
«Hinderniss in den Weg zu legen. In folgender Uebersicht bezeichnet
«e die Zahl der Elemente oder Bestimmungsstücke, p die Zahl der noth-
«wendigen Punkte, wenn es nöthig ist, mit einem untern Zeiger, der
«den Grad der schneidenden Fläche anzeigt.

« R_4^3 (e = 12, p = 0); R_6^4 (e = 16, p = 0); R_8^4 (e = 16, p = 1);

« R_8^5 (e = 20, p = 0) entsteht, wenn zwei f^3 eine R_4^3 und eine
«diese nicht treffende Gerade gemein haben. Die R_8^5 (e = 18),

«welche entsteht, wenn eine f^4 mit einer f^2 drei Gerade derselben
«Schaar gemein hat, betrachte ich als speziellen Fall der vorigen

« R_{10}^5 (e = 20, p = 1) entsteht, wenn zwei f^3 eine R_6^4 gemein
«haben. (Kein System!)

« R_{12}^5 (e = 20, p = 2) entsteht, wenn eine f^2 und eine f^3 eine Ge-
«rade gemein haben.

« R_{10}^6 (e = 24, p = 0); eine einzige f^3 geht durch (als Basis); die
«Curve schneidet alle Geraden des entsprechenden Sechсers
«4 mal, die des conjugirten nicht, und jede der 15 übrigen Ge-
«raden 2 mal; sie ist durch 5 Punkte auf der Basis bestimmt.
«Die durchgelegte f^4 schneidet die Basis in einer conjugirten S_{10}^6 .
«Zwei R_4^3 desselben Haufens können zusammen für eine solche
«Curve gelten.

«Diesen untergeordnet R_{10}^6 (e = 23), wenn eine f^3 und eine
« f^4 eine Gerade gemein haben, die in jener Doppelgerade, in dieser
«dreifache Gerade ist; R_{10}^6 (e = 20), wenn eine f^5 durch
«4 Gerade derselben Schaar einer f^2 geht; ist auf der f^2 durch
«11 Punkte bestimmt und trifft alle Geraden der einen Schaar
«5 mal, die der andern 1 mal.

« R_{10}^6 (e = 23, p₃ = 1, p₄, . . . = 0), wenn zwei f^3 sich längs
«einer Geraden berühren und eine freie Gerade (einfach) gemein
«haben. Legt man eine f^4 durch die R, so enthält sie noth-
«wendig die erste Gerade und schneidet jede f^3 in einer R_{10}^5
«die das Geradenpaar nicht trifft. (Kein System!)

« R_{12}^6 (e = 24, p = 1), wenn zwei f^3 drei freie Gerade a, a', a''
«gemein haben. Die eine f^3 sei Basis, und werde von der
«durch a, a', a'' gehenden f^2 in b, b', b'' geschnitten. Geht
«nun eine f^4 durch die R_{12}^6 , so schneidet sie die Basis noch in

- « einer S_{12}^6 , die zu b, b', b'' gehört und mit der vorigen
- « Curve 18 Punkte gemein hat.
- « R_{14}^6 ($e = 24, p = 2$), wenn zwei f^3 einen Kegelschnitt und eine
- « freie Gerade gemein haben. (Kein System!)
- « R_{16}^6 ($e = 24, p = 3$), wenn zwei f^3 eine R_4^3 gemein haben; ist
- « durch 8 Punkte auf der Basis f^3 bestimmt, trifft alle Geraden
- « eines Sechсers 3 mal, die des conjugirten Sechсers nur 1 mal,
- « die 15 übrigen Geraden 2 mal; und wird durch vier collineare
- « Ebenenbüsche erzeugt.
- « R_{16}^6 ($e = 23, p = 3$), wenn eine f^2 und eine f^4 zwei freie Ge-
- « rade gemein haben.
- « R_{18}^6 ($e = 24, p = 4$) = $C^2 \cdot ^3$ Vollcurve.

« Wie tief kann die Classe einer R^n hinabgehen, wenn diese

« ausserordentliche Punkte hat? Ohne solche scheint $2(n-1)$ die

« niedrigste Classe zu sein. Diese $R_{2(n-1)}^n$ entsteht immer, wenn man

« alle 4 Coordinaten als ganze Functionen n^{ten} Grades einer Variabeln

« setzt, und hat $4n$ Elemente; sie verläuft in einem einzigen reellen

« Zuge und kehrt in sich zurück; was ich von den höhern Classen

« nicht glaube, obschon ich es nicht beweisen kann. Von der R_8^4 ist

« leicht nachzuweisen, dass sie aus zwei getrennten Zügen bestehen

« kann, ebenso von der ebenen C^3 ; wie ist es bei der ebenen C^4 ? —

« Ich habe auch das Zerfallen der einzelnen Raumcurven studirt, weil

« ich es für den Uebergang zu höhern Curven nothwendig finde; doch

« darüber einzutreten, ist zu weitläufig; ich will nur erwähnen, dass

« eine R_8^4 auf der Basis f^3 allmählig übergehen kann in eine C^3 und

« eine einmal schneidende Gerade; ferner dass nicht jede Gruppe durch

« Knoten vereiniger Raumcurven als specieller Fall einer untheilbaren

« Raumcurve angesehen werden darf; denn z. B. eine C^4 sammt einer

« einmal schneidenden Geraden wäre eine R_{14}^5 , und doch glaube ich

« nicht, dass es eine untheilbare R_{14}^5 gebe.

« *Satz.* Wenn $m \geq n$ und die Basis f^n enthält eine Gerade g ,

« und man verlangt, dass eine f^m die Basis längs g berühre, so zählt

« dieses der f^m für $2m + n$ gegebene Punkte.

« Im Café du Mont ist das Erdgeschoss frei; Sie können 8 Tage

« vor Ihrer Ankunft das Logis bestellen, und ich ersuche Sie mir dar-

« über zu schreiben. Wenn Sie unerwartet ankämen, könnten Sie

« nicht schon am ersten Tage hier logiren. Es freut mich sehr, Sie

« wieder zu sehen; nur muss ich Ihnen mittheilen, dass ich der Na-

« tionalvorsichtscasse die Uebernahme einer mir wahrscheinlich zu-

«fallenden Arbeit, die vielleicht 3 Wochen, Ende Juli bis in den
«August hinein, ansprechen wird, zugesagt habe; doch, bevor ich sie
«definitiv erhalte, soll darüber geschwiegen werden. Es bleibt mir
«also nichts andres übrig, als diese Arbeit Hals über Kopf zu beenden,
«damit ich etwa am Ende August mit ungetheiltem Interesse
«Ihrem Umgang und den von Ihnen in Aussicht gestellten mathematischen
«Bemühungen leben kann. — Die Vorsicht wegen Einsendung
«einer Abhandlung über Flächen an *Liouville* ist mir schon vor Ihrem
«Briefe in den Sinn gekommen, und ich werde mich vorher mit Ihnen
«darüber besprechen. Meine Ansicht ist, dass wir die Anfänge einer
«Theorie der ganzen Functionen vor uns haben, so wie die Zahlenlehre eine
«Theorie der ganzen Zahlen ist, und dass jene ein starkes
«Bedürfniss ist, weil es in allen Zweigen der Analyse doch zuletzt
«immer auf geschickte Behandlung der ganzen Functionen ankömmt.

«In der letzten Zeit befinde ich mich etwas leidend und weniger
«lebendig als im Mai und Juni; ich wollte, ich könnte etwa am Fusse
«des Ochsen¹⁾ eine Milchkur machen; doch wird nun kaum etwas daraus
«werden. — *Crelle* hat mir den Empfang meiner Zusendung noch
«immer nicht angezeigt; vielleicht wäre es gut, wenn Sie ihn mahnten.

«Ich wünsche, dass die Kur Ihnen gut zuschlage; und verzeihen
«Sie, dass ich erst so spät schreibe und Ihnen zumuthe, während der
«Cur einen so lang schwatzenden Brief zu lesen.

«Sie freundlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Café du Mont, den 7. Juli 1854.

Steiner an Schläfli.

Vom hohen Olymp²⁾ 1^{ter} August 1854.

«Lieber Freund!

«Seit dem 20^{ten} vorigen Monats bin ich hier. Nach Homburg hielt
«ich mich je einen Tag in Baden-Baden, Freiburg (bei *Oettinger*)³⁾ und
«Basel auf, leider war *Rudolf Merian* zur Zeit in Bern. Ihren furchtbaren
«Brief habe ich in Homburg nicht gelesen; hier bin ich auch
«noch nicht dazu gekommen; es fehlt mir an Comfort, die Zimmer

¹⁾ Ein Berg der Stockhorn-Kette.

²⁾ Rigi-Scheideck.

³⁾ Oettinger Ludwig geboren 7. V. 1767 Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau.

«sind zu klein, ohne Sopha und Tisch, im Gastzimmer kann ich
«nicht nachdenken, wie Sie. Diesen Brief schreibe ich in der Nähe
«des Getümmels im grossen Saal. Hätten Sie Zeit und den Rigi
«nicht schon abgegrast, so könnten Sie auf 2 Tage herkommen. Es
«ist keiner hier, der was vom Grasen versteht. Ich werde wenigstens
«noch bis zum 10^{ten} hier bleiben, vielleicht bis zum 17^{ten}, nach-
«dem ich gute Wirkung spüre. Etwas Stärkung fühle ich schon.
«Heute ist straub ¹⁾ Wetter, dass man bis jetzt, 11 Uhr, noch nicht
«aus dem Haus gehen kann. Ob ich über Luzern direct nach Bern
«komme oder durch Unterwalden (was ich noch nicht gesehen) über
«den Brünig, Interlaken, Thun gehen werde, weiss noch nicht; zum
«Letztern fehlt mir ein kleines Ränzel und gutes Wetter. Die Pen-
«sion ist hier billig, ich bezahle nur 4 Fränkli per Tag. Wenn das
«schlechte Wetter anhält, so werde ich wohl anfangen müssen, mir
«etwas Geometrie in Erinnerung zu bringen. Ich habe einige Manu-
«scripte und Notizen mitgenommen. — Ist die Wohnung, die im du
«Mont ²⁾ zu haben wäre, für mich geeignet? 1) gegen Morgen oder
«Mittag; 2) ruhig und ohne Tabakrauch; 3) mit Sopha! — Da Sie
«keine Bedürfnisse und daher kein Urtheil haben, so wird es wohl
«besser sein, wenn ich erst im Adler absteige und selbst sehe.

«Wenn Sie nichts zu thun haben, so können Sie über Thun und
«die beiden Seen in anderthalb Tagen hier sein; von Gersau steigen
«Sie in 2 Stunden hinauf. Sind Ihnen die Vorsichts-Kassen-Rech-
«nungen schon zugestellt, so rechnen Sie wie der Tüfel, dass Sie
«bis zum 18^{ten} oder 20^{ten} August fertig sind. Indessen reiben Sie
«sich nicht auf, damit Sie nicht auch matt werden, wie Ihr entkräf-
«teter

Freund

Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«Lieber Freund!

«Es dauert mich, dass Sie in meinem letzten Brief die Auf-
«zählung der Raumcurven bis zum 6^{ten} Grad inclusive und den
«schlechten Trost, den ich für höhere Curven beifüge, nicht ange-
«sehen haben.

¹⁾ Straub = schlechtes.

²⁾ Ein Café bei Bern, wo Schläfli wohnte.

«Wenn Sie lange genug auf dem Rigi blieben, so wäre es möglich, dass ich hinkäme; aber zuvor muss ich die fatale Bürde abgeworfen haben, und wenn diess bis zum 20^{ten} geschieht, bin ich daher froh. Doch ich denke, Sie seien früher in Bern als ich auf dem Rigi. Wenn Sie aber den Rigi verlassen, möchte ich Sie bitten, es mir zu schreiben, damit nicht etwa mein Brief oder ich selbst Sie verfehle.

«Ihr Logis hier auf dem Mont hat alle Eigenschaften, die Sie von ihm verlangen; es ist das grosse Zimmer ebener Erde gegen den Garten hin gerichtet; ein Sopha kömmt hinein; Stille und Rauchlosigkeit non plus ultra. Wenn Sie wenige Tage vorher bestellen, brauchen Sie nicht im Adler abzusteigen.

«Ich vermuthe, dass Sie Herrn *Crelle* wegen seines Stillschweigens über den Empfang meiner Abhandlung geschrieben haben; ich wollte gerne, Sie hätten mir dieses angezeigt. Denn nun erhalte ich einen Brief von *Crelle*, datirt vom 28. Juli, nach welchem alles in Ordnung ist, kurz nach dem ich am 31. Juli einen frankirten Mahnbrief hatte abgehen lassen. Wird indess nicht viel schaden!

«Meine für *Liouville* bestimmte Abhandlung über intégrales sphériques d'ordre n ist am 1. August durch Gefälligkeit direct nach Strassburg abgegangen und wird von dort nach Paris spedirt werden, wird aber Herrn *Liouville* kaum mehr dort antreffen. Das Ding ist etwa 35 starke Quartseiten lang geworden und hat mich die Redaction saure Mühe gekostet. Musste wiederholt umgegossen werden, weil ich die Darstellung immer wieder zu schwerfällig fand. Jetzt hoffe ich, wird es ein Franzose leidlich lesen können. Wegen der Unterdrückung der Beweise habe ich mich bei *Liouville* durch deren unvermeidliche Weitläufigkeit entschuldigt, ungeachtet sie an sich leicht und rein constructiv seien. Mich dünkt, die Sache sollte den *Liouville* um so mehr interessiren, da er selbst schon so Manches auf n Dimensionen übergetragen hat. Bin begierig, was er darauf antworten wird. Ich habe noch allerlei, worüber ich ihm gerne schreiben möchte, z. B. über orthog. Flächen, wo ich sehe, dass *Serret* in einem Irrthum steckt, ungeachtet er schöne Sachen darüber geliefert hat. Ich hoffe, Sie werden es nicht missbilligen, dass ich *Liouville* ganz kurz gefragt habe, wo *Cayley* seine 27 Geraden publicirt habe.

«Mit herzlichem Gruss

Ihr dankbarer Schüler

«Bern, den 4. August 1854.

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

S o n n t a g , 20. August.

«Herr Schläfli wird bis zum 23^{ten} oder 24^{ten} hier erwartet, in-
dem ich meinen Aufenthalt bis dahin verlängere, weil mir ätherische
«Luft gut anschlägt.

«Rechnung weg! D i e n s t a g abgereisst!

J. St.»

Rigi-Scheideck. Gersau, 20. VIII. 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Wenn die Liquidationsrechnung nächsten Freitag den 25^{ten} fertig
«ist, bin ich froh; eher will ich sterben, als dieses Geschäft unbe-
«endigt verlassen. Leider schreiben Sie mir nicht, wie lange Sie Ihren
«Aufenthalt auf dem Rigi noch fortsetzen wollen. In Erwartung einer
«baldigen Antwort grüsst Sie

Ihr

L. Schläfli.»

B e r n , den 21. August 1854.

Montag Abends.

Schläfli ist dann auf den Rigi zum Besuch, *Borchardt* war auch
da. (Siehe Brief 21. Febr. 1855, Steiner an Schläfli.)

Schläfli an Steiner.

«Sie haben vermuthlich eine fortgesetzte Redaction des Ganzen
«von mir erwartet; aber leider bin ich an Einzellnem stecken ge-
«blieben. Uebrigens würde ich kaum im Stande sein, in der Dis-
«kussion der Flächen dritten Grades fortzuschreiten. Später vielleicht
«Mehreres. Den Auftrag an Chelini und andere Sachen mehr werde
«nächstens besorgen; Ihre Ernennung zum Lynkeus in Bund und In-
«telligenz gelesen.

«Mit meinen Vorlesungen steht es nicht so übel als Sie glaub-
«ten; 4 Zuhörer in den Elementen, 1 in der anal. Geometrie, 1 in
«der Mechanik; wöchentlich 12 Stunden, aufgeweckte Jünglinge, die
«Freude an der Sache haben.

«Fast hätte ich vergessen, Sie vor dem Pentaeder beim Flächen-
«netz zweiten Grades zu warnen (im gewöhnlichen Sinne!); die 10
«Ebenenpaare hingegen will ich Ihnen gerne zugeben. — Ich habe
«endlich eine Definition des geraden Kegels gefunden; er berührt

«den mit ihm concentrischen Asymptotenkegel einer Kugel längs zweier
«Strahlen.

«Was macht Boreas bei Ihnen? uns hat er einen frühen Winter
«gebracht; gegenwärtig ist Alles weiss mit Ausnahme der sonnigen
«Halden; am 25. Oct. Abends hatten wir einen heftigen Sturm, der
«zwar die Bäume stehen liess; wohl nur local. — Die drei Hefte von
«Crelle 48 habe ich hier auch gesehen.

«Ich wünsche recht bald wieder von Ihren schätzbaren Nach-
«richten zu erhalten.

«Mit herzlichem Gruss

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, den 15. November 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie werden denken, ich befolge das Beispiel *Goldbach's* dass
«ich schon wieder eine kecke Behauptung meines letzten Briefes
«zurücknehmen muss. Indess enthält doch auch wieder das dort Ge-
«sagte die Mittel in sich, den Irrthum aufzudecken. „*Ein beliebiges*
«*Flächengebüsch zweiten Grades kann nicht als im Netze erster*
«*Polaren einer Basis dritten Grades enthalten gedacht werden*“; seiner
«Knotencurve R^6 kömmt daher im Allgemeinen *kein* Pentaeder zu;
«und wenn im Besondern ein solches existirt, so ist es nicht fest.

«Es ist nämlich klar, dass wenn die Ebene, in der die Pole des
«Gebüsches sich bewegen, dreifach gezählt, mit der Basis 3^{ten} Grades
«einen Büschel bestimmt, dann auch jede beliebige Fläche dieses
«Büschels gebraucht werden kann als Basis zur Darstellung des Ge-
«büsches ², ohne dass die Pole sich ändern. Nimmt man nun die in
«meinem letzten Briefe beschriebene Bewegung der Pole und der
«Basis hinzu, so erscheint im Ganzen diese Basis als beliebige Fläche
«einer Doppelschaar; man kann sie z. B. nöthigen, durch zwei ge-
«gebene Punkte zu gehen. Die Basis darf daher nur 17 Unbekannte
«zählen, die 3 Pole zählen 9, und die Bedingungen sind 3 . 9; also
«übertreffen die Bedingungen die Zahl der Unbekannten um 1; d. h.
«drei Flächen zweiten Grades unterliegen *einer* Bedingung, wenn sie
«erste Polaren einer Basis sein sollen. — Die Sache wird auch von
«anderer Seite her bestätigt. Gebraucht man nur die Coordinaten

«eines Pols als Unbekannte, so erhält man mittelst des Kreuzfeuers
«leicht diejenigen der zwei andern Pole als lineare Functionen jener
«ersten; und wenn man nun auf diese zwei Pole das Kreuzfeuer an-
«wendet, so erhält man schliesslich 4 lineare Gleichungen für 3 Un-
«bekannte, also zu viel. Ist aber die Bedingungsgleichung zwischen
«den Constanten der drei gegebenen Flächen zweiten Grades erfüllt,
«so reduzieren sich diese 4 Gleichungen, vermöge ihrer eigenthüm-
«lichen Beschaffenheit, sogleich auf 2 (statt auf 3); und jener erste
«Pol wird nun doch nicht bestimmt, sondern bewegt sich auf einer
«Geraden. Die Sache ist analytisch mir jetzt sehr klar; aber geo-
«metrisch kann ich es so leicht darstellen.

«Ich glaubte mit dieser Rücknahme eilen zu müssen, weil ein
«so massiver Irrthum Ihre ganze Redaction verderben könnte.

«Leben Sie wohl!

«Ihr treuer

L. Schläfli.

Bern, den 18. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Ich glaube Ihnen noch meine Ansichten über Ihre 5 Er-
«zeugungsarten der Flächen dritten Grades mittheilen zu sollen. Ich
«habe mich schon früher dahin geäußert, dass nur die IV (Fünfseit
«mit Axe) ganz abgesondert sei; die zwei andern allgemeiner hin-
«gegen, — nämlich II, Construction mittelst zwei projectivischer
«Büschel 1^{ten} und 2^{ten} Grades, und die in Ihrem damaligen Manuscript nicht
«ausdrücklich hervorgehobene Construction mittelst dreier projektivi-
«scher Ebenengebüsch, — sich in der Construction V mittelst des Doppel-
«trieders, als der beiderseitigen grössten Specialisirung vereinigen.
«Ist nämlich $u v w + x y z = 0$ die Gleichung der Fläche in Beziehung
«auf ein Doppeltrieder und bedeuten α, β, γ arbiträre Factoren, so
«kann dieselbe Fläche 1^o als Erzeugniss der Büschel $u - \alpha x = 0$,
« $y z + \alpha v w = 0$, und 2^o als solches den Ebenenbüschel $\beta u + \gamma x = 0$,
« $\alpha y + \gamma v = 0$, $\alpha w + \beta z = 0$ dargestellt werden. Von den letztern
«ist freilich jedes Gebüsch in einen Ebenenbüschel ausgeartet, aber
«ihre gegenseitige Beziehung ist doch diejenige dreier projectivischen
«Ebenenbüschel; und diese Beziehung erscheint sogleich in ihrer
«gewöhnlichen Weise, sobald wir die drei Gleichungen mit drei Fac-

«torenreihen $\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu''$ multipliciren und addiren;
«denn wir erhalten so die drei projectivischen Ebenengebüsche:

$$\alpha (\mu y + \nu w) + \beta (\lambda u + \nu z) + \gamma (\lambda x + \mu v) = 0,$$

$$\alpha (\mu' y + \nu' w) + \beta (\lambda' u + \nu' z) + \gamma (\lambda' x + \mu' v) = 0,$$

$$\alpha (\mu'' y + \nu'' w) + \beta (\lambda'' u + \nu'' z) + \gamma (\lambda'' x + \mu'' v) = 0.$$

«Sie fragen nun bei II, wie die 16 übrigen Geraden gefunden
«werden können. Die Antwort ist einfach die, dass man zuerst die
«Construction II auf die I (Fläche als Pampolare) zurückführen muss. —
«Es seien e, e', e'' drei Ebenen des einen Büschels, h, h', h'' die
«drei entsprechenden Hyperboloide des andern Büschels; eine beliebige
«feste Ebene d wird hinzugenommen und irgend ein Punkt P auf
«der erzeugten f^3 fixirt. Nun legt man durch die zwei Kegelschnitte,
«in denen h von d und e geschnitten wird, und durch P ein neues
«Hyperboloid K , durch die Kegelschnitte $(h', d), (h', e')$ und P ein
«zweites K' und endlich ebenso ein drittes K'' ; dann werden die
«zwei projectivischen Büschel (e, e', e'') und (K, K', K'') wieder die-
«selbe f^3 erzeugen. Für die Zurückführung von II auf I kömmt es
«jetzt darauf an, der Hülfebene d eine bestimmte Lage anzuweisen.
«Man wähle im Ebenenbüschel eine der fünf, z. B. e , welche ihr zu-
«gehöriges Hyperboloid h im Punkte A berührt. Dann bilden die in
«Beziehung auf h, h', h'' genommenen Polaren von A , nämlich $e,$
« $p' p''$ einen mit dem Ebenenbüschel (e, e', e'') nicht nur projec-
«tivischen, sondern perspectivischen Büschel; daher erzeugen beide
«Büschel eine Ebene; diese ist die verlangte d . Jetzt verursacht
«nur noch die Wahl des Punkts P auf der f^3 einige Schwierigkeit.
«Wenn auch e' das zugehörige h' im Punkte B berührt, so lege man
«durch den Kegelschnitt (d, h') aus dem Scheitel B einen Kegel; dann
«wird dieser auch das Geradenpaar (e', h') enthalten und das ge-
«suchte K' sein. Wiederholt sich dasselbe für e'', h'' , so findet man
«wieder einen Kegel K'' ; und nun ist durch K, K' die Grundcurve
«des neuen Büschels (K, K', K'') zweiten Grades bestimmt. Jetzt
«sind e, e', e'' Polaren von A in Beziehung auf K, K', K'' gewor-
«den; die 4 übrigen Berührungspunkte einer Ebene e''' mit dem zu-
«gehörigen Hyperboloid h''' , ausser A , bilden das Quadrupel des
«neuen Büschels (K, K', K'') , und seine Grundcurve R^4 geht nun
«durch die 8 neuen Ecken der durch jede Gerade des Paares (e, h)
«geführten Dreiseitsschnitte. Bei der analytischen Behandlung bedarf
«man des Punkts P zur nähern Bestimmung des neuen Hyperboloids-
«büschels nicht, und daher genügt es für die beabsichtigte Zurück-

«führung, nur eine Ebene e , welche ihr Hyperboloid in A berührt,
«zu kennen. Diese Einfachheit weiss ich aber auf synthetischem
«Wege nicht zu erreichen.

«Der eigentliche Gegenstand, der mir interessant genug schien,
«um diesen Brief zu veranlassen, ist die Zurückführung der Construc-
«tion mittelst dreier projectivischer Ebenengebüsche auf Ihre Er-
«zeugungsart III mittelst einer Polebene und eines Hyperboloidge-
«büsches. Man wählt in den drei projectivischen Gebüschen drei mal
«drei Ebenen, die sich entsprechen, und sucht für diese die drei
«Pole; diese zählen analytisch für 3×4 Coordinaten; da es aber nur
«auf ihre Verhältnisse ankommt, so sind bloss 11 Unbekannte zu zählen.
«Die Umwendung des Kreuzfeuers giebt zwischen diesen bloss lineare
«Gleichungen; also bleiben 2 Unbekannte frei, und die durch die
«drei Pole gelegte Ebene bekommt *doppelte* Beweglichkeit, sie um-
«hüllt also eine Fläche Φ . Die Constanten in der Gleichung der Pol-
«ebene sind in Beziehung auf die 2 freien Unbekannten vom dritten
«Grade. Daher ist die Fläche Φ von der 9^{ten} Klasse und vom 12^{ten}
«Grade. Obschon in den Ausdrücken dritten Grades, welche in der
«Gleichung der Ebene vorkommen, bei einer passenden Darstellung
«die Cuben fehlen, und daher Besonderheiten eintreten, welche die
«Elimination erleichtern, so zeigt doch die nahe bis zur völligen Ent-
«wicklung des Polynoms Φ (nach Grad) fortgeführte Rechnung, dass
«diese Fläche wirklich vom 12^{ten} Grade ist. Sie bezieht sich natür-
«lich nur auf den einen Sechser des *Gitters* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$
«und hat die 15 Geraden, welche je zwei Ecken, wie $(a_1 b_2)$ und
« $(a_2 b_1)$ verbinden (also keine *Cayley'schen*), zu Doppelgeraden. Sie
«mag aber sonst noch Doppellinien haben, die ich nicht kenne???
«Die nähere Untersuchung scheint mir der Arbeit nicht werth.

«Hat man einmal die Polebene fixirt, so ist darum das Hyperbo-
«loid, welches dem ersten Ebenengebüsch als Basis entspricht, doch
«noch nicht völlig bestimmt; man bekommt nämlich statt eines Hyper-
«boloids einen ganzen Büschel von solchen, welche sich alle längs
«eines in der Polebene befindlichen Kegelschnitts berühren (einander
«umschrieben sind). Ebenso verhält es sich mit dem zweiten und mit
«dem dritten Hyperboloid; jedes kann in seinem Büschel nach Belieben
«gewählt werden, auf eine von der Wahl der zwei übrigen durchaus
«unabhängige Weise. Von den 8 Grundpunkten der drei Basen kann
«also einer ganz frei im Raume gelöst werde. Somit figuriren in der

«besprochenen Zurückführung auf III im Ganzen 5 willkürliche Grössen,
«wovon 2 der Polebene und je eine jedem Hyperboloid zufallen.
«Hieraus ist es zu erklären, warum die Konstruktion der f^3 als Pam-
«polare scheinbar zu viele Constanten (Elemente) mit sich führt;
«nämlich die Polebene zählt deren 3, und die 7 Grundpunkte, welche
«hinreichen um das Hyperboloidgebüsch zu bestimmen, $7 \cdot 3 = 21$,
«zusammen 24. Zieht man aber hievon die 5 willkürlichen Elemente
«ab, so bleibt die richtige Zahl 19; und nun erst ist es sicher be-
«wiesen dass die fraglichen Pampolare die allgemeine Fläche dritten
«Grades ist.

«Ich füge noch einiges bei, wo ich nicht mehr weiss, ob in
«Ihrem Manuscript x, y standen oder nicht. § 4. II. Der Ort der
«Berührungspunkte des B^m und B^n ist eine Curve vom Grade

$$3m^2 + 4mn + 3n^2 - 6m - 6n + 2.$$

«III. f^m und Geb.ⁿ. Die Berührungspunkte liegen da, wo die f^m
«von einer Fläche $(m + 3n - 4)^{\text{ten}}$ Grades geschnitten wird;
«IV. B^m , Geb.ⁿ Ortsfläche vom Grade $2m + 3n - 4$.

«Beim Flächennetz zweiten Grades weiss ich über die gegen-
«seitige Lage der 10 Ebenenpaare durchaus nichts anzugeben. Ich
«glaube wenigstens, dass irgend 2 von den 10 Durchschnittsgeraden
«(die also auf der Knotenfläche f^4 liegen) sich treffen. Das ist gewiss,
«wenn 6 Gerade nach Belieben im Raume angenommen sind, so sind
«die 4 übrigen durch sie bestimmt.

«Ich verwundere mich, noch keinen Brief von Ihnen erhalten
«zu haben. Seit heute Vormittag ist die Temperatur gestiegen, und
«wir haben heftigen Westwind mit Regen.

«Ich hoffe, dass diese Zeilen Sie in guter Gesundheit antreffen.
«Leben Sie wohl und schreiben Sie auch einmal wieder.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, Mittwoch den 29. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Dienstag Abends um 8 Uhr reiste ich von Uzistorf ab und kam
«Donnerstag morgens um 10^{1/2} Uhr in Berlin an. Ich war erstaunt
«zu sehen, wie gröblich mich mein schlechtes Gedächtniss getäuscht
«hatte; denn statt dem 27^{ten} war schon am 2^{ten} November die Reihe

«an mir. Deshalb ging ich selben Tags 4 Uhr Nachmittags in die
«Sitzung und war so glücklich, den grossen Anatomen *Müller* bereit
«zu finden, den 2^{ten} November an meiner Stelle zu lesen, so dass ich
«nun erst am 14^{ten} December den *Donnstigs* Vortrag zu halten brauche.
«Bis dahin werden Sie nun noch gute Launen und helle Blicke in
«Rücksicht der Resultanten und Determinanten haben, besonders wenn
«Sie endlich warm sitzen. Die Hauptsachen wünschte ich aber doch
«bis 15. — 18. November zu erhalten; Nachträge können bis zum
«8^{ten} December von Bern *abgehen*. — Mit der Arbeit habe ich selbst
«noch nicht begonnen, weil allerlei häusliche und andere Geschäfte
«mich hinderten. Den Anfang meiner Vorlesungen habe ich auf den
«6^{ten} November hinaus geschoben.

«Von *Crelle's Journ.* fand ich das 2^{te}, 3^{te} und 4^{te} Heft des 48^{ten}
«Bandes vor; das 2^{te} enthält acht Aufsätze von *Raabe*, das 3^{te} zwei
«von *Heine* (ersten Ranges). 1. «Untersuchungen über ganze Func-
«tionen,» 2. «Fernere Untersuchungen über ganze Functionen».

«Bei meiner Ankunft fand ich ferner auch ein Schreiben nebst
«Diplom und Statuten der *Accademia Romana Pontificia de' nuove*
«*Lincei* vor, was besagt, dass dieselbe mich schon am 22^{ten} September
«1853 zu ihrem correspondirenden Mitgliede ernannt hat. Diese Ehre
«werde ich vornehmlich unserm Freunde *Chelini*¹⁾ zu danken haben,
«da er *ordentliches Mitglied* ist, wie das Verzeichniss zeigt. Sie
«könnten demselben gelegentlich wieder einmal schreiben, ihm meine
«Freude und Dank melden, und ihm erzählen, dass ich Sie diesen
«Sommer (Herbst) besucht habe, was Sie und was wir zusammen
«treiben, etc. Es wird mir schwer werden, das Dankschreiben an
«die Akademie anfertigen zu lassen; doch es hat noch Zeit. Leider
«weiss ich nicht, ob die Akademie bedeutend ist, oder nur wie die
«Naturforschende Gesellschaft in der Schweiz; sie beschäftigt sich
«mit «*lo studio, il progresso e la propagazione delle scienze*», also
«exakten Wissenschaften. *Böckh* sagt: «*Lincei*» käme von *Linkeus*,
«der durch ein Eichenbrett sehen konnte. Ist die Akademie nicht
«ganz ohne, so könnte das Faktum in einer Bernerzeitung erwähnt
«werden, nicht gerade aus Eitelkeit, sondern mehr aus Thierquälerei,
«nämlich der Thiere des Museums, die uns schnöde behandelten.
«Sprechen Sie mit *Rettig* oder *Ries*.

«Gruss an *Mutz, Ries, Rettig*, Herr und Frau *Leuenberger*,²⁾ etc.

¹⁾ Steiner schreibt «*Chilini*».

²⁾ *Leuenberger*, † Mai 1871, war Professor der Rechte in Bern. *Rettig* war Professor der Philologie in Bern, lebt jetzt noch daselbst.

«Beim Redigiren wird sich wohl Anlass finden, Ihnen bald wieder zu schreiben. Indessen leben Sie wohl, d. h. gehen Sie fleissig zu Ihrer geliebten Gräfin ¹⁾).

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Berlin, 30. November 1854.

1855.

Die nachfolgenden Fragen Steiner's sind undatirt ²⁾):

Fragen an den Cima-Rüssel.

«1. Hat der aus einem Punkt in einer Fläche dieser umschriebene Kegel die zugehörige Berührungsebene zur *Doppelebene* und berührt er dieselbe längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve? Und wenn nun die Ebene mit *Rückkehrpunkten* berührt: ist sie dann eine *Wendeebene* des Kegels (oder Rückkehrebene?); oder wenn sie mit *Selbstberührung* schneidet, ist sie dann eine *Selbstberührungsebene* des Kegels?

«2. Wenn sich zwei f in 1 Punkt berühren, so hat die ihnen gemeinsam umschriebene Abweichung die Berührungsebene zur *Doppelebene* und berührt sie längs der beiden Tangenten der Schnittcurve der Flächen — ? Sie wird *Wende-* (?) *und Selbstberührungsebene*, wenn der Punkt ein *Rückkehr-* oder *Selbstberührungspunkt* der Curve ist? Die Rückkehrtangente ist dann eine Asymptote in der Involution; ist es die Selbstberührungs-Tangente auch?

«3. Der Knotenkegel n^{ten} Grads = K sendet n ($n + 1$) Zweige durch den Knotenpunkt, deren Tangenten, T , in K fallen; berührt eine E den K längs einer T , so hat ihre Schnittcurve mit der f^m diese T zum Selbstberührungspunkt; und für die vorhergehenden und noch folgenden, den K berührenden Ebenen, wechselt (ändert sich) die Richtung der Rückkehrtangente ihres Schnittes. Geht E frei durch T , so hat ihr Schnitt (ein Zweig desselben) die T zur wt im Kp ; geht E durch zwei T eben so beide.

«4. Sie sagen bloss; «Bei einer Doppelschaar von Flächen giebt es etc.», müsste da nicht beigefügt werden «bei einer Doppelschaar von Flächen *gleichen Grads oder gleicher Klasse* giebt es etc. oder liegt *gleichen Grads oder gleicher Klasse* schon im Begriff der Schaar? —

¹⁾ Gemeint ist das Café Gräf, wo Schläfli jahrelang, d. h. bis 1876, in Pension war.

²⁾ Sie beziehen sich zum Teil auf den Brief Steiners vom 25. Febr. 1855.