Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1896)

Heft: 1399-1435

Artikel: Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schäfli

Autor: Graf, J. H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319085

J. H. Graf.

Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli.

Festgabe der Bernischen Naturforschenden Gesellschaft an die Zürcherische Naturforschende Gesellschaft anlässlich der Feier des 150-jährigen Bestehens der Letzteren im August 1896.

Der Briefwechsel der beiden grossen Mathematiker wurde eingeleitet nach dem Besuche Steiner's in Bern 1843 und beginnt mit einem Brief Steiner's an den gemeinschaftlichen Freund Steiner's und Schläfli's, den Professor der Philosophie *Ris* in Bern. Der Brief ist ohne Datum, aber sehr wahrscheinlich vom August 1848 [1]) und geschrieben aus Rippoldsau, wo Steiner zum Kurgebrauch sich aufhielt. Der Brief ist nur im Concept von Steiner's Hand vorhanden und wurde von mir aus drei andern Concepten zum einheitlichen Ganzen zusammengefasst.

1848. Steiner an Ris (Schläfli).

Verehrter Freund!

«Das ist e *seltsame* Brief; es ist seit länger als Jahr und Tag «der 3te den ich schreibe, aber vor meiner Abreise von Berlin nahm «ich mir vor, von hier aus einige Zeilen an Sie zu richten — ich «eile mein Gelübde zu halten, ehe ich ganz matt gewässert bin.

«Aus Ihren Berichten — für deren freundliche Zusendung ich «Ihnen bestens danke — habe ich ersehen, dass Sie in fortgesetzter «Thätigkeit für die Wissenschaft sind und dass Sie auch Schläfli zu ani«miren wissen. Er hat einige nette Sachen gemacht, aber mit seiner «grossen Kraft könnte er noch weit mehr leisten, wenn er bei guter

[1]) Siehe eine bezügliche Stelle in Steiner's Brief vom 31. Juli 1851.

«Stimmung wäre. Seine Versetzung an die Universität ist wohl nicht «erfolgt, weil die Zeitumstände zu ungünstig waren. Es thut mir «leid! —

«Mein Anliegen an Sie wär' öppe das: Den Thuner Mathematiker «zu veranlassen (wofern Sie es für geeignet erachten), sich mit nach-«stehenden Sätzen und Aufgaben zu befassen, welche mir von meinen «letzten Bemühungen (während des Revolutions-Gewühls) noch halb «unverdaut im Magen sitzen.

«Eine Curve 4ten Grads C^4 und ein Kegelschnitt K^2 können ein-«ander in 4 Punkten berühren.

«1. «Wird in einer Curve C^4 ein Punkt a angenommen, so «gibt es im Allgemeinen 63 Kegelschnitte K^2, welche dieselbe in «a und ausserdem in noch irgend drei andern Punkten berühren.» «(Mein Beweis ist schwach und unsicher.)

«Im weitern Verfolg dieses Satzes wurde ich auf folgende Dio-«phantische Aufg. geführt:

«2. «Man denke sich beliebig liegende Punkte; ihre unbestimmte «Anzahl sei $= x$. Von welcher Form muss die Zahl x sein, damit «die Punkte den Forderungen genügen:

«*a)* dass sie sich zu 3 und 3 so zu Dreiecken E_3 verbinden «lassen, dass je 2 Punkte, die man beliebig wählt, allemal «Ecken *eines*, aber *nur eines einzigen* Dreiecks E_3 sind;

«*b)* dass je 3 Punkte, die man wählt, Ecken eines, aber nur «eines Vierecks E_4 sind, wobei jedoch von den 4 Ecken «jedes E_4 keine drei die Ecken eines der vorigen (a) Drei-«ecke E_3 sein dürfen;

«*c)* dass wenn man 4 Punkte wählt, dieselben Ecken eines Fünf-«ecks E_5 sind, und dessen fünfte Ecke nothwendig bestim-«men, aber es sollen von den fünf Ecken jedes E_5 weder 4 «die Ecken eines der vorigen E_4, noch 3 die Ecken eines «der vorigen E_3 sein;

«*d)* dass sie sich ebenso zu Sechsecken E_6 verbinden lassen, «aber dass je fünf Ecken jedes E_6 nur zu einem einzigen «E_6 gehören, und dass keine 5, 4, 3 Ecken eines dieser «E_6 zugleich die Ecken eines der vorhergehenden E_5, E_4, «E_3 sein dürfen, und eben so für E_7, E_8 ....

«Wie gross ist dabei die Anzahl der E_3, E_4, E_5, E_6, ...?»

«Ich fand: Für die Anzahl der Dreiecke $E_3 = \frac{x\,(x-1)}{2 \cdot 3}$. Ein «natürlicher Grund bedingt, dass x ungerad, und daher eine Zahl von «einer der zwei Formen

«$6n + 1$ oder $6n + 3$ sein muss.

«Die Zahl der E_4 ist $= \frac{x(x-1)(x-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Dies verbunden mit dem «Vorigen, bedingt für x die vier Formen:

«$12n + 1$; $12n + 3$; $12n + 7$; $12n + 9$.

«Die kleinste Anzahl Punkte, welche diesen beiden Fällen genügt, «ist $x = 7$, und giebt 7 E_3 und 7 E_4.

«Ich hoffe und erwarte, Herr Schläfli werde das weitere, das «allgemeine Gesetz, allein bewältigen.

«Beide Sätze (1.) und (2.) haben Bezug auf die 28 Doppeltan- «genten dt der Curve C_4. Diese 28 dt gruppiren sich zu 12 und 12 «in 63 Systeme, wovon jedes die nämlichen bestimmten Eigenschaften «hat. — Wenn es Herrn Schläfli gelingt, diesen 28 dt mit der Rech- «nung beizukommen, so wird er auch finden, dass ihre 56 Berührungs- «punkte zu 4 und 4 in Geraden liegen; — wie oft? und welche Lage «haben diese Geraden gegen einander?[1])

«Wenn der begabte Mathematiker aufgelegt ist, so kann er sich «auch an nachfolgenden Sätzen üben, mit deren Anfang wir uns in «Rom gemeinschaftlich beschäftigt haben.

«Erklärung: Legt man aus einem beliebigen Punkte P Tan- «genten an eine Curve n^{ten} Grads C^n, so liegen die $n(n-1)$ Berührungs- «punkte in einer Curve von $n-1^{ten}$ Grads C^{n-1}; an diese aus P wie- «derum Tangenten, liegen die $(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte in einer «Curve C^{n-2}, an diese wieder Tangenten, giebt C^{n-3}; u. s. w. Diese «neuen Curven C^{n-1}, C^{n-2}, ... C^{n-x}, ..., C^2, C^1 heissen (bei «mir) nach der Reihe die 1^{te}, 2^{te} ..... x^{te}, ..., $n-2^{te}$, $n-1^{te}$ «Polare des Punktes P in Bezug auf die Basis C^n.

I. «Bewegt sich der Pol P in einer gegebenen Curve C^r, so ist «die Enveloppe seiner x^{ten} Polare, C^{n-x}, eine Curve vom

«$r(r + 2x-3)(n-x)^{ten}$ Grad.»

---

[1]) Die Aufgabe wurde von Schläfli nicht gelöst, vergl. Brief Steiner an Schläfli vom 15. Dezember 1850. Nach der gleichen Quelle besuchte Steiner Schläfli in Bern im Herbst 1850 anlässlich einer Reise nach Wien.

Der Satz, dass die 56 Berührungspunkte der dt zu 4 und 4 in Geraden liegen, ist falsch. Immerhin ist es möglich, dass Steiner, als er den Brief schrieb, an seine Richtigkeit glaubte. Er fehlt in der gedruckten Arbeit über die dt der C_4. (Bemerkung von H. Prof. Dr. C. F. Geiser.)

II. «Hat die x^{te} Polare eines Punktes P einen Doppelpunkt Q, «so hat umgekehrt die $n-x-1^{te}$ Polare von Q jenen Punkt P zum «Doppelpunkt.»

III. «Der Ort des Punktes P, dessen 1^{te} Polare, C^{n-1}, einen Dop-«pelpunkt Q hat, ist eine Curve 𝔓 vom $3\,(n-2)^2{}_{ten}$ Grad; und der «Ort von Q ist eine Curve 𝔔 vom $3\,(n-2)^{ten}$ Grad; der Ort der Geraden «PQ ist eine Curve 𝔑 von der 3 (n—1) (n—2) Klasse und von der-«selben Klasse ist auch die Curve 𝔓.»[1])

In einem 2^{ten} Concept spricht Steiner die Absicht aus, nach Beendigung seiner Cur in Rippoldsau, wohin er Ende Juli 1848 gekommen ist, nach der Schweiz zu reisen, wenn nicht sein Bruder *Hans Steiner* der aus Amerika in Utzenstorf zu Besuch sei, schon früher zurückkehre und ihn in Rippoldsau besuche. —

1850. Schläfli an Steiner.

Herr Professor!

Sie werden sich wohl mit mir freuen, dass ich jetzt etwas gearbeitet habe, das zu publiciren ich mich nicht schäme. Es ist die Theorie der Elimination zwischen algebraischen Gleichungen im allgemeinsten Sinne. Zum gegebenen System von n höhern Gleichungen mit n Unbekannten nehme ich noch eine lineare Gleichung mit litteralen [unbestimmten] Coefficienten a, b, c... hinzu und zeige, wie man auf diesem Wege, ohne je mit fremden Faktoren die Rechnung zu belästigen, zur ächten Resultante gelangen kann. Ist alles Uebrige numerisch gegeben, so muss diese Resultante in Faktoren zerlegbar sein, welche alle in Beziehung auf a, b, c,... linear sind. In jedem einzelnen dieser linearen Polynome sind dann die Coefficienten von a, b, c... die zu *einer* Lösung gehörenden Werte der Unbekannten.

Ich beleuchte dann die von *Hesse* in seiner bekannten Abhandlung über die Resultante dreier quadratischer Gleichungen gegebene Bedeutung über ein allgemeines Eliminationsverfahren und zeige, dass dieses nicht zum Ziele führen kann. Ich untersuche ferner die Eigenschaften der Resultante eines Systems algebraischer Gleichungen überhaupt und finde eine Reihe von Sätzen, von denen die bekannten Sätze *Jakobi's* über die Determinante sich als spezielle Fälle ergeben. Ich gehe in mehrere besondere Fälle ein, die immer noch von beträchtlicher relativer Allgemeinheit sind, und unterwerfe namentlich die Resultante der acht abgeleiteten Gleichungen eines vierschichtig

[1]) Schläfli hat es Steiner etwas entgelten lassen, dass er die Aufgaben nicht ihm direkt zugesandt hat.

linearen Polynoms mit je zwei Variabeln in jeder Schicht und mit 16 Coefficienten einer genauen und ausführlichen Untersuchung, wobei mehrere schon an sich interessante Hülfssätze gebraucht werden. Diese Resultante erreicht den 24. Grad und wird zuletzt als ein Aggregat von Produkten von vier vollständigen Hyperdeterminanten dargestellt, welche resp. vom 2., 6., 8. und 12. Grade sind. *Cayley* hatte [Crelle XXX] die Resultante als vom 6. Grade angegeben. Ich zeige aufs Bestimmteste, dass sie nothwendig rom 24. Grade ist. Endlich behandle ich die Construction der *reciproken* oder *Classengleichung* zu einer ihrem Grade nach freigegebenen algebraischen Gleichung im allgemeinsten Sinne, und zeige, wie die Coefficienten der Classengleichung durch eine Art von Differentiation aus einander abgeleitet werden können, so dass der schwierigste Teil der Aufgabe nur auf die Berechnung eines einzigen Coefficienten in Funktion der ursprünglichen Elemente zurückgeführt ist, was auf die Berechnung der Resultante der abgeleiteten Gleichungen des ursprünglichen Polynoms, nachdem man darin eine Variable gleich Null gesetzt hat, hinauskömmt. Hievon mache ich eine Anwendung auf Flächen und Curven und insbesondere auf die Curve dritten Grades. Als Anhang teile ich noch jenen zur Determinantentheorie gehörenden allgemeinen Satz mit, von dem ich Ihnen schon gesprochen habe. Das Manuscript zählt 16 Bogen und mag etwa 6 Druckbogen geben. Ich war bereits im Begriffe dasselbe abzusenden, und erkundigte mich noch bei *Bernhard Studer*[1]) über die Art, wie dieses geschehen könnte. Er hielt es für gewagt, beim gegenwärtigen Kriegslärm eine Arbeit an die Wiener Academie zu schicken: die würde wahrscheinlich unbeachtet liegen bleiben. Es sei auch noch ungewiss, ob die Akademie sich nicht auflösen werde. Anfangs erbötig, an Herrn *Boué*[2]) in Wien, ein ihm befreundetes Mitglied der Akademie, welcher zugleich Burger von Burgdorf ist, zu schreiben und gesonnen, die Antwort, die etwa in 14 Tagen erfolgen würde, abzuwarten, fand er bald einen anderen Weg für besser, den ich aber lieber nicht befolge, weil er mich nach einer Seite hin verpflichten würde, wo ich durchaus keine Verbindlichkeit eingehen mag, Bevor ich nun das Manuscript absende, möchte ich vor allem aus

---

[1]) Der bekannte Geologe, von welchem wir leider immer noch keine Biographie besitzen.

[2]) Boué, Ami (16. III. 1794 † 21. XI. 1881 in Wien), studirte in Genf, Paris, Edinburg und Berlin, Geologe, Dr. med. und war Mitglied der K. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vgl. geolog. Jahrbuch Vol. 32. 1882.)

Ihren Rat hören. Sie können vielleicht an einen Ihrer Freunde in Wien schreiben, um meiner Arbeit eine günstige Aufnahme zu verschaffen, und mir dann Jemanden bezeichnen, an den ich die Zusendung zu adressiren hätte. In meinem Briefe würde ich auch jedenfalls erwähnen, dass Sie mir Aussicht auf ein Honorar gegeben hätten, und versprechen, im Falle der Zusicherung eines solchen die Eingabe fortzusetzen. Doch möchte ich Sie noch fragen, ob ich wirklich ein Honorar verlangen, und wie viel ich verlangen, oder ob ich den Betrag desselben der Akademie überlassen soll.

Da mir nun noch Zeit übrig bleibt, so werde ich meiner Arbeit noch einen die Theorie der Curven dritten Grades betreffenden Satz beifügen, den mir *Hesse*[1]) und *Aronhold*[2]) übersehen zu haben scheinen. Die Hauptsache darin macht eine Curve dritter Classe [Ψ (p, q, r) $=$ o] aus, welche die 9 Wendungstangenten der ursprünglichen Curve dritten Grades V (x y z) $=$ o berührt. Das Polynom Ψ jener Curven spielt eine doppelte Rolle, einesteils bei der Darstellung der Classengleichung, andererseits in der analytischen Lösung der Aufgabe, die Wendungspunkte einer C_3 zu finden.

Ist nämlich 216 W die Funktionaldeterminante des ursprünglichen Polynoms V und wiederum w die Funktionaldeterminante von W, so ist nach *Hesse:*

$$\frac{1}{2}w = 4\,\alpha^2\,V + \beta\,W \qquad [1]$$

der Faktor λ, der W $+ \lambda$ V in drei lineare Faktoren zerlegbar macht, ist durch die biquadratische Gleichung

$$27\,\lambda^4 + 18\,\alpha\,\lambda^2 + \beta\,\lambda - \alpha^2 = o$$

bestimmt. Nun hat freilich Aronhold die Funktionen α und β unmittelbar aus den ursprünglichen Elementen von V construirt. Für die numerische Anwendung wird es aber leichter sein, α und β aus [1] herzuleiten. Nur schade, dass da α^2 vorkömmt, weshalb das Vorzeichen von α ungewiss bleibt. Durch meine Formel wird diese Ungewissheit beseitigt. Sie ist

$$\Psi = \alpha\,V^2 + W^2 \qquad [2]$$

wenn in Ψ [p, q, r] für die reciproken Variabeln p, q, r die durch 3 dividirten Differentialcoefficienten des ursprünglichen Polynoms V substituirt werden. Wenn

---

[1]) Hesse, Ludwig Otto, geb. 22. IV. 1811, Professor in Königsberg, Halle Heidelberg und München, † 4. VIII. 1874.

[2]) Aronhold, Siegfried Heinrich, geb. 16. VII. 1819, Prof. in Berlin, † 13. III. 1884.

$$V = ax^3 + 3d\,x^2\,y + 3e\,x^2\,z + 3g\,x\,y^2 + 6\,k\,x\,y\,z + 3h\,x\,z^2 + b\,y^3 + 3f\,y^2\,z + 3j\,y\,z^2 + c\,z^3$$

das Polynom der C_3 ist, so ist

$$\Psi = p^3 e^{\frac{-9\mathfrak{M} + r\mathfrak{N}}{p}} \begin{vmatrix} g & k & h \\ b & f & j \\ f & j & e \end{vmatrix}$$

nach abgekürzter Schreibweise der Taylor'schen Formel, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ resp. die ableitenden Operationen bezeichnen, wo die Differentiale der Elemente

$$\begin{array}{ccc} a & \text{resp. in} \quad o & \text{und in} \quad o \\ d \quad e & a \quad o & o \quad a \\ g \quad k \quad h & 2d \quad e \quad o & od \quad 2e \\ b \quad f \quad j \quad c & 3g \quad 2k \quad h \quad o & o \quad g \quad 2k \quad 3h \end{array}$$

umgesetzt werden.

Es würde mir lieb sein, wenn Sie mir sagen könnten, ob die Relation [2] schon gegeben worden ist. Verzeihen Sie mir übrigens, dass ich für einen Augenblick solchen Gräuel[1]) vorgeführt habe.

Ist die Correspondenz mit der Wiener Akademie einmal eingeleitet, so hoffe ich, werde es mir wenigstens in der nächsten Zeit an Stoff zu interessanten Arbeiten nicht fehlen.

Doch die Zeit verfliegt rasch, und es gilt zu verhüten, dass einem Andere nicht vorkommen. Ich kann Ihnen schliesslich nicht genug danken für die Aufmunterung und die wohlwollende Sorge für mein Auskommen, womit Sie als ein Mann, der für die Förderung der Wissenschaft so kräftig gewirkt hat, mich beehrt haben, und erkläre mich Ihnen zu steter treuer Freundschaft für verpflichtet.

In der Erwartung, dass Sie diese Zeilen in bestem Wohlsein empfangen werden, grüsst Sie von ganzem Herzen.

Bern, den 4. Dez. 1850.

Länggasse No. 214. Ihr Freund und Verehrer,

Ludwig Schläfli, Docent.

Steiner an Schläfli.

«*Mein lieber Freund!*

«Gewiss freue ich mich mit Ihnen, wenn Sie wirklich was Stich-«haltiges gemacht haben. In meinem trägen Zustande bin ich indess «unfähig, die Sache gehörig zu beurtheilen. Ich glaube jedoch fest, dass

---

[1]) Die analytischen Auseinandersetzungen bezeichnete Steiner vorzugsweise mit «Greuel».

«etwas dran sein wird. Aronhold, mit dem allein ich näher verkehre, «durfte ich Ihre Resultate nicht mittheilen, weil er sich selbst mit «der Elimination beschäftigt hat und stets auf Determinanten herum-«reitet. Er würde Ihre Sachen rasch verstehen, aber auch eben so «flux für sich benutzen, sie zu den seinigen machen, wie es vielfach «mit meinen Resultaten über algebraische Curven, etc., geschehen ist. «So habe ich auch jene Curve 3. Klasse, K^3, welche die Wendungs-«tangenten der C^3 berührt, schon 1847 u. 48 betrachtet u. ihm Vieles «darüber mitgetheilt; trotzdem werde ich überall sorgfältig ignorirt [1]).

«Unsere Verabredung scheinen Sie ganz vergessen zu haben. «Sie sollten sich ja an die Gesandtschaft wenden. Honorar hat man «nicht zu fordern, sondern es bekommt jeder, dessen Arbeit aufge-«nommen wird, und zwar alle gleich viel, nämlich 40 fl. Münze für «den Druckbogen (1 fl. Mz = 3 Zwanziger = 18 Batzen; in Bank-«scheinen jetzt viel schlechter, aber hoffentlich werden Ausländer in «Silber bezahlt). Ich will Ihnen meine Ansicht auf's Neue kund thun «und Ihnen etwa wie folgt rathen:

«Sie sagen im Begleitschreiben: Sie hätten mir, als ich diesen «Herbst auf einer Reise über Wien, Sie in Bern besuchte, einige «Ihrer Resultate mitgetheilt und mir dieselben für das Crelle'sche «Journal nach Berlin mitgeben wollen, worauf ich erwiedert: «ich «hielte dieselben für würdig, in die Schriften der K. K. Akademie zu «Wien aufgenommen zu werden, was für Sie, ausser der Ehre, noch «den Vortheil eines sehr anständigen Honorars gewähren würde.» «Durch dieses günstige Urtheil ermuthigt beehren Sie sich nun einer «Hochpreisslichen K. K. Akademie Ihre Arbeit ergebenst zu über-«reichen. Im Falle dieselbe zur Aufnahme nicht geeignet erachtet «würde, so erbitten Sie sich das Manuscript zu anderer Verwendung «zurück [2]). Sie können auch bemerken, dass bereits kleinere Aufsätze «von Ihnen im Crelle'schen Journal (?) so wie in den Berichten der «naturf. Gesellschaft in Bern gedruckt sind. Im Begleitschreiben geben «Sie auch eine gedrängte Uebersicht vom Inhalte Ihrer Arbeit, in «der Weise, wie Sie es in meinem Briefe gethan haben, citiren Sie «die andern Helden (*Jacobi, Cayley, Hesse,...*) und lassen Ihre That «darüber stehen, wie es sich in der Abhandlung selbst herausstellt. «Denn solcher Brief liest sich leichter und wird lieber gelesen, als «der Gräuel in 16 Bogen, und die Herrn sehen sogleich, woran sie

---

[1]) Vergl. die Note S. 74.

[2]) Von hier an existirt ein Concept.

«sind. — Wollen Sie (als Cima bue[1]) an Ihren Burgdorfer (Secunda) «*Boué* adressiren, so habe ich nichts dagegen; sonst brauchen Sie «nur «an die Kaiserlich-Königliche Hochpreissliche Akademie der «Wissenschaften in Wien» zu adressiren, auch selbst in dem Falle, «wenn Sie sich in einem einliegenden Briefe an Boué wenden. Spedirt «die Gesandtschaft Ihr Paquet nicht, so können Sie dasselbe unfrankirt «an die Akademie schicken; (es wird nicht nöthig sein, darauf zu «schreiben: «Wissenschaftliche Abhandlungen» oder «zum Druck be«stimmt», ich glaube nicht, fragen Sie auch darüber die Gesandtschaft).

«Mag auch die Freiheit in Oestreich einen starken Stoss er«halten, so wird doch die Akademie bleiben, da sie ja vor 1848 ge«gründet worden; der Patrizier Studer ist kein Politiker. Also frisch «gewagt, aber doch nicht übereilt, ich hoffe und wünsche, dass es «gehe. Amen.

«Leider bin ich nicht der Mann, der sagen kann, ob Ihre «Gleichung neu ist. Wenn Sie übrigens Crelle's (u. Liouvilles) Journal «ganz gefressen haben, so wird keine Gefahr sein. Wohl schreiben «Cayley und ein anderer Engländer noch in englischen Journalen «(Transaktionen, etc.), aber was sie publicirt haben, kann ich Ihnen «auch nicht verrathen. — In den «Monats-Berichten» der Berl. Akad. «August-Heft 1848 finden sich einige Andeutungen über mein Treiben «in Rücksicht auf algeb. Curven, was Sie später auch einmal ansehen «können. Hr. *Aronhold*, dem die einzelnen Sätze schon zuvor mitge«theilt worden, hat seine Rechnungen daran vervollkommnet und er«weitert u. ergänzt.

«Von jener Aufgabe, die Sie vor 2 Jahren lösen sollten, die «Zahl x der Punkte zu bestimmen, damit sie sich zu 3 Ecken, 4 «Ecken, etc. verbinden lassen, hat jetzt H. *Eisenstein*[2]) den ersten «Fall, bloss die 3 Ecken betreffend, gelöst. Er zieht daraus schon Schlüsse «für die Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

---

[1]) Titel, mit dem Steiner Schläfli oft, wenn er in guter Laune war, regalirte.

[2]) Gotthold Eisenstein, geb. 16. IV. 1823 zu Berlin, wurde als Student im 3. Semester von der philosophischen Fakultät der Breslauer Hochschule zum Doctor phil. honoris causa promovirt und zwar wegen seiner ausgezeichneten mathematischen Arbeiten, Mitglied der K. Akademie zu Berlin, starb leider 29-jährig am 11. X. 1852. Vergleiche die Arbeit von Prof. Dr. *F. Rudio* «Eine Autobiographie von Goth. Eisenstein» und «Briefe von G. Eisenstein an M. A. Stern» herausgegeben von *A. Hurwitz* und *F. Rudio*. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VII, S. 145 u. ff.

«Sollte Ihre Sache in Wien nicht sogleich gehen, so sinken Sie «nicht sofort zusammen, sondern thun es mir zu wissen, damit wir «dem Schicksal Trotz bieten.

«Und der *Blösch!* [1]) hat der noch nichts gethan? Gehn Sie doch «selbst einmal zu ihm und erinnern Sie ihn mit einem Gruss von «mir, sind Sie nicht blöde, er stösst ja nicht. Sie können ihm so «nebenher auch erzählen, ich hätte Sie getrieben einige Arbeiten der «Wiener Akad. zu überreichen, deren Schriften auch Fremden geöffnet «(die der Berliner nicht); aber von Honorar brauchen Sie nicht zu «sprechen.

«Hier ist die Witterung bis jetzt mild, immer noch 1^0—3^0 «Wärme, dagegen die Politik ist erschrecklich tief unter Null.

«Vorwärts für Freiheit und Wissenschaft! es wird schon gehen.

«Berlin, 15. Decemb. 1850.

«Ihr Freund,

«*J. Steiner.*»

1851. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Freund!

Ich kann nicht anders, als Ihnen die freudige Nachricht mitteilen, die ich am 31. Jan. von Wien erhalten habe, dass nämlich auf den günstigen Bericht der Beurteilungskommission hin die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe beschlossen habe, meine Abhandlung in ihre Denkschriften aufzunehmen und dass das festgesetzte Honorar für den Druckbogen 40 fl. Conk. Münze betrage. Der Brief ist vom 18. Januar datirt, und meine Einsendung ist am 7. Jan. in Wien eingetroffen. Sie sehen hieraus, wie schnell die Beurtheilung erfolgt ist. Es wird mir dann ferner mitgetheilt, dass meine Arbeit nicht vor drei Monaten zum Drucke gelangen könne, weil die chronologische Ordnung beobachtet werden müsse, und ich werde daher angefragt, ob ich unter dieser Bedingung mein Manuscript der Akademie überlassen wolle.

Die diese Frage wie natürlich bejahende Antwort habe ich nun vorgestern zugleich mit einer Fortsetzung der Abhandlung über die Classengleichung der Curve dritten Grades abgeschickt. Ich fand nämlich seither, dass die Polynome F [p, q, r] und Ψ [p, q, r] resp. vom 6. und 4. Grade, welche gleich Null gesetzt die ursprüngliche

[1]) Regierungspräsident, damals Leiter des bern. Erziehungsdepartements. Vergl. auch die bezügliche spätere Bemerkung.

Curve dritten Grades und die ihren Wendungstangenten eingeschriebene Curve dritter Classe in Liniencoordinaten p, q, r ausdrücken, in sehr einfacher Beziehung zu den in meinem letzten Briefe mit α, β, von *Aronhold* mit S und T bezeichneten Superdeterminanten 4. und 6. Grades der 10 ursprünglichen Constanten stehen. Die Coefficienten von Ψ sind nämlich die 10 ersten Differentialcoefficienten von S, also Ψ erster Derivat von S; und in diesem Sinne ist dann F zweiter Derival von T. Mich wundert nur, dass *Aronhold* diese Sätze in seiner Abhandlung nicht ausgesprochen hat.

Ich habe dieselbe seither mit grossem Vergnügen gelesen, und es ist mir auch gelungen, alle darin enthaltenen Sätze, wie ich glaube, möglichst direct zu beweisen. Doch bin ich immer noch begierig, aus der ausführlichern Schrift Aronhold's zu vernehmen, wie *er* diese Sachen angegriffen hat. Jedenfalls bilden seine Resultate eine wichtige Ergänzung der *Hesse*'schen Arbeit.

Ich kann Ihnen nicht genug dafür danken, dass Sie mir eine so lukrative Gelegenheit zu litterarischer Thätigkeit verschafft haben, und wünsche nur, dass mir der Himmel genug Kraft und Besonnenheit verleihe, um mich Ihrer Empfehlung würdig vorzeigen zu können.

Den *Blösch* habe ich immer noch nicht besucht und weiss nicht, ob ich es noch thun werde. Sie werden schon vernommen haben, dass unsere Regierung bald links bald rechts Straftruppen ausschickt, um die immergrünen Sinnbilder der Freiheit zu vertilgen, und den Leuten das Absingen von zin zin ratamplan zu verleiden. Da kann es einem Regierungspräsidenten nicht von ferne einfallen, für einen armen Docenten einen Schritt zu thun.

Indem ich Ihnen meine Glückwünsche darbringe, habe ich die Ehre zu sein

Ihr Freund

Bern, den 7. Feb. 1851. *L. Schläfli.*

Steiner an Schläfli.

Marienbad, den 31. Juli 1851.
(in Böhmen)

Lieber Freund!

«Ich wollte Ihnen gleich nach Empfang Ihres freudigen Briefes «vom 7. Februar antworten, wenn meine Schlaffheit es zugelassen hätte. «Es schien mir damals nöthig einige Warnungen und Rathschläge an «Sie zu richten, damit die eröffneten schönen Hülfsquellen nicht etwa «karger werden oder gar versiegen. Die verschiedenen Punkte, die «ich damals im Kopfe hatte, sind mir jetzt nicht mehr genau erinner- «lich, nur weiss ich, dass ich Sie warnen wollte, nicht zu geringe «Sachen nach Wien zu schicken, nicht zu *breit,* nicht zu *hastig,* kein «unreifes Zeug, mit einem Wort in keiner Art so zu schreiben, woran «zu merken, dass es bloss des Honorars wegen geschieht. Denn wenn «Sie jährlich 10—15 Bogen liefern, so ist es genug, und diese können «Sie dann wohl sorgfältig, gründlich und bündig durcharbeiten. Dies «ist desshalb nöthig, damit Sie nicht später durch Andere verdrängt «werden. Um Ihrentwillen habe ich bisher absichtlich die Verhältnisse «keinem mitgetheilt, weil sonst bald Jeder Aufsätze liefern würde. So «verrieth ich selbst kürzlich nichts, als *H. Borchard*[1]) mir erzählte: «H. «Dr. *Rosenhein*[2]) habe aus Wien geschrieben, dass die dortige Akademie «seine Abhandlung drucken und ihm 40 fl. Mz. pro Bogen zahlen würde.» «Dieser Jüd Rosenhein stellte die Sache so dar, als wenn es eine be- «sondere Auszeichnung für ihn wäre. Derselbe war seit Jahren Privat- «docent in Breslau, gewann im letzten Jahr den grossen Preis in der «Pariser Akademie[3]), wollte darauf angestellt sein (was ihm vom früheren «Minister versprochen war), und als es nicht geschah, so gieng er zu «Ostern nach Wien, wo er aber aus religiösen Gründen auch nicht an- «kommt. Aber um so mehr wird er nun wohl ein Concurent von Ihnen «werden. Darum hören Sie auf Botanik und Granit zu fressen, wobei «Sie verhungern können, sondern nehmen Sie einen doppelten Anlauf «auf die Mathematik; dann werden Sie darin auch bald Nagelneues «schaffen. Uebrigens versteht es sich, dass wenn Sie ausgezeichnete «Gegenstände haben, dann beliebig viel übersandt und der Akademie die «Sorge überlassen werden kann, *wie* und *wann* sie es publicirt; dabei «stehn Sie dann immer felsenfest, werden gut fahren und keiner wird «Sie ausstechen.

«Am 26. Mai hielt ich in der Klasse unserer Akad. einen Vortrag «*über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben und*

---

[1]) C. W. Borchardt, geb. 22. II. 1817, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Nachfolger Crelle's in der Redaktion seines Journals für reine Mathematik, von der Romreise her (1843) mit Schläfli bekannt, späterer Freund Schläfli's, † 17. VI. 1880 auf dem Rittergute Rüdersdorf bei Berlin (siehe Biographie Schläfli's, Berner Mittheilungen 1895, S. 148).

[2]) Rosenhain, J. G., geb. 10. Juni 1816 zu Königsberg, 1857 Professor daselbst, † 14. III. 1887.

[3]) Hier irrt sich Steiner, Rosenhain erhielt diesen Preis schon 1846, nicht 1850.

«*über andere damit in Beziehung stehende Eigenschaften allgemeiner* «*Curven.*» Im Monatsbericht findet sich eine nähere Angabe des In-«halts. Ein Auszug, den ich Crelle übergeben wollte, ist leider nicht «fertig geworden; jede Kleinigkeit hielt mich Tagelang auf, weil ich «nicht mehr arbeiten kann, besonders des abends geht es nicht mehr, «was doch früher meine beste Zeit war; ich werde bei der Rückkunft «versuchen die Arbeit zu beendigen. Ich sties dabei mitunter auf «Sätze, welche ich nicht streng zu beweisen vermochte, wie z. B. «folgende:

«1. Wenn eine C^3 (Curve 3ten Grads) durch gegebene 6 Punkte «p gehen, einen Doppelpunkt $\mathfrak{P}_2$ haben, und wenn die beiden Tan-«genten a und b in dem letztern, durch gegebene Punkte A und B «gehen sollen, so ist sie 25deutig bestimmt, d. h., so giebt es 25 ver-«schiedene Curven C^3, welche der Forderung genügen. Daher

«2. Wenn eine C^3 durch gegebene 6 p gehen, einen $\mathfrak{P}_2$ haben, «und die eine Tangente a in diesem $\mathfrak{P}_2$ durch einen siebenten gege-«benen Punkt A gehen soll, so ist der Ort des Doppelpunkts $\mathfrak{P}_2$ eine «Curve 7ten Grads, $= \mathfrak{P}_2{}^7$, und der Ort der andern Tangente b in «demselben ist eine Curve 25ster Klasse, $= b^{25}$. U. s. w.

«Im Monatsbericht (Mai, d. Jahres) werden Sie noch einige Sätze «finden, an denen Sie sich üben können. Der kleine Jüd (Aronhold) «hat sie alle bewiesen, nebst andern, die nicht angegeben sind. Fol-«gender Satz war nicht leicht vollständig zu discutiren. Wenn eine «gerade S eine Curve C^4 in 4 solchen Punkten schneidet, welche paar-«weise a und a, b und b, gleichweit von einem 5ten Punkte m in S «abstehen (am = ma, bm = mb), so heisst sie *Doppelsehne* und wird «durch S_2 bezeichnet, und m heisst ihr Mittelpunkt.

«3. «*Der Ort aller Doppelsehnen S_2 einer Curve C^4 ist eine Curve* «*9ter Klasse, $S_2{}^9$, und der Ort ihrer Mittelpunkte m ist eine Curve* «*10ten Grads, m^{10}.*» Dabei sind die 108 gemeinschaftlichen Tangenten «von C^4 und $S_2{}^9$ anzugeben interessant; die 40 Schnitte von C^4 und «m^{10}, sie haben eigenthümliche Bedeutung. Man lernt daraus: dass «es bei einer C^4 im Allgemeinen 32 solche Tangenten (= S_2) giebt, «deren Berührungspunkt (bb_1) in der Mitte zwischen den beiden «Schnitten (a und a_1) liegt. U. s. w. — Für alle C^3, welche durch ge-«gebene 6 p gehen und Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ haben, ist der Ort dieser $\mathfrak{M}$ «eine Curve 5ten Grads $= \mathfrak{M}^5$. Die analoge Aufgabe für die Schaar C^4, «welche durch gegebene 9 p gehen und Mittelpunkte $\mathfrak{M}$ haben. Des-«gleichen für Schaar C^5, etc. Ich bin damit nicht bis zum allgemeinen

«Satz durchgedrungen, Aronhold auch nicht; daher wird der feige «Thuner gar nicht anbeissen[1]). — Wenn ich hoffen könnte, Sie würden «wirklich auch mit Ernst an Aufgaben gehen, welche noch nicht von «mir oder einem Andern gelöst sind, so würde ich Sie künftig gern «mit dergleichen überhäufen. In der That wäre es auch besser, als «wenn Sie, wie im vorigen Herbst, *Kiltblumen*[2]) mit sammt den Wurzeln «auffressen. Ich kann leider nicht mehr wie früher arbeiten; die Phan-«tasie ist fast ganz erloschen, das erschlaffte Gangliensystem wirkt auf «das Gehirn, so dass ich beim besten Willen, etwas zu thun, immer «einschlafe, sobald ich die Augen zumache, um die Gegenstände anzu-«schauen. Der kleine Jüd stände mir wohl zur Hand, aber was habe «ich davon; was sich durch Rechnung von selbst Weiteres einstellt, «theilt er mir nicht mit, und was von mir stammet, wird mir wenig «verdankt, wird als aus der Rechnung hervorgehend benützt, ohne des «Urhebers zu gedenken. So hielt ich es nicht für rathsam, ihm Ihre «Bemerkungen mitzutheilen, weil ich weiss, wie viel er durch meine «Untersuchungen im letzten Winter und besonders 1848—49 profitirt «hat, die ihm meist zum controliren überliefert worden. Er hat haupt-«sächlich dadurch seine Methode ausgebildet (Euch alle überflügelt), «räumt aber ungern ein, dass er meinen mühsamen Forschungen viel «zu verdanken habe[3]). Die Art, wie er die Gegenstände behandelt, kann «ich nicht genau angeben, weil ich mich zu wenig darum kümmere. «Er benutzt theils die von mir aufgestellten geometrischen Grundprin-«zipien, theils muss er analoge neue aufstellen, wie sie die Rechnung «erheischt. Um z. B. die Klassengleichung einer Curve 3^{ten} Grads C^3 «zu finden, ist das Verfahren, wie ich glaube, ohngefähr so: Man be-«stimmt von einer geraden G, in Bezug auf C^3, die zweite Polarenve-«loppe E^2 (1. Monatsber. August 1848), verlangt sodann, dass diese E^2 «die C^3 berühren soll, wobei nothwendig auch G beide im nämlichen «Punkte berühren muss, und wodurch man sodann, durch Wechslung «der Veränderlichen, zur Gleichung von G oder der Klassengleichung «gelangt. — Für die Curve C^4 werden zwei (ich weiss nicht auf welche «Weise bestimmte) Curven 4^{ter} und 6^{ter} Klasse, $\mathfrak{A}^4$ und $\mathfrak{B}^6$, zu Hülfe

[1]) Mit dieser kräftigen Aeusserung wollte Steiner Schläfli, wie man sagt, «guslen», d. h. seinen Ehrgeiz wecken.

[2]) Damit sind gemeint entweder Orchis morio (Knabenkraut) oder Colchicum autumnale (Herbstzeitlose) oder Lychnis vespertina.

[3]) Hier bemerkt Herr Prof. Dr. Geiser: Das Urtheil Steiner's über Aronhold ist bei aller Anerkennung, die er ihm wiederfahren lässt, ungerecht. Aronhold hat gerade Steiner's Verdienst um die C_3 und K_3 (oder ψ) bei passender Gelegenheit hervorgehoben.

«genommen, wobei alsdann $\alpha. (\mathfrak{A}^4)^3 + \beta. (\mathfrak{B}^6)^2 = o$ die Klassengleich-«ung von C^4 giebt. — Näheres weiss ich nicht. Sie werden sich aber «schon zu helfen wissen.

«Diesen Winter besuchte mich einmal *Eisenstein*, wollte mich «für einen Privatzweck dadurch zu seinen Gunsten kirren, dass er an-«gab, er habe den ersten Fall meiner Aufgabe (welche ich Ihnen 1848 «von Rippoldsau aus mittheilte, und wovon er durch Aronhold Kenntniss «erhielt) gelöst, nämlich er könne die Zahl der Punkte angeben, welche «sich unter den gestellten Bedingungen zu Dreiecken verbinden lassen; «(dass die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, Seite eines, aber «nur eines Dreiecks ist). Auch sprach er von interessanten Anwend-«ungen, die er davon auf Fälle der Wahrscheinlichkeitsrechnung ge-«macht habe. Vielleicht hat er seitdem die Aufgabe auch für die Vier-«ecke, Fünfecke, etc. gelöst: Ich habe ihn nicht wieder gesprochen, «er wohnt auf dem Lande und ist kränklich.

«Ich bin froh, dass der Brief zu Ende ist; hier wird mir das «Schreiben noch saurer, als zu Hause; der Kreuzbrunnen greift an, man «soll gar nichts thun, nur ein Schlaraffenleben führen. — Bis zum «20. August werde ich noch hier verweilen müssen; wo es von da «hingeht, weiss ich noch nicht; nach London ist wohl weit und zu «kostspielig; also nur nach Regenspurg, München etc. und Ende Sept. «oder Anfangs October wieder heim.

«Was macht der junge *Henzi* [1]? Grüssen Sie ihn. Grüssen Sie «auch: «Nous vivons entre nous!» [2])

«Von Wien ist diesmal niemand hier von dem ich erfahren konnte, «ob Ihre Abhandlung schon gedruckt.

«Dieses Frühjahr hat Aronhold einmal Riesen-Rechnungen ausge-«führt, die 10 Constanten (wahrscheinlich dieselbe, von denen Sie mir «schrieben, einer Gleichung 3^{ten} Grads) numerisch zu berechnen.

«Leben Sie mehr von Gräuel, als von Pflanzen und aller Art Gesteine!

«Es grüsst Sie Ihr ergebener *J. Steiner.*»

[1]) Friedrich Henzi v. Bern, Schüler Wolf's, damals Student der Astronomie, geb. 28. I. 1827 in Dorpat, wo sein Vater Professor der orientalischen Sprachen war. Henzi studirte unter Argelander in Bonn, wurde dann Bergwerksingenieur, 1861—68 Direktor des Eisenwerks in Mels, kehrte nach Bern zurück und starb am 1. V. 1884.

[2]) *Bernhard Gerwer*, 1835 Docent, 1856 a. Professor an der bernischen Hochschule; 1843—1856 Lehrer der Mathematik und der math. Geographie am Höhern Gymnasium, 1856—1868 Lehrer der darstellenden und der praktischen Geometrie an der Kantonsschule, † Dec. 1868.

1852. Schläfli an Steiner.

Mein lieber Lehrer und Freund!

Ihr letzter Brief vom 31. Juli 1851 hat mich herzlich gefreut; nur muss ich jetzt zu meiner Beschämung gestehen, dass ich an den darin angeregten schweren und schönen Sachen bis jetzt noch nicht gearbeitet habe, dass ich aber nun bald Fleiss darauf verwenden werde, darf ich jetzt um so mehr versprechen, weil ich unlängst (November) einen der für mich seltenen glücklichen Augenblicke im Studium der Mathematik erlebt habe. Entschuldigen Sie es mit meiner armseligen Lage, dem fast gänzlichen Mangel an geselligem Verkehr und der daraus hervorgehenden gedrückten Stimmung, dass ich fast den ganzen Sommer der morphologischen Botanik widmete. Wenn ich nur wüsste, die reine Mathematik mit objektiver Wirklichkeit zu verbinden! Es war früher mein Wunsch, mathematische Physik zu studiren; aber wenn man nicht die Mittel hat, um eigene Versuche (zu machen), so ist da kaum etwas zu leisten.

Nachdem ich meine Theorie der Elimination der Wiener Akademie übergeben hatte, war mein nächster Vorsatz, die Theorie der vielfachen Continuität so auszuarbeiten, dass sie mit Recht in den Wiener-Denkschriften erscheinen durfte. Nun war ich aber an der Verallgemeinerung der Theorie der orthogonalen Flächen stecken geblieben, immer glaubend, es müsse hier ein grosses Wunder verborgen sein, ohne jedoch dazu durchdringen zu können. Für drei Dimensionen nämlich giebt es eine einzige Bedingung, welcher die eine erste Flächenschaar darstellende Funktion der Coordinaten [f [x y z] = const.] genügen muss, damit diese Flächenschaar mit noch zweien andern Schaaren ein orthogonales System bilden können, wo in jedem Punkte des Raumes alle drei durchgehenden Flächen sich rechtwinklig durchschneiden; und diese einzige Bedingungsgleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in Beziehung auf die partiellen Differentialcoefficienten dritter Ordnung [es sind die höchsten] jener Funktion f *linear* ist. Ich vermuthete nun lange, diese Eigenschaft gelte auch für n Dimensionen überhaupt; und die $\frac{[n-1][n-2]}{2}$ wesentlichen Bedingungsgleichungen, denen eine einzige Funktion genügen muss, müssten auch in Beziehung auf die höchsten Differentialcoefficienten linear erscheinen. Erst nachdem ich von einem Herbstferienaufenthalt in Lausanne nach Bern zurückgekehrt war, gelang es mir, die Sache für drei Dimensionen so durchsichtig zu machen, dass ich nun begriff, warum hier jene Bedingungsgleichung linear wird, und dass diese Eigenschaft für mehr Dimensionen höchst wahrscheinlich nicht mehr besteht. Wie einmal dieser schwer auf meinem Herzen liegende Alp weggewälzt war, so wendete ich mich andern Partien der Continuitätstheorie zu und fand überraschende Sätze. Einen davon treibt es mich, Ihnen hier mitzutheilen, und es wird mich freuen, Ihr Urtheil darüber zu vernehmen.

Wenn das n-fache Integral

$$\int^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = S \text{ durch Bedingungen}$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} < 1 \quad p_1 > o \quad p_2 > o \ldots, p_n > o$$

begränzt wird, wo $p_1, p_2, \ldots p_n$ unter sich unabhängige lineare und homogene Polynome bezeichnen, so kann seine Berechnung für ein gerades n auf $\frac{n-2}{2}$ und für ein ungerades auf $\frac{n-3}{2}$ Integrationen zurückgeführt werden[1]).

Um den Satz näher auszusprechen, muss ich mich einer der geometrischen ähnlichen Sprache bedienen. Die Gesammtheit aller Lösungen der Ungleichheit

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2} < a^2$$

nenne ich eine Polysphäre, a ihren Radius; diese Polysphäre ist also ein geschlossenes Stück des totalen n-fachen Continuums. Die Gesammtheit aller Lösungen einer linearen Gleichung nenne ich lineares [n—1] faches Continuum. Das Integral S ist ein Stück der Polysphäre, begränzt von n-linearen Continuen, die durchs Centrum gelegt sind, — *eine polysphärische Pyramide,* welche das Centrum zur Spitze hat, und deren Basis das entsprechende Stück des polysphärischen [n—1] fachen Gränzcontinuums ist. [Diese Pyramide ist gleich $\frac{1}{n}$ Radius $\times$ Basis.] Hat man die linearen Polynome $p_1, p_2, \ldots$ so eingerichtet, dass in jedem die Summe der Quadrate der Coefficienten der Variabeln gleich 1 ist, so nenne ich die negative Summe der Produkte der gleichnamigen Coefficienten in zwei Polynomen p_1, p_2 den Cosinus des *Winkels* zwischen den entsprechenden linearen Continuen. Da nun die Funktion S oder der Inhalt der polysphärischen Pyramide nur von

---

[1]) Siehe die Bemerkung am Schluss dieses Briefes, welche die vorliegende Darstellung noch näher beleuchtet.

den $\frac{n\,[n-1]}{2}$ Winkeln zwischen je zweien linearen Continuen abhängt, so nenne ich ferner diese Winkel die *Argumente* von S. Der auf das Argument $\measuredangle\,[p_1\,p_2] = [12]$ bezügliche z. B. ist der n^{te} Theil der $[n-2]$ sphärischen Pyramide, welche durch den Durchschnitt der linearen Continuen $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ gebildet wird, also eine mit S ganz ähnliche Funktion von $\frac{[n-2]\,[n-3]}{2}$ Argumenten, welche aus den ursprünglichen Argumenten durch die bekannten Relationen der sphärischen Trigonometrie gefunden werden. Denkt man sich z. B. die ursprünglichen Argumente [23], [13], [12] als Winkel eines gewöhnlichen Kugeldreiecks und bezeichnet die entsprechenden Seiten mit $[\overline{1}, 23]$ $[\overline{2}, 13]$ $[\overline{3}, 12]$, fasst dann wiederum z. B. $[\overline{1}, 34]$ $[\overline{1}, 24]$ $[\overline{1}, 34]$ als Winkel und $[\overline{12}, 34]$, [13, 24] [14, 23] als entsprechende Seiten eines neuen Kugeldreiecks auf, so ist $[\overline{12}, 34]$ z. B. das Argument $\measuredangle\,(p_3\,p_4)$ der $(n-2) =$ sphärischen Pyramide, deren n^{ter} Theil dem auf das ursprüngliche Argument (12) bezüglichen Differentialcoefficienten von S gleich war.

Für $n = 2$ ist S ein Kreisausschnitt vom Radius 1, sein Argument ist der Mittelpunktswinkel α und $\frac{dS}{d\alpha}$ die Hälfte des Inhalts des nullfachen Continuums, welches die zwei Radien gemein haben, oder des Centrums. Da nun die analytische Consequenz es erfordert, dass als Inhalt eines Punktes immer die Einheit angenommen werde, so ist $\frac{dS}{d\alpha} = \frac{1}{2}$, $S = \frac{1}{2}\,\alpha$ und die Basis des Ausschnitts, der Kreisbogen $= \alpha$.

Für $n = 3$ ist S eine Kugelpyramide, ihre Argumente α, β, γ sind die Winkel zwischen den begränzenden Ebenen oder die Winkel des Kugeldreiecks [der Basis]; die drei Differentialcoefficienten sind $\frac{1}{3}$ der bezüglichen Kanten oder Radien, welche je zweien Ebenen gemein sind; also $dS = \frac{1}{3}\,[d\alpha + d\beta + d\gamma]$, und wenn man die Integrationskonstante richtig bestimmt, $S = \frac{1}{3}\,[\alpha + \beta + \gamma - \pi]$, die Basis oder das Kugeldreieck also $= \alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Da ich die den regulären Polyedern entsprechende Untersuchung für n-Dimensionen durchgeführt habe — für $n = 4$ giebt es nämlich 6 einfache reguläre Polyscheme und 2 überschlagene, die ich durch folgende leicht verständliche Charaktere kurz bezeichnen kann (3, 3, 3) (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 3, 3) resp. umschlossen von 5, 16, 600 Tetraedern, 24 Oktaedern, 8 Hexaedern, 120 Dodekaedern; endlich noch $(3, 3, \frac{5}{2})$ von 600 Tetraedern, $(\frac{5}{2}, 3, 3)$ von 120 überschlagenen Dodekaedern umschlossen, beide mit 191 mal umgeschlungener Begränzung; für $n \gtreqless 5$ immer nur drei, welche dem Tetraeder, Oktaeder und Hexaeder entsprechen, und bei denen die Begränzung resp. aus $n+1$, 2^n, $2n$ Stücken besteht — so kenne ich auch alle möglichen symmetrischen Theilungen der Tetrasphäre, Pentasphäre etc. und gelange dadurch zu merkwürdigen bestimmten Integralformeln, unter denen mich diese zwei

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}}}^{x = \frac{\pi}{5}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \,.\, dx = \frac{\pi^2}{3600};$$

$$\int^{x = \frac{2\pi}{5}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{191\,\pi^2}{3600}$$

die meiste Arbeit gekostet. [1])

Der Beweis jenes allgemeinen Satzes ist sehr einfach. Er beruht auf einem Hülfssatz, der auf $n = 3$ beschränkt so lautet:

«In einem Kugeldreieck ist eine Seite als *Basis* angenommen und darauf aus dem entsprechenden Eck ein grösster Kreisbogen senkrecht gezogen, welcher *Höhe* heissen soll. Wird nun jedes Element des Kugeldreiecks mit dem Cosinus seines sphärischen Abstandes von der Spitze multiplizirt, so erhält man als Summe aller solchen Produkte das halbe Produkt der Basis und des Sinus der Höhe.»

Es hat mich sehr befremdet, dass ich bis jetzt noch gar keine Nachricht aus Wien erhalten habe.

---

[1]) **In einem Concept führt Schläfli noch folgende Formeln an:**

$$\int^{x = \frac{\pi}{4}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{\pi^2}{96}, \qquad \int^{x = \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{30},$$

$$\int^{x = \frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\sin x}{\sqrt{4 \sin^2 x - 1}} \, dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

Gegen das Ende Dezember habe ich dorthin geschrieben,[1] um Auskunft über das Schicksal meiner eingesandten Arbeit bittend und die Vermuthung aussprechend, dass mein letzter Brief, worin ich meine Einwilligung zu den gestellten Bedingungen ausspreche, nicht an den Ort seiner Bestimmung gelangt sein möchte; zugleich habe ich um Aufnahme einer neuen Arbeit über die Theorie der vielfachen Continuität angefragt, indem ich Bedeutung und Wichtigkeit einer solchen Theorie durch Andeutung einiger Resultate und des Umfangs der Untersuchungen, über welche sie sich erstreckt, hervorzuheben suchte. Den schönen Satz, denn ich Ihnen hier mittheile und den Sie einstweilen für sich behalten mögen, habe ich nicht eröffnet, sondern nur davon gesprochen, wohl aber die bestimmten Integrale, welche daraus herfliessen, hingestellt. Es nimmt mich nun Wunder, ob das Stillschweigen brechen wird.

$$\int_{\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}}^{x = \frac{\pi}{3}} \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x - 1}}\right) dx = \frac{\pi^2}{288};$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \text{arc cos}\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^2}{120}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{3}}^{x = \frac{\pi}{2}} \text{arc cos}\left(\frac{\cos x}{1 - 2\cos x}\right) \cdot \text{arc cos}\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot dx = \frac{7\pi^3}{360}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \text{arc cos}\left(\frac{\cos x}{1 + 2\cos x}\right) \cdot \left(\text{arc cos}\,\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) dx = \frac{\pi^3}{252}$$

$$\int_{\cos x = \frac{1}{4}}^{x = \frac{\pi}{2}} \text{arc cos}\,\frac{1}{1 + 2\cos x} \cdot \left(\text{arc cos}\,\frac{\cos x}{1 - 2\cos x} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot dx = \frac{\pi^3}{720}.$$

[1]) Siehe den nachfolgenden Brief.

Wenn man meine Continuitätstheorie in Wien nicht annimmt, so möchte ich sie als Privatschrift publiciren, und da Sie mir schon so viel Wohlwollen und Freundschaft bewiesen haben, so möchte ich Sie vorläufig anfragen, ob Sie mir etwa in Berlin einen Verleger wüssten, von dem ich ein Honorar bekäme.

Grüssen Sie mir *Dirichlet, Borchard, Crelle, Aronhold.* Ueber den jungen *Henzi* kann ich Ihnen nichts Weiteres sagen, als dass ich ihn bisweilen in den Versammlungen der naturf. Gesellschaft sehe, und dass mir seine ganze Erscheinung wohl gefällt, weil sie geistige Lebendigkeit ausdrückt. Mit *Gerber* habe ich leider so wenig Verkehr als mit *Wolf.*

Wenn Sie mir bald antworten, so wird es mich sehr freuen. Ich hoffe, Ihnen etwa auch bald wieder schreiben zu können.

Ihnen für das angetretene Jahr viel Glück und gute Gesundheit wünschend, grüsst Sie herzlich

Ihr dankbarer Schüler und Freund,

Bern, den 3. Jan. 1852. *L. Schläfli, Docent.*

Bemerkung. In einem unter Schäfli's Papieren gefundenen Conzept zu diesem Briefe findet sich an oben angemerkter Stelle noch folgender Abschnitt eingeschaltet, der dem Briefe fehlt:

«Um die Art, wie dies geschieht näher zu erklären, bedarf ich einer kleinen Vorbereitung. Wenn z. B. n = 4 ist, und es kommen nur Werthe der Variabeln w, x, y, z in Betracht, welche die Polynome

$$p = aw + bx + cy + dz, \quad p' = a'w + b'x + c'y + d'z$$

positiv machen, so nenne ich die konstante Grösse

$$-\frac{aa' + bb' + cc' + dd'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\,.\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2}}$$

den Cosinus des Winkels der beiden Polynome p, p' [cos $\measuredangle$ (pp')], wo die Quadratwurzeln immer positiv zu verstehen sind. Im obigen allgemeinen Falle kommen also $\frac{n\ [n - 1]}{2}$ *Winkel* zwischen je zweien der gegebenen Gränzpolynome $p_1, p_2 \ldots p_n$ in Betracht; ich nenne sie die *Argumente* der Funktion S, weil der Werth des durch S bezeichneten n-fachen Integrals in der That nur von diesen Argumenten abhängt.

Nun sind die ersten in Beziehung auf diese unter sich unabhängigen Argumente genommenen Differentialcoefficienten der Funktion S selbst wiederum solche Funktionen, wo die Dimensionszahl n auf n — 2 herunter gesunken ist. Das n-fache des auf $\measuredangle\,(p_1\, p_2)$ bezüglichen Differentialcoefficienten z. B. wird erhalten, indem man zuerst die alten Variabeln $x_1 \ldots . x_n$ durch solche homogene und lineare Funktionen der neuen Variabeln $y_1 \ldots y_n$ ersetzt, dass

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2 = y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots y_n{}^2$$

und die Polynome p_1, p_2 nur die zwei neuen Variabeln y_1, y_2 enthalten, dann zweitens das [n — 2]-fache Intregal

$$\int^{n-2} dy_3,\ dy_4 \ldots dy_n$$

für die Gränzbedingungen

$$y_3{}^2 + y_4{}^2 + \ldots + y_n{}^2 < 1 \quad p_3 > 0 \quad p_4 > 0 \ldots p_n > 0$$

berechnet, nachdem in diesen Polynomen $y_1 = y_2 = 0$ gesetzt worden ist.

Für $n = 2$ ist S der Inhalt eines Kreisausschnittes vom Radius 1, $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ sind die Gleichungen der Radien, welche diesen Ausschnitt begränzen, und das einzige Argument der Funktion S ist der Winkel α, den diese zwei Radien einschliessen. Eine Transformation der Variabeln ist nicht nöthig, weil deren nur zwei sind. Der doppelte Differentialcoefficient von S in Beziehung auf S ist der Inhalt des Centrum, in welchem die zwei Radien sich schneiden. Da nun als Inhalt eines Punktes im Gebiete von 0 Dimensionen nur die Einheit gelten kann, so ist $2 \dfrac{dS}{d\alpha} = 1$, also $S = \dfrac{1}{2}\alpha$.

Für $n = 3$ ist S der Inhalt einer Kugelpyramide vom Radius 1, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$ sind die Gleichungen der diametralen Elemente, welche dieselben begränzen, und die drei Argumente

$$\alpha = \measuredangle\,(p_2\, p_3),\quad \beta = \measuredangle\,(p_1\, p_3) \quad \gamma = \measuredangle\,(p_1\, p_2)$$

sind die Winkel des Kugeldreiecks, der Basis der Pyramide S. Um $3 \dfrac{dS}{d\alpha}$ zu erhalten, muss man zuerst rechtwinklige Coordinaten so in neue rechtwinklige transformiren, dass p_2, p_3 nur y, z enthalten, d. h. dass die durch diese Polynome dargestellten Ebenen in der Axe der x sich schneiden.

Setzt man dann $y = 0$, $z = 0$, so reduzirt sich die Gränzbedingung $p_1 > 0$ auf $x > 0$ und man hat das Integral $\int dx$ für die Gränze $x^2 < 1$, $x > 0$ zu berechnen, was
$$3 \frac{dS}{d\alpha} = 1, \text{ also } S = \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \text{ giebt.}$$

Concept des Briefes Schläfli's an den Secretär der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien vom Dez. 1851.

«Es ist nun ein Jahr verflossen, seit ich der kaiserl. Akademie «der Wissenschaften eine Abhandlung «über die Resultante eines Systems «mehrerer algebr. Gleichungen» zugeschickt habe. Ich erhielt unterm «18. Jan. 1851 die Zusicherung, dass die Abhandlung in die Denk-«schriften würde aufgenommen werden, wenn ich mein Manuscript unter «der Bedingung überlassen wollte, dass es erst nach drei Monaten ge-«druckt würde. Hierauf antwortete ich sogleich, dass ich zufrieden sei, «wenn meine Abhandlung so bald unter die Presse komme, und dass ich «sie unter dieser Bedingung überlasse. Da ich nun nach Verfluss eines «Jahres noch gar keine Nachricht über das Schicksal dieser Frucht «meiner Arbeit erhalten habe, so fürchte ich fast, mein letzter Brief «möchte nicht an seine Bestimmung gelangt sein. Ich muss daher «dringend bitten, mir über diese Sache Aufschluss zu geben.

«Ich ergreife diese Gelegenheit, um wegen der Aufnahme einer «neuen Arbeit anzufragen, von der ich glaube, dass sie den Denk-«schriften nicht zur Unehre gereichen wird. Sie behandelt einen «Gegenstand, der meines Wissens bis jetzt nur nach einzelnen unter-«geordneten Momenten ist berührt worden, dessen Begriff man aber «noch nirgends offen ausgesprochen u. möglichst allzeitig zu entwickeln «gestrebt hat, ich meine die *Theorie der vielfachen Continuität.* Ich «will versuchen, mit einigen Worten dieses neue Feld der Analysis «näher zu bezeichnen. Unstreitig gewährt die geometrische Anschauung «der Analysis, in manchen Fällen, wo nur zwei oder drei Variabeln in «Betracht kommen, wesentliche Dienste, denn sie ist gleichsam eine «schon fertige im Gefühl ruhende Analysis. Wollen wir uns nun ähn-«liche Vortheile für analytische Gegenstände, bei denen mehr als drei «Variabeln auftreten, verschaffen, so müssen wir den Begriff eines durch «diese Variabeln dargestellten vielfachen Continuums in ähnlicher Weise «entwickeln, wie es mit dem Begriff des zwei- und dreifachen Conti-«nuums in der Geometrie geschieht.

«Wenn man will, kann man schon in Laplace's Mécanique céleste «eine in die Theorie der vielfachen Continuität gehörende Aufgabe behan-«delt finden; nämlich die Theorie der seculären Störungen kömmt, analy-«tisch betrachtet, auf die Aufgabe zurück, im totalen nfachen Conti-«nuum die Hauptaxen eines durch seine allgemeine Gleichung gegebenen «(n—1) fachen Continuums zweiten Grades zu bestimmen. Hieher «gehört es auch, wenn man n fache Integrale so behandelt hat, wie es «dem Uebergang vom Ellipsoid zur Kugel und von rechtwinkligen zu «Polarcoordinaten entspricht; wie denn überhaupt die Verwandlung «vielfacher Integrale eine leichte Consequenz der diesem Gebiete eigen-«thümlichen Betrachtungen ist. Dieses Feld muss aber noch reichlichere «Früchte tragen, wenn man es nicht nur gelegentlich und zufällig, sondern «mit der eigentlichen Absicht bearbeitet, auf rein analytischem Gebiete «etwas der Geometrie Vergleichbares, und worin diese vollkommen «aufgeht, zu leisten. Ich hoffe nun durch das Wenige, was meinen «schwachen Kräften hier gelungen ist, wenn anders die kais. Akad. «es in ihre Denkschriften aufzunehmen geneigt ist, dem mathematischen «Publicum eine günstige Ansicht von der Fruchtbarkeit dieses Zweiges «beizubringen. Damit die hochpreisl. Akad. im Voraus darüber urtheilen «könne, führe ich einige Resultate an.

«Ich unterscheide lineare und höhere Gebilde, je nachdem zu «ihrer Definition lineare Gleichungen hinreichen oder nicht. Hat nun das «totale Continuum n Dimensionen, so nenne ich (n—m) faches lineares «Continuum die Gesammtheit aller Lösungen eines Systems vom m «linearen und unter sich unabhängigen Gleichungen mit n Variabeln. «Sind nun in jenem totalen Continuum zwei partielle lineare Continua, «ein pfaches und ein qfaches beliebig gegeben, so entsteht die Auf-«gabe, ihre gegenseitige Lage auf die kleinste Zahl von Daten zurück-«zuführen. Ich zeige nun, dass wenn $p + q > n$, diese Aufgabe auf «eine andere zurückkömmt, wo die beiden partiellen Continua resp. «nur $n - q$ und $n - p$ Dimensionen zählen, oder, wenn wir wieder «p, q als Dimensionszahlen gebrauchen, auf den Fall, wo $p + q < n$. «[In diesem Falle sind aber, wie ich ferner zeige, aus dem totalen «Continuum $n - (p + q)$ Dimensionen wegzulassen, wodurch die «Aufgabe auf $p + q = n$ zurückgeführt ist.] Ist $p \overline{\overline{<}} q$, so «[kann man im totalen Continuum wieder $q - p$ Dimensionen unter-«drücken, und] kömmt die Aufgabe endlich dahin zurück, dass man die «gegenseitige Lage zweier p-fachen linearen Continua im 2pfachen «totalen Continuum durch das Minimum von Bestimmungsstücken an-

«geben soll. Dieses geschieht durch eine algebraische Gleichung p^{ten} «Grades, deren Wurzeln immer sämmtlich reell sind. Darf man sich «der geom. Sprache bedienen, so sind jetzt in jedem der zwei linearen «Continua p unter sich senkrechte Axen gefunden, und die Wurzeln «jener algebr. Gleichung sind die Cosinus der Winkel, welche jede «Axe des einen Continuums mit der gleichnamigen des andern bildet, «während sie auf allen übrigen dieses letzten Continuums senkrecht steht. «Im wirklichen Raume kann p nur 1 sein, d. h. die gegenseitige Lage «irgend zweier linearen Continua ist immer durch einen einzigen «Winkel bestimmt, wie in der Ebene.

«Wenn im wirklichen Raume eine beliebige Zahl von Ebenen «frei gegeben sind, so kann man nach der Zahl der geschlossenen «und offenen Stücken des Raumes fragen. Ich habe diese Aufgabe für «das nfache Continuum gelöst.

«Ich habe ferner dem *Euler'schen Satze über Polyeder,* dass «nämlich die Zahlen der Ecken sammt der Zahl der Flächen diejenige «der Kanten immer um 2 übertreffe, eine Form gegeben, worin er «auch für n Dimensionen gilt.

«Ich habe die der Frage nach der Existenz regulärer, convexer «Polyeder analoge Frage für alle Dimensionen gelöst. Für 4 Dimen- «sonen existiren nämlich deren 6, für alle folgenden Dimensionen «immer nur drei.

«Zu sphärischen Gebilden übergehend, habe ich nicht nur «das Maass

$$\int^n dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

«des von der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2$ umschlossenen «n fachen Continuums und des durch diese Gleichung dargestellten «(n — 1) fachen Continuums bestimmt, was wahrscheinlich unter der «Form eines bestimmten nfachen Integrals bereits geschehen ist, «sondern ich habe die der Kugelpyramide oder, was auf eins hinaus- «kömmt, dem Kugeldreieck analoge Aufgabe allgemein gelöst. Wenn «nämlich $p_1, p_2, \ldots p_n$ homogene lineare Polynome der Variabeln «$x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen, und das Integral

$$\int^n dx_1, dx_2 \ldots dx_n$$

«durch die Bedingungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < 1,\quad p_1 > 0,\quad p_2 > 0, \ldots p_n > 0$$

«begränzt ist, so habe ich die Zahl der nothwendigen Integrationen auf $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-3}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, herunter-«gebracht, wobei Kreisbogen, deren Cosinus bekannt sind, nicht als Integra-«tionen gezählt werden. Wir werden dadurch mit einer neuen Art trans-«cendenter Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ Argumenten bekannt, welche «durch Integralformeln ausgedrückt sind, in denen lauter Kreisbogen «erscheinen, deren Sinus oder Cosinus gegenseitig in algebraischer «Relation stehen. In einzelnen Fällen können die Werthe dieser «Integrale in finiter Form angegeben werden. Für

$$n = 4 \text{ z. B. sei } \cos y = \frac{\cos \alpha \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 \beta}}$$

«so ist

$$S = \int_{y=0}^{x=\gamma} y \, dx$$

«eine der besprochenen Funktionen, welche jetzt nur drei explicite Argu-«mente α, β, γ zeigt, indem man jedes den drei übrigen gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt «hat. Man wird sich leicht überzeugen, dass diese Funktion ihren Werth «nicht ändert, wenn man auch die Argumente α und γ vertauscht. «Sind nun m, n, p, ganze positive Zahlen und setzt man

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad \beta = \frac{\pi}{n}, \quad \gamma = \frac{\pi}{p}, \quad S = \frac{\pi^2}{f(m, n, p)},$$

«so habe ich gefunden:

$$f(3, 3, 3) = 30, \quad f(3, 3, 4) = 96, \quad f(3, 3, 5) = 3600,$$
$$f(3, 4, 3) = 288.$$

«Für ein beliebiges n kann man 6 finite Werthe bestimmter «Intregrale angeben, wovon ich nur eines anführen will. Wenn

$$\cos x_m = \frac{\cos x}{1 - 2 m \cos x}$$

«gesetzt wird, so ist

$$\int_{\cos x = \frac{1}{2n-1}}^{x = \frac{\pi}{2}} dx \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_{n-1} =$$

$$\frac{\pi^n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n-1) \,.\, 2n}$$

«Ich glaube den erwähnten allgemeinen Satz nicht zu überschätzen, «wenn ich ihn dem Schönsten, was in der Geometrie geleistet worden «ist, an die Seite stelle.

«Wenn ich ferner die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit «n Variabeln betrachte, so ergeben sich leicht alle die Eigenschaften «wieder, die aus der Geom. von den Flächen zweiten Grades bekannt «sind; nur in der verallgemeinerten Theorie der confocalen Flächen «glaube ich etwas anführen zu können, das auch für n = 3 neu ist. «Diese Theorie giebt mir dann auch ein Mittel zu einer sehr allge«meinen Form der Darstellung arbiträrer Funktionen von n Variabeln, «was mit den Laplace'schen Coefficienten Aehnlichkeit hat. — Auch «die Theorie der orthogonalen Flächen überhaupt kann auf n Dimensio«nen übertragen werden; nur ist für n > 3 die Zahl der Bedingungen «grösser als die Zahl der Funktionen, über die man verfügen kann. «Für n = 3 dagegen hat man nur eine partielle Differentialgleichung «dritter Ordnung und ersten Grades in Beziehung auf die höchsten «Differential-Coefficienten zu erfüllen. — Der Begriff der Krümmung, auf «beliebige Gleichungen mit n Variabeln angewandt, führt auf gleiche Resul«tate wie in der Geometrie. — Durch Verallgemeinerung des Begriffs des «Potentials habe ich merkwürdige Transformationen vielfacher Integrale «bekommen.

«Diese Andeutungen mögen zeigen, dass jene Arbeit reichhaltig «genug ist, um für sich allein im Buchhandel zu erscheinen; und wenn «die hochpreisl. Akad. für die Ehre in ihren Denkschriften aufgenom«men zu werden, versagen würde, wäre ich Willens, sie als Privat«schrift zu veröffentlichen.

«Obschon nun einzelne geometrische Theorien schon längst in diesem «Sinne verallgemeinert worden sind — man denke z. B. an gewisse «allgemeine Transformationen vielfacher Integrale, welche dem Ueber«gang vom Ellipsoid zur Kugel oder von rechtwinkligen zu Polar«coordinaten analog sind, an die Theorie der secularen Störungen, «welche in ihren letzten Ergebnissen als verallgemeinerte Aufgabe, die «Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades zu bestimmen, erscheint «u. s. w. — so muss dieses Feld doch noch . . .[1])

«Verehrter Herr Secretär, ich bitte Sie noch einmal, mir recht «bald mitzutheilen, was aus meinem vor einem Jahr eingesandten «Manuscripte geworden ist, und ob man meine neue Abhandlung unter «ähnlichen Bedingungen annehmen wird.

«Hochachtungsvoll verharrt «Ihr ergebenster

[1]) Hier bricht das Concept ab und es folgt bloss noch der Schlusssatz.

Im Juni 1852 machte Steiner einen Aufenthalt in Bönigen am Brienzersee und in Interlaken.

1852. Schläfli an Steiner.

Lieber Freund!

Ich habe versucht den Grad der Aufgabe zu bestimmen, wenn eine C^3 durch 6 gegebene Punkte gehen, einen Doppelpunkt haben und die zwei Tangenten a, b in diesem Punkte durch zwei gegebene Punkte A, B gehen sollen (a durch A, b durch B). Ich kann nun algebraisch hievon den Fall nicht trennen, wenn beide Punkte A, B auf derselben Tangente a liegen. So aufgefasst führt die Aufgabe auf 6 doppelschichtige Gleichungen, alle homogen und linear in Bezug auf die 3 Variablen der 2^{ten} Schichte (die Coordinaten des Doppelpunkts). Combinirt man je 5 Gleichungen, um die Variablen der ersten Schichte zu eliminiren, so ergeben sich für die 3 Variablen der 2^{ten} Schichte wieder homogene Gleichungen, eine 5^{ten} und fünf 6^{ten} Grades. Da nun 2 Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten des Doppelpunktes hinreichen, so ist diese Aufgabe höchstens vom 30^{sten} Grade. Ob sie noch niedriger ist, kann ich nicht beurtheilen, da ich nicht im Stande bin, den Grad der Resultante mehrerer doppelschichtiger Polynome anzugeben, wenn jedes mehr als 2 Variabeln enthält. — Nun ist die in der vorigen eingeschlossene Aufgabe, durch 6 gegebene Punkte eine C^3 zu legen, welche einen Doppelpunkt hat, dessen eine Tangente a ebenfalls gegeben ist, sicher vom 5^{ten} Grade. Es giebt daher *höchstens* 30 — 5 = 25 C^3, welche Ihrer Forderung genügen.

Vor einer Woche habe ich aus Wien eine Anweisung auf 370 Gulden CM[1]) an die Hauptcasse des Ministeriums des Innern erhalten, wofür ich die Quittung durch den Banquier Marcuard übersandte. Man sagte mir, dieser Gulden sei Papiergeld und wäre eigentlich in neuem Gelde 2 Fr. 50 Cts., habe aber nur den Kurs von etwa 2 Fr.

Wenn ich wüsste, Sie noch sicher anzutreffen, würde ich Ihnen gerne in Bönigen einen Besuch machen. Ich hoffe immerhin, Sie noch in Bern wiederzusehen.

Wenn Sie mir nicht selbst schreiben wollen, können Sie mir ja durch einen andern einige Zeilen über Ihr Befinden und die Dauer Ihres Aufenthaltes zukommen lassen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer und ergebener

Bern, den 14. Juni 1852. *L. Schläfli.*

---

[1]) Conkord.-Münze.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Gott sei Dank, dass die Wiener Sache endlich so weit gekommen «ist! Dass das Honorar in Bankscheinen bezahlt wird, war mir be- «kannt; der gegenwärtige niedrige Curs derselben und der hohe Curs «des französischen Geldes bringen Ihnen viel Verlust, circa 22—23 «Prozent.

«Da ich in meiner Pension in Bönigen allein war, zudem die «Wege schmutzig sind, so bin ich nach Interlaken, in's Hotel d'Inter- «laken gezogen. Es wohnt hier auch ein Berliner Stadtrath, der, wie «Sie, alle Berge abgrast, nebenbei auch Käfer und Steine frisst, aber «nicht Kenner ist, sondern nur für Freunde sammelt. Er steigt rings «herum auf die höchsten Schöpf (Cima); auf die niedrigen begleite «ich ihn zuweilen. Ich habe ihm von Ihnen gesprochen, er freut sich «auf Ihre Bekanntschaft und Ihre Hülfe. Also brechen Sie auf und «kommen Sie auf 8 oder 14 Tage her, das donnstigs Wetter wird fortan «besser werden.

«Grüssen Sie Frau und Herrn Professor Ries, und dann marsch! «hieher zu Ihrem

J. Steiner.»

Interlaken, 20. Juni 1852.

Auf der Rückseite des Steiner'schen Briefes stehen folgende Notizen Schläfli's, die sich auf die Arbeit über die vielfache Continuität [1]) beziehen:

«Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe «des Differentialparameters und Potentials von Gauss, Lamé, Liouville «u. a. eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier ein- «schlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, «sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dieses nachzuweisen, ist «der Zweck der folgenden §§. Ein Satz oder eine Methode, in «spezieller Fassung vorgetragen, erscheint zwar oft schon in seiner «ganzen Schönheit und Trefflichkeit und gewinnt durch Verallge- «meinerung kaum noch etwas. Ich bin daher weit davon entfernt «von den folgenden §§ mir ein Verdienst beizulegen, allein erstens «glaube ich die Verallgemeinerung jener Begriffe in einer Theorie «der vielfachen Continuität nicht übergehen zu dürfen und zweitens «wird auch das Interesse daran wachsen, wenn gegen das Ende dieses

[1]) Biographie pag. 57, No. 243.

«Abschnittes Schwierigkeiten sich lösen werden, welche die beim «Raum vorkommenden beträchtlich übersteigen.

«Wenn darin auch das meiste bloss als generalisirende Nach-«ahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen «muss, so wird sich doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allge-«meine Form der Entwicklung arbiträrer Functionen von beliebig «vielen Variablen in Reihen von periodischer Natur finden und über-«dies glaube ich Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Continuität «in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen.» ——

Schläfli an Steiner.

Mein hochgeschätzter Freund!

Obschon die Lösung der bekannten Aufgabe, die Curven vierten Grades betreffend, noch nicht weit gediehen ist, so erlaube mir doch die Bemerkung, dass dieselbe in einer noch allgemeinern Aufgabe enthalten ist, welche ganz dieselben combinatorischen Beziehungen zwischen ihren Lösungen darbietet. Nämlich, wenn eine Curve $2n^{ten}$ Grades als Basis gegeben ist, wie viele [n—1] fachen Schaaren von Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades giebt es, welche jene in 2n (n—1) Punkten berühren? Oder, wenn auf der Basis n—1 Punkte gegeben sind, wie viele Curven $(2n-2)^{ten}$ Grades berühren jene in den gegebenen Punkten und ausserdem noch in (2n—1) (n—1) Punkten? Aus combinatorischen Gründen folgt, dass die verlangte Zahl eine um 1 verminderte Potenz von 2 sein muss. Um zum Ziele zu gelangen, scheint es mir vor der Hand das Rathsamste, die Bedingungen zu studiren, unter denen die Resultante zum vollständigen Quadrat wird, und bin gesonnen, mit einigen speziellen Fällen anzufangen, wie z. B. wenn ein Kegelschnitt durch 3 gegebene Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt zweimal berühren soll, was 4 Lösungen giebt.

Unglücklicher Weise liess ich mich durch das noch am Montag Morgen regnerisch aussehende Wetter abhalten, nach Sitten zu gehen. Wenn Sie die Güte haben wollen, mit einigen Zeilen mir zu antworten, so wird es mich freuen.

Sie freundschaftlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

Bern, den 18. Aug. 1852.

L. Schläfli, Docent.

Interessante Notizen über den Aufenthalt in Vichy, August 1853 sowie Briefe Steiner's an Schläfli.

Im Jahr 1853 musste Steiner zum Kurgebrauch nach Vichy reisen. Er hatte sich vorher bei *Terquem* orientirt, um die Adressen der französischen Mathematiker zu erhalten. Terquem schrieb ihm unter dem 15. Juli 1853:

«*Mon cher géomètre!*

«Voici les adresses:

«Bertrand, rue d'Enfer 13;

«Sturm, place du Panthéon 9;

«Wertheim, cité d'Antin 4;

«Chasles, passage Ste-Marie 3;

«Lamé, rue Madame 48;

«Poncelet, rue Vaugirard, vis-à-vis la porte du Luxembourg.

«Je crois que ce sont les seuls personnes, que vous désirez voir.

«Votre tout affectionné

O. Terquem,

rue d'Enfer 48.»

Anschliessend folgen einige Notizen Steiner's, bei denen zugleich das Datum und der Ort notirt ist, wann er sie niedergeschrieben hat.

Paris. Juli 1853. Notizen.

«1. *Von Silvester.* Ein Engländer (Cayley) soll gefunden haben: «*dass f^3, im Allgemeinen, 27 G. enthält.* Nachzusehen wie viele ich «bei den schwierigen Polar-Betrachtungen gefunden habe. Bei einer «bestimmten $f_1{}^3$ zeigten sich früher nur 6 G; bei der Panpolare F^3 auf «$B(f^2)$ nur 11 G.

«2. *Serret jun. Mittels des Cirkels allein* auf der Zylinderfläche «einen Strahl zu finden?

«Ich frage: Wie findet man auf der Kugel den Hauptkreis, der «durch 2 gegebene p geht? d. h. irgend einen 3$^{\text{ten}}$ Punkt desselben. — «Wie zu p dessen Gegenpunkt p_1? — Sind 2p = a, b, so finden sich «leicht 2 Punkte c, d, wo ac = ad, bc = bd und sodann Punkte x, «wo xc = xd, also x im Hauptkreis durch a und b liegt, der die Orts- «linie für c und d ist. D. h. um a, b mit Radien α, β Kreise; ihre Schnitte «= c, d; um diese mit gleichem r Kreise, liegen die je 2 Schnitte «x, x in Hauptkreis ab.

«3. *Silvester* hat gefunden: «*Die f^3 hat 5 Grundebenen, der* «*Schnittpunkt P je 3er und die Schnittlinie L der je 2 übrigen sind* «*der Art conjugirt, dass die B. C. des Kegels aus P aus 2 ebenen* «*Curven C^3 besteht, deren Ebenen durch L gehen, und zu den Grund-* «*ebenen harmonisch sind.*»

«Dieser Satz muss in dem meinigen enthalten sein, wonach der «Ort des Pols P, dessen 1^{te} Polare f^2, in Bezug auf die gegebene f^3 «ein Kegel f^2_k ist, eine bestimmte F^4 ist. Denn die Silvester'schen «10 Punkte P_0 sind diejenigen, für welche f^2_k in $2\,f^1 = 2\,e$ zerfällt. «— In jeder L liegen 3 Punkte P_1 und diesen entsprechen 3 L_1, die «durch P gehen (der jener L entspricht).

«Da die 2^{te} Polare f^1 von P ebenfalls durch L geht, so muss von «jedem P in L sowohl die erste als 2^{te} Polare durch P gehen, also «die erste stets ein Kegel sein. Danach hätten also die 10 L eigen- «thümliche Bedeutung; sie lägen in jener Ortsfläche F^4; diese wird «von jeder der 5 Grundebenen E in 4 L geschnitten, welche eine «spezielle C^4 sind.

«Bewegt sich P in 1 freien E, so entspricht ihm eine $SS(f^2)$ mit «8 p (wovon der *eine nothwendig*) und sein Ort in dieser E, wo ihm «f^2_k oder dessen Scheitel Q entspricht, ist eine Curve C^4, welche durch «die 10 Schnitte π von E mit den 10 L geht; der Ort von Q aber «ist (nach Älterem) eine C^6_d, die durch die 10 P_0 geht. Einer 2^{ten} «E_1 entspricht eine andere Curve doppelter Krümmung C^6_{d1}, die mit «C^6_d, ausser den 10 P_0, noch 4 Q gemein hat, entsprechend der Schnitt- «linie G von E und E_1. Also gehen alle C^6_d durch die 10 P_0.

«Vorhin, bei P_1 in L_1 *bilden die Polaren f^2 einen solchen speziellen* «*Büschel $B(f^2) = B(f^2_k)$, dessen gemeins. Schnitt C^4_d aus 4 durch P* «*gehenden Geraden λ besteht;* nämlich die Schnittlinien der 3 Paar «Ebenen $f^2_k = 2\,e$, die durch die Kanten (3 L) der Ecke P gehen «und zu den Flächen derselben harmonisch sind.

Ueber die gegenseitige Beziehung der Doppeltangenten der Curve 4^{ten} Grads.

Für M. *Terquem*. (Paris 1. Aug. 53.)

«1. Ist ein Kegelschnitt A^2 einer Curve 4^{ten} Grads C^4 einge- «schrieben, d. h. berührt er diese in 4 Punkten a, so kann A^2 sich «stetig bewegen und so ändern, dass er stets die Curve C^4 in 4 «Punkten berührt, und zwar liegen die neuen Berührungspunkte $4a_1$, «stets mit den anfänglichen 4a in irgend einem Kegelschnitte C^2, so «dass umgekehrt jeder durch die 4 Punkte a gelegte Kegelschnitt C^2 «die Curve C^4 in 4 solchen Punkten a_1 schneidet, in welchem sie von «einem zweiten Kegelschnitte A_1^2 berührt wird, der durch stetige Be-«wegung und Aenderung in den ersten Kegelschnitt A^2 übergehen «kann. Dabei erscheint die Curve C^4 als Enveloppe der Schaar Kegel-«schnitte A^2, A_1^2, ..., die wir durch S (A^2) bezeichnen wollen.

«*Eine beliebige Curve 4ten Grads, C^4, ist im Allgemeinen, als* «*Enveloppe von 63 verschiedenen Schaaren Kegelschnitte, S(A^2), an-*«*zusehen.*» Oder: «*Soll die gegebene Curve C^4 in einem auf ihr ge-*«*gebenen Punkte a_0 und nebstdem in irgend drei andern Punkten a* «*von irgend einem Kegelschnitte berührt werden, so giebt es 63 Lös-*«*ungen.*»

Besser: «*Soll ein Kegelschnitt A^2 gefunden werden, welcher die* «*gegebene Curve C^4 in einem auf ihr gegebenen Punkte a_0 und nebst-*«*dem in noch irgend drei andern Punkten a berührt, so finden 63* «*Lösungen statt.*»

Vichy, Freit. 12. Aug. 1853.
(Ankunft in Vichy 5. August wahrscheinlich.)

«1. H. *Schläfli hat den Satz über die conjug. Durchmesser der* «*C^3 zu kontrolliren.*

«2. H. *Terquem* die geeigneten Sätze in der von Dr. Hirst über-«setzten 2 Abhandl. zuzustellen. Auch andere, im Crelle'schen Journ. «gegebene Sätze, damit zu verbinden. Auch neue Sätze beizufügen.

«3. *Schläfli.* Die Lamé'sche Untersuchung der Wellenfläche, in «Rücksicht eines Systems mit ihr concentrischer Kugeln und Ellipsoide «(mit proportionalen Axen) — zu erzählen und darauf zu hetzen. «Desgleichen auf die Sätze von *Sylvester* und *Cayley* über f^3: dass «diese 27 Gerade und 5 Grundebenen enthält.[1])

«4. *Liouville* oder *Terquem* die Sätze und Aufgaben über höhere «Berührung der Curven, welche schon im vorigen Jahre in Bern «Schläfli mitgetheilt worden, und wozu die 63 Schaaren S(C^2) in C^4 «ein schönes Beispiel sind.

«Desgl. die Bestimmung der Curven im Raum (Doppel-Krüm-«mung), als Schnitte von Flächen, wobei von diesen ein Theil des Schnitts «gegeben ist. Cayley hat schon drein gepfuscht; zu citiren.»

«*Was im Winter 1853/4 auszuarbeiten ist.* (Paris 3. August 1853.)

«I. *Im Grossen*: *Entweder:* 1) die Abhandlung von 1848; oder «2) die populären Kegelschnitte: oder 3) 2ter Theil der Gestalten.

---

[1]) Hier bemerkt Steiner: «Gethan».

«II. *Im Kleinen, für Liouville:* 1) Gauss-Jacobischen Satz, Rück-«sicht auf Schumachers Astronomische Nachrichten. Ueber die Evolut-«Fläche, die Monge'schen Sätze, die 1837 gemacht (und vielleicht durch das «Stadtvogtei-Mensch zerstört worden sind); sie entstanden, weil Nudel «mich täuschte. 2) Den Satz wie zu zwei gegebenen C^2 die Basis zu «finden ist; was schon im Dez. 1845, vor Ausbruch der Nudelei ge-«macht worden und 1846 in der Akademie bereits angeführt. 3) Der «2 bis n Sprung bei A_1 auf A, und B_1 auf B; und der famöse 3 Sprung «bei E_1 auf E. 4) Aufwärmen der Polyeder-Sätze, um *Brin* und *August* «zu eliminiren. 5) Die statischen Sätze (Joggeli Schweins), . . . ; Vir-«tuelle Geschwindigkeit. — Ferner: 6) Das Trippel-Strahlsystem, wenn «der Scheitel in f^2 (Römer-Notizen); 7) Die Polarität auf f^2 und auf «$B(f^2)$. Bei (6.) das System Trippel-Netze von $B(f^2)$, und B B (f^2).

«III. Avec M. Polqués eine Géométrie déscriptive».

Vichy. Sonntag 21. Aug. 53.

«*Betrachtung der* f^3 [1]; *1. Die 2^te^ Polare einer E ist eine* φ^3*(Fläche);* «denn sie wird von jeder G in 3 Punkten geschnitten, weil für P in «G ein Büschel $B(f^2)$ entsteht, wovon nur 3 die E berühren. Also «ist auch die Enveloppe aller Durchmesser-Ebenen der gegebenen f^3 «eine φo^3. Ist sie auch der Asymptotenfläche der f^3 eingeschrieben, «und wo berührt sie dieselbe? Ist auch φo^3 der Ort aller P_o, deren «innere Polaren $f_i{}^2$ oder $J_f{}^2$ Zylinder sind? Es scheint. — Wenn für «P in f^3 auch $J_f{}^2 = K^2$ (Kegel) wird: so muss die Schnittcurve $C_\varphi{}^9$ «von f^3 und φo^3 ausgezeichnete $P_o = Q_\varphi$ enthalten; deren $J_f{}^2$ sich auf «ein Gerade ab $= S_1$, 2 E in ab ihr Schnitt reduciren. Giebt es P, «für welche $J_f{}^2$ aus E $\#$ E [2]) besteht? Die Sylvesterschen 10 P_o.

«2. Der aus jedem P an f^3 gehende Kegel ist 6^{ten} Grads, aber «wievielter 12^{ter} Klasse? d. h. wieviele Berührungs-Ebenen der f^3 «gehen durch eine G? 12.

«3. Die φo^3 ist 4^{ter} Klasse, durch jede G gehen vier Berührungs-«Ebenen; denn die Polaren $B(f^2)$ von P in G haben eine $C_d{}^4$, welche «E in 4p trifft, deren 2^{te} Polaren jene 4 Berührungs-Ebenen sind.

---

[1]) Steiner würde wohl sehr unzufrieden sein, wenn er wüsste, dass diese seine Notiz über die f^3 gedruckt wird. Es geht daraus nämlich unzweifelhaft hervor, dass er die Hauptresultate von Cayley und Sylvester kannte, die er doch in seiner Arbeit vom Jahr 1854 nicht citirt. Herr Geiser fügt dieser Bemerkung noch bei, dass ihm dieses eigenthümliche Verschweigen schon längst bekannt gewesen sei.

[2]) Sollte vielleicht E $+$ E geschrieben sein, da diese Steiner'sche Bezeichnung ein Ebenenpaar bedeutet.

«4. So ist die Enveloppe φ_0 der Durchmesser-Ebenen der f^4 «vom 12^{ten} Grad und von der 9^{ten} Klasse. — Von f^n ist $\varphi_0 = 3(n-2)^2{}_{ten}$ «Grad und $(n-1)^2{}_{ter}$ Klasse. — —»

Steiner reiste dann über Genf nach Bern (siehe nachfolgenden Brief) und hat daselbst die Notizen fortgesetzt.

Bern, 11. Sept. (Fortsetzung von Vichy.)

«5. *Schläfli.* 1) Ob bei f^3 (u. f^n) auch $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ jedes Punktes «P die E_∞ in derselben Curve $C^2{}_\infty$ schneiden? *Ja! Ja!* 2) *Von «wievielter Klasse ist f^3? oder ihr Berührungs-Kegel $P_k{}^6$, in Rück«sicht jeder durch den Pol P gehenden Geraden?* 12^{ten} Ist 1) ja: so «ist für P in $\varphi_0{}^3$ richtig $J_f{}^2$ ein Zylinder. *Ja.*

«6. Auch bei f^n haben $A_f{}^{n-1}$ und $J_f{}^{n-1}$ mit E_∞ die Schnittcurve «gemein. Denn für jede Ebene durch P haben ihre 3 Schnitte C^n, «A^{n-1} und J^{n-1} mit jenen 3 Flächen die Eigenschaft, dass A^{n-1} und J^{n-1} «mit G_∞ die Schnitte gemein haben, daher auch die Flächen $A_f{}^{n-1}$ und «$J_f{}^{n-1}$. Bei f^3 schneiden sich also $A_f{}^2$ und $J_f{}^2$ in einer andern ebenen «Curve R^2 ($= C^2$), die in der Vertreterin R_c liegt (in der die 3^{ten} «Schnitte c aller durch P gehenden Sehnen ab liegen.)

«*Zu 5. Die f^n und ihr Berührungs-Kegel $K^{n(n-1)}$ sind von der «$n(n-1)^2{}_{ten}$ Klasse.* Weil die Polaren A^{n-1} und A_1^{n-1} von P und P_1 sich «mit f^n in $(n-1)^2 . n$ Punkten schneiden, in denen f^n von solchen «Ebenen berührt wird, die durch die Gerade PP_1 gehen. Die Klasse «von $K^{n(n-1)}$ könnte sein: $= n(n-1)\,[n(n-1)-1]$, so ist sie um «$n(n-1)\,[n(n-1)-1-(n-1)] = n^2(n-1)(n-2)$ verringert, was «anzeigt, dass der Kegel Doppel- und Rückkehrstrahlen, ds und rs, hat, «die wohl eigenthümliche Tangenten aus P an f^n sind. Bei f^3 ist die «Verringerung $= 9 \cdot 2 \cdot 1 = 18$, und daher kann es geben 1.) 9 ds; «2.) 6 ds und 2 rs; 3.) 3 ds und 4 rs; oder 4.) 6 rs. Die Sylvester«schen 10 P_0 zeigen die Wirklichkeit der ds, wenn auch nur 3 reelle; «giebt es noch 4 rs, oder noch imaginäre 6 ds? [1])

1853. Steiner an Schläfli.

«*Lieber Schläfli!*

«Morgen Abend gegen 5 Uhr werde ich mit der Freiburger «Post in Bern eintreffen; gehen Sie also nicht grasen,[2]) sondern

[1]) Herr Geiser bemerkt, dass nicht die 9^{ds}, sondern die 6^{rs} eintreten.

[2]) Botanisiren.

«kommen Sie und fragen Sie unterwegs im Adler[1]) (wo ein neuer «Wirth sein soll) ob ein ordentliches Zimmer zu haben sei. In Genf «musste ich die erste Nacht auf dem Boden liegen. — Ich komme «diesmal von Paris, Vichy (Cur gemacht), Genf, Lausanne, Vivis. Das «Nähere morgen mündlich.

«In Eile. Ihr

J. Steiner.»

Freitag 2. Sept. 53.

Steiner blieb dann mit Schläfli in Bern zusammen und besuchte auch seine Verwandten in Utzenstorf, Bätterkinden und Kirchberg.

Steiner an Schläfli.

Baden, Samstag 15. Octob. 1853.

Lieber Freund!

«Wie Sie am Sonntag, reiste ich erst am Mittwoch von «Bätterkinden ab. Auch hier hat sich meine Cur in die Länge ge-«zogen. In Aarau traf ich mit Ihrem Freund *Steinegger* zusammen «und hier logiren wir im gleichen Haus, wo seit letzten Mittwoch «(12ten) auch *Raabe* bei uns ist, den ich zuvor in Zürich besuchte; «*Moosbrugger* aber ist nicht gekommen. Dass der Marquis[2]) Sie besucht «hat, weiss ich durch Raabe. Letzterer freute sich sehr über Ihre «Beförderung, aber vorgestern auch darüber: dass Blösch[3]) durch Studer «gekalbert hat; nach allen Vorgängen war ich weniger entzückt. «Aber potz Donnerwetter! wer hat nun die Kraft, die höhere Stufe, «die Cima, zu erklimmen?! Würden meine Rathschläge nicht immer «so leicht vergessen, so wäre der Sieg nicht zweifelhaft. Vor-«wärts, vorwärts! der Starke weicht nicht zurück. Sacre nome «de dieu! Die Abhandlungen sind noch nicht versandt, *Raabe*[4]) hat «noch keine, aber ist gespannt darauf. *Aus Gründen,* die ich Ihnen «mündlich sagen werde, schicken Sie auch *Anton Müller*[5]) und *Mousson*[6])

[1]) Altbekannter Gasthof in Bern.

[2]) So wurde D i r i c h l e t von Steiner zubenannt.

[3]) «Blösch» ist im bernischen Dialekt die Bezeichnung für eine «gefleckte», d. h. mehrfarbige Kuh. Die Bemerkung gilt auch für S. 70, wo Steiner Schläfli auffordert zu Blösch zu gehen, «er stösst ja nicht!»

[4]) Raabe, Jos. Ludw., geb. 15. V. 1801 zu Brody, Galizien, Professor der Mathematik am eidgen. Polytechnikum und an der Hochschule in Zürich. † 22. I. 1859.

[5]) Prof. der Mathematik an der Universität Zürich geb. 1799, † 11. VIII. 1857.

[6]) Mousson, Joh. Rud. Albert, geb. 17. III. 1805, Prof. der Physik am eidgen. Polytechnikum, demissionirte 1878, † 6. Nov. 1890.

«jedem ein Exemplar, *vergessen Sie es nicht.*[1]) Von Raabe können Sie «aus der Zürcher-Bibliothek jedes Buch haben, gegen ein kleines «jährliches Geschenk für den Packer, wie er sagt. *Valentin*[2]) be- «zieht auch.

«Mittwoch (19^{ten} Oct.) Nachmittag etwa 5 oder 6 Uhr werde «ich in Basel im *Storchen* eintreffen und hoffe Sie da zu treffen; «Ihre Vorlesungen und Zuhörer können kein Hinderniss sein. Bringen «Sie die verlangte Uebersicht des Buchs über die «*Geometrie mit n Dimen-* «*sionen*» endlich mit. Können Sie oder wollen Sie nicht kommen, so «denken Sie an das, was ich Ihnen so oft gesagt habe: einen Auszug von «4—6 Bogen nach Wien, meinetwegen an *Herrn von Ettingshausen,* «sich auf mich berufen, mit einem Gruss; oder nach Paris.

«Auf baldiges Sehen

Ihr

J. Steiner.»

1854. Steiner an Schläfli.

Der nachfolgende Brief Steiner's vom 10. März 1854 ist im 1. Theil an Schläfli, im 2. an Professor Ris gerichtet[3]).

Berlin, den 10. März 1854.

«*Mein lieber selbstmörderischer Freund!*

«Die mir mitgetheilten Sätze waren mir sehr willkommen, «besonders der eine, den ich falsch hatte und bald nach Paris an «*Terquem* geschickt hätte. Nämlich ich hatte: dass die Fläche f^m von «$B(f^n)$ in $m[3(n-1)^2 + 3(n-1)(m-1) + (m-1)(m-2)]$ Punkten «berührt werde, wo Sie, gewiss richtig, nur $m[3(n-1)^2 + 2(n-1)$ «$(m-1) + (m-1)^2]$ angeben. Aber damit kann ich in den speziellen «Fällen nicht zu Recht kommen, wo die f^m in Theile, Ebenen, etc. «zerfällt. In dem Betracht entsteht die Frage: a) Wenn f^m einen «Hornpunkt δ hat, für wie viele Berührungen zählt denn die durch «denselben gehende f^n, etwa für 3 oder 6? und b) für wie viele «Berührungen zählt es, wenn eine f^n die Doppellinie l_2 der f^m berührt? «Z. B. die f^4 wird von $B(f^3)$ in 132 Punkten berührt; besteht nun «f^4 aus 4 Ebenen E, so hat sie 4 δ und 6 l_2; jede E wird 12 mal

[1]) Raabe gedachte der philosoph. Fakultät der Hochschule Zürich Schläfli zur Ehrenpromotion vorzuschlagen. (Siehe Biogr. Bern. Mitth. S. 131, 132.)

[2]) Professor der Physiologie an der Hochschule Bern. † 23. V. 1883.

[3]) Dieser wichtige Brief ist nach den Poststempeln erst am 11. April 1854 von Berlin ab und am 14. in Bern angekommen.

«berührt, macht $=48$; jede l_2 wird 4 mal berührt, zählt $6.4\times x$, und «die 4 δ zählen $4\times y$; also $24x+4y=132-48=84$. — Dabei hätte «ich sehr nöthig zu wissen: «*In welcher Curve R^x die Punkte liegen,* «*in denen f^m von einer $SS(f^n)$*, d. h. von den durch irgend 3 ge«gebene f^n bestimmten Schaar-Schaar (was ich ein «*Halbnetz*» «$=HN(f^n)$ nenne) *berührt wird*». Oder mein Zweck wird auch da«durch erreicht: «*Wenn 4 beliebige f^n gegeben, so giebt es solche* «*Pole P, deren 4 erste Polaren f^{n-1} sich in irgend einem Punkte* «*Q treffen; den Ort dieses Punktes Q anzugeben, die Fläche Q^x?*» «Der Ort von P ist eine Fläche $P^{4(n-1)^3}$. — Wenn oben der $B(f^n)$, «oder insbesondere nur $B(f^2)$ sich in einer C^2 berührt, statt in R^4 «schneidet, so ist die doppelt gedachte Ebene der C^2 als eine spe«zielle Fläche f^2 anzusehen, und es ist die Frage, *wie viele von den* «$m[3+2(m-1)+(m-1)^2]$ *Berührungspunkten auf ihren Schnitt C^m* «*mit der f^m kommen?* Ich glaube 2 m. Ist es so, so ist eine weitere «Folge: «*Dass aus jedem Punkte P, im Allgemeinen, m^3 Normalen* «*auf die f^m möglich sind.*» Nun schwebt mir vor, dass *Terquem* «irgendwo bewiesen habe: dass aus P auf f^2 nur 6 Normalen gehen, «statt nach meinem Satze $2^3 = 8$. Wer hat recht? Durch eine «andere Betrachtung kam ich auch auf m^3.

«Als ich vor 6 Wochen wieder auf die f^3 kam, schien mir, wie «schon in Bern, dass ich die 27 Geraden g schon früher müsse be«obachtet haben. Nach wiederholtem Durchstöbern meiner Papiere «fand ich endlich, dass ich schon im J. 1846 und nachträglich 1850 «dieselben ziemlich ausführlich behandelt habe, jedoch nicht mit dem «Bewusstsein, dass es die allgemeine f^3 sei. Die 45 Dreiecke werden «da schon aufgezählt, und ihnen entsprechend 45 Systeme Flächen «f^2, 45 $\Sigma(f^2)$, welche die f^3 in je 3 ebenen Curven C^2 schneiden. «Unter jedem System $\Sigma(f^2)$ soll sich eine Schaar Kegel, f_0^2, befinden, «mit der unbewiesenen Angabe: «*Dass ihre Scheitel in einer f^4 liegen.*» «Ferner wird da bemerkt: «*Dass die f^3 durch die 5 Seiten a, b, c,* «*d, e eines schiefen 5 Ecks* (keine 3 Seiten in einer Ebene) *und durch* «*irgend eine 6^te^ Gerade f bestimmt sei.*» Nämlich jede Ebene E durch «f schneidet die Seiten in 5 p, die eine C^2 bestimmen, welche die f^3 «beschreibt. Auch sind die 5 Paar Geraden g (von den 27 g), welche «die f schneiden, sehr einfach bestimmt; nämlich die Seite a schneide «die Ebene (cd) in α, und die durch α und f gelegte Ebene schneide «b, c, d, e in β, γ, δ, ε, so sind $\alpha\gamma\delta$ und $\beta\varepsilon$ eins der genannten «5 Paare, 2 g. Es wird ferner behauptet: «*Die der Geraden f gegen-*

«*überstehenden 16 Geraden g sollen unter sich 192 schiefe 5 Ecke* «*bilden, und im Ganzen sollen die 27 g 2592 solche 5 Ecke bilden.*» «Ich bitte dies zu controliren und systematisiren, es fehlt mir jetzt «die Kraft dazu. Im Manuscript von 1850 stehen auch die Sylvester' «schen 5 Grundebenen E_0, aber ohne klares Bewusstsein. Die 10 «Schnittlinien l derselben liegen in der Kernfläche f_0^4 und «*ihre 10* «*Schnittpunkte p sind Hornpunkte derselben*»; ist das Letzte wahr? «Nicht wahr: es giebt nur Ein System von 5 *reellen* Grundebenen E_0, «trotz der 19 Gleichungen dritten Grads, aus denen sie folgen? — «Der Schnitt der Basis f^3 mit der Kernfläche f_0^4 ist eine R^{12}, mit der «ich mich schon ehemals sehr gequält habe; sie geht durch die 54 «Asymptotenpunkte π der 27 g. Die Pole, deren Polaren Kegel f_0^2 «sind, sind sich conjugirt, reciprok, P und Q. *Liegt nun P im Schnitt* «*R^{12}, so ist die Frage, welchen Ort Q habe, und wie sich die beiden* «*Polarkegel f_0^2 (von P und Q) zu einander und gegen die Basis f^3* «*verhalten?* Ich komme dabei immer auf Widersprüche. Es muss in «R^{12} eine bestimmte Anzahl ausgezeichnete Punkte P_0 geben, ausser «jenen 54 π. —

«Ueber die Flächen und Raumcurven seufze ich nicht minder «als Sie, und zwar schon seit Jahren; doch: «Ich seh', dass Du zu «einer Last, noch sehr gesunde Schultern hast; entschlossen bist, «mich hochzutragen, drum werd' ich Dir die Wege sagen.» Ihre «Raumcurve $R^{m \times n}$ ist sehr speziell und die allgemeine R^p, kann nur «sehr künstlich erzeugt werden; daher rührt all' unser Elend. Schon «die R^3 entsteht künstlich; durch 2 Hyperboloide (oder Kegel), die «eine g gemein haben. Die R^4 ist frei, entsteht durch 2 f^2. Die «R^5 künstlich, nämlich sie entsteht: a) durch f^3 und f^2, die nebstdem «eine g gemein haben; b) durch f^3 und f_1^3, die nebstdem entweder «1) eine R^4; oder 2) $R^3 + g$; oder 3) $C^2 + C_1^2$; 4) $C^2 + 2g$; oder «5) 4g gemein haben. Von diesen sechs R^5 ist die erste (a) die «beschränkteste und (b, 1) die freieste; durch die 5 unter (b) be«griffenen R^5 kann keine f^2 gehen. Vergleichen Sie alle sechs. *Wie* «*viele solche Gerade γ giebt es, welche die R^5 (b) in 3 Punkten schnei*«*den?* Aber noch mehr: selbst die in f^3 liegenden R^4 hat man viel«leicht dabei auch noch zu unterscheiden, danach nämlich, ob die durch «R^4 gehende f^2 die Basis f^3 nebstdem noch α) in einer C^2 (deren «Ebene durch eine der 27 g geht) oder β) in 2 nicht in einer Ebene «liegenden g schneidet. Ferner: «*Ist durch R^5 und irgend eine Ge*«*rade f die f^3 bestimmt?*» d. h. jede E durch f schneidet R^5 in 5 p, «die eine C^2 bestimmen, deren Ort die f^3 ist. Oder muss zu diesem «Zwecke f gegen R^5 eine bestimmte Lage haben? glaube nicht. — «Die R^6 ist a) als Schnitt von f^3 und f^2 beschränkt $= R^{3\times2}$; allge«meiner, aber künstlich wird sie erzeugt b) durch f^3 und $f_1{}^3$, wenn «diese nebstdem 1) eine R^3; 2) $C^2 + g$; 3) 3g; oder 4) C^3 (ebene) «gemein haben. In den 4 Fällen (b) geht keine f^2 durch die R^6. «Bei 2) und 3) giebt es noch Nüancen, je nachdem C^2 und g oder «die 3 g sich schneiden oder nicht. Frage: «*Liegen in der freien f^4 «solche allgemeinere R^6 (b)?*» Dann könnte ich die f^4 erzeugen; sie «würde x-Systeme von R^6 enthalten. Es wird keine allgemeine R^6, «als die unter (b, 1) geben!? — Bei einer R^6 (es wird wohl die «allgemeinste oder freieste sein) fand ich: «*Dass durch jeden Punkt «π in ihr drei solche Gerade γ gehen, wovon jede sie noch in irgend «2 andern Punkten π trifft*»*; so dass es also drei Schaaren von drei«mal schneidenden Geraden γ giebt; aber von allen diesen Geraden «können sich keine zwei ausserhalb der Curve R^6 treffen; keine Ge«rade γ kann die R^6 in 4 π treffen, und keine E kann sie in 6 π «schneiden, die in einer C^2 liegen.*[1]) — So fahren Sie nun fort, mit «R^7, . . . etc. — Aber dazu die Frage: «*Durch wie viele Punkte ist «die freie R^n bestimmt?*» In Rom habe ich mich damit befasst, kann «mich aber nicht erinnern und heute die Papiere nicht finden; mich «dünkt, ich schwankte damals zwischen 2 Antworten, nach der einen «war R^n durch 2 n Punkte bestimmt, wie dies bei R^3 und R^4 der «Fall ist.

«Ihre drei Sätze über die $R^{m\times n}$ sind sehr schön; der vierte «dazu betrifft die Klasse dieser Curve, d. h. die Zahl ihrer Schmieg«ungsebenen, welche durch irgend einen Punkt im Raume gehen; sie «ist $= 3mn(m+n-3)$.

«Wird f^n von beliebiger Ebene E in C^n geschnitten und werden «längs dieser die Berührungsebenen an jene gelegt, die eine ab«wickelbare Fläche bilden, «*so ist diese vom $n(3n-5)^{ten}$ Grad und «von der $n(n-1)^{ten}$ Klasse, und ihre Knotenlinie ist vom $3n(n-2)^{ten}$ «Grad.*» Ich bitte zu controliren, es ist wesentlich, weil es zugleich «der Charakter der Asymptotenfläche jeder f^m ist.

«Bei der freien f^4 giebt es doppelt berührende Ebenen E_2, die «sie in 2 Punkten a und b berühren. Der Ort der E_2 ist eine ab«wickelbare Fläche; den Grad und die Klasse, sowie den Grad der

[1]) *In welcher Fläche liegen die dreieinige Schaar Geraden γ?*

«Knotenlinie dieser Fläche zu finden; desgleichen den Ort der Berühr-«ungspunkte a und b.

«Der C^3 können Schaaren vollständige Vierseit eingeschrieben «werden. «*Können der freien C^4 auch vollständige Fünfseit einge-«schrieben werden? giebt es eine Schaar oder nur eine bestimmte An-«zahl?*» Desgleichen der C^5 vollständige Sechsseit, etc.

«Ueber die nothwendigen Punkte 1) bei Flächen, 2) bei Curven «R^n und Flächen f^m, die sich schneiden, und 3) bei Curven R^n und «R^m, die in derselben Fläche liegen, habe ich auch noch nichts Er-«hebliches gefunden, und in diesem Moment ist mir gar nichts gegen-«wärtig, ich hoffe aber nächstens daran zu kommen. In Crelle's Journ. «hat Jacobi lateinisch darüber geschrieben, d. h. über die Flächen (1), «aber es wird nur das Einfachste, Allgemeine sein, was sich von selbst «versteht.

«Ihre Angabe: «dass die Doppellinie einer f^ν vom $\frac{1}{2}\nu(\nu-4)^{\text{ten}}$ «Grad sei», macht mich stutzen, da sie also bei f^5 vom $2^1/_2$ Grad sein «müsste.

«Es thut mir leid Ihren Herzenswunsch in Rücksicht der Rela-«tion zwischen den Abständen der Brennpunkte nicht genügend be-«friedigen zu können. Denn Einmal ist der Satz mehr durch Divi-«nation entdeckt, als streng bewiesen, und zum Andern entsprang er «aus sehr complicirten Betrachtungen über die Curven 3^{ten} Grads, be-«treffend involutorische Eigenschaften, eingeschriebene vollständige «Vierseit und dazu noch — mich fast erdrückende — Schaaren und «Netze von Kegelschnitten. Dies waren bisher theils noch Staatsge-«heimnisse, aber in diesem Augenblicke sind sie mir selbst fast un-«bekannt. An Bekanntes anknüpfend, kann ich Ihnen kurz folgendes «andeuten. Sie wissen die Trippelcurve C^3 (und somit jede C^3 über-«haupt) hat conjugirte Punkte p und q; «*alle Paare p und q be-«stimmen mit jedem Punkt a in C^3 ein (Involutions-) Strahlsystem.*» «Nun liegen die Brennpunkte der dem vollständigen 4Seit eingeschrie-«benen C^2 in einer *besondern* Co^3, bei welcher eine bestimmte Gerade «im Unendlichen liegt, und bei welcher die Brennpunktenpaare gerade «jene conjugirten Punkte p und q sind; was dann den Satz zur Folge «hat. Er muss demnach in allgemeinerer Form bei jeder C^3 statt-«finden, rücksichtlich je 3^{er} Paare conj. Punkte p und q und vielleicht «eines Paars conj. Geraden. Das können wir einmal mündlich ver-«handeln; lassen Sie es für jetzt. — Von Ihrer «Aussage, die Sie «einst über die Brennpunkte gethan haben wollen», weiss ich leider «nichts, und verstehe auch nicht, was Sie dabei weiter behaupten. — «Ihr Satz über die Zahl der E, welche $R^m \times X^n$ 4punktig berühren, ist «mir neu, ich werde ihn kaum beweisen können. Aber wie steht «es mit R^p?

«Noch ein Sätzchen: «*Bei der freien C^n ist die Evolute von «der n^{2ten} Klasse und vom $3\,n(n-1)^{ten}$* Grad; sie hat $3\,n\,(2\,n-3)$ «Rückkehrpunkte, wovon n auf G_∞ liegen, und zwar G_∞ die Rück-«kehrtangente in jedem ist. Es giebt $2n\,(3\,n-5)$ Kreise, welche die «C^n 4punktig osculiren etc.» «Bei B (C^n) ist der Ort aller Doppel-«tangenten eine Curve $2n\,(n-2)\,(n-3)^{ter}$ Klasse, und der Ort ihrer «Berührungspunkte ist vom $(n-3)\,(2\,n^2+5\,n-6)^{ten}$ Grad.

«Sie haben mich kühn herausgefordert — ich habe 3 Tage «hieran geschrieben — nun mangen Sie alles! Besonders bitte ich «Sie, die am Rande durch Vertikalstriche markirten Sachen [1]) bald zu «machen, weil ich dieselben nach Paris senden will; ich hoffe die f^3 «mit den 27 g nebst Anhang wird Beifall finden; ich habe *Poncelet* «schon davon geschrieben, er freut sich. Da die Correspondenz mehr «in meinem als Ihrem Interesse geschieht, so brauchen Sie nicht zu «frankiren.

Ihr

Steiner.

«Herr Professor Ris! Wenn Ihnen Urias diese Zeilen über-«bringt, so stellen Sie ihn nicht gerade an die Spitze, wo der Kampf «am heissesten ist, damit er umkomme, wohl aber mögen Sie auf «ihn Acht haben (wie Jehova's Meisterknecht auf Hiob) und etwa alle «8 Tage bei ihm nachfragen, ob Folgendes geschehen sei:

«1. Die Exemplare der Wiener Abhandlung zu versenden, be-«sonders an die ihm einst in meinem Zimmer (im Adler) diktirten «54 Adressen, und andere die er selbst wählen sollte. Die Exemplare «für Frankreich können in ein Paket gepackt, darauf geschrieben: «A Monsieur le Président de l'académie de Sciences à Paris, und der «Gesandtschaft übergeben werden. Auf jedes Exemplar ist zu schrei-«ben: A Monsieur N. Hommage de l'auteur, desgleichen auf das für «die Akademie: A l'académie des sciences, Hommage de la part de «l'auteur. Ebenso für England an die Société Royale à Londres durch «Gesandtschaft oder Buchhändler.

---

[1]) Es sind dies die hier Cursiv gestellten Sätze.

«2. Kleine Aufsätze von einer, 2, 3 oder x Seiten gross, die «irgend ein bemerkenswerthes Resultat enthalten, neu oder ein pi-«quanter Satz aus der Wiener- oder einer Crelle'schen Abhandlung «entnommen, französisch an Liouville zu schicken, damit sein Name «(Schläfli's) erst in Umlauf kommt.

«3. Sodann aus der Weltüberstürmenden, aus der Erdewälzenden «Abhandlung[1]) einen verständlichen Auszug, der alle Hauptresultate ent-«hält — möge derselbe 4 oder 12 Bogen stark werden — an Liou-«ville zur Vorlegung der Akademie, oder unmittelbar an diese schicken.

«Das sind Dinge, die ich auf jedem Spaziergang, gewiss 30 Mal «gepredigt habe; aber er ist ein Ziegel[2]) — ein Selbstmörder aus Fahr-«lässigkeit — er will sein Licht nicht leuchten lassen. Den Zürcher «Doctorhut vertrödelt: Er soll die Exemplare nach Zürich spediren, «vielleicht geht es noch.

«In der Hoffnung, dass Sie trotz der Maiwahlen hierfür sorgen «werden, grüsse ich Sie freundlichst.

J. Steiner.»

NB. Nach einem Beschluss der Wiener Akademie vor 1 oder $1^1/_2$ Jahren zahlt dieselbe an Auswärtige kein Honorar mehr.

Das Nachfolgende ist ein unvollständiges Conzept eines Briefes **Steiners** an **Professor Ris** vom 25. III. 1854; wir vermuthen, es ist dies der Anfang eines Conceptes zum vorigen Brief, der allerdings vom 10. März datirt ist, aber erst den 11. April von Berlin abgegangen und am 14. in Schläfli's Hände gelangt.

Berlin, 25. März 1854.

Veehrter Herr Professor und Freund!

«Ich habe Veranlassung, etwas seltenes zu thun, nämlich «zu zwingen, ein paar Zeilen zu schreiben. Wenn ich nicht irre, so «waren Sie so freundlich, zu verlangen, dass wenn ein gewisses Er-«eigniss eintreten sollte, Ihnen davon Nachricht zu geben. Demzufolge «beehre ich mich nun, Ihnen anbei eine Copie der erhaltenen freudi-«gen Botschaft zuzustellen. Vielleicht haben Sie die Sache schon aus «den gestrigen Berliner Zeitungen erfahren. Das fast einstimmige Votum «hat mich sehr frappirt. Falls Sie von dieser Mittheilung Gebrauch

[1]) Ueber das vielfache Continuum.

[2]) Uebername, den Steiner Schläfli gab, weil der letztere auf äussere Formen nicht viel Gewicht legte.

«machen, verlasse ich mich auf Ihre umsichtige Klugheit, dass ich «nicht als Helfer erscheine. Die Mathematische Section hat im Gan- «zen (für die ganze Welt ausser Paris) nur 6 Correspondenten; die «ganze Akademie der Wissensch. bestehend aus 11 Sectionen, nur 100.

«Ueber Politik schreibe ich nicht, die deutsche ist zum K . . «Brechen; das hiesige Kraut-Junkerthum hat vorläufig gesiegt — aber «das Ende vermag kein Sterblicher zu weissagen, und der Bölima — «ich wollte sagen die Vorsehung verkündet es nicht zuvor.

«Das Muggerparteisystem hat es hier soweit gebracht, dass *Vatke* «und *Benari*, die sonst volle Auditorien hatten, im letzten Semester «theils gar keine Vorlesungen hielten, theils nur vor 3—5 Zuhörern. «Denn die bei ihnen hören, kommen schon beim Examen und später «bei der Anstellung übel weg.

«Unserm Freunde Schläfli sagen Sie gefälligt: «*ich hätte ihn* «*ganz verworfen*». Denn alles Reden, Bitten, Donnern, Flehen hilft «nichts. Gewiss hat er die 100 Exemplare noch nicht versendet. «Nach Basel ist er nicht gekommen und hat mir nicht einmal geant- «wortet; auch nicht den vollständigen Titel seines schönen Werks (die «23 bogige Abhandlung) geschickt. So weiss ich nicht, was ihm in «Kopf gefahren, ob er mir etwas übel genommen und mich plötzlich «verworfen hat. Die Sache ist mir sehr fatal, weil er auf seine Be- «förderung doch etwas loslassen musste. Raabe hatte die Absicht, ihm in «Zürich den Dr. hon. caus. zu erwirken (als Gegenehre von W.)[1], dess- «halb forderte ich ihn auf, auch an *Mousson* und *A. Müller* Exempl. «zu schicken — aber — —

«Es ist nicht genug, dass er mit ungeheurer Kraftanstrengung «mir behilflich ist, sondern er muss auch für sich selbst bedacht sein, «und meine Behauptungen über seine wissenschaftlichen Leistungen, die «ich höhern Ortes aufstellte, rechtfertigen, um seine Stellung ferner zu «bessern. — Vielleicht hat er mir übel genommen, dass ich darauf drang, «er soll sich mit Mareli vereinen, damit er in Ordnung gehalten und stets «an das erinnert würde, was er zu arbeiten hätte. Unter fremden «Leuten ist es ein Jammer, besonders wenn er erst noch älter ist.

«Mit meiner Gesundheit geht es so ziemlich; nur fehlt die «Jugendkraft und die Phantasie. Ich habe mich diesen Winter viel «mit Arbeiten abgemüht, bin aber nicht auf geeignete Probleme ge- «stossen, welche ich Schläfli zur Lösung senden konnte. Nur etwa «folgende, wenn er mich nicht «verworfen» hat.

[1]) Von Wolf, der von Bern den Doctorhut erhielt.

«Hoffentlich wird es Herr Schläfli nicht übel nehmen (wie 1848), «aus Ihrer Hand folgende Aufgaben zu erhalten:

«1. Wenn in einer Ebene 6 beliebige Kegelschnitte C^2 gegeben «sind, so können im Allgemeinen, nicht 6 Flächen 2ten Grads, f^2, durch «dieselben so gelegt werden, dass sie irgend 6 Punkte, p, im Raum «gemein haben.

«2. Dass die allgemeine f^4 keine Gerade g enthält, haben Sie, «wenn ich nicht irre, schon in Bolligen verificirt. Aber zu meinem «grossen Leidwesen kann dieselbe f^4 auch keine Raumcurve 4ten Grads, «R^4, (d. h. Schnitt zweier f^2) enthalten, und demzufolge auch keine R^8, «durch welche eine f^3 gehen kann. — Noch weniger wird also die «allgemeine f^5 solche R^4 enthalten können. Dadurch bin ich leider «ausser Stand gesetzt, diese allgemeinen f^4, f^5, ... auf synthetischem «Wege, nämlich durch niedrigere Flächenbüschel, zu erzeugen. Es «wäre fatal, wenn hier die Geometrie ein Ende hätte.

«Es schwebte mir in Bern und seither immer vor, als habe ich «die 27 g und die 5 Grundebenen in f^3 schon früher gehabt. Vor «3 Wochen stöberte ich endlich meine Papiere durch und fand dann «in Untersuchungen v. J. 1850 alles vor, jedoch schien das Bewusst-«sein zu fehlen, dass es die allgemeine f^3 sei. Auch die 45 Ebenen, «in denen die 27 g zu 3 liegen, sind angezeigt, aber nicht die Eigen-«schaften der Trieder, welche Sie hinzugefügt haben. Dagegen wieder «andere Eigenschaften von f^3 u. s. w.»

Die **Notizen**, welche sich hier anschliessen, sind Concepte von Fragen Steiner's an Schläfli vom 28. März und 31. März 1854 und beziehen sich auf Sätze, die Steiner vor Terquem entdeckt hatte.

28. März 1854.

f^3.

«Endlich die A_8-fläche der f^3.

«Werde f^3 von E in C^3 geschnitten; längs E die B. E. [1] A. an f^3, «umhüllen einen f_0^x, enthaltend eine Knotenlinie α^z und Schaar «Gerade a, $=$ Schnittlinien der sich folgenden A und $=$ Tangenten «der α^z, und Fläche y^{ten} Grads bildend, $a^y = f^x$; wo also x die «Klasse, nämlich die Zahl der durch jeden beliebigen Punkt π gehenden «B. E. A. bezeichnet.

[1] B. E. = Berührungsebene.

«Da alle B. E., die durch π gehen, die f^3 längs einer R^6 be-
«rühren, und diese die C^3 (weil ihre E) in 6 Punkten β schneidet,
«so gehen 6 A durch π, und folglich ist

$$x = 6\,;\ f^x = f^6.$$

«Rücken 2β sich näher, bis sie sich vereinen in β_0, so werden
«die zugehörigen 2 A sich entsprechend, und ihre a geht durch π.
«In diesem Falle aber schneidet die Polare f^2 von π (auf f^3) die E
«in einer C^2, welche die C^3 in β_0 berührt; und umgekehrt, findet
«diese Berührung statt, so geht die dem β_0 entsprechende a durch π.

«Bewegt sich π in einer beliebigen Geraden g, so bilden seine
«Polaren einen $B(f^2)$, der die E in einem $B(C^2)$ schneidet, unter denen
«sich 12 solche $C_0{}^2$ befinden, welche die C^3 in 12 β_0 berühren; und
«die diesen β_0 zugehörigen a treffen die ihnen entsprechenden π in
«g; folglich begegnet jede g im Ganzen 12 a, und folglich ist

$$y = 12\,;\ a^y = a^{12} = f^6.$$

«Läge π in der Knotenlinie α^z, wäre es eine α, so müsste die
«entsprechende $C_0{}^2$ die C^3 osculiren, d. h. in einem Punkte β_3 3-
«punktig berühren. Um den Grad z zu finden, hat man demnach wie
«folgt zu verfahren: «*Bewegt sich π in einer beliebigen Ebene g, so
«bilden seine Polaren f^2 auf f^3 ein HN (f^2), welches die E in einem
«$N(C^2)$ schneidet; so viele $C_3{}^2$ sich in dem letztern befinden, welche
«die C^3 in irgend einem Punkte β_3 3-punktig berühren, in ebenso vielen
«Punkten a schneidet g die α^z, und ebenso gross ist folglich z.*» Die
«Beziehung der C^3 und $HN(f^2)$ zu f^3, bringt wohl nicht C^3 und $N(C^2)$
«in gegenseitige Abhängigkeit? sondern sie sind als frei anzusehen.
«Dies bleibt also noch zu lösen.

«*So ist also auch die $(A_s F)$ der $f^3 = A_s{}^6 = a_s{}^{12}$, d. h. von
«der 6ten Klasse und vom 12ten Grad.*» — Die α^z ist mindestens 9ten
«Grads, z = oder >9. Denn fällt g auf E, so gelten die wp der
«C^3 für α, also 9 α in E. Es wäre schön, wenn $(A_s F) = A_s{}^6 =$
«$\alpha^9 = a_s{}^{12}$. Da a^{12} von jeder Ebene g in einer γ^{12} geschnitten wird,
«so muss bei E zu der C^3 noch eine γ^9 kommen, sind es die 9 wt
«der C^3? wahrscheinlich.

«Ebenso folgt bei f^4, wenn sie von E in C^4 geschnitten und
«längs dieser alle B. E. A. gelegt werden, dass die

$$«(AF) = A^{12} = a^{28} = \alpha^z;\ z = 24\ ?$$

«Und für f^n:

«$(AF) = A^{(n-1)n} = a^{n[n+2(n-1)-3]} = a^{n(3n-5)} = \alpha^{z = 3n(n-2)}$?
«wobei immer $a^{n(3n-5)}$ von der E in $C^n + 3n(n-2)$ wt geschnitten «wird.

«Umgekehrt, von R^n ausgehend. Es ist $R^3 = \alpha^3 = A^3 = a^4$; «$R^4 = \alpha^4 = A^{12} = a^8$; wie weiter? Wie wird R^5 erzeugt?

«*Le lieu de tous les points Po, dont la première polaire est un* «*cône So², est une surface du 4me degré*, Po^4.» L'intersection des deux «surfaces f^3 et Po^4 est une courbe à double courbure du 12me degré «qui joue de propriétés intéressantes.

«II. La surface générale du 3me degré, S^3, contient en tout 27 «droites d, propriété qui est déjà énoncée, comme on m'a dit par «M. Cayley. Ces 27 droites jouissent des propriétés suivantes:

«1. La surface S^3 contient 27 systèmes de sections coniques; «car chaque plan qui passe par une des droites d coupe la «surface en outre dans une conique C^2. Donc, les plans des «27 systèmes de coniques, $S(C^2)$, passent respectivement par «les 27 droites d.

«2. Chacune des 27 droites d est coupé par 10 autres, qui se «trouvent deux à deux dans un même plan et se coupent «par conséquent elles mêmes et forment avec la première «un triangle. Il y a en tout 45 fois 3 droites d qui forment «un triangle ou qui sont situées dans un même plan, E, et «chaque droite appartient à 5 plans ou est côté de 5 triangles. «Désignons la première droite par d_1, les 5 paires qui la cou-«pent par d_2, il reste encore 16 droites d, que nous appel-«lerons «*les 16 droites opposées à la première d_1*. La droite «d_1 est coupée par les 5 paires.

31. März 1854.

«1. Haben f^3 und H_1^2 eine g gemein, so haben sie noch R^5, «aber diese ist nicht die allgemeine R^5.

«2. Haben f^3 und f_1^3 eine R^4 gemein, so schneiden sie sich «noch in einer R^5; durch diese geht keine f^2; — warum «soll nicht ein H_1^2 durchgehen und noch durch g und g_1? «Weil für R^5 wenigstens 10 p willkürlich anzunehmen sind; «für f^2 nur 9. — Auch wenn f^3 und f_1^3 eine $R^3 + g$ oder «$C^3 + g$ gemein hat.

«3. Der Schnitt von f^3 und f^2, oder von f^3 und f_1^3 die C^3 gemein «haben, ist nicht die allgemeine R^6; ist der Schnitt von f^3

«und f_1^3, die R^3 (oder 3g, oder C^2 und g, die nicht in E) «gemein haben, die allgemeine R^6? — Können f^3 und f_1^3 «auch $2 R^4 + g$ gemein haben? oder $3 R^3$? — Müssen sich «$2 R^4$, die in f^3 liegen, nothwendig schneiden? wenn sie zu «gleicher Schaar gehören, oder nicht? Dito R^6 und R^3 in f^3?

«4. *Giebt es R^6 in der allgemeinen f^4?* Durch eine R^6 wären «∞ viele bedingt; vorausgesetzt, dass durch die allgemeine «R^6 immer f^3, oder $SS(f^3)$ gehen; denn diese schnitten die «f^4 in neuen $SS(R_1{}^6)$, und durch jede $R_1{}^6$ ginge $SS(f_1{}^3)$ und «gäbe $SS(R^6)$, zu der jene R^6 gehörte. Gehen $3 f^3$ durch «R^6, so haben sie paarweise noch $3 R^3$: wie viele gp haben «diese $3 R^3$? — Daraus zu schliessen, wie viele gp die R^6 «zählt, da die $3 f^3$ nur 27 gp haben.

«5. Die f^2 wird vom $B(f_1{}^2)$ 12 mal berührt. Wenn $f^2 = K^2$, «wieviel zählt dann die durch den M des K^2 gehende $f_1{}^2$? «für 2, 3, 4 etc.? Wenn $f^2 = 2 f^1 = 2E$, so wird jede «E von $3 f_1{}^2$, ist $= 6$; die Schnittlinie l wird von $2 f_1{}^2$ «berührt, muss $2 \times 3 = 6$ zählen. Der $B(f^2)$ berührt «die f^3 $27 + x$ mal. Für f^3 und $3 E_1$ jede E 3 mal, $=$ «9; jede l 2 mal, $= 3 \cdot 2 \times 3 = 18$; die durch p gehende «$f^2$ zählt x; macht $27 + x$. Bei $f^3 = f^2 + E$; die f^2 «$= 12$ mal, $E = 3$ mal, $= 15$; Schnitt $C^2 = 12 + x$ mal, (bricht hier ab) — — — — — — — — —

«nämlich der Schnitt von $B(f^2)$ und E ist $B(C_1{}^2)$ und dieser berührt «C^2 6 mal, zählt je 3fach, so ist $x = 6$. Dann zählt also auch vor- «hin die Ecke p 6 mal.

«Also berührte $B(f^2)$ den K^2 6 mal und die durch den Mittel- «punkt M gehende f^2 zählte für 6 mal. Und $B(f^2)$ berührte die f^3 «$27 + x = 33$ mal. Danach würde weiter folgen, dass:

«$B(f^2)$ die $f^4 = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 72$ mal berührt, «abgezählt nach dem speziellen Falle, wo $f^4 = 4$ E.

— «Wenn $f^4 = f^3 + E$, so kommen auf $f^3 = 33$; auf $E = 3$; «ihr Schnitt C^3 wird von Schnitt $B(C^2)$ 12 mal berührt macht, als «3fach zählend $= 36$; zusammen $33 + 3 + 36 = 72$, richtig.

— «Wenn $f^4 = f_1{}^2 + f_2{}^2$; für $f_1{}^2 = 12$ und $f_2{}^2 = 12$; für «Schnitt $R^4 = 48$, wonach er von $B(f^2)$ wohl 16 mal berührt werden «müsste; wenn aber $R^4 = 2 C^2 = R^2 + R_1{}^2$, so werden diese von «$B(C^2)$ und $B(C_1{}^2)$ in $2 \cdot 6$ Punkten berührt $= 12$, aber die Schnitte «2δ von R^2 und $R_1{}^2$ zählen dazu noch doppelt, was 16 giebt; und «die durch δ gehende f^2 zählt dann für 6. Also: *R^4 wird von $B(f^2)$ «16 mal berührt.*

— «Wenn $f^4 = f_1^2 + 2E$, so wird $f_1^2 = 12$, die $2E = 6$ mal, «die $2C_1^2$ (deren Schnitte) $= 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$; die 1 der 2 E wird «2 mal berührt, zählt $= 2 \cdot 3 = 6$; die 2δ (der 1 und f_1^2) zählen «$2 \cdot 6 = 12$ mal, also $12 + 6 + 36 + 6 + 12 = 72$.

«So würde folgen; dass f^n von $B(f^2)$ im Allgemeinen:

$$\overset{nE}{3n} + \overset{\frac{1}{2}n(n-1)\,l}{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 3} + \overset{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\,\delta}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6}$$

$= n[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + 3] = n(n^2 + 2)$ mal be- «rührt wird.

«6. Nun haben wir zu sehen, wie oft $B(f^3)$ eine f^n berührt. Der «Schnitt mit E ist $B(C^3)$ mit 12δ, was anzeigt, das 12 f^3 die E be- «rühren.

— «Daher wird f^2 $2 \cdot 12 + x = 24 + x$ mal berührt, nämlich «für $f^2 = 2E$ zählt die 1 für x mal; in der That wird 1 4 mal be- «rührt, zählt jede für y (vorhin $= 3$), so ist $x = 4y$ ($= 4 \cdot 3 = 12$?).

— «Ein f_1^3 würde danach $3 \cdot 12 + 3 \cdot 4y + z$ mal berührt $=$ «$36 + 36 + z = 72 + z$ mal; wobei für $f_1^3 = 3E$, die z mal auf δ «kommen. Für $f_1^3 = f^2 + E$, hat man $24 + 12 = 36$ (in f^2), 12 «(in E), $= 48$ und im Schnitt C^2 durch $B(C^3) = 10$ Berührungen «jede zu 3 gezählt, $= 30$, also $48 + 30 = 72 + z$, folglich auch «hier $z = 6$, d. h. die durch δ gehende f^3 zählt für 6 Berührungen, «so dass $B(f^3)$ eine f_1^3 im Allgemeinen

78 mal berührt.

— «Danach wird f^4 von $B(f^3) = \overset{4E}{4 \cdot 12} + \overset{6l}{6 \cdot 12} + \overset{4\delta}{4 \cdot 6}$
$= 144$ mal berührt.

— «Und ebenso f^n von $B(f^3) = n \cdot 12 + \frac{n(n-1)}{1\ 2} \cdot 12 + \frac{6n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$= n[(n-1)(n-2) + 6(n-1) + 12]$

$= n(n^2 + 3n + 8)$ mal berührt.

«7. Der $B(f^n)$ berührt eine $E = 3(n-1)^2$ mal; eine $g = 2(n-1)$ «mal. Daher wird eine f^2, als 2 E mit 1, $= 2 \cdot 3(n-1)^2 + 2(n-1)$ «$\times 3 = 6n(n-1)$ mal berührt.

— «Eine f^3 oder 3 E mit 3 1 und δ wird

«$3 \cdot 3(n-1)^2 + 3 \cdot (2n-2) \times 3 + 6$ mal berührt.

— «Die f^4 oder 4 E mit 6 1 und 4 δ wird

«$4 \cdot 3(n-1)^2 + 6 \cdot (2n-2) \cdot 3 + 4 \cdot 6$ mal berührt.

— «Und eine f^m oder $mE + \frac{1}{2} m(m-1) l + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta$

wird $m \times 3(n-1)^2 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \times 2(n-1) \cdot 3 +$

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times 6,$

$= m\,[3(n-1)^2 + 3(m-1)(n-1) + (m-1)(m-2)],$

$= m\,[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)]$ mal berührt.

$\| = m[3(n-1)^2 + 2(n-1)(m-1) + (m-1)^2]$ nach

«Cima Bue (Schläfli).

«Für $m = n$ kommt:

$$= 6\,n(n-1)^2$$

«dass $f_1{}^n$ von $B(f^n) = n(n-1)(7n-8)$ mal berührt wird.

«*Daraus ist zu schliessen, dass im HN (f^n) der Ort der B. P. «oder der Hornpunkte*[1] δ *eine* R^x *ist, wo*

$$«n \cdot x = 6\,n(n-1)^2, \text{ also}$$

$$«x = 6(n-1)^2, \text{ folglich}$$

«*eine* $R^{6(n-1)^2}$ *ist.*

«Auch ist nun zu finden, wie oft eine R^y von $B(f^n)$ berührt wird.

«Der $HB(f^n)$ hat nothwendige n^3 Grundpunkte q; durch $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 3$ derselben ist der Büschel bestimmt, und «damit auch die übrigen

$$n^3 - \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) + 3 = \frac{n-1}{6}(5n^2-n-12)$$

«Punkte q. Oder man hat den Satz (analog, wie Curve in E):

«*Durch* $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 3$ *beliebig gegebene Punkte q «geht eine S(f^n), welche Hornpunkte* δ *haben, und der Ort der letztern «ist eine Raumcurve 6* $(n-1)^{2\text{ten}}$ *Grads,* $R_1{}^{6n}$, (— aber sie geht «nicht durch die q und hat sie zu dp, wie ich anfangs glaubte). Erst «bei $N(f^n)$, wenn es $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 4$ Grundpunkt q hat, «und der Ort der δ eine Fläche δ^z ist, *hat diese die q zu Horn«punkten, weil zur Bestimmung einer* f^n *der angenommene hp für 4 «bestimmende Punkte zählt, also jeder jener q als hp angenommen «werden kann und dadurch die* f^n *gerade bestimmt ist.*

---

[1]) Siehe Brief von 30. April 1854. Hornpunkte = Knotenpunkte.

«8. Welche Modificationen treten ein, wenn der $B(f^n)$ ein be«sonderer wird? z. B. wenn, für $n = 2\nu$, er sich in einer $R^{\frac{1}{2}n^2}$ be«rührt, statt in R^{n^2} schneidet? wobei eine Doppel-f^ν durch $R^{\frac{1}{2}n^2}$ «geht und zu $B(f^n)$ gehört. Diess ist dadurch bestimmt, dass man eine «f^n und $f^\nu = \frac{1}{2}n$ annimmt; ihr Schnitt ist $R^{\frac{1}{2}n^2} = 2\nu^2$. «*Ist dabei der «ganze Schnitt von f^ν_2 mit der f^m als Berührung anzusehen? oder «nur diejenigen Punkte, in welchen $R^{\frac{1}{2}n^2}$ die f^m schneidet?*» Das wären «$m \cdot \frac{1}{2}n^2$ Punkte δ, und die übrigen f^n in $B(f^n)$ berührt, dann die «f^m nur noch

$$m[(m-1)(m-2) + 3(n-1)(m+n-2)] - \frac{1}{2}mn^2 \text{ mal.}$$

$$= m(m-1)(m-2) + 3m(m-1(n-1) + 3m(n-1)^2 - \frac{1}{2}mn^2$$

$$\left| \frac{1}{2}m(5n^2 - 12n + 6).\right.$$

«Für $B(f^2)$ insbesondere wird $f^\nu_2 = E$ und $R^{\frac{1}{2}n^2} = C^2$ in E «Schnitt von E mit $f^m = C^m$, und von C^2 mit f^m d. i. bloss mit C^m, «$= 2 \cdot m$ Punkte δ_1, so dass, wenn diese allein zählen, noch «$m[(m-1)(m-2) + 3m] - 2m = m(m^2 + 2) - 2m = m^3$ Punkte δ «bleiben.

«Daraus würde folgen, wenn $B(f^2)$ concentrische Kugeln sind «(also nach Poncelet E à l'infini und C^2 imaginär), «*dass jeder Punkt «p der Mittelpunkt von m^3 Kugeln ist, welche eine gegebene f^m be«rühren*»; Oder: «*Dass aus jedem Punkte p m^3 Normalen auf die «Fläche m^{ten} Grads gehen.*»

«Dies stimmt mit dem andern Prinzip überein, wenn f^m um 2 «Axen durch p unendlich kleine Drehungen macht; sie schneidet sich «selbst in 2 R. C., R^{m^2} und $R_1^{m^2}$, und diese schneiden einander in «dem m^3 Punkte δ. Also Terquem geirrt.

Schläfli an Steiner.

Mein theurer Freund!

Aus einem Brief von Ihnen an Ris bekomme ich zwei Aufgaben, an deren Stelle ich theils Schwereres, theils Mittheilungen erwartet hätte:

Ad 1⁰ Flächen zweiten Grades, welche 6 Punkte gemein haben, sind ein spezieller Fall einer dreifachen Schaar; eine solche ist durch 4 willkürlich gegebene Flächen bestimmt. Wird die dreifache Schaar durch irgend eine Ebene geschnitten, so sind auch die entstandenen Kegelschnitte eine dreifache Schaar, d. h. wenn vier derselben bekannt sind, so ist die Gesammtheit aller übrigen schon bestimmt, und wenn von irgend einem fünften z. B. drei Punkte gegeben sind, so ist er schon bestimmt. Wenn demnach in einer Ebene auch nur 5 Kegelschnitte beliebig gegeben sind, so gehen keine 5 Flächen zweiten Grades durch, welche einer dreifachen Schaar angehören, also in specie keine, welche 6 Punkte gemein haben. Sind aber in der Ebene nur 4 Kegelschnitte gegeben und von den 6 Punkten, welche die durchgelegten Flächen zweiten Grades gemein haben sollen nur drei beliebig gegeben, so durchlaufen die drei übrigen eine Curve.

Ad 2° Es kömmt hier Alles auf die Richtigkeit dieses Axioms an: «Wenn V das Polynom einer algebraischen Fläche bedeutet, welche den Durchschnitt zweier Flächen, deren Polynome F, f sein mögen, ganz enthält, so ist $V = F\,\varphi + f\,\Phi$, wo Φ und φ wieder zwei Polynome bedeuten.» Besteht dieses Axiom, so seien die vier Hülfspolynome, in fallender Reihe geordnet, Φ, φ, F, f von den Graden $m - p$, $m - n$, n, p. Man setze $S = \frac{1}{2}\,p\,(p^2 + 11) - (m - n)\,n\,p - 1$.

Nehmen wir jetzt die Fläche V als beliebig gegeben an und verlangen von ihrem Polynom die obige Form, so ist die Zahl der nach Abzug aller Bedingungen noch übrigen verfügbaren Grössen

1° S, wenn $m - p > m - n \gtreqless n > p$.

2° $S - 1$, wenn $n = p$ $m > 2\,p$.

3° $S - 2$, wenn $n = p$ $m = 2\,p$.

Im ersten Fall hat S immer einen negativen Werth, die Fläche V ist also immer bornirt; z. B. für $m = 4$, $n = 2$, $p = 1$ ist $S = -1$, d. h. die Fläche vierten Grades ist einfach bornirt, wenn sie von einer Ebene in 4 Punkten berührt werden kann (wo dann die Ebene die Fläche in 2 Kegelschnitten schneidet). Im zweiten Fall ist $S - 1$ immer negativ, sobald $p \gtreqless 2$ genommen wird; für $p = 1$ ist die einzig mögliche freie Fläche diejenige dritten Grades, d. h. sie enthält die bekannten 27 Geraden. Die Fläche vierten Grades wird für $p = 1$ schon einfach bornirt; für $p = 2$ ist schon die Fläche 5. Grades vierfach bornirt, d. h. wenn sie eine $C^2 \times {}^2$ enthalten soll. Im dritten Fall ist $S - 2 = o$ für $p = 1$, die Fläche zweiten Grades also frei, wenn sie Geraden enthalten soll; aber schon für $p = 2$ wird $S - 2 = - 1$, d. h. die Fläche 4. Grades ist einfach bornirt, wenn sie Durchschnitte zweier Flächen zweiten Grades $(C^{2 \times 2})$ enthalten soll; die Fläche 6. Grades wird 10 fach bornirt, wenn sie $C^{3 \times 3}$ enthalten soll u. s. f.

Dass ich das erwähnte Axiom und andere ähnliche nicht beweisen kann, erschwert mir die Aufgabe, für Flächen und räumliche Curven etwas aufzustellen, was der Theorie der nothwendigen Punkte bei den ebenen Curven entspräche. Unter vielen zum Theil verwickelten Sätzen lege ich Ihnen folgenden zur Beurtheilung vor:

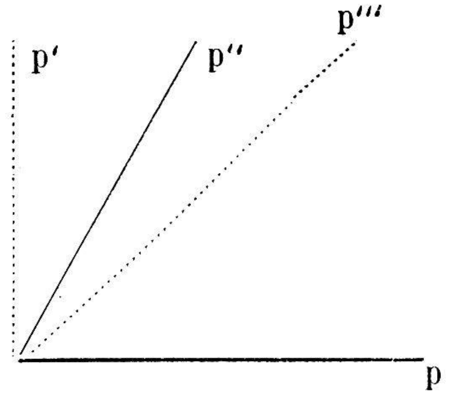
«Wenn durch die $n\,p\,q$ Durchschnittspunkte von drei Flächen n^{ten}, p^{ten}, q^{ten} Grades eine Fläche m^{ten} Grades, die keiner der vorigen an Grad nachsteht, gelegt werden soll, so findet man die Zahl der nothwendigen Punkte auf folgendem Wege. Man entwickle den Ausdruck

$$y^{-m-1}(y^n - 1)(y^p - 1)(y^q - 1),$$

lasse die Potenzen von y, welche negative Exponenten haben daraus weg, setze dann $y = 1 + x$ und entwickle nach den Potenzen von x; dann ist der Coefficient von x^3 die Zahl der nothwendigen Punkte.»

Vielleicht interessirt Sie folgender Satz über die Punkte einer freien Curve $m \times n^{ten}$ Grades, in denen sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. Sie liegen auf einer Fläche $[6(m+n) - 20]^{ten}$ Grades, so dass ihre Zahl $mn\,[6(m+n) - 20]$ beträgt; dieses ist ein Satz, weil dadurch unter den genannten Punkten $\frac{mn}{2}(m+n-4)+1$ nothwendig werden.

Es ist aber auch klar, dass die Fläche bei weitem nicht bestimmt ist. Unter den unzähligen möglichen Flächen kann man eine durch folgende Bedingungen angeben. Es seien A, B zwei Flächen m^{ten} und n^{ten} Grades, die sich in jener Curve schneiden, μ ein noch zu bestimmender Punkt. Seine in Beziehung auf A, B genommene Polarebenen a, b, die Polarflächen zweiten Grades α, β. Es sei ferner in Bezug auf die Basis B, wenn man α als Direktrix annimmt, P, die erste Polarenveloppe, dagegen P′ die zweite Polarenveloppe für die Basis A und die Ebene b als Direktrix; endlich sei P″ der Ort jedes Pols, dessen in Bezug auf B genommene Polarebene seine in Bezug auf A genommene Polarfläche zweiten Grades berührt. Nimmt man nun in Bezug auf alle drei Flächen P, P′, P″ als Basen die Polarebenen des Punktes μ, nämlich p, p′, p″, so werden sich diese in einer und derselben Geraden schneiden. Man lege eine vierte Ebene p''' so durch, dass



$$\frac{\sin \measuredangle\,[p\,p''']}{\sin < (p'''\,p'')} = 2\,\frac{\sin < (p\,p')}{\sin < (p''\,p')}$$

wird.

Wenn man dieselbe Construktion mit Vertauschung der Flächen A, B wiederholt, so erhalte man die Ebene q'''. Verlangt man nun, dass alle vier Ebenen a, b, p''', q''' einen Punkt gemein haben, so ergiebt sich als Ort des Punktes μ eine Fläche $[6\,(m + n) - 20]^{\text{ten}}$ Grades, welche die ursprüngliche Curve in den Punkten schneidet, wo sie von einer Ebene vierpunktig berührt wird. [Für $C^{2 \times 2}$ sind es die Quadrupelebenen.]

Wenn eine Fläche m^{ten} und ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben sind, so enthält dieses

$$m\,[3\,(n - 1)^2 + 2\,(n - 1)\,(m - 1) + (m - 1)^2]$$

Flächen, welche jene berühren. Es mögen sich zwei Flächen F und f berühren, so schneiden sie sich in einer räumlichen Curve, welche den Berührungspunkt zum Doppelpunkt hat; man ziehe hier die zwei Tangenten an die Curve. Legt man nun noch eine Berührungsebene an derselben Stelle, so erhält man als Durchschnitte F und f zwei ebene Curven, welche hier auch jede einen Doppelpunkt haben, dem je ein Tangentenpaar zugehört. Alle drei Tangentenpaare sind in Involution.

Alle Tangenten einer $C^{m \times n}$ bilden eine abwickelbare Fläche D, deren Grad $m\,n\,[m + n - 2]$ ist; alle Ebenen, welche die Curve in zwei verschiedenen Punkten berühren, erzeugen ebenfalls eine abwickelbare Fläche E. Ist r der Grad der Fläche D, so wird ihre Doppellinie von einer beliebigen Ebene in $\frac{1}{2}\,r\,[r - 4]$ Punkten geschnitten. An die Fläche E gehen durch irgend einen gegebenen Punkt

$$\frac{m\,n}{2}\,[m\,n\,(m+n-2)^2-10\,(m+n)+28]$$

Berührungsebenen.

Ihr Satz über Distanzen der Brennpunkte von drei, einem Dreiseit eingeschriebenen Kegelschnitten hat mich sehr gequält; ich habe ihn noch nicht gefunden und ersuche Sie daher, mir ihn sobald wie möglich zu schreiben. Von den Aussagen, die ich früher einmal über die Brennpunkte gethan, kann ich nicht zurückgehen. Es sind zwei Gegeneckenpaare eines umschriebenen Vierseits, deren drittes Gegeneckenpaar die zwei, allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkte sind (haben Sie einen kurzen Namen für dieselben?); ist der Kegelschnitt gegeben, so ist das Vierseit durchaus bestimmt, wenngleich jede Seite mit sich selbst jeden beliebigen Winkel bildet und daher ihre Lage in der Ebene nicht ändert, wenn auch der Kegelschnitt um einen Brennpunkt herum gedreht wird.

Von meiner Wiener Abhandlung habe ich schon seit längerer Zeit einen Haufen dem Buchhändler zum Versenden übergeben, nach Zürich und Basel habe ich freilich noch keine geschickt, weil ich dazu einige Zeilen schreiben muss. Da keine Aussicht auf Abnahme der ungedruckten Abhandlung vorhanden ist, so will ich sie dem *Crelle* schicken, muss Sie aber ersuchen, dafür zu sorgen, dass er sie nicht unter das Eis fallen lässt. Die erste Begeisterung für diese n Dimensionen ist bei mir schon verflogen, obschon die Untersuchungen über Flächen mir auch nach jener Seite neue Wege aufzuschliessen scheinen; daher die Zögerung mich wieder in diese hirnverrückenden Vorstellungen hinein zu arbeiten, was doch geschehen muss, wenn ich einen Auszug dem *Liouville* zuschicken soll.

Ich gratulire Ihnen zu Ihrer wohlverdienten Auszeichnung und zu der gerechten Anerkennung, die Ihnen selbst Ihr Fachgenosse *Chasles* in so unumwundenen Ausdrücken ausspricht.

Erfüllen Sie mir den Wunsch und schreiben (Sie) mir recht bald einige Zeilen, namentlich über die Brennpunkte; auch Aufgaben; denn die zugesandten zähle ich Ihnen nicht. Die Frühlingsferien sind mir weggenommen, weil ich theils mit Examen, theils mit der Nationalvorsichtskasse zu thun habe.

Bern, den 2. April 1854.

L. Schläfli.

Steiner an Schläfli.

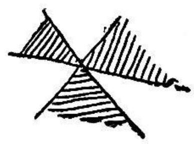
Berlin, 30. April 1854.

Mein lieber kräftiger Freund!

«Er hat andern geholfen, aber
«hilft sich selber nicht.»
«Der brave Mann denkt an sich
«selbt zuletzt.» *Tell.*

«Dass ich Ihnen etwas über die Brennpunkte, der einem 3 Seit «eingeschriebenen Kegelschnitte gesagt haben soll, kann ich mir nicht «denken, denn ich weiss von nichts. In beiden Briefen sprechen Sie «von den 2 Grundpunkten eines Kreisbüschels, wovon ich auch keine «Silbe verstehe; wie kann ich behalten, was Sie mir je einst ge-«sagt haben, da ich nicht einmal das weiss, was ich selbst ge-«schrieben habe.

«Was Sie «*Untercurve*» nennen wollen, habe ich bereits früher «*Theilcurve*» genannt; sie ist ein Theil des ganzen Schnitts, der «Ganz- oder «Vollcurve». «Unter» harmonirt mit «Ober», nicht mit «Voll».

«Den Namen «Hornpunkt» habe ich irgendwo aufgeschnappt, jetzt «finde ich ihn unpassend, und halte «*Knotenpunkt*» für angemessener, «natürlicher. Demgemäss hätte man weiter den «*Knotenkegel* K^2», der «in Extreme übergehen kann: 1) sich auf eine Gerade K_0 redu-«ziren, = «*Rückkehr-Knoten-Kante (Tangente)*», im «*Rückkehr-Knoten-«punkt*», oder «*Rückkehrkante*» im «*Rückkehrknoten*»; 2) in zwei «Ebenen 2 K^1 zerfallen, deren Schnittlinie eigentlich eine «*Knotenkante*» «wäre; 3) die 2 Ebenen fallen zusammen 2 (K^1), = *ebener* oder «*platter Knotenpunkt* mit *dreispitziger Knotenebene* 

«(auf diese kam ich auch schon früher, weiss im Augenblick nicht wobei, «aber ich konnte sie nicht recht überwältigen). Zudem giebt es auch noch «*Doppel-Rückkehrknoten* = *Selbstberührungsknoten*», z. B. bei der Ring-«fläche, die entsteht, wenn sich die Ebene eines Kreises (oder einer C^2 «oder C^n) um eine Tangente desselben herumbewegt. Weiter *3 facher*, «*n facher Knoten*, wenn er in jedem durchgehenden Schnitt ein 3-«oder nfacher Punkt bewirkt. Ferner wäre danach auch die

«*Doppellinie* füglich «*Knotenlinie*» zu nennen; dagegen müsste der «arête de rebroussement, welche ich bisher so genannt habe, der Name «Bindelinie», «*Bindecurve*» oder «*Selbstschnittscurve*» aller die Fläche «bildenden Geraden, gegeben werden. — Sie sind Sprachkenner, machen «Sie bessere Vorschläge. Bei Einführung neuer Namen ist Umsicht «nöthig, sie müssen sachgemäss sein. Man sollte wissen, welche in «deutschen Büchern bereits gebraucht worden sind.

«Mit der famosen R^{12} kann ich mich noch nicht beruhigen, viel«mehr soll's erst recht drauf losgehen. Liege ich auch wie ein Halb«todter im Schneegestöber — so fasse ich meinen treuen, starken «Bernhardiner beim Schwanz und er wird mich aus der dustern Kluft «herausreissen. Der Schnitt der Basis f^3 mit ihrer Kernfläche fo^4, «*muss* allerlei schöne Eigenschaften haben, die meine Nase schon 1846 «und 1850 witterte, aber nicht klar zu erkennen vermochte; Sie «werden jetzt leicht triumphiren, selbst wenn mein Phantasie-Gebilde «grossentheils falsch wäre. — Liegt ein Pol Q in R^{12}, so ist seine «erste Polare ein Kegel P^2, dessen Scheitel der conjugirte Pol P ist, «und die zweite Polare ist die Ebene E, welche die f^3 in Q und «den Kegel P^2 längs des Strahls $QP = t$ berührt. Dieser Strahl t «hat die wesentliche Eigenschaft: 1) dass die erste Polare, f^2, jedes in «ihm liegenden Pols die f^3 in Q berührt; 2) dass er die Rückkehr«tangente (?) des Schnitts E^3, von E und f^3 im Punkt Q ist; 3) dass «er die fo^4 in P zwei- und die f^3 in Q dreipunktig berührt; und «4) dass sein Ort eine Fläche 30^{ten} Grads, $= t^{30}$, ist, welche die «27 g zu Doppellinien hat, so dass der Schnitt von t^{30} mit f^3 aus «$3\ R^{12} + 2 \cdot 27\ g = R^{90}$ besteht. Nun kann ich aber mit blossen «Augen nicht erkennen: ob t Selbstschnitt der Ebene E und ob P «Selbstschnitt des Strahls t sei? Der Ort des Punkts P, $= P^x$, geht «durch die 54 Asymptotenpunkte π der 27 g, oder er berührt diese «g in den π, so dass er also mit der f^3 im Ganzen 54 oder 108 «Punkte gemein hat, und daher $x = 18$ oder $= 36$ sein muss (nach «Ihrer Angabe, dass eine f^7 durch P^x gehe, wäre $x = 28$). Die «P^x geht durch jeden der 10 Sylvester'schen Punkte dreimal. Da t die «fo^4 in P berührt und in Q schneidet, so muss sie noch in einem 4^{ten} «Punkte S schneiden, so dass der Schnitt von t^{30} mit fo^4 aus «$R^{12} + 2\ P^x + S^y$ besteht und $12 + 2x + y = 4 \cdot 30$, also «wenn $x = 36$ auch $y = 36$ ist. Diese S^y muss auch durch die «54 π gehen, was aber nicht gut passt. — Dass t die fo^4 in P 3punktig «berührt, scheint auch nicht zu gehen? *Oder sind t und E = Tangente* «*und Schmiegungsebene der R^{12} im Punkte Q? und haben nicht die* «*Polarkegel P^2 u. Q^2 von Q und P den Strahl t gemein?* so dass t «eine Doppeltangente der f_0^4 ist. Zum donnstig! es muss so was sein! «Die R^{12} ist charakteristisch für die Basis f^3; sie muss diejenigen Punkte «Q enthalten, welche in Rücksicht auf den Schnitt E^3 der Berührungs- «ebene E einzig sind in ihrer Art, also Rückkehrpunkte, und in wel- «chen allein die Polare f^2 eines nicht in f^3 selbst liegenden Pols die «letztere berühren kann. Denn in diesem Betracht ist die R^{12} für «die f^3 das, was für die C^3 ihre 9 Wendepunkte sind. — (Wie steht es «mit der Berührungsebene E_0 der f_0^4 in Q?) **Der Ort von t** «**ist $= t^{30}$.**

«Eben so muss es sich bei Basis f^m verhalten. Sie wird von «der Kernfläche $Q^{4(m-2)}$ in einer charakteristischen $R^{4m(m-2)}$ ge- «schnitten; für jeden Punkt Q in dieser muss die berührende Ebene «E eine absonderliche sein; ihr Schnitt E^m muss Q zum rp und den «Strahl $QP = t$ zur rt haben; für jeden in t liegenden Pol muss «die erste Polare f^{m-1} die Basis f^m in Q berühren, so dass daher «der Ort von t eine Fläche $m\,[3\,(m-2)^2 + 2\,(m-2)\,(m-1)$ «$+ (m-1)^2] - m = 2\,m\,(m-2)\,(3\,m-4)^{ten}$ Grads sein muss, «welche die f^m längs $R^{4m(m-2)}$ dreipunktig und die andere (erste) «Kernfläche $P^{4(m-2)^3}$ längs der Curve P^x zwei- (oder drei-) punktig «berührt u. s. w. Auf die Mensur! Los!

«Bei f^3 fallen in jede der 45 Ebenen $\triangle$ 16 Trieder-Scheitel P, «die in einer C^4 liegen, welche die 3 g zu d t hat und sie in den «6 π berührt; die den 16 P conjugirten 16 Q liegen in einer R^6, «welche durch die 6 π geht (der ganzen C^4 ist die R^6 conjugirt). «Die 6 π liegen zu 3 in 4 Geraden l und sind die Berührungspunkte «je dreier solcher Schnitte C^2 der f^3, durch welche ein Kegel L^2 geht, «der die Ebene $\triangle$ längs l berührt; liegen die Scheitel der 4 Kegel «L^2 in einer Geraden?

«Ich unterscheide die Punktensysteme (wie die Strahlsysteme) «in hyperbolische und elliptische, nachdem die Asymptotenzahlen[1] π reell «oder imaginär sind. — Von den 3 g in jeder $\triangle$ sind entweder 1) alle «3 hyperb., oder 2) nur eine hyperb. und die andern elliptisch. Wenn «alle 27 g reell: wie viele sind von jeder Art? ist die Anzahl jeder «Art nothwendig bestimmt, oder kann sie variren? und nach welcher «Regel? Können alle hyperbolisch sein? — Wie viele g werden zu- «gleich imaginär? giebt es dafür ein Gesetz?

---

[1]) Soll wohl heissen: Asymptotenpunkte.

«Die 6 Normalen N aus einem Punkte p auf f^2 liegen in einem «Kegel p^2, welcher auch durch den Mittelpunkt der f^2 geht. Wie «verhält es sich mit den $m(m^2 - m + 1)$ N aus p auf f^m?

«Da Sie nun die Polaren so tüchtig verschlungen haben, so «können Sie gelegentlich die weitern reciproken Kerncurven bestimmen, «d. h. den Ort des Pols P, dessen x^{te} Polare in Bezug auf die Basis «C^m einen Doppelpunkt Q hat, und den Ort dieses Q, dessen $(m - x - 1)^{te}$ «Polare jenen P zum d p hat. So viel ich mich im Augenblick er«innere, ist es mir nicht gelungen. Ebenso sind die reciproken Kern«flächen P^x und Q^y für die Fläche f^m aufzufinden. — *Die Kerncurven «und Kernflächen haben grosse Bedeutung: Denn sie sind Enveloppen «der Polar-Enveloppen andern Ranges für beliebige Directricen.* Z. B. «die Trippel- oder Kerncurve Co^3 der Basis C^3 wird von der 2^{ten} «Polare Ao^2 jeder Geraden A in drei Punkten α berührt; ebenso von «der 2^{ten} Polare Do^y der gegebenen Directrix D^r in 3 r Punkten α etc. «Da haben Sie wieder ein Staatsgeheimniss. — Daher ursprünglich «der Name «Kern», weil sich Alles um sie versammelt, sich an sie «anlehnt.

«Haben Sie den Urias-Zettel Herrn Prof. Ries gezeigt? was ich im «Vertrauen auf Ihre grosse Gewissenhaftigkeit getrost erwartete. Sie «schweigen darüber und Ries hat auch kein «Ja» unter Ihren Brief «gesetzt.

«Ich bin wieder für diesen Sommer um Urlaub eingekommen, «weiss aber selbst noch nicht recht, wo ich herumbummeln werde; «der Arzt hat mir nochmals Ems vorgeschlagen.

«Mit freundlichem Gruss

«Ihr

«*Steiner.*»

Schläfli an Steiner.[1])

«Um die Absendung dieses Briefs nicht zu lange zu verzögern, «will ich Ihnen nur kurz meine Ansichten über die *Untercurven* mit«theilen, und die schwierige Ergründung Ihrer Fragen mit der erfor«derlichen Zeit und Reife für einen späteren Brief vorbereiten. Es «seien A, B, C drei Polynome resp. von den Graden a, b, c; und A^1, «B^1, C^1 drei Polynome von den Graden $a+h$, $b+h$, $c+h$, so stellen «die Proportionen $A:B:C = A^1:B^1:C^1$ eine Untercurve vom Grade

[1]) Der Eingang fehlt.

«$h^2 + (a + b + c) h + bc + ca + ab$ dar. Hier ist freilich nur das «niedrigste Polynom fest, die übrigen bilden vielfache Schaaren. Das- «selbe kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass man verlangt, dass «alle im Schema $\left\| \begin{matrix} A & \cdot & B & \cdot & C \\ A^1 & \cdot & B^1 & \cdot & C^1 \end{matrix} \right\|$ enthaltenen Determinanten, $BC^1 - B^1C$, «$CA^1 - C^1A$, $AB^1 - A^1B$, verschwinden. Dieses scheint aber nur der «leichteste Fall einer allgemeinen Darstellungsweise von Untercurven «zu sein. Man kann sich nämlich ein Schema denken, wo jede Vertical- «zeile n Polynome und jede Horizontalzeile deren $n + 1$ enthält, in- «dem zugleich die Grade der Polynome äquidifferente Zeilen bilden, «und dann verlangen, dass alle $n + 1$ Determinanten, welche durch «das Weglassen je einer Verticalzeile entstehen, zugleich verschwinden: «eine Untercurve wird diesen Bedingungen genügen. Man kann zwar «diese Darstellung auf die vorige einfachere zurückführen, aber nicht «ohne bedeutende Erhöhung der Grade der Ausdrücke und daherige «Verdunklung der Natur der Untercurve. Mit andern Worten: durch «eine Untercurve A gehen zwei Flächen p, q, und der übrige Theil «B ihres vollständigen Durchschnitts ist auch wieder nur eine Unter- «curve, die sich ähnlich verhält, u. s. f., bis man erst die n^{te} Curve «als Vollcurve antrifft. Will man aber das Ganze in zwei Tempo ab- «thun, so muss man jede der Flächen p, q mit einer passenden Fläche «zusammensetzen, so dass dann B durch die neu hinzutreten- «den Durchschnitte zur Vollcurve ergänzt wird, durch deren einmalige «Wegnahme aus dem vollständigen Durchschnitt der durch Zusammen- «setzung verstärkten Flächen p und q sogleich die ursprüngliche «Untercurve A erhalten wird. Bei einer solchen Reduction zieht man «aber wohl den Knoten nur stärker zusammen, statt ihn zu lösen. — «Ob die erwähnte allgemeinere Darstellungsweise einer Untercurve «wirklich die allgemeinste ist, wage ich nicht zu entscheiden; und «wenn sie es auch wäre, so hätte man dann bei der Classifikation «der Untercurven immer noch artige zahlentheoretische Schwierigkeiten «zu überwinden.

«Die Frage über die abwickelbare Fläche S, welche eine freie «Fläche f^n längs eines ebenen Schnitts C^n berührt, habe ich noch «nicht ganz zweifellos entscheiden können. Der Grad $g = n\,(3n - 5)$ «und die Classe $K = n\,(n - 1)$ sind richtig. Wenn Sie unter Knoten- «linie die arête de rebroussement verstehen, wo jede freie Ebene die «S mit Rückkehrpunkt schneidet, so können wir ihren Grad mit r be-

«zeichnen, und haben $r = w + 3(g - K)$. Ist nun $w = o$, d. h. hat «ein ebener Schnitt der S keine Wendepunkte, so folgt $r = 6n(n-2)$. «Dieses scheint richtig, weil für jeden der $3n(n-2)$ Wendepunkte «von C die erzeugende Gerade von S in die Ebene von C fällt und «daher diese Ebene die *Knotenlinie berührt.* (Die Ebene der C be- «rührt die Knotenlinie in den Wendepunkten der C; daher wird die «S hier mit Wendepunkt sammt Wendungstangente geschnitten.) Die «Formel $g(g-1) = K + 2d + 3r$ giebt nun

$$d = \frac{3}{2} n(n-2)(n+1)(3n-7)$$

«als Grad der *Doppellinie* von S. Zieht man hievon die

$$\frac{3}{2} n(n-2)(3n^2 - 6n - 1)$$

«Durchschnitte der Wendungstangenten von C ab, durch welche offen- «bar die Doppellinie geht, so bleiben noch

$$3n(n-2)(n-3)$$

«Punkte übrig, in denen die Ebene der C die Doppellinie schneidet. «Dieses sind die übrigen Punkte, in denen C von den Wendungs- «tangenten geschnitten wird.

«Ihre Sätze über die Evolute der C^n sind richtig. Der Satz «über den Ort der Doppeltangenten eines B (C^n) ist mir noch zu «schwer. Die Ortscurve der Brennpunkte der einem Dreiseit einge- «schriebenen Kegelschnitte war mir bekannt; aber das Involutions- «strahlensystem haben Sie mir endlich verrathen. Den Satz über «Brennpunktsdistanzen haben Sie in ihren gedruckten Schriften für «das Vierseit ausgesprochen; aber ich meine von Ihnen mündlich ge- «hört zu haben, dass er für drei einem Dreiseit eingeschriebene «Kegelschnitte in allgemeinerer Form gelte. Zur Darstellung von «Distanzen gebrauche ich ein Produkt von zwei dreizähligen [1]) Deter- «minanten, worin die Coordinaten der gegebenen Punkte und «überdiess noch diejenigen der zwei Grundpunkte aller Kreise «vorkommen; aber selbst mit diesem Hülfsmittel konnte ich an «den Brennpunktsdistanzen keine Relation herausbringen. — Sie «haben gut gethan, einige der schwersten Aufgaben in Ihrem «Briefe nicht anzustreichen, da sie wohl noch beträchtliche Zeit «erfordern werden. — Wenn meine Angabe über eine gewisse «Doppellinie Sie stutzig macht, so beruht dieses auf einem Missver-

[1]) Soll wohl heissen: dreizeiligen.

«ständniss, nämlich: alle Tangenten einer Vollcurve $C^{m \times n}$ bilden «eine abwickelbare Fläche vom Grade $r = mn\,(m + n - 2)$; und «diese hat eine Doppellinie vom Grade $\frac{1}{2} r\,(r - 4)$.

«Ich benutze den Raum des Papiers noch für einige Sätzchen.

«Wenn 3 Flächen m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades eine Vollcurve $C^{\alpha \times \beta}$ «gemein haben, so haben sie ausserdem noch «$m\,n\,p - \alpha\beta\,(m + n + p - \alpha - \beta)$ Durchschnittspunkte gemein.

«Wenn $m \geqq n \geqq p$, und es soll eine ebene Curve m^{ten} Grades «durch die np Durchschnittspunkte einer Curve n^{ten} und einer p^{ten} Gra- «des gelegt werden, so sind für jene höchste Curve von diesen Durch- «schnittspunkten $\frac{1}{2}(n + p - m - 1)\,(n + p - m - 2)$ nothwendig, «vorausgesetzt, dass $m \leqq n + p - 3$ ist; sonst ist *keiner* nothwendig.

«Wenn $m \geqq n$, so dürfen auf einer Fläche F^n nur

$$\text{«}\ \frac{1}{2} m\,n\,(m - n + 4) + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2 \cdot 3}$$

«beliebige Punkte gegeben werden, wenn eine freie f^m durchgehen soll.

«Wenn der Grad m nicht niedriger ist, als einer der Grade n «und p, und es soll durch Punkte einer Vollcurve $C^{n \times p}$, eine «Fläche F^m gelegt werden, so sind unter den Durchschnittspunkten «$\frac{1}{2}\,n\,p\,(n + p - 4) + 1$ nothwendig, wenn $m > n + p - 4$ ist; aber

$$\text{«nur}\ \frac{1}{2}\,n\,p\,(n + p - 4) + 1 - \binom{n + p - m - 1}{3},\ \text{wenn}$$

«$m \leqq n + p - 4$ ist.

«Durch jede $C^{2 \times 2}$ kann eine F^4 gelegt werden, deren Polynom «als Summe von vier Biquadraten darstellbar ist.

«Wird eine $C^{m \times n}$ von einem beliebigen Punkte aus auf eine «beliebige Ebene projicirt, so ist für die Projection $g = m\,n$, «$k = m\,n\,(m + n - 2)$, $r = o$, $w = 3\,m\,n\,(m + n - 3)$, «$d = \frac{1}{2}\,m\,n\,(m - 1)\,(n - 1)$. Wenn aber der Mittelpunkt des «projicirenden Strahlenkegels der C^{mn} angehört, so gehen an g, k, «w, d, t resp. 1, 2, 3, $mn - 2$, $2mn\,(m + n - 2) - 8$ Einheiten «verloren.

«Jede Tangente der $C^{m \times n}$ wird von $m\,n\,(m + n - 2) - 4$ «andern Tangenten geschnitten.

«Die Mahnungen am Schlusse Ihres Briefes will ich bald be-«folgen und danke Ihnen für die näheren Anweisungen. Da es be-«quemer ist, die Briefe nicht zu frankiren, so unterlasse ich es jetzt, «aber dann dürfen auch Sie es nicht thun. Vom 19.—21. Apr. war «ich an den Examen in Biel, vom 26.—29. muss ich an denen in Thun «sein; Sie müssen sich daraus erklären, dass ich etwas unvollständig «geantwortet habe, um bei den Arbeiten, die mir wegen der Examen «obliegen, Sie nicht zu lange auf eine Antwort warten zu lassen. Ich «bin diesen Augenblick ziemlich abgespannt und weiss Ihnen daher «nichts zu berichten, als dass sich bis jetzt noch keine Studenten zu «meinen Vorlesungen gemeldet haben.

«Unterlassen Sie es nicht, mir bald wieder zu schreiben, und «genehmigen Sie die Versicherung der Hochachtung von

«Bern, den 23. April 1854. Ihrem dankbaren Schüler

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Da es Ihnen vielleicht dienlich ist, so beeile ich mich, Ihnen «einige nähere Angaben über die Beziehung sämmtlicher *Cayley*'scher «Strahlen zu Ihrem Fünfseit zuzusenden.

«Ich habe das Fünfseit sammt Axe auch analytisch behandelt und «die Reduction bis zur Gleichung 3^{ten} Grades fortgeführt, ungeachtet «anfänglich die Fläche vom 8^{ten} Grade zu sein scheint, weil die durch «die Axe und jedes Eck des Fünfseits gelegten Ebenen noch dazu «kommen.

«Ich bezeichne die fünf Seiten der Ordnung nach mit $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$, «die Axe mit e. Durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_3\, a_4)$ von «den Strahlen a_1, e geschnitten wird, geht der Strahl b_1; durch die «Punkte, in denen die Ebene $(a_1\, b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten wird, geht «c_1, u. s. f. Dann wird c_1 von c_3, c_4 geschnitten (ein *Satz!*), so dass «$c_1\, c_3\, c_5\, c_2\, c_4$ ein neues Fünfseit ist. Durch die Punkte, wo die Ebene «$(b_1\, e)$ von a_5, a_2, c_3, c_4 geschnitten wird, geht der Strahl d_1, u. s. f.; «durch die Punkte, wo die Ebene $(a_2\, d_3)$ von a_5, c_3, c_4, d_5, d_2, d_4 ge-«schnitten wird, geht $d_1{}^1$, u. s. f.; durch die Punkte endlich, wo die «Ebene $(b_1\, d_1{}^1)$ von den übrigen Strahlen b und d^1 geschnitten wird, «geht e^1. Also fünf a, fünf b, fünf c, zehn d oder d^1, zwei e, e^1, «zusammen 27 Strahlen. Die Dreiseite sind: fünf $(a_3\, a_4\, b_1)$, fünf $(a_1$

«b_1 c_1), fünf (b_1 c_5 c_2), zehn (a_1 d_5 d'_2), zehn (c_1 d_3 d^1_4), zehn (b_1 d_1 e) «oder (b_1 $d_1{}^1$ e^1), zusammen 45. — Alle 12 zum Paar e_1 e^1 gehören«den Fünfseite ergeben sich durch Permutation der fünf Strahlen b; «ist z. B. b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 die gewählte Permutation, so geht durch b_1, «b_3, b_4 die Seite a_1, durch b_2 b_4 b_5 die Seite a_2, u. s. f. (b_2 b_3 b_1 b_4 b_5) «giebt a_4 c_4 c_1 c_3 a_3 (fünf solche) (b_2 b_1 b_3 b_4 b_5) giebt c_3 c_5 a_5 a_4 a_3 (fünf «solche); endlich giebt (b_1 b_3 b_5 b_2 b_4) das einzige Fünfseit c_1 c_3 c_5 c_2 c_4.

«Mit der F^3 hängt auch folgender Satz zusammen, von dem ich «vergeblich einen elementaren Beweis gesucht habe.

«Durch einen Strahl a_1 gehen fünf beliebige Strahlen b_2, b_3, b_4, «b_5, b_6. Lässt man nun von diesen der Ordnung nach je einen weg, «so geht durch die 4 übrigen ausser a_1 immer noch ein Strahl, und «man erhält so die fünf Strahlen a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Nun kann durch «a_3, a_4, a_5, a_6 ausser b_2 noch ein Strahl gelegt werden; dann wird «dieser (b_1) von selbst auch durch a_2 gehen.

«Werden nämlich auf a_1 vier beliebige Punkte, und auf jedem «der durchgehenden Strahlen b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 deren beliebige drei «gegeben, so ist durch alle 19 Punkte eine F^3 bestimmt, und man «erkennt sogleich, dass alle sechs Strahlen ganz darein fallen, u. s. f. «Ich nenne dieses System von 2×6 *Cayley*'sche Strahlen, wo je «einer der einen Hälfte den gleichnamigen der andern nicht, aber «alle fünf übrigen schneidet, während die sechs Strahlen derselben «Hälfte sich nicht schneiden, — einen *Doppelsechser*. Die F^3 hat «deren 36. — Der gemeinschaftliche dritte Strahl der Ebenen (a_1 b_2) «und (a_2 b_1) heisse c_{12}. Man hat dann 30 Dreiseite (a_1 b_2 c_{12}) und «15 (c_{12} c_{34} c_{56}). Von den übrigen Doppelsechsern haben 20 die Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & c_{56} & c_{46} & c_{45} \\ c_{23} & c_{13} & c_{12} & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} \text{ und 15 die Form } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ a_2 & b_2 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \end{pmatrix}$$

«Jeder Doppelsechser enthält 20 Hyperboloide (Doppeldreier), und «jedes Hyperboloid ist zweien Doppelsechsern gemein.

«Die 40 Gruppen von je drei Triederpaaren theilen sich in Be«ziehung auf den gegebenen Doppelsechser in zwei Haufen.

«Der erste Haufen enthält 10 Gruppen wie

c_{12}	b_2	a_1
a_2	c_{23}	b_3
b_1	a_3	c_{13}

c_{45}	b_5	a_4
a_5	c_{56}	b_6
b_4	a_6	c_{46}

c_{14}	c_{25}	c_{36}
c_{26}	c_{34}	c_{15}
c_{35}	c_{16}	c_{24}

«und 30 Gruppen wie

a_3	b_5	c_{35}
b_6	a_4	c_{46}
c_{36}	c_{45}	c_{12}

a_5	b_1	c_{15}
b_2	a_6	c_{26}
c_{25}	c_{16}	c_{34}

a_1	b_3	c_{13}
b_4	a_2	c_{24}
c_{14}	c_{23}	c_{56}

«Jede Gruppe des ersten Haufens entspricht einer Theilung der «sechs Zeiger in zwei Hälften wie (123, 456); und je zwei Gruppen «des zweiten Haufens (die sich nur durch Perm. von a, b unter- «scheiden) einer Theilung in drei Paare wie (12, 34, 56). — Die «Fünfseite ordnen sich so: Zu a_1 b_1 gehören 12 wie c_{24} c_{35} c_{46} c_{52} «c_{63}, zu a_1 a_2 12 wie c_{35} a_5 c_{45} a_4 c_{46}, zu a_1 c_{23} sechs wie a_5 c_{35} c_{26} «c_{34} c_{25} und sechs wie c_{35} a_5 b_1 a_6 c_{24}; zu c_{12} c_{13} sechs wie c_{15} a_5 «b_4 a_6 b_5 und sechs wie b_4 a_5 c_{15} c_{23} c_{14}.

«Wie gefällt Ihnen dieser Doppelsechser? 12 Strahlen bilden «ein an 6 Stellen schadhaftes Gitter, jeder der 15 übrigen entspricht «zweien Maschen derselben.

«Haben Sie so etwas unter dem Systematisiren verstanden? In «der Hoffnung einer baldigen Antwort bezeugt Ihnen hiemit seine «Hochachtung

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, den 2. Mai 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Hochgeschätzter Freund und Lehrer!*

«Was jene bornirte Curve vierten Grades mit drei Doppel- «punkten betrifft, wo zugleich jeder von einem Doppelpunkt aus- «gehende Strahl von der Gegenseite des Doppelpunktendreiecks in «Beziehung auf die zwei übrigen Durchschnittspunkte der Curve har- «monisch getheilt wird, so folgt daraus nothwendig, dass jede Doppel- «punktstangente zugleich Wendungstangente ist, dass also hier jeder «Doppelpunkt *acht* Wendepunkte verschlingt, was die volle Zahl 24 «giebt. Diese auf der Hand liegende Bemerkung habe ich das letzte «Mal zu machen vergessen.

«In Betreff der *Cayley'schen* Geraden auf der Fläche dritten «Grades habe ich einstweilen Folgendes gefunden. Denkt man sich «einen durch zwei Ebenendreier bestimmten Flächenbüschel dritten «Grades, und wählt eine einzelne Fläche $f = x\,y\,z + \lambda tuv$ heraus, so «zählen die 6 Ebenen x, y, z, t, u, v für 18 Data und der Coeffi-«cient λ für eines, zusammen 19. Folglich kann jede freie Fläche «dritten Grades auf diese Weise erzeugt werden. (Man hat freilich «so erst 9 in der Fläche liegende Geraden). Wird der Scheitel des «einen Ebenendreiers als Pol genommen, so ist seine Polarfläche ein «Kegel zweiten Grades, der durch die Kanten des andern Ebenen-«dreiers geht. Die in der Fläche liegende Gerade (x t) z. B. werde «von den Ebenen y, z in B, C und von den Ebenen u, v in E, F ge-«schnitten; dann seien P, Q die Asymptotenpunkte des von jenen «zwei Punktpaaren bestimmten involutorischen Systems (oder B C P Q «und E F P Q harmonisch); so wird die Kernfläche (vierten Grades) die «Gerade (xt) in P und in Q berühren. Wird P als Pol genommen, so «ist Q der Scheitel des Polarkegels; dieser geht durch die Gerade «(xt) und durch die Gerade, welche von Q ausgehend die Kanten (yz) «und (uv) schneidet. — Liegt ausser den erwähnten 9 Geraden noch «irgend eine Gerade auf der Fläche, so muss sie durch drei von den «schon bekannten Geraden, wie z. B. durch (xt), (yu), (zv), gehen, «also auf der durch (xt), (yu), (zv) bestimmten Fläche zweiten Grades «liegen. Die Rechnung zeigt nun wirklich, dass diese Fläche die $f^{(3)}$ «noch in 3 neuen Geraden schneidet. Da es aber im Ganzen 6 solche «Combinationen, wie (xt), (yu), (zv), giebt, so bekömmt man $6 \times 3 =$ «18 neue Geraden; im Ganzen $9 + 18 = 27$.

«Die freie Fläche dritten Grades enthält also 27 Geraden. Wird «eine Transversalebene um eine solche Gerade herumgedreht, so «schneidet sie die $f^{(3)}$ im Allgemeinen noch in einem Kegelschnitt; «dieser erscheint aber im Besondern *fünfmal* als Geradenpaar. Es «giebt also 45 ebene Schnitte, welche Dreiseite sind. Die zwei «Punkte, welche jene Gerade mit dem Kegelschnitt der um sie sich «drehenden Schnittebene gemein hat, bilden ein *Involutionssystem*, «in dessen Asymptotenpunkten P, Q die Kernfläche $^{(4)}$ von jener Ge-«den berührt wird [1]).

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Um den Briefwechsel nicht zu lange zu unterbrechen, schreibe «ich Ihnen hier nur über einige wenige Fragen Ihres letzten Briefs,

---

[1]) Hier bricht der Brief ab, die Unterschrift fehlt.

«deren Beantwortung aber mehr Arbeit gekostet hat, als Sie wohl ge«dacht haben werden. Wie ich hintenher erkenne, hätte ich frei«lich durch etwas mehr synthetische Ueberlegung an Zeit ersparen «können.

«Was vorerst die Frage auf dem kleinen Papierstreifen betrifft, «so liegen die sechs Scheitel je dreier zusammengehöriger Triederpaare «nicht in einer Ebene. Dieser Dreier veranlasst mich zu einer «Bemerkung: wenn man nämlich aus jedem Paare nur ein Trieder «nimmt, so hat man eine Gruppe von 9 Ebenen, welche die F^3 in «den 27 Geraden schneidet; es giebt also 320 solche Gruppen; zur wirk«lichen Bestimmung der Cayley'schen Geraden käme aber alles darauf «an, eine durchgehende Fläche neunten Grades zu finden, d. h. die «220 Coefficienten ihrer Gleichung aus den 20 Coefficienten der ge«gebenen Gleichung der F^3 auf rationalem Wege herzuleiten. So «lange dieses nicht gethan ist, sind auch die 27 Geraden nicht ge«funden.

«Die Bedingungen für die hyperbolische Eigenschaft einer jeden «reellen Geraden der F^3 können zwar, wenn schon ein Triederpaar «bekannt ist, ziemlich einfach ausgedrückt werden, sind aber unter «sich verschieden; und ich erkenne einstweilen zwischen denselben «keinen andern Zusammenhang, als den, welchen Sie selbst schon ausge«sprochen haben. Die Frage hängt mit derjenigen nach der Realität der «Geraden nicht zusammen. Ich werde übrigens auf diesen Gegen«stand noch ferner Acht geben.

«Die Classification hingegen der reellen Flächen dritten Grades «in Beziehung auf die Anzahl ihrer reellen Geraden ist mir vollständig «gelungen, und ich freue mich Ihnen hierüber sichern Bericht geben «zu können. Die Gränzfälle, in denen die Fläche aufhört frei zu sein, «sind hier ausgeschlossen; nach dem gleichen Eintheilungsgrunde «würde ich z. B. nur zwei Gattungen von Flächen zweiten Grades «annehmen. — Die Fläche dritten Grades zählt nur fünf Gattungen.

«A. Alle 27 Geraden und 45 Ebenen sind reell. (27 G, 45 E.)

«B. 15 G, 15 E. Die 12 imaginären Geraden bilden einen «Doppelsechser

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$$

«wo je eine Gerade der einen Reihe der Zugeordneten der andern «Reihe conjugirt ist, wesshalb keine der imaginären Geraden einen «reellen Punkt haben kann. Durch je zwei Paare zugeordneter Strahlen «(wie $a_1 b_2$, $a_2 b_1$) geht ein reeller (c_{12}), und so oft sich die 6 «Zeiger in drei Paare abtheilen lassen, hat man ein reelles Dreiseit «(wie c_{12}, c_{34}, c_{56}), ihre Zahl daher 15. Durch jede reelle Gerade «gehen 3 reelle und zwei imaginäre Ebenen.

«C. 7 G, 5 E. Durch eine bestimmte reelle Gerade gehen 5 «reelle Ebenen, von denen aber nur 3 auch vollkommene Dreiseite ent-«halten; die 2 andern haben mit der Fläche ausser jener Geraden jede «nur noch einen isolirten Berührungspunkt gemein, wo sich zwei «conjugirte Seiten schneiden.

«D. 3 G, 13 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede «Seite noch vier reelle Ebenen gehen, also 12 Paare conjugirter Ge-«raden, die sich schneiden.

«E. 3 G, 7 E. Ein einziges reelles Dreiseit, durch dessen jede «Seite nur noch zwei reelle Ebenen gehen, also 6 Paare conjugirter «Geraden, die sich schneiden.

«Diese Aufzählung erschöpft. Vielleicht interessirt es Sie, zu «sehen, wie diese Gattungen mit den Formen der Triederpaare zu-«sammenhängen. Es seien u, v, w die Polynome des einen, x, y, z die «des andern Trieders; sie zählen für 18 Data; giebt man das 19^{te} Datum, «den Factor, der beide Trieder verbindet, einem der Polynome, so kann «die F^3 durch die Gleichung $u v w + x y z = 0$ dargestellt werden. «Die Polynome können aber reell oder imaginär sein; und es frägt «sich, welche Formen dieser Gleichung sind unter der Voraussetzung «einer reellen Fläche überhaupt möglich. Die Antwort auf diese Frage, «die auf den ersten Blick ebenso schwierig erscheint, als die Be-«stimmung der 27 Geraden selbst, ist in folgender erschöpfender Auf-«zählung enthalten.

I. u, v, w, x, y, z reell.

II. u mit x, v mit y, w mit z conjugirt.

III. u, v, w, x reell, y mit z conjugirt.

IV. u, x reell, v mit w, y mit z conjugirt.

V. u, x reell; die imaginären Ebenen v, w haben jede ihren reellen Strahl in x, ebenso haben die imaginären y, z ihre reellen Strahlen in u.

VI. u, x reell; nur u wird von y, z in reellen Strahlen geschnitten; x von v, w bloss in conjugirten.

VII. u, x reell; aber weder u noch x haben ein reelles Dreiseit.

VIII. u mit x conjugirt; v hat mit y, w mit z einen reellen Punkt gemein.

IX. Nur u ist reell und schneidet x in einem reellen, y, z in conjugirten Strahlen; und nur y hat auch noch mit jeder der Ebenen v, w einen reellen Punkt gemein.

X. Keine Ebene reell und keine zwei conjugirt (wie bei allen folgenden Formen); u hat mit x einen reellen Punkt, v mit y einen reellen Strahl, und w mit z einen reellen Strahl gemein.

XI. Jede Ebene des einen Trieders hat mit jeder des andern einen reellen Punkt gemein.

XII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, überdiess u mit y, u mit z, x mit v, x mit w.

XIII. u hat mit x einen reellen Punkt gemein, v mit y und w mit z.

Ich nenne zwei Formen aequivalent, wenn jede in die andere «transformirt werden kann. So sind II, V äquivalent und finden sich «in den Gattungen B und C; IV, VI, VIII in C und E; III, VII in D und «E; IX, XII, XIII nur in E. Isolirt sind die Formen I in A und B; «X in C, XI in D. — Diese Formen von Triederpaaren kommen zu «Dreiern vereinigt in den verschiedenen Flächengattungen in folgender «Weise vor:

A hat 40 Dreier (I. I. I);
B hat 10 (I. II. II) und 30 (V. V. V);
C hat 4 (II. II. IV), 12 (V, VIII. VIII) und 24 (VI. X. X);
D hat 16 (III. XI. XI) und 24 (VII. VII. VII);
E hat 2 (IV. IV. IV), 4 (III. XIII. XIII), 6 (VII. VIII. VIII), 12 (VI. XII. XII) und 16 (IX. IX. IX).

«Die Triederpaarformen X bis XIII hätten, wie ich eben einsehe, «etwas schärfer definirt werden sollen, es hätte angegeben werden «sollen, wenn drei reelle Punkte in einer Geraden liegen.

«Was Sie über den Durchschnitt R der Basis f^m mit ihrer zwei«ten Kernfläche $Q^{4\,(m-2)}$ anführen, ist alles richtig. Wenn Q die «Curve R durchläuft, so beschreibt P eine Curve $6\,m\,(m-2)^2$ten «Grades. Dass t die Fläche $P^{4\,(m-2)^3}$ zweipunktig berührt, ist ganz «natürlich, weil die Berührungsebene der f^m in Q zugleich die Fläche «P in P berührt; aber ich glaube durchaus nicht, dass sie die Curve «$P^{6\,m\,(m-2)^2}$ berührt. Wenn dieses für $m = 3$ eintreffen sollte, so «müsste die Tangente der R in Q eine erzeugende Gerade des Polar«kegels von P sein, was ich nicht glaube. Die Fläche $t^{2\,m\,(m-2)\,(3\,m-4)}$ «ist eine *abwickelbare;* aber ihre Bindecurve ist mir auch für $m = 3$ «noch unbekannt. Wenn auf der f^n ein Punkt R^1 unendlich nahe bei «dem in R befindlichen Punkt Q liegt, so schneiden sich die Be-

«rührungsebenen der f in Q und Q^1 immer in der Rückkehrtangente t, «nach welcher Richtung auch Q^1 abweichen mag. Für $m = 3$ hat «der Polarkegel von P nichts mit t zu thun; jener kann diesen «Strahl t nur dann enthalten, wenn P in die Fläche f^3 fällt. Die t «kann im Allgemeinen nicht Tangente der R sein, sie wird es nur «für die 54 Asymptotenpunkte. Die P^{18} geht einfach durch die 54 «Asymptotenpunkte. Ich denke, der Schnitt von t^{30} mit q^4 besteht «aus $R^{12} + 2\ P^{18} + S^{72}$, und diese S muss allerdings durch die 54 π «gehen. Die Schmiegungsebene der R^{12} ist kein leichter Frass! — (Basis «f^m) Q beliebig auf der zweiten Kernfläche $q^{4\,(m-2)}$. Die Berührungs- «ebene der Kernfläche q in Q ist zugleich Berührungsebene der zweiten «Polarfläche von P in diesem Punkt Q. — Ich erstaune, dass Sie «mittelst der abwickelbaren Fläche t^{30} die 27 Geraden wirklich con- «struirt haben. Denn es ist klar, dass die Gleichung der t^{30} auf rationalem «Wege gefunden werden kann; wenn man dann aus (f^3, t^{30}) und «(f^3, q^4) eine Coordinate eliminirt, so ist jene Resultante durch den «Cubus von dieser theilbar, und der Quotient das Quadrat des Productes «aller 27 Geraden. Ob man vielleicht von hier aus zu der sehnlich «gewünschten Gleichung des 9ten Grades gelangen kann. — Was ich «von einer f^7 geschwatzt habe, weiss ich nicht mehr; von zwei Grund- «punkten eines Kreis*büschels* habe ich nie gesprochen, wohl aber von «den zwei festen allen Kreisen gemeinschaftlichen Punkten. Ich werde «trachten, mit den rückständigen Sachen aus Ihren beiden Briefen «noch vollends aufzuräumen.

«Uriaszettel gezeigt. *Ris* bei Anfang des Semesters als Rector «mit Geschäften beladen, trägt mir den Gruss auf und verspricht Ihnen «etwas später zu schreiben. Sende an Crelle tom. I der ∞^n und «bitte Sie allenfalls bei ihm zu speichen[1]). Wenn Sie aber Berlin ver- «lassen, wünsche Ihre Adresse zu wissen und bitte überhaupt recht «bald zu antworten. — Nach Wien etwas zu schicken (über Resultante «u. nothwendige P^n bei Flächen) wird wohl vergeblich sein; dem «Liouville werde schicken, sobald der Bernhardiner etwas frei ge- «worden. $113 - 113 = 0$.

«Mit freundlichem Gruss

«*L. Schläfli.*

«Muzzopoli il 23 Majo 1854.»

---

[1]) Zu sorgen, dass Crelle vorwärts macht!

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Es thut mir leid, dass Sie sich die vergebliche Mühe genom-«men haben, zweimal über denselben Gegenstand zu schreiben. Bei «der grossen Eile, die mich drängte, Ihnen zu antworten, habe ich «einiges unbeantwortet gelassen, was ich jetzt nachholen will. (Bei «Ihrem Brief vom 30. April war es die Frage, ob vielleicht die 6 «Scheitel des Triederpaardreiers in einer Ebene liegen, die mir zu-«erst auffiel und mich fast rasend machte (7.—13. Mai), weil die al-«gebraische Entwicklung in's Aschgraue gieng, bis ich mich endlich «zu einer numerischen Untersuchung entschloss, welche entschieden «negativ ausfiel. Dann sprach mich die Eintheilung der F^3 nach Gat-«tungen hinsichtlich der Realität ihrer Geraden besonders an und «dauerte 14.—21. Mai; mein anfänglicher Plan war zu weit angelegt «weil ich sicher sein wollte, alles zu erschöpfen; ich habe jetzt frei-«lich einige Andeutungen, dass einfache synthetische Betrachtungen «hinreichen mögen, um sich zu überzeugen, dass es nur die erwähn-«ten fünf Gattungen giebt; aber bei meinem Verfahren machten mir «z. B. quadratische Gleichungen mit imaginären Coefficienten viel zu «schaffen, wie auch, da ich nur mit Triederpaaren operieren konnte, «die grosse Mannigfaltigkeit ihrer denkbaren Formen, bis endlich die «bemerkte Aequivalenz einiger derselben mir aus der Noth half.) — «In Zukunft möge es als Bestätigung gelten, wenn ich eine Ihrer «Aussagen nicht wiederhole; aber das, was ich noch nicht untersucht «habe, werde ich erwähnen. — Hinsichtlich der $R^{4(n-2)n}$ zeigt, wie «ich glaube, die Anschauung, dass, da wo die hyperboloidische Be-«schaffenheit der f^n in die ellipsoidische übergeht, also conisch oder «wenn man will cylindrisch wird, einmal die Rückkehrkante t (gleich-«sam erzeugende Gerade des Cylinders) eine abwickelbare Fläche be-«schreibt, zweitens im Allgemeinen nicht mit der Tangente der R «zusammenfällt, dass vielmehr wenn dieses geschieht, der Rückkehr-«punkt in einen Selbstberührungspunkt ausartet; ist Q ein solcher «Punkt, so geht dann die *dritte* Polarfläche des conjugirten Pols P «durch diesen Q; und es giebt $2n(n-2)(11\,n-24)$ solche Punkte «auf der f^n. Wie die Fläche f^n aussieht, da wo beide Zweige des «Selbstberührungspunkts conjugirt imaginär sind und sich nur in einem «reellen Punkt berühren, weiss ich nicht anzugeben. — Fl.^{4}, einem «Dreiseitsschnitt der f^3 zugeordnet, Ort des Scheitels L eines Kegels ^{2}, «der die f^3 in drei Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Seiten «des $\underline{\wedge}$ gehen, schneidet, schneidet diese Ebene $\underline{\wedge}$ in derselben C^4 «wie die Kernfläche. Da nun diese C^4 die Diagonalen (Seiten des $\underline{\wedge}$) «eines Vierseits in dessen 6 Ecken berührt, so müssen die 4 übrigen «Durchschnitte der C^4 und des Vierseits in einer *Geraden* liegen. «Fällt L in einen solchen Durchschnitt, so berührt der Kegel die «Ebene $\underline{\wedge}$ längs der Seite des Vierseits. Fällt aber L in ein Vierseits-«eck π, so degenerirt der Kegel in die Ebene $\underline{\wedge}$ und die Ebene, «welche f^3 in π berührt; heisst a die $\underline{\wedge}$seite, worauf die Zugeord-«neten π, π^1, b, c die zwei übrigen, so ist der durch a gehende «Kegelschnitt der, welcher a in π berührt; der durch b gehende ist «$a + c$, der durch c gehende $a + b$, und der Durchschnitt ihrer (mit «$\underline{\wedge}$ zusammenfallenden) Ebenen ist die vom Eck (bc) nach π gehende «Gerade. — Wenn Q diese C^4 durchläuft, so beschreibt der conjugirte «P eine Theilcurve R^6, welche die Ebene $\underline{\wedge}$ in den 6 π schneidet. «— Vielleicht ist der Grad der mit $R^{4n(n-2)}$ conjugirten Curve im «letzten Brief unter die Oblate[1]) gekommen; sie ist eine $P^{6n(n-2)^2}$.

«— *Normalen aus A auf die f^n.* R^{n^2-n+1} Ort des Pols P, dessen «Polarebene auf der Geraden AP senkrecht steht. Durch diese geht «eine Doppelschaar von Flächen n^{ten} Grades, worunter eine A zum «Knotenpunkt hat und durch die $(n-1)^3$ ersten Grundpolarpunkte «der unendlich entfernten Ebene geht. Bei der f^2 geht durch die R^3 «unter anderm auch ein Kegel ², worin die drei Hauptaxen der f^2 «liegen. Die R^3 hat drei den Hauptaxen parallele Asymptoten; es «seien A, B, C die Längen der Hauptaxen des Ellipsoids, a, b, c die «auf diese bezogenen Coordinaten des Punkts A, von wo die Normalen «ausgehen; dann sind die Gleichungen der mit der Axe A (oder x) «parallelen Asymptote:

$$y = \frac{B^2}{B^2 - A^2}\,b, \qquad z = \frac{C^2}{C^2 - A^2}\,c.$$

«(Dass die R^{n^2-n+1} durch A geht und ihre Tangente hier auf «der Polarebene von A senkrecht ist, versteht sich von selbst.) Beim «Paraboloid geht die R^3 einfach durch den Berührungspunkt der un-«endlich entfernten Ebene, die entsprechende Asymptote ist die Haupt-«axe selbst. Ueber die zwei andern Asymptoten bin ich im Unklaren; «wenn $2x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}$ die Gleichung der Fläche ist, so bekomme ich

---

[1]) D. h. Schläfli hat ihn nicht lesen können.

«für die mit der Axe der y parallelen Asymptote nur eine Gleichung, «nämlich $x=a-p$, und für die mit der Axe der z parallele: $x=a-q$; «wo die Abscisse a des Punkts A sich auf den Scheitel des Parabo-«loids bezieht. (Doch wahrscheinlich für jene noch $z = \frac{qc}{q-p}$ und «für diese noch $y = \frac{pb}{p-q}$.) Für die Umdrehungsfläche[2] reducirt «sich die R^3 auf einen in der Meridianebene von A befindlichen Kegel-«schnitt und die unendlich entfernte Gerade einer zur Axe senkrechten «Ebene, für die Kugel auf die von A nach dem Centrum gehende «Gerade, der Rest unbestimmt in der unendlich entfernten Ebene. — «Die Projectionen der R^3 auf die Hauptebenen der f^2 sind gleichseitige «Hyperbeln.

«*Eine räumliche Curve* scheint mir am allgemeinsten dargestellt «zu werden, wenn man n Gleichungen von allerlei Graden, homogen «in Beziehung auf $n-1$ zu eliminirende Grössen λ, μ etc. setzt, dann «erst jeder von diesen einen beliebigen impliciten Dimensionswerth «beilegt und nun statt der Coefficienten allerlei homogene Polynome «in x, y, z, w (räumlichen Coordinaten) von allerlei Graden, doch so, «dass wenn neben diesen dem angenommenen impliciten Dimensions-«werth einer jeden der $\lambda, \mu, \ldots$ auch Rechnung getragen wird, alle «Glieder einer und derselben Gleichung neuerdings dieselbe Dimen-«sion erhalten. Wäre z. B. $[x^2 + 5xy + \text{etc.}]\ \lambda^p\,\mu^q$ ein Glied einer «Gleichung, so wäre diese in Beziehung $\lambda, \mu, \ldots$ allein homogen und «vom Grade $p+q$, aber, wenn man $\lambda, \mu, \ldots$ die impliciten Dimen-«sionen $\alpha, \beta, \ldots$ beigelegt hat, in Beziehung auf $x, y, \ldots \lambda, \ldots$ «zusammen von der Dimension $2 + \alpha p + \beta q$, und diese Zahl müsste «für alle Glieder der Gleichung dieselbe sein. Lässt man aus dem «System eine Gleichung weg, so entspricht der Resultante der übrigen «eine Fläche. Da aber nicht jede Lösung, welche zwei solche Re-«sultanten annullirt, eo ipso auch dem ganzen Systeme genügt, so wird «der Durchschnitt der ihnen entsprechenden Flächen mehr als die «wahre Theilcurve R des Systems enthalten. Am durchsichtigsten «wird die Sache, wenn wir alle Gleichungen in Beziehung auf $\lambda, \mu, \ldots$ «linear annehmen; ich schreibe in diesem Falle die Polynome = Co-«efficienten von $\lambda, \mu, \ldots$ in einer und derselben Gleichung in eine «Verticalzeile und erhalte ein rechteckiges Schema mit n Verticalzeilen «(Zahl der Gleichungen) und $n-1$ Horizontalzeilen (Zahl der $\lambda, \mu, \ldots$ «deren Verhältnisse zu eliminiren sind). Wenn ich nun im Schema «statt der Polynome in x, y, z, w bloss ihre Grade hinschreibe und «so das Schema

$$\begin{Vmatrix} a_1+b_1 \,.\, a_2+b_1 \,.\, a_3+b_1 \ldots\ldots a_n+b_1 \\ a_1+b_2 \,.\, a_2+b_2 \,.\, a_3+b_2 \ldots\ldots a_n+b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1+b_{n-1} \,.\, a_2+b_{n-1} \,.\, a_3+b_{n-1} \ldots a_n+b_{n-1} \end{Vmatrix}$$

«erhalte, dann die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit A_n, der $b_1, b_2, \ldots$ «b_{n-1} mit B_{n-1} und die Summe der binären Produkte mit $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_{n-1}$ «bezeichne, so ist der Grad der Curve R: $\mathfrak{A}_n + A_n B_{n-1} + B^2_{n-1} - \mathfrak{B}_{n-1}$. «Wenn im Schema eine Constante statt eines Polynoms vorkommt, so «ist dieses so viel, als wenn man die betreffende Horizontal- und Verti- «calzeile durchstriche; denn so kann dann das Schema reducirt werden. «Lücken scheinen Beschränkungen mitzubringen, z. B. Zerfallen der «Curve in zwei. Für die paar ersten Grade hat man folgende Schemate:

$$R^3 \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1 \end{Vmatrix};\quad R^4 \begin{Vmatrix} 2\,.\,2 \\ \end{Vmatrix};\quad R^5 \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,2 \\ 1\,.\,1\,.\,2 \end{Vmatrix};\quad R^6 \begin{Vmatrix} 2\,.\,3 \\ \end{Vmatrix} \text{ u. } \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \end{Vmatrix};$$

$$R^7 \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,3 \\ 1\,.\,1\,.\,3 \end{Vmatrix} \text{ u. } \begin{Vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1 \\ 2\,.\,2\,.\,2 \end{Vmatrix};\quad R^8 \begin{Vmatrix} 2\,.\,4 \\ \end{Vmatrix} \text{ u. } \begin{Vmatrix} 1\,.\,2\,.\,2 \\ 1\,.\,2\,.\,2 \end{Vmatrix}.$$

Lassen Sie mich «Ihren fünf geometrischen Grundgebilden als VI^tes die Fläche erster «Classe, den Punkt mit allen durchgehenden Ebenen, als *Ebenenbusch* «hinzufügen und zwei solche Büsche *perspectivisch* nennen, wenn sie «irgend eine feste Ebene in denselben Geraden schneiden, *projectivisch* «wenn sie aus dieser gegenseitigen Lage verrückt sind. Dann sagt «das Schema der R^3, 1° dass sie durch drei projectivische Ebenen- «büschel erzeugt wird, 2° dass wenn durch zwei feste Punkte A, B «der R^3 und jeweilen durch dieselbe veränderliche Sehne der R^3 die «zwei Ebenen a, b gelegt werden (a durch A und die Sehne), die so «gebildeten Ebenenbüsche A und B projectivisch sind; jeder Punkt «der R^3 ist Scheitel eines Kegels ^{2}, der durch sie geht. — Die R^5 «entsteht nach dem Schema aus projectivischen zwei Ebenenbüscheln «und einem Flächenbüschel ^{2}; sie kann daher sowohl als Durchschnitt «einer f^2 und f^3 mit Weglassung einer Geraden, wie auch als Durch- «schnitt zweier f^3 mit Weglassung einer $R^4 \| 2\,.\,2 \|$ gefasst werden; «das Zerfallen dieser letzten scheint mir etwas Spezielles. Wie Sie «eine R^5 construiren, durch die keine f^2 geht, vermag ich nicht zu «errathen. Die durch meine R^5 gehende f^2 ist einzig, nämlich die «durch die zwei projectivischen Ebenenbüschel bestimmte, und alle «ihre Geraden γ, welche mit den Axen dieser Büschel zur gleichen

«Schaar gehören, schneiden die R^5 in drei Punkten; durch jeden «Punkt der R^5 scheinen aber noch andere Geraden von dieser Eigen«schaft zu gehen (vielleicht 4 ?). — $(f^2, f^3) = g + R^5$; die R^5 soll «feststehen, so ist auch f^2 fest; g kann diese durchlaufen: aber ich «halte für jetzt g fest, nehme zu f^2 eine beliebige Ebene E hinzu, «um mit der f^3 einen Büschel ^{3} zu bestimmen; wenn ich nun aus «dem Büschel eine f_1^3 herausnehme, so habe ich sie mit 4-facher «Freiheit gewählt; eine *Cayley*'sche Gerade, die g nicht schneidet, «bewegt sich also mit 4-facher Freiheit, d. h. kann mit jeder beliebig «gegebenen Geraden zusammenfallen; da die g selbst eine einfache «Bewegung hat, so ist die durch R^5 gehende f^3 *fünffach* unbestimmt. «Sie können also zu der R^5 jede Gerade l, welche Sie wollen, hinzu«nehmen, und dann auf die angegebene Weise eine f^3 erzeugen. — «Dass mein ganzer hier angelegter Plan noch Stümperei ist, ersehe «ich aus Ihrer R^4, in welcher die f^3 von jedem durch zwei sich nicht «schneidende *Cayley*'schen Geraden gelegten Hyperboloid geschnitten «wird; sie passt nicht in die Form $\|\, 2\,.\,2 \,\|$, weil kein anderes Hyper«boloid durchgeht; Sie sehen dieses aus dem speziellen Falle, wo «diese R^4 sich in eine *Cayley*'sche Gerade verwandelt, die von drei «andern unter sich freien *Cayley*'schen Geraden geschnitten wird. Ich «kann bis jetzt diese R^4 nur als eine R^5, aus der vermöge einer be«sondern Abhängigkeit der Hülfspolynome eine Gerade sich ablöst, «darstellen. — Auf mein Schema der Theilcurve R^6 passt nur (f^3, f_1^3) «$= R_1^3 + R^6$. Sie wird erzeugt durch 4 projectivische Ebenenbüsche, «wenn man dieselben durch die Bedingung, dass je 4 entsprechende «Ebenen einen Punkt P gemein haben, zu einfachen Schaaren de«gradirt; der Punkt P beschreibt dann die R^6. Was Sie von den «Geraden anführen, welche die R^6 in drei Punkten schneiden, habe «ich noch begriffen; für meine R^6 halte ich es im Allgemeinen für «unstatthaft; denn wenn der erste Durchschnittspunkt A gegeben ist, «erhalte ich als Ort des zweiten eine von A ausgehende Gerade, von «der ich nicht einzusehen vermag, dass sie die R^6 noch einmal trifft.

«Die $R^8 \begin{vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1 \end{vmatrix}$ ist durch 12, die $R^4 \,|\, 2\,.\,2 \,|$ durch 16, die «$R^5 \begin{vmatrix} 1\,.\,1\,.\,2 \\ 1\,.\,1\,.\,2 \end{vmatrix}$ durch 21, die $R^6 \,|\, 2\,.\,3 \,|$ durch 24, die $R^6 \begin{vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \\ 1\,.\,1\,.\,1\,.\,1 \end{vmatrix}$ «durch 27 Data, die $R^7 \begin{vmatrix} 1\,.\,1\,.\,1 \\ 2\,.\,2\,.\,2 \end{vmatrix}$ durch 28, die $R^7 \begin{vmatrix} 1\,.\,1\,.\,3 \\ 1\,.\,1\,.\,3 \end{vmatrix}$ durch 32

«Data bestimmt. Ein einfaches Datum wäre etwa eine Gerade, die von «der R geschnitten werden soll; ein gegebener Punkt zählt für 2 Data; «aber es dürfen im Allgemeinen nicht lauter Punkte gegeben werden.

«Die f^3 kann durch das Schema $\begin{vmatrix} 1 . 1 . 1 \\ 1 . 1 . 1 \\ 1 . 1 . 1 \end{vmatrix}$ dargestellt werden und «enthält vermöge desselben eine Doppelschaar von R^3 und noch eine «davon geschiedene; die f^3 wird demnach erzeugt durch 3 projec-«tivische Ebenenbüsche. Da das Schema mit Rücksicht auf Trans-«formation nur 19 Data zählt, so ist seine f^3 die allgemeine. Es «seien auf der f^3 die Punkte A, B, C, P, P^1, P^{11}, P^{111} und noch 12 «andere gegeben; man beabsichtigt A, B, C zu Centren projectivischer «Büsche zu machen. Die 4 durch AP, AP^1, AP^{11}, AP^{111} gehenden Ebenen «des Busches A ermangeln noch jede einer Bestimmung, u. s. f.; es sind «also im Ganzen noch 12 Data unbekannt; diese werden durch die «12 übrigen Punkte just bestimmt. Da nun die Projectivität zweier «Büsche durch 4 Ebenen in jedem festgesetzt wird, so kann man «von jetzt an so viele Punkte der f^3 construiren als man will. Das «Triederpaar $uvw + xyz = o$ ist in diesem Schema begriffen, näm-«lich als $\begin{vmatrix} \cdot & u & x \\ y & \cdot & v \\ w & z & \cdot \end{vmatrix}$. Das Schema $\begin{vmatrix} 1 . 1 . 1 . 1 \\ 1 . 1 . 1 . 1 \\ 1 . 1 . 1 . 1 \\ 1 . 1 . 1 . 1 \end{vmatrix}$, welches die f^4 geben «sollte, zählt leider nur 33 Data statt 34; dieses Schema enthält aber «eine dreifache Schaar von R^6 und noch eine solche; die freie f^4 «aber wahrscheinlich nicht.

«Es sei P ein Pol, dessen x^{te} Polare in Beziehung auf C^m einen «Doppelpunkt Q hat, so sind die Grade der Orte von P und Q resp. «$3\,x\,(m-1-x)^2$ und $3\,x^2\,(m-1-x)$; für Flächen $4\,x\,(m-1-x)^3$ «und $4\,x^3\,(m-1-x)$. — Die Orts$\left.\begin{matrix}\text{curve}\\ \text{fläche}\end{matrix}\right\}$Q hat mit der $(x+1)^{ten}$ Po-«lare von P Punkt und $\left.\begin{matrix}\text{Tangente}\\ \text{Ber. Eb.}\end{matrix}\right\}$gemein, diejenige von P mit der «$(m-x)^{ten}$ Polare von Q. — Das Geheimniss der Kerncurven und «-Flächen war mir schon bekannt.

«Ich glaube nun so ziemlich mit den schuldigen Antworten auf-«geräumt zu haben; nur etwas über Evoluten und Doppeltangenten ist «noch übrig geblieben.

«Mir schwebt die Frage vor: welche Curve auf der f^n enthält die «Berührungspunkte der Ebenen, welche die f^n in zwei gesonderten «Punkten berühren? — Die P^{18} bei der f^3 trifft jede *Sylvester'sche* «Ebene mit 6 dreifachen Punkten, was ja sehr gut zu dem ohnehin «sichern Grad passt. — Helfen Sie mir zu einer f^9, welche durch die «27g geht!

«Ich habe möglichst geeilt, Ihnen zu antworten, damit dieser «Brief Sie noch vor Ihrer Abreise in Berlin erreiche; und wünsche, «dass Sie mir dann Ihre Adresse geben. In Ems sind Sie näher bei «der Schweiz; vielleicht könnte ich in den Herbstferien Sie dort «besuchen.

«Prof. *Rettig* hat mir einen freundlichen Gruss an Sie aufge«tragen, nehmen Sie auch einen von Ihrem diesen Augenblick Cay«lisch-Sylvestrisch-polarisch-schwabblig-verrückten

«Bern, den 27. Mai 1854. *L. Schläfli.*

«Abends gegen 6 Uhr.

«Ihren Brief vom 22. Mai erhielt ich gestern den 26. Abends «um 4 Uhr!»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«(7. Juni.) Täglich und stündlich Ihrer Antwort entgegensehend, «ergreife ich schon jetzt die Feder, um sogleich nach Kennt«niss Ihrer Adresse Ihnen meine Bemerkungen zusenden zu «können. Wie es mir nämlich fast immer geht, so habe ich auch «dieses Mal meinen letzten Brief zu ergänzen und theilweise zu «berichtigen.

«Ich sprach von *projectivischen Ebenenbüschen*, — ich will sie «fortan lieber *collinear* nennen, — und gab die Definition, dass sie «in eine solche *(perspectivische)* Lage versetzt werden können, dass «alle Durchschnitte je zweier entsprechender Ebenen in eine und die«selbe Ebene fallen. Es fragte sich aber noch, ob dieses immer aus«führbar sei, wenn zwei Ebenenbüsche nach meiner analytischen Vor«stellung collinear sind. Vorerst war klar, dass sie in der perspec«tivischen Lage einen gleichen und gemeinschaftlichen Ebenenbüschel «enthalten, dessen Lage ihre Mittelpunkte verbindet; und umgekehrt, «wenn zwei collineare Büsche auch nur einen in beiden gleichen «Ebenenbüschel enthalten, so war leicht zu zeigen, dass man nur «diese zwei Büschsel zur Congruenz bringen darf, indem man die «Mittelpunkte der Büsche getrennt erhält, um diese in die perspec«tivische Lage zu versetzen. Es fragte sich also nur noch: enthalten «zwei (in analytischem Sinne) collineare Ebenenbüsche immer wenig«stens *einen* gleichen Ebenenbüschel? Die Antwort war: es giebt immer «6 Axen gleicher Ebenenbüschel; und diese werden so construirt: «Es seien h, k die Asymptotenkegel aller um die Mittelpunkte A, B «der zwei gegebenen collinearen Ebenenbüsche beschriebenen Kugeln «(d. h. Kugeln mit nullem Halbmesser); k^1 sei der Kegel, welcher im «Busche A dem Kegel k des Busches B entspricht. Nun lege man «an h, k^1 die 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen, so sind die 6 «Kanten dieses vierflächigen Ecks die Axen derjenigen Ebenenbüschel «in A, denen gleiche Ebenenbüschel in B entsprechen. Ist die col«lineare Verwandtschaft beider Büsche eine reelle, so haben auch die «Gleichungen beider Kegel h, k^1 lauter reelle Coefficienten; daher «sind ihre 4 gemeinschaftlichen Berührungsebenen *conjugirt*-imaginär; «folglich immer *zwei* Gegenkanten *reell*, die 4 übrigen Kanten imaginär.

«Ich war erstaunt zu finden, dass die Erzeugung der f^3 mittelst «dreier collinearen Ebenenbüsche jeweilen mit einem bestimmten «Doppelsechser *Cayley'scher* Geraden zusammenhängt, so dass von «dieser Seite her keine Hoffnung übrig ist, zu 19 gegebenen Punk«ten einen beliebigen 20^sten^ zu finden. Denn wenn wir auch unter den «19 gegebenen Punkten drei A, A^1, A^{11}, als Mittelpunkte collinearer «Büsche setzen, und dann vier andere Punkte K, L, M, N hinzunehmen, «so drehen sich die 3×4 Ebenen, mit denen wir die collineare «Verwandtschaft anfangen wollen, um die 3×4 Strahlen AK, AL, «AM, AN, etc.; und um die 12 Unbekannten, die ihre Lage fixiren, «zu finden, müssen wir schon 4 sich nicht schneidende *Cayley'sche* «Gerade kennen. — Sind mit Bezug auf das Schema der 3×3 an«fänglichen Ebenen

	K	L	M
A	x	y	z
A^1	x^1	y^1	z^1
A^{11}	x^{11}	y^{11}	z^{11}

«(wo wenigstens 4 Buchstaben, wie z. B. y^1, z^1, y^{11}, z^{11}, nicht reine «Perpendikel bedeuten, sondern noch gewisse Factoren mit sich führen),

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = 0 \\ \alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = 0 \\ \alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = 0 \end{array}\right\}$$

«drei entsprechende Ebenen, welche in B sich schneiden, so dürfen «ihre Polynome unverändert, wie sie hier stehen, z. B. mit der «Horizontalzeile A vertauscht werden; u. s. f., was ich nur andeuten will, «um nicht weitläufig zu werden. D. h. wie, wenn A, A^1, A^{11} als Mittel- «punkte collinearer Büsche feststehen, die auf f^3 liegenden Punkte K, L, M, «welche die 3×3 anfänglichen Ebenen des Schemas bestimmen, durch «irgend drei andere N, P, Q ersetzt werden können, so können auch um- «gekehrt irgend drei unter allen mittelst der collinearen Büsche A, A^1, «A^{11} bestimmten Punkte, z. B. K, L, M als Mittelpunkte collinearer «Büsche gebraucht werden, um die Punkte A, A^1, A^{11} in Fluss zu «bringen, und z. B. die Punkte B, B^1, B^{11} an ihre Stelle zu setzen. «Wir haben jetzt ein neues Schema der f^3, wo die Verticalzeilen den «Punkten N, P, Q, die Horizontalzeilen den Punkten B, B^1, B^{11} entsprechen, «und zwar haben wir es mittelst 12 unbestimmter Substitutionscoeffi- «cienten erhalten. Aber trotz der 12fachen Variabilität umfasst der «Haufe von Schematen, welche durch lineare Transformation, sowohl «der Horizontal- als der Verticalzeilen aus einem anfänglichen Schema «hervorgehen, noch nicht alle Schemate der f^3; sondern es giebt 36 «getrennte solche Haufen, wo kein Uebergang aus einem in einen «andern durch lineare Transformationen möglich ist; und jeder Haufe «ist an einen Doppelsechser *Cayley*'scher Geraden gebunden. — Halten «wir nämlich wieder A, A^1, A^{11} als Mittelpunkte collinearer Büsche «fest und verlangen zwei Verhältnisse $\varkappa : \lambda : \mu$, für welche die drei «entsprechenden Ebenen

$$«p = \varkappa x + \lambda y + \mu z = o,$$
$$«p^1 = \varkappa x^1 + \lambda y^1 + \mu z^1 = o,$$
$$«p^{11} = \varkappa x^{11} + \lambda y^{11} + \mu z^{11} = o,$$

«welche den Punkt N bestimmen sollten, sich in *einer* Geraden B «schneiden, so ist die Aufgabe vom 6^{ten} Grade, wir erhalten daher «eine Sechserreihe sich nicht schneidender Geraden b_1, b_2, b_3, b_4, «b_5, b_6; und können das anfängliche Schema

$$\begin{vmatrix} p \ . \ y \ . \ z \\ p^1 \ . \ y^1 \ . \ z^1 \\ p^{11} . \ y^{11} . \ z^{11} \end{vmatrix}$$

«durch $= o$ ersetzen. Weil aber die Polynome p, p^1, p^{11} nicht mehr «unter sich unabhängig sind, so giebt es eine identische Relation

$$«\alpha p + \alpha^1 p^1 + \alpha^{11} p^{11} = o,$$

«und diese geht, wenn wir $\alpha x + \alpha^1 x^1 + \alpha^{11} x^{11} = t$,

$$«\alpha y + \alpha^1 y^1 + \alpha^{11} y^{11} = u,$$
$$«\alpha z + \alpha^1 z^1 + \alpha^{11} z^{11} = v \text{ setzen,}$$

«in $\varkappa t + \lambda u + \mu v = o$ über.

«Daher schneiden sich auch die drei entsprechenden Ebenen t, «u, v der Büsche K, L, M in einer und derselben Geraden a, «welche der vorigen b conjugirt ist und sie nicht schneidet. Wenn «also die der vorigen ähnliche Aufgabe, welche der Vertauschung «von Horizontal und Vertical entspricht, die 6 Geraden a_1, a_2, a_3, «a_4, a_5, a_6 liefert, so dürfen wir annehmen, dass jede von diesen «mit der gleichvielten der Sechserreihe b conjugirtr sei; und es «ist klar, dass man nicht wieder eine Gleichung 6^ten^ Gades auf-«zulösen braucht, sondern dass alle Geraden der zweiten Aufgabe auf «linearem Wege aus denen der ersten erhalten werden. Es ist ferner «leicht zu zeigen, dass z. B. a_1 von den 5 nicht conjugirten Geraden «$b_2, \ldots b_6$ der andern Reihe geschnitten wird. Ich nenne die Sechser-«reihe a *den Horizontalzeilen* des Schemas *entsprechend*, weil z. B. «im äquivalenten Schema die obige Gerade die erste Horizontalzeile

$$\begin{vmatrix} t & . & u & . & v \\ x^1 & & y^1 & & z^1 \\ x^{11} & & y^{11} & & z^{11} \end{vmatrix}$$

«annullirt; die conjugirte Reihe b entspricht den Verticalzeilen. Das «einfachste Merkmal, dass zwei Gerade beider Reihen, wie a_1 und b_1 «conjugirt sind, besteht darin, dass, wenn man so transformirt, dass «eine Horizontalzeile des Schemas durch a_1 und eine Verticalzeile «durch b_1 annullirt wird, im Kreuzungspunkt beider Zeilen eine *Lücke* «(Null statt eines Polynoms) entsteht. Transformirt man das Schema «so, dass seine drei Horizontalzeilen der Reihe nach von den Geraden «a_1, a_2, a_3 und seine drei Verticalzeilen von b_1, b_2, b_3 annullirt werden, «so fallen auf die Diagonale des Schemas drei Lücken; die Deter-«minante verwandelt sich in die Summe *zweier* Produkte, und man «hat ein *Triederpaar*.

«Mit dieser Anschauung hängt die Anordnung der auf f^3 liegen-«den Curven R^3 innig zusammen. Heben wir nämlich aus den colli-«nearen Büschen A, A^1, A^{11} irgend drei projectivische Ebenenbüschel «heraus, so erzeugen diese eine R^3; sie bildet eine Doppelschaar, die «ich der horizontalen Richtung des Schemas oder der Sechserreihe a «entsprechend nenne. Von K, L, M aus erhalten wir die conjugirte «Doppelschaar. — Jene R^3 schneidet keine der 6 Geraden der ent-«sprechenden Reihe a; sie schneidet jede Gerade der conjugirten «Reihe b zweimal, endlich jede der 15 übrigen Geraden c_{12}, etc. nur «einmal. Irgend zwei R^3 aus conjugirten Doppelschaaren schneiden «sich in 5 Punkten und liegen zusammen auf einem Hyperboloid;

«zwei R^3, deren entsprechende Sechserreihen keine Gerade gemein «haben ohne jedoch conjugirt zu sein, schneiden sich in 4 Punkten; «in 3, wenn die Sechserreihen *eine;* in 2, wenn dieselben *drei* Ge-«rade gemein haben; endlich zwei R^3 derselben Doppelschaar schnei-«den sich nur in einem Punkt. Durch 2 beliebige Punkte auf der «Fläche ist die R^3 bestimmt; aber es gehen deren 72 durch.

«Die R^3 ist eine sehr hübsche Curve; sie hat einmal gar keinen «ausgezeichneten Punkt; sodann spielt die Schaar ihrer Schmiegungs-«ebenen als *Abwickelbare* ganz dieselbe Rolle wie die Schaar ihrer «Punkte als Raumcurve. Durch einen freien Punkt gehen 3 Schmieg-«ungsebenen. Durch irgend zwei Durchschnitte von je zwei Schmieg-«ungsebenen geht eine der Abwickelbaren eingeschriebene Fläche «zweiten Grades; u. s. w. Folgende Aufgaben, 1. wenn 6 Punkte, «2. wenn 5 Punkte und 1 Sehne, 3. wenn 3 Punkte und 3 Sehnen, «4. wenn 2 Punkte und 4 Sehnen gegeben sind, die R^3 zu construiren, «sind leicht zu lösen. Durch 4 Punkte und 2 Sehnen wird keine «ächte R^3 bestimmt, sondern nur etwa ein Kegelschnitt und eine Ge-«rade, die aber jenen *nicht* schneidet, und daher keine R^3 mit ihm «ausmacht. Die übrigen Aufgaben, 5. durch 1 Punkt und 5 Sehnen; «6. durch 6 Sehnen eine R^3 zu legen, konnte ich nicht lösen.

«Unter den 12 Punkten, in denen die Vollcurve $R^4 \,\|\, 2 \,.\, 2 \,\|$ von «einer f^3 geschnitten wird, ist einer nothwendig.» Können Sie diesen «Satz beweisen? Wenn doch diese fundamentale Schwierigkeit nur «erst in einem speziellen Falle überwunden wäre! Dann Hoffnung «auf Verallgemeinerung.

«Durch irgend 4 auf der f^3 gegebene Punkte gehen 27 Curven «$R^4 \,\|\, 2 \,.\, 2 \,\|$, welche den 27 Geraden entsprechen. Alle auf der f^3 «gezogenen Vollcurven R^4 zerfallen also in 27 geschiedene Haufen. «Zwei Curven desselben Haufens schneiden sich auch in 4 Punkten, «diese liegen in einer Ebene, und der vierte ist nothwendig, es geht «nämlich ein schon durch die drei Punkte bestimmter Büschel durch. «Wird aber der vierte Punkt beliebig auf der durch die drei ersten «gelegten ebenen C^3 gesetzt, so zerfällt die R^4 in die entsprechende «*Cayley*'sche Gerade und diese C^3. Zwei Curven R^4 aus verschiedenen «Haufen schneiden sich entweder in 6 oder in 5 Punkten, je nachdem «die entsprechenden *Cayley*'schen Geraden sich schneiden oder nicht; «im ersten Falle geht die durch die 6 Punkte bestimmte R^3 durch «den Schnittpunkt der zwei *Cayley*'schen Geraden und hat die dritte «das Dreiseit ergänzende Gerade zur Sehne. Da die Gerade a, welche «den Haufen der R^4 bestimmt, in 16 Sechserreihen vorkömmt, so «kann die R^4 dieses Haufens auf 16 Arten in eine R^3 und diejenige «Sehne derselben, welche mit a in Beziehung auf die entsprechende «Sechserreihe conjugirt ist, sich auflösen. Sie kann ferner auf 5 «Arten sich in zwei Kegelschnitte, die zwei Punkte gemein haben, «auflösen. U. s. w. 16 Schnittpunkte der 4 Trippelebenen[1]) ausge- «zeichnet. Durch irgend einen gegebenen Punkt gehen 2 Sehnen. «Alle Ebenen, welche in zwei getrennten Punkten die R^4 berühren, «bilden eine Abwickelbare (A^8) achter Classe, welche in 4 Kegel K^2 «zerfällt, deren Scheitel die Tripelpunkte[1]) sind. Die von den Tan- «genten gebildete Abwickelbare ist eine A^{12} achten Grades. In einer «beliebigen Ebene liegen 38 Durchschnitte von je zwei Schmiegungs- «ebenen der R^4.

«Die famose Theilcurve R^4 [(2 . 3)—(1 . 1)—(1 . 1)] ist nicht «so spröd, wie ich anfangs glaubte; sie zählt nur 16 Data, wie die «vorige (*nicht* 18!) und ist daher durch 8 Punkte bestimmt, nur «weiss ich nicht, wie viele Lösungen es dann giebt. Für ihre ebene «Projection ist $k = 6$, $d = 3$, $w = 6$, $t = 4$. Diese R^4 hat nur 4 «Punkte, wo sie von einer Ebene 4punktig berührt wird. Ihre Ab- «wickelbare A^6 ist zugleich vom 6^{ten} Grade und hat eine Doppellinie «6^{ten} Grades. In jeder beliebigen Ebene liegen nur 6 Durchschnitte «je zweier Schmiegungsebenen der R^4. Ich vermuthe, dass die ge- «nannte Doppellinie R^6 ihrem Charakter nach von der A^6 sich nur «durch Vertauschung von Grad und Classe unterscheide; sicher ist, «dass sie von jeder Tangente der R^4 nur zweimal geschnitten wird. «Legen wir hingegen an die R^4 alle Berührungsebenen, welche die- «selbe in zwei verschiedenen Punkten berühren, so machen diese eine «Abwickelbare $A^{4\,2}$, welche die R^4 zur Doppellinie hat und als Ebenen- «schaar wahrscheinlich dasselbe ist, wie diese R^4 als Punktschaar; «sie wäre demnach vom 6^{ten} Grade; ich kann dieses aber nicht be- «weisen. — Von einem gewissen Gesichtspunkt aus erscheint diese «R^4 als Glied einer Progression, welche mit der Geraden, dem Kegel- «schnitt und der R^3 anfängt. Setzt man nämlich die vier räumlichen «Coordinaten gleich ganzen Functionen einer einzigen Variabeln und «erhöht ihren Grad nach und nach von 1 bis 4, so erhält man die «schon genannten Linien und zuletzt die Theilcurve R^4 und zwar «ohne Beschränkung ihrer Natur. Sie passt auch in die allgemeine

[1]) Soll wohl heissen Quadrupelebenen.

«Darstellungsform freier Raumcurven, über die ich Ihnen früher ge-
«schrieben habe. Wenn nämlich t bis z lineare Polynome der 4
«räumlichen Coordinaten bedeuten, so wird die Curve rein durch das
«System $[t\lambda^2 + u\lambda\mu + v\mu^2 = o,\ w\lambda + x\mu = o,\ y\lambda + z\mu = o]$ dar-
«gestellt, wo das Verhältniss $\lambda : \mu$ zu eliminiren ist, ohne dass man
«etwas auszuschliessen braucht. Das System kann immer so trans-
«formirt werden, dass die Polynome w, x, y, z einem beliebigen
«schiefen Vierseit des festen Hyperboloids auf dem die R^4 liegt, ent-
«sprechen und dass zugleich u wegfällt, die erste Gleichung also bloss
«$t\lambda^2 + v\mu^2 = o$ ist. Man kann daher die Curve auch als das Er-
«zeugniss dreier Ebenenbüschel betrachten, von denen aber nur zwei
«unter sich projectivisch sind, beim dritten hingegen das projecti-
«vische Verhältniss die Reihe der Quadrate durchläuft, wenn es bei
«den übrigen nach einer arithmetischen Reihe erster Ordnung variirt.
«— Um die Curve R^4 auf dem festen Hyperboloid zu bestimmen,
«reichen 7 Punkte hin, und die Aufgabe hat nur 2 Lösungen je nach
«der Geradenschaar, auf welche man die Curve bezieht. Sie schneidet
«nämlich alle Geraden der einen Schaar dreimal, diejenigen der an-
«dern nur einmal. Irgend zwei Curven R^4 auf dem Hyperboloid haben
«6 oder 10 Punkte gemein, je nachdem sie zum gleichen oder zu
«verschiedenen Haufen gehören. Die durchgehende f^3 ist 6fach un-
«bestimmt, sie kann durch je zwei beliebige Gerade derselben Schaar
«des Hyperboloids gelegt werden oder kann auch eine allein zur
«Doppelgeraden haben.

«(6. Juli.) Ich habe mich schauderhaft lang mit den Raumcurven
«gequält und desshalb mit der Antwort gezögert, weil ich wenigstens
«noch mit den Curven 6^{ten} Grades aufräumen wollte. Ich bin zwar
«noch nicht sicher, dass ich alle R^6 vollständig habe.

«Ich schicke einige allgemeine Bemerkungen voraus. — Bei
«allen bis jetzt betrachteten auf der f^2 oder f^3 liegenden Curven habe
«ich immer gefunden, dass sie die durchgehende f^3 beschränken; es ist
«daher keine Hoffnung vorhanden, von dieser Seite her etwas für
«die f^3 zu leisten, was der Entdeckung der 27 Geraden auf der f^3
«einigermassen ähnlich wäre. Wenn ich lauter Polynome zweiten
«Grades anwenden will, so brauche ich deren f ü n f, um die allgemeine
«f^3 zu construiren, und dann ist das System viel zu beweglich, als
«dass man etwas Vernünftiges daran sehen könnte. Kurz, die f^3 ist
«eine sehr harte Nuss. — Ich bezeichne die Raumcurven nach Grad
«(oben) und Classe (unten); es giebt aber solche von gleichem Grad

«und gleicher Classe, die dennoch streng geschieden sind. Wenn «für die Flächen f^m, f^n, welche die Vollcurve bilden, keine Längs- «berührungen stattfinden, und die Vollcurve in mehrere bekannte Theil- «curven und eine unbekannte R_λ^α zerfällt, so finde ich die Classe λ «auf folgendem Wege. Es sei Θ die Zahl der Knoten dieser R^α, d. h. «der Punkte, in denen sie von den übrigen Theilcurven geschnitten «wird (leicht zu ermitteln), so ist $\lambda + \Theta = \alpha$ $(m + n - 2)$. «Wenn die R_λ^n keinen ausserordentlichen Punkt (d p oder r p) hat, «so ist λ immer gerade. Durch irgend einen Punkt gehen «$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\lambda}{2}$ Sehnen; von jedem Punkt der Curve aus gehen «$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1$ Strahlen, welche die Curve im «Ganzen in drei Punkten scheiden. Durch irgend einen Punkt gehen «$3(\lambda - n)$ Schmiegungsebenen und $4n + \frac{1}{2}\lambda(\lambda - 10)$ «Doppelberührungsebenen; die von diesen umhüllte Abwickelbare «hat die R_λ^n zur $(\lambda - 4)$ fachen Linie. Die Doppellinie, der von «den Schmiegungsebenen umhüllten Abwickelbaren ist vom Grade «$\frac{1}{2}\lambda(\lambda - 4)$. Die Curve R_λ^n hat $6\lambda - 8n$ *Planpunkte* (wo eine Ebene «4 punktig berührt). — Die Zahl der *nothwendigen Punkte* einer Theil- «curve wird durch folgenden Satz bestimmt: «Wenn eine Vollcurve «in i Theilcurven zerfällt, so ist die Summe der diesen entsprechen- «den Zahlen nothwendiger Punkte sammt der Anzahl aller Knoten um «$i - 1$ grösser als die der Vollcurve entsprechende Zahl nothwendi- «ger Punkte.» Diese letzte Zahl wird durch die Formel

$$\frac{1}{2}np(n + p - 4) + 1 - \varepsilon\left(\frac{n + p - m - 1}{3}\right)$$

«ausgedrückt mit Bezug auf Vollcurve $C^{n \cdot p}$ und Fläche f^m $(m \geqq n \geqq p)$; «$\varepsilon = 0$, wenn $m > n + p - 4$, und $= 1$, wenn $m \leqq n + p - 4$.

«Dieser Satz lässt mich aber bei Längsberührungen im Stich. — «Unter den wenigen Gattungen von Raumcurven, die ich jetzt aufzählen «will, sind manche, die ich nicht durch ein geschlossenes System von «Gleichungen, worin zu eliminirende Hülfsgrössen vorkommen, so «darzustellen vermag, dass das System der Theilcurve äquivalent ist, «ohne dass man von der Gesammtheit seiner Lösungen etwas auszu- «schliessen braucht. Es bleibt daher nichts anders übrig, als sie nach «den niedrigsten durchgehenden Flächen zu ordnen, was doch be-«denklich ist. Auch scheint uns die f^8 für die Fortsetzung dieser «angefangenen Betrachtung der Raumcurven ein unübersteigliches «Hinderniss in den Weg zu legen. In folgender Uebersicht bezeichnet «e die Zahl der Elemente oder Bestimmungsstücke, p die Zahl der noth-«wendigen Punkte, wenn es nöthig ist, mit einem untern Zeiger, der «den Grad der schneidenden Fläche anzeigt.

«R^3_4 (e = 12, p = o); R^4_6 (e = 16, p = 0); R^4_8 (e = 16, p = 1);

«R^5_8 (e = 20, p = 0) entsteht, wenn zwei f^3 eine R^3_4 und eine «diese nicht treffende Gerade gemein haben. Die R^5_8 (e = 18), «welche entsteht, wenn eine f^4 mit einer f^2 drei Gerade derselben «Schaar gemein hat, betrachte ich als speziellen Fall der vorigen

«R^5_{10} (e = 20, p = 1) entsteht, wenn zwei f^3 eine R^4_6 gemein «haben. (Kein System!)

«R^5_{12} (e = 20, p = 2) entsteht, wenn eine f^2 und eine f^3 eine Ge-«rade gemein haben.

«R^6_{10} (e = 24, p = 0); eine einzige f^3 geht durch (als Basis); die «Curve schneidet alle Geraden des entsprechenden Sechsers «4 mal, die des conjugirten nicht, und jede der 15 übrigen Ge-«raden 2 mal; sie ist durch 5 Punkte auf der Basis bestimmt. «Die durchgelegte f^4 schneidet die Basis in einer conjugirten S^6_{10}. «Zwei R^3_4 desselben Haufens können zusammen für eine solche «Curve gelten.

«Diesen untergeordnet R^6_{10} (e = 23), wenn eine f^3 und eine «f^4 eine Gerade gemein haben, die in jener Doppelgerade, in dieser «dreifache Gerade ist; R^6_{10} (e = 20), wenn eine f^5 durch «4 Gerade derselben Schaar einer f^2 geht; ist auf der f^2 durch «11 Punkte bestimmt und trifft alle Geraden der einen Schaar «5 mal, die der andern 1 mal.

«R^6_{10} (e = 23, p_3 = 1, $p_4, \ldots$ = 0), wenn zwei f^3 sich längs «einer Geraden berühren und eine freie Gerade (einfach) gemein «haben. Legt man eine f^4 durch die R, so enthält sie noth-«wendig die erste Gerade und schneidet jede f^3 in einer R^5_{10} «die das Geradenpaar nicht trifft. (Kein System!)

«R^6_{12} (e = 24, p = 1), wenn zwei f^3 drei freie Gerade a, a′, a″ «gemein haben. Die eine f^3 sei Basis, und werde von der «durch a, a′, a″ gehenden f^2 in b, b′, b″ geschnitten. Geht «nun eine f^4 durch die R^6_{12}, so schneidet sie die Basis noch in «einer S^6_{12}, die zu b, b′, b″ gehört und mit der vorigen «Curve 18 Punkte gemein hat.

«R^6_{14} ($e = 24$, $p = 2$), wenn zwei f^3 einen Kegelschnitt und eine «freie Gerade gemein haben. (Kein System!)

«R^6_{16} ($e = 24$, $p = 3$), wenn zwei f^3 eine R^3_4 gemein haben; ist «durch 8 Punkte auf der Basis f^3 bestimmt, trifft alle Geraden «eines Sechsers 3 mal, die des conjugirten Sechsers nur 1 mal, «die 15 übrigen Geraden 2 mal; und wird durch vier collineare «Ebenenbüsche erzeugt.

«R^6_{16} ($e = 23$, $p = 3$), wenn eine f^2 und eine f^4 zwei freie Ge- «rade gemein haben.

«R^6_{18} ($e = 24$, $p = 4$) $= C^{2 \cdot 3}$ Vollcurve.

«Wie tief kann die Classe einer R^n hinabgehen, wenn diese «ausserordentliche Punkte hat? Ohne solche scheint $2(n-1)$ die «niedrigste Classe zu sein. Diese $R^n_{2(n-1)}$ entsteht immer, wenn man «alle 4 Coordinaten als ganze Functionen n^{ten} Grades einer Variabeln «setzt, und hat $4n$ Elemente; sie verläuft in einem einzigen reellen «Zuge und kehrt in sich zurück; was ich von den höhern Classen «nicht glaube, obschon ich es nicht beweisen kann. Von der R^4_8 ist «leicht nachzuweisen, dass sie aus zwei getrennten Zügen bestehen «kann, ebenso von der ebenen C^3; wie ist es bei der ebenen C^4? — «Ich habe auch das Zerfallen der einzelnen Raumcurven studirt, weil «ich es für den Uebergang zu höhern Curven nothwendig finde; doch «darüber einzutreten, ist zu weitläufig; ich will nur erwähnen, dass «eine R^4_8 auf der Basis f^3 allmählig übergehen kann in eine C^3 und «eine einmal schneidende Gerade; ferner dass nicht jede Gruppe durch «Knoten vereinigter Raumcurven als specieller Fall einer untheilbaren «Raumcurve angesehen werden darf; denn z. B. eine C^4 sammt einer «einmal schneidenden Geraden wäre eine R^5_{14}, und doch glaube ich «nicht, dass es eine untheilbare R^5_{14} gebe.

«*Satz*. Wenn $m \gtreqless n$ und die Basis f^n enthält eine Gerade g, «und man verlangt, dass eine f^m die Basis längs g berühre, so zählt «dieses der f^m für $2m + n$ gegebene Punkte.

«Im Café du Mont ist das Erdgeschoss frei; Sie können 8 Tage «vor Ihrer Ankunft das Logis bestellen, und ich ersuche Sie mir dar- «über zu schreiben. Wenn Sie unerwartet ankämen, könnten Sie «nicht schon am ersten Tage hier logiren. Es freut mich sehr, Sie «wieder zu sehen; nur muss ich Ihnen mittheilen, dass ich der Na- «tionalvorsichtscasse die Uebernahme einer mir wahrscheinlich zu-

«fallenden Arbeit, die vielleicht 3 Wochen, Ende Juli bis in den «August hinein, ansprechen wird, zugesagt habe; doch, bevor ich sie «definitiv erhalte, soll darüber geschwiegen werden. Es bleibt mir «also nichts andres übrig, als diese Arbeit Hals über Kopf zu been- «digen, damit ich etwa am Ende August mit ungetheiltem Interesse «Ihrem Umgang und den von Ihnen in Aussicht gestellten mathema- «tischen Bemühungen leben kann. — Die Vorsicht wegen Einsendung «einer Abhandlung über Flächen an *Liouville* ist mir schon vor Ihrem «Briefe in den Sinn gekommen, und ich werde mich vorher mit Ihnen «darüber besprechen. Meine Ansicht ist, dass wir die Anfänge einer «Theorie der ganzen Functionen vor uns haben, so wie die Zahlen- «lehre eine Theorie der ganzen Zahlen ist, und dass jene ein starkes «Bedürfniss ist, weil es in allen Zweigen der Analyse doch zuletzt «immer auf geschickte Behandlung der ganzen Functionen ankömmt.

«In der letzten Zeit befinde ich mich etwas leidend und weniger «lebendig als im Mai und Juni; ich wollte, ich könnte etwa am Fusse «des Ochsen [1]) eine Milchkur machen; doch wird nun kaum etwas daraus «werden. — *Crelle* hat mir den Empfang meiner Zusendung noch «immer nicht angezeigt; vielleicht wäre es gut, wenn Sie ihn mahnten.

«Ich wünsche, dass die Kur Ihnen gut zuschlage; und verzeihen «Sie, dass ich erst so spät schreibe und Ihnen zumuthe, während der «Cur einen so lang schwatzenden Brief zu lesen.

«Sie freundlich grüssend

Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Café du Mont, den 7. Juli 1854.

Steiner an Schläfli.

Vom hohen Olymp [2]) 1ter August 1854.

«*Lieber Freund!*

«Seit dem 20ten vorigen Monats bin ich hier. Nach Homburg hielt «ich mich je einen Tag in Baden-Baden, Freiburg (bei *Oettinger*) [3]) und «Basel auf, leider war *Rudolf Merian* zur Zeit in Bern. Ihren furcht- «baren Brief habe ich in Homburg nicht gelesen; hier bin ich auch «noch nicht dazu gekommen; es fehlt mir an Comfort, die Zimmer

[1]) Ein Berg der Stockhorn-Kette.

[2]) Rigi-Scheideck.

[3]) Oettinger Ludwig geboren 7. V. 1767 Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau.

«sind zu klein, ohne Sopha und Tisch, im Gastzimmer kann ich «nicht nachdenken, wie Sie. Diesen Brief schreibe ich in der Nähe «des Getümmels im grossen Saal. Hätten Sie Zeit und den Rigi «nicht schon abgegrast, so könnten Sie auf 2 Tage herkommen. Es «ist keiner hier, der was vom Grasen versteht. Ich werde wenigstens «noch bis zum 10ten hier bleiben, vielleicht bis zum 17ten, nach- «dem ich gute Wirkung spüre. Etwas Stärkung fühle ich schon. «Heute ist straub [1]) Wetter, dass man bis jetzt, 11 Uhr, noch nicht «aus dem Haus gehen kann. Ob ich über Luzern direct nach Bern «komme oder durch Unterwalden (was ich noch nicht gesehen) über «den Brünig, Interlaken, Thun gehen werde, weiss noch nicht; zum «Letztern fehlt mir ein kleines Ränzel und gutes Wetter. Die Pen- «sion ist hier billig, ich bezahle nur 4 Fränkli per Tag. Wenn das «schlechte Wetter anhält, so werde ich wohl anfangen müssen, mir «etwas Geometrie in Erinnerung zu bringen. Ich habe einige Manu- «scripte und Notizen mitgenommen. — Ist die Wohnung, die im du «Mont [2]) zu haben wäre, für mich geeignet? 1) gegen Morgen oder «Mittag; 2) ruhig und ohne Tabakrauch; 3) mit Sopha! — Da Sie «keine Bedürfnisse und daher kein Urtheil haben, so wird es wohl «besser sein, wenn ich erst im Adler absteige und selbst sehe.

«Wenn Sie nichts zu thun haben, so können Sie über Thun und «die beiden Seen in anderthalb Tagen hier sein; von Gersau steigen «Sie in 2 Stunden hinauf. Sind Ihnen die Vorsichts-Kassen-Rech- «nungen schon zugestellt, so rechnen Sie wie der Tüfel, dass Sie «bis zum 18ten oder 20ten August fertig sind. Indessen reiben Sie «sich nicht auf, damit Sie nicht auch matt werden, wie Ihr entkräf- «teter Freund

Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Es dauert mich, dass Sie in meinem letzten Brief die Auf- «zählung der Raumcurven bis zum 6ten Grad inclusive und den «schlechten Trost, den ich für höhere Curven beifüge, nicht ange- «sehen haben.

---

[1]) Straub = schlechtes.

[2]) Ein Café bei Bern, wo Schläfli wohnte.

«Wenn Sie lange genug auf dem Rigi blieben, so wäre es mög-«lich, dass ich hinkäme; aber zuvor muss ich die fatale Bürde ab-«geworfen haben, und wenn diess bis zum 20ten geschieht, bin ich «daher froh. Doch ich denke, Sie seien früher in Bern als ich auf «dem Rigi. Wenn Sie aber den Rigi verlassen, möchte ich Sie «bitten, es mir zu schreiben, damit nicht etwa mein Brief oder ich «selbst Sie verfehle.

«Ihr Logis hier auf dem Mont hat alle Eigenschaften, die Sie «von ihm verlangen; es ist das grosse Zimmer ebener Erde gegen «den Garten hin gerichtet; ein Sopha kömmt hinein; Stille und «Rauchlosigkeit non plus ultra. Wenn Sie wenige Tage vorher be-«stellen, brauchen Sie nicht im Adler abzusteigen.

«Ich vermuthe, dass Sie Herrn *Crelle* wegen seines Stillschwei-«gens über den Empfang meiner Abhandlung geschrieben haben; ich «wollte gerne, Sie hätten mir dieses angezeigt. Denn nun erhalte ich «einen Brief von *Crelle*, datirt vom 28. Juli, nach welchem alles in «Ordnung ist, kurz nach dem ich am 31. Juli einen frankirten Mahn-«brief hatte abgehen lassen. Wird indess nicht viel schaden!

«Meine für *Liouville* bestimmte Abhandlung über intégrales «sphériques d'ordre n ist am 1. August durch Gefälligkeit direct nach «Strassburg abgegangen und wird von dort nach Paris spedirt wer-«den, wird aber Herrn *Liouville* kaum mehr dort antreffen. Das «Ding ist etwa 35 starke Quartseiten lang geworden und hat mich die «Redaction saure Mühe gekostet. Musste wiederholt umgegossen wer-«den, weil ich die Darstellung immer wieder zu schwerfällig fand. «Jetzt hoffe ich, wird es ein Franzose leidlich lesen können. Wegen «der Unterdrückung der Beweise habe ich mich bei *Liouville* durch «deren unvermeidliche Weitläufigkeit entschuldigt, ungeachtet sie an «sich leicht und rein constructiv seien. Mich dünkt, die Sache sollte «den *Liouville* um so mehr interessiren, da er selbst schon so Man-«ches auf n Dimensionen übergetragen hat. Bin begierig, was er da-«rauf antworten wird. Ich habe noch allerlei, worüber ich ihm gerne «schreiben möchte, z. B. über orthog. Flächen, wo ich sehe, dass «*Serret* in einem Irrthum steckt, ungeachtet er schöne Sachen darüber «geliefert hat. Ich hoffe, Sie werden es nicht missbilligen, dass ich «*Liouville* ganz kurz gefragt habe, wo *Cayley* seine 27 Geraden publi-«cirt habe.

«Mit herzlichem Gruss

Ihr dankbarer Schüler

«Bern, den 4. August 1854. *L. Schläfli.*»

Steiner an Schläfli.

Sonntag, 20. August.

«Herr Schläfli wird bis zum 23ten oder 24ten hier erwartet, in-«dem ich meinen Aufenthalt bis dahin verlängere, weil mir ätherische «Luft gut anschlägt.

«Rechnung weg! Dienstag abgereisst!

J. St.»

Rigi-Scheideck. Gersau, 20. VIII. 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Wenn die Liquidationsrechnung nächsten Freitag den 25ten fertig «ist, bin ich froh; eher will ich sterben, als dieses Geschäft unbe-«endigt verlassen. Leider schreiben Sie mir nicht, wie lange Sie Ihren «Aufenthalt auf dem Rigi noch fortsetzen wollen. In Erwartung einer «baldigen Antwort grüsst Sie

Ihr

L. Schläfli.»

Bern, den 21. August 1854.
Montag Abends.

Schläfli ist dann auf den Rigi zum Besuch, *Borchardt* war auch da. (Siehe Brief 21. Febr. 1855, Steiner an Schläfli.)

Schläfli an Steiner.

«Sie haben vermuthlich eine fortgesetzte Redaction des Ganzen «von mir erwartet; aber leider bin ich an Einzelnem stecken ge-«blieben. Uebrigens würde ich kaum im Stande sein, in der Dis-«kussion der Flächen dritten Grades fortzuschreiten. Später vielleicht «Mehreres. Den Auftrag an Chelini und andere Sachen mehr werde «nächstens besorgen; Ihre Ernennung zum Lynkeus in Bund und In-«telligenz gelesen.

«Mit meinen Vorlesungen steht es nicht so übel als Sie glaub-«ten; 4 Zuhörer in den Elementen, 1 in der anal. Geometrie, 1 in «der Mechanik; wöchentlich 12 Stunden, aufgeweckte Jünglinge, die «Freude an der Sache haben.

«Fast hätte ich vergessen, Sie vor dem Pentaeder beim Flächen-«netz zweiten Grades zu *warnen* (im gewöhnlichen Sinne!); die 10 «Ebenenpaare hingegen will ich Ihnen gerne zugeben. — Ich habe «endlich eine Definition des geraden Kegels gefunden; er berührt «den mit ihm concentrischen Asymptotenkegel einer Kugel längs zweier «Strahlen.

«Was macht Boreas bei Ihnen? uns hat er einen frühen Winter «gebracht; gegenwärtig ist Alles weiss mit Ausnahme der sonnigen «Halden; am 25. Oct. Abends hatten wir einen heftigen Sturm, der «zwar die Bäume stehen liess; wohl nur local. — Die drei Hefte von «Crelle 48 habe ich hier auch gesehen.

«Ich wünsche recht bald wieder von Ihren schätzbaren Nach-«richten zu erhalten.

«Mit herzlichem Gruss

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, den 15. November 1854.

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie werden denken, ich befolge das Beispiel *Goldbach's* dass «ich schon wieder eine kecke Behauptung meines letzten Briefes «zurücknehmen muss. Indess enthält doch auch wieder das dort Ge-«sagte die Mittel in sich, den Irrthum aufzudecken. „*Ein beliebiges «Flächengebüsch zweiten Grades* k a n n n i c h t *als im Netze erster «Polaren einer Basis dritten Grades enthalten gedacht werden*"; seiner «Knotencurve R^6 kömmt daher im Allgemeinen *kein* Pentaeder zu; «und wenn im Besondern ein solches existirt, so ist es nicht fest.

«Es ist nämlich klar, dass wenn die Ebene, in der die Pole des «Gebüsches sich bewegen, dreifach gezählt, mit der Basis 3^{ten} Grades «einen Büschel bestimmt, dann auch jede beliebige Fläche dieses «Büschels gebraucht werden kann als Basis zur Darstellung des Ge-«büsches ^{2}, ohne dass die Pole sich ändern. Nimmt man nun die in «meinem letzten Briefe beschriebene Bewegung der Pole und der «Basis hinzu, so erscheint im Ganzen diese Basis als beliebige Fläche «einer Doppelschaar; man kann sie z. B. nöthigen, durch zwei ge-«gebene Punkte zu gehen. Die Basis darf daher nur 17 Unbekannte «zählen, die 3 Pole zählen 9, und die Bedingungen sind 3 . 9; also «übertreffen die Bedingungen die Zahl der Unbekannten um 1; d. h. «drei Flächen zweiten Grades unterliegen *einer* Bedingung, wenn sie «erste Polaren einer Basis sein sollen. — Die Sache wird auch von «anderer Seite her bestätigt. Gebraucht man nur die Coordinaten «eines Pols als Unbekannte, so erhält man mittelst des Kreuzfeuers «leicht diejenigen der zwei andern Pole als lineare Functionen jener «ersten; und wenn man nun auf diese zwei Pole das Kreuzfeuer an«wendet, so erhält man schliesslich 4 lineare Gleichungen für 3 Un«bekannte, also zu viel. Ist aber die Bedingungsgleichung zwischen «den Constanten der drei gegebenen Flächen zweiten Grades erfüllt, «so reduziren sich diese 4 Gleichungen, vermöge ihrer eigenthüm«lichen Beschaffenheit, sogleich auf 2 (statt auf 3); und jener erste «Pol wird nun doch nicht bestimmt, sondern bewegt sich auf einer «Geraden. Die Sache ist analytisch mir jetzt sehr klar; aber geo«metrisch kann ich es so leicht darstellen.

«Ich glaubte mit dieser Rücknahme eilen zu müssen, weil ein «so massiver Irrthum Ihre ganze Redaction verderben könnte.

«Leben Sie wohl!

«Ihr treuer

L. Schläfli.»

Bern, den 18. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Ich glaube Ihnen noch meine Ansichten über Ihre 5 Er«zeugungsarten der Flächen dritten Grades mittheilen zu sollen. Ich «habe mich schon früher dahin geäussert, dass nur die IV (Fünfseit «mit Axe) ganz abgesondert sei; die zwei andern allgemeinern hin«gegen, — nämlich II, Construction mittelst zwei projectivischer «Büschel 1ten und 2ten Grades, und die in Ihrem damaligen Manuscript nicht «ausdrücklich hervorgehobene Construction mittelst dreier projektivi«scher Ebenengebüsche, — sich in der Construction V mittelst des Doppel«trieders, als der beiderseitigen grössten Specialisirung vereinigen. «Ist nämlich $u v w + x y z = o$ die Gleichung der Fläche in Beziehung «auf ein Doppeltrieder und bedeuten α, β, γ arbiträre Factoren, so «kann dieselbe Fläche 1° als Erzeugniss der Büschel $u - \alpha x = o$, «$y z + \alpha v w = o$, und 2° als solches den Ebenenbüsche $\beta u + \gamma x = o$, «$\alpha y + \gamma v = o$, $\alpha w + \beta z = o$ dargestellt werden. Von den letztern «ist freilich jedes Gebüsch in einen Ebenenbüschel ausgeartet, aber «ihre gegenseitige Beziehung ist doch diejenige dreier projectivischen «Ebenengebüsche; und diese Beziehung erscheint sogleich in ihrer «gewöhnlichen Weise, sobald wir die drei Gleichungen mit drei Fac-

«torenreihen λ, μ, ν; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν'' multipliciren und addiren;
«denn wir erhalten so die drei projectivischen Ebenengebüsche:

$$\text{«}\alpha(\mu\ y + \nu\ w) + \beta(\lambda\ u + \nu\ z) + \gamma(\lambda\ x + \mu\ v) = o,$$
$$\text{«}\alpha(\mu' y + \nu' w) + \beta(\lambda' u + \nu' z) + \gamma(\lambda' x + \mu' v) = o,$$
$$\text{«}\alpha(\mu'' y + \nu'' w) + \beta(\lambda'' u + \nu'' z) + \gamma(\lambda'' x + \mu'' v) = o.$$

«Sie fragen nun bei II, wie die 16 übrigen Geraden gefunden «werden können. Die Antwort ist einfach die, dass man zuerst die «Construction II auf die I (Fläche als Pampolare) zurückführen muss. — «Es seien e, e′, e″ drei Ebenen des einen Büschels, h, h′, h″ die «drei entsprechenden Hyperboloide des andern Büschels; eine beliebige «feste Ebene d wird hinzugenommen und irgend ein Punkt P auf «der erzeugten f^3 fixirt. Nun legt man durch die zwei Kegelschnitte, «in denen h von d und e geschnitten wird, und durch P ein neues «Hyperboloid K, durch die Kegelschnitte (h′, d), (h′, e′) und P ein «zweites K′ und endlich ebenso ein drittes K″; dann werden die «zwei projectivischen Büschel (e, e′, e″) und (K, K′, K″) wieder die«selbe f^3 erzeugen. Für die Zurückführung von II auf I kömmt es «jetzt darauf an, der Hülfsebene d eine bestimmte Lage anzuweisen. «Man wähle im Ebenenbüschel eine der fünf, z. B. e, welche ihr zu«gehöriges Hyperboloid h im Punkte A berührt. Dann bilden die in «Beziehung auf h, h′, h″ genommenen Polaren von A, nämlich e, «p′ p″ einen mit dem Ebenenbüschel (e, e′, e″) nicht nur projec«tivischen, sondern perspectivischen Büschel; daher erzeugen beide «Büschel eine Ebene; diese ist die verlangte d. Jetzt verursacht «nur noch die Wahl des Punkts P auf der f^3 einige Schwierigkeit. «Wenn auch e′ das zugehörige h′ im Punkte B berührt, so lege man «durch den Kegelschnitt (d, h′) aus dem Scheitel B einen Kegel; dann «wird dieser auch das Geradenpaar (e′, h′) enthalten und das ge«suchte K′ sein. Wiederholt sich dasselbe für e″, h″, so findet man «wieder einen Kegel K″; und nun ist durch K′, K″ die Grundcurve «des neuen Büschels (K, K′, K″) zweiten Grades bestimmt. Jetzt «sind e, e′, e″ Polaren von A in Beziehung auf K, K′, K″ gewor«den; die 4 übrigen Berührungspunkte einer Ebene e‴ mit dem zu«gehörigen Hyperboloid h‴, ausser A, bilden das Quadrupel des «neuen Büschels (K, K′, K″), und seine Grundcurve R^4 geht nun «durch die 8 neuen Ecken der durch jede Gerade des Paars (e, h) «geführten Dreiseitsschnitte. Bei der analytischen Behandlung bedarf «man des Punkts P zur nähern Bestimmung des neuen Hyperboloids«büschels nicht, und daher genügt es für die beabsichtigte Zurück-

«führung, nur eine Ebene e, welche ihr Hyperboloid in A berührt, «zu kennen. Diese Einfachheit weiss ich aber auf synthetischem «Wege nicht zu erreichen.

«Der eigentliche Gegenstand, der mir interessant genug schien, «um diesen Brief zu veranlassen, ist die Zurückführung der Construc- «tion mittelst dreier projectivischer Ebenengebüsche auf Ihre Er- «zeugungsart III mittelst einer Polebene und eines Hyperboloidge- «büsches. Man wählt in den drei projectivischen Gebüschen drei mal «drei Ebenen, die sich entsprechen, und sucht für diese die drei «Pole; diese zählen analytisch für 3×4 Coordinaten; da es aber nur «auf ihre Verhältnisse ankömmt, so sind bloss 11 Unbekannte zu zählen. «Die Umwendung des Kreuzfeuers giebt zwischen diesen bloss lineare «Gleichungen; also bleiben 2 Unbekannte frei, und die durch die «drei Pole gelegte Ebene bekömmt *doppelte* Beweglichkeit, sie um- «hüllt also eine Fläche Φ. Die Constanten in der Gleichung der Pol- «ebene sind in Beziehung auf die 2 freien Unbekannten vom dritten «Grade. Daher ist die Fläche Φ von der 9^{ten} Klasse und vom 12^{ten} «Grade. Obschon in den Ausdrücken dritten Grades, welche in der «Gleichung der Ebene vorkommen, bei einer passenden Darstellung «die Cuben fehlen, und daher Besonderheiten eintreten, welche die «Elimination erleichtern, so zeigt doch die nahe bis zur völligen Ent- «wicklung des Polynoms Φ (nach Grad) fortgeführte Rechnung, dass «diese Fläche wirklich vom 12^{ten} Grade ist. Sie bezieht sich natür- «lich nur auf den einen Sechser des *Gitters* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ «und hat die 15 Geraden, welche je zwei Ecken, wie $(a_1\, b_2)$ und «$(a_2\, b_1)$ verbinden (also keine *Cayley*'schen), zu Doppelgeraden. Sie «mag aber sonst noch Doppellinien haben, die ich nicht kenne??? «Die nähere Untersuchung scheint mir der Arbeit nicht werth.

«Hat man einmal die Polebene fixirt, so ist darum das Hyperbo- «loid, welches dem ersten Ebenengebüsch als Basis entspricht, doch «noch nicht völlig bestimmt; man bekömmt nämlich statt eines Hyper- «boloids einen ganzen Büschel von solchen, welche sich alle längs «eines in der Polebene befindlichen Kegelschnitts berühren (einander «umschrieben sind). Ebenso verhält es sich mit dem zweiten und mit «dem dritten Hyperboloid; jedes kann in seinem Büschel nach Belieben «gewählt werden, auf eine von der Wahl der zwei übrigen durchaus «unabhängige Weise. Von den 8 Grundpunkten der drei Basen kann «also einer ganz frei im Raume gelöst werde. Somit figuriren in der «besprochenen Zurückführung auf III im Ganzen 5 willkürliche Grössen, «wovon 2 der Polebene und je eine jedem Hyperboloid zufallen. «Hieraus ist es zu erklären, warum die Construktion der f^3 als Pam-«polare scheinbar zu viele Constanten (Elemente) mit sich führt; «nämlich die Polebene zählt deren 3, und die 7 Grundpunkte, welche «hinreichen um das Hyperboloidgebüsch zu bestimmen, $7 \cdot 3 = 21$, «zusammen 24. Zieht man aber hievon die 5 willkürlichen Elemente «ab, so bleibt die richtige Zahl 19; und nun erst ist es sicher be-«wiesen dass die fraglichen Pampolare die allgemeine Fläche dritten «Grades ist.

«Ich füge noch einiges bei, wo ich nicht mehr weiss, ob in «Ihrem Manuscript x, y standen oder nicht. § 4. II. Der Ort der «Berührungspunkte des B^m und B^n ist eine Curve vom Grade

$$3 m^2 + 4 m n + 3 n^2 - 6 m - 6 n + 2.$$

«III. f^m und Geb.^{n}. Die Berührungspunkte liegen da, wo die f^m «von einer Fläche $(m + 3 n - 4)^{ten}$ Grades geschnitten wird; «IV. B^m, Geb.^{n} Ortsfläche vom Grade $2 m + 3 n - 4$.

«Beim Flächennetz zweiten Grades weiss ich über die gegen-«seitige Lage der 10 Ebenenpaare durchaus nichts anzugeben. Ich «glaube wenigstens, dass irgend 2 von den 10 Durchschnittsgeraden «(die also auf der Knotenfläche f^4 liegen) sich treffen. Das ist gewiss, «wenn 6 Gerade nach Belieben im Raume angenommen sind, so sind «die 4 übrigen durch sie bestimmt.

«Ich verwundere mich, noch keinen Brief von Ihnen erhalten «zu haben. Seit heute Vormittag ist die Temperatur gestiegen, und «wir haben heftigen Westwind mit Regen.

«Ich hoffe, dass diese Zeilen Sie in guter Gesundheit antreffen. «Leben Sie wohl und schreiben Sie auch einmal wieder.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Bern, Mittwoch den 29. Nov. 1854.

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Dienstag Abends um 8 Uhr reiste ich von Uzistorf ab und kam «Donnerstag morgens um $10^1/_2$ Uhr in Berlin an. Ich war erstaunt «zu sehen, wie gröblich mich mein schlechtes Gedächtniss getäuscht «hatte; denn statt dem 27^{ten} war schon am 2^{ten} November die Reihe «an mir. Deshalb ging ich selben Tags 4 Uhr Nachmittags in die «Sitzung und war so glücklich, den grossen Anatomen *Müller* bereit «zu finden, den 2ten November an meiner Stelle zu lesen, so dass ich «nun erst am 14ten December den *Donnstigs* Vortrag zu halten brauche. «Bis dahin werden Sie nun noch gute Launen und helle Blicke in «Rücksicht der Resultanten und Determinanten haben, besonders wenn «Sie endlich warm sitzen. Die Hauptsachen wünschte ich aber doch «bis 15. — 18. November zu erhalten; Nachträge können bis zum «8ten December von Bern *abgehen*. — Mit der Arbeit habe ich selbst «noch nicht begonnen, weil allerlei häusliche und andere Geschäfte «mich hinderten. Den Anfang meiner Vorlesungen habe ich auf den «6ten November hinaus geschoben.

«Von *Crelle*'s Journ. fand ich das 2te, 3te und 4te Heft des 48ten «Bandes vor; das 2te enthält acht Aufsätze von *Raabe,* das 3te zwei «von *Heine* (ersten Ranges). 1. «Untersuchungen über ganze Func«tionen,» 2. «Fernere Untersuchungen über ganze Functionen».

«Bei meiner Ankunft fand ich ferner auch ein Schreiben nebst «Diplom und Statuten der Accademia Romana Pontificia de' nuove «Lincei vor, was besagt, dass dieselbe mich schon am 22ten September «1853 zu ihrem correspondirenden Mitgliede ernannt hat. Diese Ehre «werde ich vornehmlich unserm Freunde *Chelini*[1]) zu danken haben, «da er *ordentliches Mitglied* ist, wie das Verzeichniss zeigt. Sie «könnten demselben gelegentlich wieder einmal schreiben, ihm meine «Freude und Dank melden, und ihm erzählen, dass ich Sie diesen «Sommer (Herbst) besucht habe, was Sie und was wir zusammen «treiben, etc. Es wird mir schwer werden, das Dankschreiben an «die Akademie anfertigen zu lassen; doch es hat noch Zeit. Leider «weiss ich nicht, ob die Akademie bedeutend ist, oder nur wie die «Naturforschende Gesellschaft in der Schweiz; sie beschäftigt sich «mit «lo studio, il progresso e la propagazione delle scienze», also «exakten Wissenschaften. *Böckh* sagt: «Lincei» käme von Linkeus, «der durch ein Eichenbrett sehen konnte. Ist die Akademie nicht «ganz ohne, so könnte das Faktum in einer Bernerzeitung erwähnt «werden, nicht gerade aus Eitelkeit, sondern mehr aus Thierquälerei, «nämlich der Thiere des Museums, die uns schnöde behandelten. «Sprechen Sie mit *Rettig* oder *Ries.*

«Gruss an *Mutz, Ries, Rettig,* Herr und Frau *Leuenberger,*[2]) etc.

---

[1]) Steiner schreibt «Chilini».

[2]) Leuenberger, † Mai 1871, war Professor der Rechte in Bern. Rettig war Professor der Philologie in Bern, lebt jetzt noch daselbst.

«Beim Redigiren wird sich wohl Anlass finden, Ihnen bald wie-
«der zu schreiben. Indessen leben Sie wohl, d. h. gehen Sie fleissig
«zu Ihrer geliebten Gräfin [1]).

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Berlin, 30. November 1854.

1855.

Die nachfolgenden Fragen Steiner's sind undatirt [2]):

Fragen an den Cima-Rüssel.

«1. Hat der aus einem Punkt in einer Fläche dieser umschriebene «Kegel die zugehörige Berührungsebene zur *Doppelebene* und berührt «er dieselbe längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve? Und «wenn nun die Ebene mit *Rückkehrpunkten* berührt: ist sie dann eine «*Wendeebene* des Kegels (oder Rückkehrebene?); oder wenn sie mit «*Selbstberührung* schneidet, «ist sie dann eine *Selbstberührungsebene* «des Kegels?

«2. Wenn sich zwei f in 1 Punkt berühren, so hat die ihnen «gemeinsam umschriebene Abweichung die Berührungsebene zur «Doppelebene und berührt sie längs der beiden Tangenten der Schnitt-«curve der Flächen — ? Sie wird *Wende-* (?) *und Selbstberührungs-«ebene*, wenn der Punkt ein *Rückkehr-* oder *Selbstberührungspunkt* «der Curve ist? Die Rückkehrtangente ist dann eine Asymptote in «der Involution; ist es die Selbstberührungs-Tangente auch?

«3. Der Knotenkegel n^{ten} Grads = K sendet n (n + 1) Zweige «durch den Knotenpunkt, deren Tangenten, T, in K fallen; berührt «eine E den K längs einer T, so hat ihre Schnittcurve mit der f^m «diese T zum Selbstberührungspunkt; und für die vorhergehenden «und noch folgenden, den K berührenden Ebenen, wechselt (ändert «sich) die Richtung der Rückkehrtangente ihres Schnittes. Geht E frei «durch T, so hat ihr Schnitt (ein Zweig desselben) die T zur wt im Kp; «geht E durch zwei T eben so beide.

«4. Sie sagen bloss; «Bei einer Doppelschaar von Flächen giebt «es etc.», müsste da nicht beigefügt werden «bei einer Doppelschaar «von Flächen *gleichen Grads oder gleicher Klasse* giebt es etc. oder liegt «*gleichen Grads* oder *gleicher Klasse* schon im Begriff der Schaar? —

[1]) Gemeint ist das Café Gräf, wo Schläfli jahrelang, d. h. bis 1876, in Pension war.

[2]) Sie beziehen sich zum Teil auf den Brief Steiners vom 25. Febr. 1855.

«Kann man bei einer Doppelschaar von «drei successiven Flächen» «sprechen, da jede gleichsam von einer Schaar umgeben ist?

«5. Wenn der Knotenkegel 2^{ten} Grads reell oder imaginär sein «kann, so muss es doch zwischen beiden einen Uebergangsfall geben, «wo der Knotenpunkt *paraboloidisch* oder ein *Rückkehrknotenpunkt* «wird, indem der Kegel sich auf eine einzige Gerade reducirt, die «Rückkehrtangente des Schnitts jeder durch sie gehenden Ebene ist. «Besteht der Kegel aus 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, und «dem entsprechend der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*, und «beim Uebergang, wo die Ebenen zusammenfallen, *parabolisch*, so «muss zwischen diesem dem hiesigen elliptischen und dem vorigen «*paraboloidischen* Knotenpunkt wohl noch ein Unterschied obwalten.

«Wenn Ihr Phantasiegebilde über den in 2 E zerfallenen Knoten-«kegel Realität haben soll, so muss folgendes unterschieden werden. «Beim wirklichen Kegel: *hyperboloidischer* und *ellipsoidischer* Knoten-«punkt, und bei den donnstigs 2 Ebenen: *hyperbolischer* und *ellipti-«scher*. Der Uebergangsfall zwischen erstern muss dann ein *paraboloi-«discher* oder Rückkehrknotenpunkt sein, indem der . . . .

«6. Braucht man «*Schaar*» nicht zu definiren? Wenn Sie sagen «eine Doppelschaar von Flächen» muss da nicht zugesetzt werden «*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*»; liegt dies schon drin? «‖ Steht schon oben 4· ‖

«7. Da die *Klasse* der doppelt umschriebenen Abwickelbaren bei «f^m bekannt, so muss auch der *Grad* ihrer Berührungscurve daraus «zu finden sein. Denn gehen durch $P\mu$ Doppelebenen, so schneidet «seine Polare f^{m-1} jene B. C R^x in 2μ Punkten, so dass also «$(m-1)\,x = 2\mu$, oder $x = \dfrac{2\mu}{m-1}$ ist. Aber nun ist die Frage: ob R^x «nicht in *Theilcurven* zerfalle? wie z. B. bei $n = 3$, wo $R^x = R^{27}$ aus «27 Geraden besteht, was die Formel aber nicht anzuzeigen vermag, «sondern nur, da $\mu = 27$ ist, auch $x = \dfrac{2 \cdot 27}{3-1} = 27$ giebt.

«8. *Bei gegebenen* f^m *und* f^n ist die *gemeinschaftlich-umschriebene* «*Abwickelbare* von der $m\,(m-1)^2 \times n\,(n-1)^{2\,ten}$ Klasse (weil «die beiden aus P den Flächen umschriebenen Kegel beziehlich von «der $m\,(m-1)^2$ und $n\,(n-1)^{2\,ten}$ Klasse sind, und daher «$m\,n\,(m-1)^2\,(m-1)^2$ gemeinsam berührende Ebenen haben); ihre «Berührungscurven $M\mu$, $N\nu$ mit den Flächen werden daher von den «Polaren f^{m-1}, f^{n-1} beziehlich in $n\,(n-1)^2\;m\,(m-1)^2$

«$m (m - 1)^2 n (n - 1)^2$ Punkten geschnitten, so dass

«$\mu = m (m - 1) n (n - 1)^2$,

«$\nu = m (m - 1)^2 n (n - 1)$

«sein muss. Wären die gegebenen Flächen von der m^{ten} und n^{ten} Klasse, «so wäre die Abwickelbare nur von der $m n^{ten}$ Klasse und für ihre beiden «Berührungscurven [1]) gilt folgendes: Ist die Klasse $= m$, so ist ihr Grade «$= m (m = 1)^2$; also Grad der ersten Polare $= m (m - 1)^2 - 1$;

«daher $\mu = \dfrac{m n}{m (m - 1)^2 - 1}$ und $\nu = \dfrac{m n}{n (n - 1)^2 - 1}$; was «auch richtig sein kann, weils für $m = n = 2$ stimmt; aber für «$m = 3$ und $n = 2$ schon Unsinn giebt.

«9. Den Berührungscurven der gemeinschaftlich umschriebenen «Abwickelbaren entsprechen die längs der Schnittcurve zweier Flächen «f^m und f^n diesen umschriebenen Abwickelbaren. Da die Curve vom «m nten Grad ist, so wird sie von den Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes «Pols in $m n \cdot (m - 1)$ und $m n \cdot (n - 1)$ Punkten geschnitten und «daher sind die Abwickelbaren beziehlich von der $m n (m - 1)^{ten}$ «und $m n (n - 1)^{ten}$ Klasse. Daher müssen auch bei zwei Flächen «m^{ter} und n^{ter} Klasse, die Berührungscurven der gemeinschaftlich um- «schriebenen Abwickelbaren, vom beziehlich $m n (m - 1)^{ten}$ und «$m n (n - 1)^{ten}$ Grad sein. — Da nun durch P nur $m n$ gemeinsame «Ebenen der f^m und f^n (Klasse) gehen und die erste Polare von P «auf f^m eine $f^{m (m-1)^2 - 1}$ ist, also die Berührungscurve $M\mu =$ «$M^{n m (m-1)}$ in $[m (m - 1)^2 - 1] \times n m (m - 1)$ Punkten schneiden «sollte statt nur in $m n$: so müssen die übrigen durch die *Doppel-* und «*Rückkehrlinie* der f^m absorbirt werden; also $d l$ und $r l$ absorbiren «$= m n [(m - 1) [m (m - 1)^2 - 1] - 1] = m n [m (m - 1)^3$ «$- (m - 1) - 1] = n m^2 [(m - 1)^3 - 1]$ Punkte; und daraus «sollte folgen, wie vielfach $d L$ und $r l$ oder L_d und L_r für die Polare «$f^{m (m-1)^2 - 1}$ zählen.

$$«\frac{n m^2 [(m - 1)^3 - 1)}{n m (m - 1)} = x L_d + y L_r = \frac{m [(m - 1)^3 - 1]}{m - 1}$$

«Nimmt man 2 Polaren $f^{m (m-1)^2 - 1}$ von 2 P auf f_k^m, so haben «ihre Schnittcurven mit f_k^m nur m freie Punkte, statt

«$m (m - 1)^2 \times [m (m - 1)^2 - 1]^2$,

«so dass durch L_d und L_r absorbirt werden $= m [(m - 1)^2$ «$[m (m - 1)^2 - 1] - 1] = m [m (m - 1)^4 - (m - 1)^2 1]$.

[1]) Das Concept ist hier unklar.

«10. Hat f^m einen KK $= K^n$, so zerfällt der aus dem Kp ihr «umschriebene $K^{m(m-1)}$ in den $(n+1)$ fachen K^n und in einen $K_0^{m(m-1)-n(n+1)}$. Beim Maximum für n, bei $n = m - 1$, wird also $K_0 = 0$, sowie auch 1^2 Polare $f^{m-1} = K^n = K^{m-1}$.»

Schläfli an Steiner (undatirt).

«*Lieber Freund!*

«Ich beeile mich, einige Irrthümer zu zerstören, in denen wir beide «befangen waren.

«I. In Beziehung auf eine f^3 sei A ein *Sylvester*'scher Punkt, «durch den die Kanten b, c, d gehen; a seine Gegenkante, auf ihr die «Punkte B, C, D. Die Polarebene von A berührt die Kernfläche längs «der ganzen a. Also berührt die letzte Polarenveloppe von a (der «Knotenkegel A der Kernfläche) die Kernfläche längs den drei Geraden «b, c, d und schneidet sie daher in einem *Kegelschnitt,* dessen Ebene «durch a geht.

«Auf der Kernfläche Q einer freien Basis f^n liegen $10\,(n-2)^3$ «Knotenpunkte A, deren vorletzte Polaren in zwei Ebenen zerfallen, «deren Kante a heissen soll; die Polarebene von A berührt die Kern-«fläche P längs der Kante a. Die Classe der Kernfläche Q ist somit «$4\,(n-2)\,(11\,n^2 - 52\,n + 61)$ und die Classe ihres ebenen Schnitts «$4\,(n-2)\,(4n-9)$. Die Kernfläche P ist von der Classe $4\,(n-1)^2\,(n-2)$, «ihr ebener Schnitt von der Classe $6\,(n-1)\,(n-2)^2$. — Es «giebt eine Schaar erster Polaren, deren Knotenkegel in zwei Ebenen «zerfällt; der entsprechende Pol durchläuft die Rückkehrlinie der Kern-«fläche P, für deren Grad ich $30\,(n-2)^2\,(n-3)$ gefunden habe(?). Es «giebt ferner eine Schaar erster Polaren mit zwei Knotenpunkten; der «Pol durchläuft also die *Doppellinie* der Kernfläche P; wenn der an-«gegebene Grad der Rückkehrlinie richtig ist, so muss diese Doppel-«linie vom Grade

$$2\,(n-2)^2\,(n-3)\,(4\,n^3 - 20\,n^2 + 36\,n - 45)$$

«sein. Für eine Basis f^4 hätte also die Kernfläche P eine Doppellinie «280ten Grades und eine Rückkehrlinie 120ten Grades. Bei der Unter-«suchung des Verhaltens dieser singulären Curven der Kernfläche P «zu ihrer Geraden a verwickelte ich mich aber in schreiende Wider-«sprüche. Ich bediente mich dazu des folgenden Satzes, den ich im «Allgemeinen für unzweifelhaft halte. «Ein Flächenbüschel n^{ten} Grades, «dessen sämmtliche Flächen einen Knotenpunkt K gemein haben, zählt

«4 $(n-1)^3$ — 11 Flächen, welche noch einen zweiten Knotenpunkt «haben, und 3 Flächen, deren Knotenkegel in K ein Ebenenpaar ist.»

«III. Jedem Gebüsch zweiten Grades entspricht ein *festes* Pentaeder; «in Beziehung auf jede Fläche des Gebüschs geht die Polare eines «Ecks A von den 10 des Pentaeders durch die Gegenkante a. In «Beziehung auf den Gebüschs-Kegel, dessen Scheitel A ist, sind die «von hier ausgehenden Kanten b, c, d ein harmonisches Tripel.

«Alle 10 Ecken des Pentaeders liegen auf der R^6 (Tangenten-«fläche vom 16^ten^ Grade und von der 30^sten^ Classe), der Knotencurve «des Gebüschs; aber sonst giebt es kein Pentaeder von dieser Eigen-«schaft. Die Basen dritten Grades, deren jede das gegebene Gebüsch «in ihrem Netze erster Polaren enthält, bilden eine Schaar, von der «durch jeden Punkt des Raums 4 Flächen gehen, und haben jenes «Pentaeder als *Sylvester*'sches gemein. Ist λ ein Faktor, der von Fläche «zu Fläche sich ändert, und sind v, w, x, y, z die Polynome des Pentaeders, «so ist die Gleichung irgend einer Fläche der Schaar

$$\frac{v^3}{\lambda A + A'} + \frac{w^3}{\lambda B + B'} + \frac{x^3}{\lambda C + C'} + \frac{y^3}{\lambda D + D'} + \frac{z^3}{\lambda E + E'} = 0;$$

«der Pol irgend einer bestimmten Fläche des Gebüschs bewegt sich «in einer Geraden, wenn die Base sich ändert. Die entsprechenden Kern-«flächen bilden einen Büschel, dessen Grundcurve aus jener R^6 und den «10 Kanten des Pentaeders besteht. Die Umhüllungsfläche der Schaar «von Basen dritten Grades ist vom 18^ten^ Grade und der 216^ten^ Classe, «hat eine Doppellinie 45^ten^ Grades und als Umhüllte ihrer erzeugenden «Curven 9^ten^ Grades eine R^{27}, welche jede Pentaederebene in 9 Punkten «dreipunktig passirt und als die charakterische *Rückkehrlinie* bezeichnet «werden kann; ausserdem aber hat die Umhüllungsfläche in jeder Pen-«taederebene eine C^3 als Rückkehrlinie, welche dreimal gezählt als er-«zeugende Curve auftritt, und im Schnitt der Pentaederebene mit der «Umhüllungsfläche nur zweimal zählt; dieser Schnitt besteht nämlich «noch aus einer C^{12}, die jene 9 Punkte zu Rückkehrpunkten hat, in «denen sie von der C^3 berührt wird.

«So viel in Beziehung auf jene zwei Irrthümer, die R^5, in der «die Kernfläche der f^3 von einem ihrer Knotenkegel geschnitten werden «sollte — und das längs der Knotencurve eines Büschels zweiten Grades «fortrückende Pentaeder. — Ich lege Ihnen nun hier zur Beurtheilung «vor die Art, wie ich ein Flächennetz n^{ten} Grades zu behandeln ge-«dächte.

«Wenn ein Netz von Flächen n^{ten} Grades gegeben ist, so kann «man irgend 5 desselben auswählen, von denen keine 4 einem und «demselben Gebüsch angehören. Dann lasse man in einem räumlichen «System von Punkten irgend 5 Punkte, von denen keine 4 in einer «Ebene liegen, jenen 5 Flächen entsprechen. Verlangt man nun, dass «jeder Fläche des Netzes ein Punkt des räumlichen Systems in der «Weise entspreche, dass die Punkte in einer Geraden liegen, so oft «die Flächen einen Büschel bilden, so ist diese Aufgabe möglich und «völlig bestimmt; und zugleich werden je 4 Flächen eines Büschels «dasselbe perspectivische Doppelverhältniss haben, wie die 4 ent«sprechenden in einer Geraden liegenden Punkte. Der einer Fläche «des Netzes entsprechende Punkt soll ihr *reciproker* Punkt heissen.

«Für irgend einen Pol P bilden nun die ersten Polaren (und da«her überhaupt die irgendwievielten) aller Flächen des Netzes wieder «ein Netz, welchem genau das vorige räumliche Punktsystem entspricht. «Verlangt man jetzt, dass das Netz der ersten Polaren einen Grund«punkt X habe, so wird der Pol P genöthigt, sich auf einer Fläche «$4(n-1)^{3\text{ten}}$ Grades (*Polfläche*) zu bewegen, während der Grundpunkt X «eine Fläche $4\,(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (*Knotenfläche*) durchläuft. Die letztere «ist zugleich der Ort aller Punkte X, deren Polarebenen in Beziehung «auf sämmtliche Flächen des Netzes durch einen und denselben Punkt «P gehen.

«Verlangt man ferner, dass eine Fläche φ des Netzes einen «Knotenpunkt habe, so bewegt sich ihr reciproker Punkt A auf einer «Fläche $4\,(n-1)^{3\text{ten}}$ Grades (*reciproke Fläche*), und der Knotenpunkt «X liegt nothwendig auf der schon erwähnten Knotenfläche. Man könnte «noch denjenigen zu X und P reciproken Punkt B anzeichnen, für des«sen Netzfläche φ (ohne Knotenpunkt und nicht durch X gehend) die «erste Polare von P den Grundpunkt X zum Knotenpunkt hat.

«Ich will nun der Reihe nach an die reciproke Fläche in A, «an die Knotenfläche in X und an die Polfläche in P *Berührungsebenen* «legen. 1° Alle Flächen des Netzes, welche durch X gehen, bilden «ein Gebüsch und haben den Strahl XP zur gemeinschaftlichen Tan«gente; ihre reciproken Punkte liegen also in einer Ebene, und diese «berührt die reciproke Fläche in A. Wenn insbesondere die reciproken «Punkte in einer durch A gehenden Tangente der reciproken Fläche «liegen, so bilden die zugehörigen Flächen des Netzes einen Büschel «und berühren sich alle in X. Umgekehrt: je zwei Flächen des Netzes «können sich nirgends berühren, als auf der Knotenfläche, z. B. in X, «und der Strahl, welcher ihre reciproken Punkte verbindet, wird dann «die reciproke Fläche im zugeordneten Punkte A berühren. 2^0 Die «erste Polare von P in Beziehung auf die Fläche des Netzes, welche «den zugeordneten Punkt X zum Knotenpunkt hat, berührt die Polfläche «in X; oder, was auf dasselbe hinauskömmt, die Polarebene von P «in Beziehung auf den Knotenkegel der genannten Fläche φ ist die Be-«rührungsebene der Knotenfläche in X. 3^0 Die letzte Polare des Punkts «X in Beziehung auf die Fläche φ des Netzes, für welche die erste «Polare von P den Knotenpunkt X hat, ist die Berührungsebene der «Polfläche in P.

«Hat *im Besondern* das ursprüngliche Netz einen Grundpunkt X, «so geht die Knotenfläche durch diesen und hat ihn zum Knotenpunkt; «ebenso die Polfläche, indem dann P und X zusammenfallen; endlich «hat auch die reciproke Fläche den reciproken Punkt A zum Knoten-«punkt. Bei der Knotenfläche und der Polfläche fällt der Knotenkegel «mit demjenigen der entsprechenden Fläche φ des Netzes zusammen; «und wenn X und P sich unendlich wenig vom Grundpunkt entfernen, «so liegen sie in einem und demselben Strahl des Knotenkegels. Legt «man nun durch einen solchen eine Berührungsebene an den Knoten-«kegel, so bilden alle Flächen des Netzes, welche diese Ebene im «Grundpunkt berühren, einen Büschel, dessen reciproke Punkte den «entsprechenden Strahl des Knotenkegels der reciproken Fläche in A «bilden.

«Verlangt man, dass die letzten Polaren eines Punkts X in Be-«ziehung auf alle Flächen des Netzes sich in einer Geraden schneiden, «so unterwirft man den Punkt X vier unter sich unabhängigen Bedin-«gungen; es wird also im Allgemeinen keinen solchen Punkt X geben, «dessen zugehöriger Pol sich in einer Geraden bewegen kann, und «daher kann die Knotenfläche keinen Knotenpunkt haben.

«Beim Flächengebüsch n^{ten} Grades will ich ähnliche Zeichen ge-«brauchen, wie beim Netz; nur haben wir jetzt statt des Poles P einen «Polstrahl p, in dem alle Polarebenen des Punktes X sich schneiden; «ein einzelner Punkt auf p möge P heissen. Die von p beschriebene «geradlinige Fläche heisse *Polfläche*. Die von X beschriebene *Knoten-«curve* ist vom 6 $(n-1)^{2ten}$ Grade, ihre Tangentenfläche ist vom Grad «4 $(n-1)^2$ $(7n-10)$ und von der Classe 6 $(n-1)^2$ $(14n-23)$. Die «Tangente der Knotencurve in X ist der Polstrahl der Ebene (Xp) in «Beziehung auf den Knotenkegel der Gebüschfläche in X, d. h. die «Grundcurve des Büschels erster Polaren von p in Beziehung auf die «Fläche des Gebüschs, welche X zum Knotenpunkt hat, berührt die

«Knotencurve in X. Ist ein Punkt P auf p gegeben, durch den man «eine Berührungsebene an die Polfläche legen soll, so wird das gegebene Flächengebüsch einen Büschel enthalten, in Beziehung auf welche «die ersten Polaren von P die Knotencurve in X berühren; dann ist «die gemeinschaftliche letzte Polare von X in Beziehung auf alle ursprünglichen Flächen des genannten Büschels die verlangte Berührungs«ebene. Die reciproken Punkte aller durch X gehenden Gebüschflächen «liegen auf der Tangente der *reciproken Curve* in A; diese ebene Curve «ist vom Grade 4 $(n-1)^3$. — Die geradlinige Polfläche ist von Grad «und Classe 8 $(n-1)^3$.

«Mittelst des schiefen Fünfseits $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ und der Axe e können «also Geraden, wie folgt, linear construirt werden. b_1 geht durch die «Punkte, in denen die Ebene $(a_3\ a_4)$ von a_1 und e geschnitten wird; «c_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(a_1\ b_1)$ von b_5, b_2 geschnitten «wird; d_1 durch die Punkte, in denen die Ebene $(b_1\ e)$ von a_5, a_2, c_3, «c_4 geschnitten wird; d_1' ist Durchschnitt der Ebenen $(a_2\ d_3)$, $(a_5\ d_4)$, «$(c_3\ d_5)$, $(c_4\ d_2)$; endlich e' Durchschnitt der Ebenen $(b_1\ d_1')$, $(b_2\ d_2')$, «etc. Resultat: 5 Dreiseite $(a_3\ a_4\ b_1)$, 5 $(a_1\ b_1\ c_1)$, 5 $(b_1\ c_5\ c_2)$, 10 $(a_1\ d_5\ d_2')$, «10 $(c_1\ d_3\ d_4')$, 5 $(b_1\ d_1\ e)$, 5 $(b_1\ d_1'\ e')$.»

Steiner an Schläfli.

«*Monsignore, treuer Freund!* (28. Januar 55.)

«Dass Sie denken, ich sei böse, geschieht Ihnen ganz recht. «Ich möchte es sein, über mich und Sie. Die schöne Hoffnung mit «der ich nach Bern kam, ist nun dahin; ich habe auch im Dezember «keine Abhandlung vorgelegt. Hätten Sie doch damals nur meine «aphoristischen Sätze revidirt, worum ich Sie bat, so war die Sache «abgethan. Jetzt sehe ich nicht wo ein wo aus. Geistige Kraftlosig«keit und körperliche Leiden machen die Vollendung der Arbeit fast «unmöglich, zumal da ich auf den Zopf anbiss, den Gegenstand nach «Ihren Andeutungen vollständiger zu behandeln. Länger als 2 Monate «quälte ich mich mit leidigen Spezialitäten ab, ohne Sie zu bewäl«tigen und ohne sie los zu werden; diese Bemühungen wechseln ab «oder werden unterbrochen durch Schmerzen, Einschlafen, Luft«schlösser über Crimm, Donau und ganze Türkei. Schon in Bern «— wie Sie wissen — hatte ich etwas Rheumatismen (durch das Ge«mäuer — oder Beaujolais?), der auf der Reise und hier steigend «fortdauerte und gleich am folgenden Tage, wo ich Ihnen schrieb, «in heftiges Podagra ausartete, das mich 12 Tage zu Hause bannte. «Nachdem ich 9 Tage wieder aushinkte, kam ein noch stärkerer Anfall, der mich einmal vor Schmerz brüllen machte und wieder 10 «Tage ins Zimmer bannte; und so gieng es fort, dass ich bis jetzt in «5 *Stören* das Zimmer hüten und die Vorlesungen aussetzen musste. «Da ich die letztern, der Leiden wegen, erst am 15. November be«gann und auch gleich wieder unterbrach, so habe ich wenig Zu«hörer, nur 6—8, wovon nur 4 regelmässig kommen. Wenn oft «auch die Schmerzen vorüber, so kann ich doch tagelang nicht aus«gehen, weil die Füsse so geschwollen sind, dass sie nicht in die «Stiefel gehen. — Dabei hat mich etwas frappirt: welches ist das «*Einzige* Mittel, das diese Art Schmerzen lindert?! — Ihre Lieblings«blume — die Kiltblume!

«Was ich Ihnen vor 2 Monaten schreiben wollte, ist halb ver«gessen oder liegt verworren in meinem Kopf, wiewohl ich stets an «derselben Sache geknabert habe (darob auch die Redaction ausge«setzt — seit 8. November — soll aber nächstens wieder beginnen). «Da ich schwer dazu komme meine früheren Manuscripte oder Ihre «Briefe gehörig nachzulesen, so wäre es möglich, dass ich hier Fragen «aufwerfe, die einfältig sind, oder die Sie schon erledigt, oder gar «allgemeiner beantwortet haben. Schad't nichts.

«1. Der Name «*Gebüsch*» geht nicht, denn es ist ein Netz, «gleich dem in der Ebene, ein *Plannetz*, oder ein *einfaches* Netz «entgegen dem *vollständigen*. Oder kann man es *Netzbasis* nennen? «wie 3 Punkte A, B, C die Basis des Tetraeders A B C D bestimmen. «Aber dann fordert die Bezeichnung 2 Buchstaben $=$ N b (f^n). Das Wort «*Netz* sollte aber vorkommen: als *Netzbasis*, he?

«2. Die singuläre Ebene, die eine Fläche längs einer Curve be«rührt, ist fast nicht zu benennen; kann man sie *Dehnebene* heissen «da sie das Widerspiel des Knotenpunkts ist? dann hiesse jene Curve «die *Dehncurve, Dehnkegelschnitt*.

«3. Wo Sie sagen: «Der *Knotenkegel* zerfalle in zwei *Ebenen*», «schien mir, er reducire sich auf die *Schnittlinie* der Ebenen auf «die Knotenkante, ohne dass der Scheitel des Kegels seine Existenz «aufgiebt. Dass der Schnitt jeder dieser zwei Ebenen mit der f^n «drei freie Zweige durch den Knotenpunkt sendet, vermag ich nicht «anzuschauen, vielmehr kommen mir die Ebenen als diejenigen vor, «deren Schnitt sich im Knotenpunkt *selbst berührt*, die Knotenkante «zur *Selbstberührungstangente* hat. Die zwei Ebenen sind gewisser-

«massen *Wendeebenen* der f^n, daher der Wechsel von dem einen Paar «ihrer Scheitelwinkel in das andere. — (Der Schnitt C^n jeder 3^{ten} durch «den Knotenpunkt gehenden Ebene mit f^n hat ihre Schnitte mit den «zwei Ebenen zu Tangenten im Knotenpunkt. Wollte was sagen, aber «ist nichts.)

«Den einen der zwei Irrthümer, die Sie im Brief vom 15. No-«vember zerstören, hatte ich bereits selbst bemerkt, nämlich: «dass «der *Sylvester*'sche Knotenkegel die Kernfläche P^4 längs dreier Geraden «berührt.» Ich (komme) bei Betrachtung der 2^{ten} Polar-Enveloppe einer «Ebene in Bezug auf Basis f^3, die 3^{ten} Grads und 4. Klasse ist und «4 Kp hat, darauf, wo ebenfalls jeder Knotenkegel längs der 3 «Strahlen die nach den übrigen 3 Kp gehen, berührt. — Den Plan «zur Behandlung des Netzes $N(f^n)$, habe ich schon früher entworfen, «und werde seiner Zeit Ihrem gewaltigen Rüssel das Nöthige unter-«breiten.

«4. Zu den Flächen gehört wohl auch noch das: Eine einfache «Schaar gerader Linien liegen in einer speziellen Fläche, die *geradlinig* «heissen soll (surface réglée); die Doppelschaar der sie berührenden «Ebenen, besteht aus der Schaar Ebenenbüschel, die jene Geraden «zu Axen haben. Diese Fläche hat ferner die Eigenthümlichkeit: 1) «dass ihr Grad und ihre Klasse gleich sind; 2) dass auch ihre Polar-«figur (auf Basis f^2) ihr an Grad und Klasse gleich ist. Es giebt nur «eine Fläche, die zwei Schaaren Gerade hat (Hyperboloid), die andern «können nur höchstens zwei Gerade haben, die nicht zur Schaar ge-«hören.

«5. Ich wollte synthetisch die Zahl der Punkte finden, durch die «C^n und f^n bestimmt sind, nach Art der unbestimmten Cofficienten; «sagen Sie, ob ich den folgenden Beweis geben darf, ohne mich lächer-«lich zu machen, indem doch ein analytischer Grund dahinter steckt. «Gesetzt jede C^n werde durch dieselbe Zahl $= N$ gegebenen Punkte «a bestimmt. Liegen von denselben $n + 1$ in einer Geraden C', so «muss die Curve zerfallen in $C' + C^{n-1}$, und es muss C^{n-1} durch die «übrigen $N - n - 1$ Punkte a bestimmt sein; folglich erfordert die um «*einen* Grad höhere Curve zu ihrer Bestimmung so viele Punkte mehr, «als der Grad der niedrigern $+ 2$ beträgt. Da nun die Linie 1^{ten} «Grads durch 2 Punkte bestimmt ist: so erfordert die 2^{ten} Grads um «$1 + 2 = 3$ mehr, $= 5$, die 3^{ten} Grads wieder um $2 + 2$ mehr «u. s. w.. folglich ist C^n durch $2 + 3 + 4 + \cdot \cdot \cdot \cdot + n + 1 =$ «$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1$ Punkte bestimmt. — Jede f^n werde durch «eine gleiche Zahl N Punkte bestimmt. Liegen von denselben «$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ in einer Ebene f^1, so muss f^n aus $f^1 + f^{n-1}$ bestehen, «und somit f^{n-1} durch die $N - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ übrigen Punkte «bestimmt sein; d. h. eine f^{x+1} erfordert zu ihrer Bestimmung «$\frac{1}{2}(x+2)(x+3)$ Punkte mehr als eine f^x; nun erfordert f^1 nur 3 «Punkte, die f^2 mehr $\frac{1}{2}(1+2)(1+3)$, u. s. w., so dass also f^n «durch $3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) =$

$$«\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) - 1$$

«Punkte bestimmt ist, $= \frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 1$. *Schweins*[1]) und Consorten «schreiben eine Facultät $(a+u)(a+2u)\cdots$ «$(a+nu)$ kurz $(a+u)^{n|u}$ und ebenso $(a-u)(a-2u)\cdots(a-nu) =$ «$(a-u)^{n|-u}$; $\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{(a+1)^{n|1}}{1^{n|1}}$, etc.

«6. Daraus (5.) entsprang folgendes Verfahren um Ihre zwei «Sätze (nebst andern analogen) zu beweisen. Die zu bestimmende Fläche «f^n zerfällt in 2 Theile, etwa $f^\alpha + f^\beta$ $(\alpha + \beta = n)$, sobald die ge- «gebenen $\frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 1$ Punkte a sämmtlich in diesen zwei Flä- «chen liegen, jedoch dürfen auf keiner weniger Punkte liegen, als ihre «Bestimmung erheischt, also beziehlich nicht weniger als

$$«\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1} - 1 \text{ und } \frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1} - 1\text{; daher bleiben}$$

$$«\frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 1 - \left[\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1} - 1 + \frac{1}{6}(\beta+1)^{3|1} - 1\right] =$$

$$\frac{1}{2}\alpha\beta(n+4) = \frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)$$

«Punkte frei, d. h. nach Belieben auf die beiden Flächen f^α, f^β zu «vertheilen, und es ist ihre Zahl zugleich *die Zahl der Bedingungen,* «*damit f^n in diese zwei Flächen zerfällt.* Diese Zahl ist also um

---

[1]) Schweins, Franz Ferdinand, geb. 24. III. 1780 † 15. VII. 1856 Professor der Mathematik in Heidelberg, Lehrer Steiners.

«so grösser, je mehr α und β sich $\frac{1}{2}$n nähern, oder je kleiner ihr «Unterschied. — Wie geht's nun weiter? — Soll f^n in $f^\alpha + f^\beta + f^\gamma$ «zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen

$$=(\alpha+\beta+\gamma+4)\,(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma;$$

«und soll f^n in n Ebenen zerfallen, so ist die Zahl der Bedingungen,

$$«=\frac{1}{6}\,(n+1)^{3|1}-1-3n=\frac{1}{6}n\,(n-1)\,(n-7).\ ^{1)}$$

«Von den f^n bestimmenden Punkten dürfen also auf einer ge-«gegebenen Fläche f^α höchstens nur

$$«\frac{1}{6}\,(n+1)^{3|1}-\frac{1}{6}\,(\beta+1)^{3|1}=\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,(n+4)+\frac{1}{6}\,(\alpha-1)^{3|1}-1$$

$$«=\frac{1}{2}\,\alpha\,(n-\alpha)\,(n+4)-1+\frac{1}{6}\,(\alpha+1)^{3|1}$$

«frei gewählt werden; (denn nähme man darauf nur einen Punkt «mehr an, so wäre durch die übrigen die andere Theilfläche f^3 nicht «mehr bestimmt, also auch die ganze f^n ($=f^\alpha+f^\beta$) nicht). Lässt man «nun von dieser höchsten Zahl Punkte auf f^α einen Punkt ganz weg, «so ist f^n nicht mehr bestimmt, sondern es findet ein $B(f^n)$ statt, «worin $f^\alpha+f^\beta$ ein spezielles Glied ist, so dass die Grundcurve des-«selben aus zwei Theilen $R^{\alpha n}+R^{\beta n}$ besteht, die auf f^α und f^β liegen, «durch die auf diesen befindlichen gegebenen respective

$$«\frac{1}{2}\,\alpha\,(n-\alpha)\,(n+4)+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}-2 \text{ Punkte a und}$$

$$«\frac{1}{6}\,(\beta+1)^{3|1}-1 \text{ Punkte b gehen.}$$

Wird nun einer der Punkte b im «beliebig versetzt, so ändert sich die Fläche f^β und es entsteht ein Raume «neuer Flächenbüschel, ($B_1 f^n$), sowie auch eine neue Curve $R_1{}^{\beta n}$, statt «$R^{\beta n}$, aber wohin auch jener Punkt gerückt werden mag, immer bleibt «er in irgend einer Fläche des vorigen Büschels, so dass also beide «Büschel diese Fläche gemein haben, und folglich auch deren Schnitt «mit der Fläche f^α, jene $R^{\alpha n}$, ein gemeinschaftlicher Theil der Grund-«curven beider Büschel ist. Da man aus der neuen Fläche f^β aufs «Neue einen Punkt versetzen kann und dadurch zu einem neuen «Büschel B_2 (f^n) gelangt, der durch die nämliche Curve $R^{\alpha n}$ auf f^α «geht, so ist dadurch Ihr Satz erwiesen: «*dass auf einer Fläche f^α nur*

---

1) Hier hatte Steiner im Concept noch folgende bezeichnende Stelle: «Mangen Sie das und geben's mir gut gekaut wieder, auch das «folgende; denn sowie Formeln kommen, bin ich blödsinnig.»

«$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-2+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ *Punkte a gewählt werden dürfen,*
«*wenn eine f^n durchgehen soll»*; und «*dass alle durchgehenden f^n, die*
«$\left[\frac{1}{6}(n-\alpha+1)^{3|1}-2\right]$*fache Schaar f^n, die f^α in der nämlichen*
«*Vollkurve $R^{\alpha n}$ schneiden, die somit durch jene Punkte bestimmt ist.*»
«— Wird ferner einer der Punkte α aus der Fläche f^α beliebig in «Raum versetzt und nachher ganz weggelassen, so entsteht ein $G(f^n)$, «und werden sodann die Punkte b (auf f^β) einer nach der andern ver«setzt, so schliesst man weiter: «dass alle f^n, die durch gegebene
«$\frac{1}{2}\alpha(n-\alpha)(n+4)-3+\frac{1}{6}(\alpha+1)^{3|1}$ Punkte a auf einer f^α gehen
«auch noch durch $\frac{1}{2}\alpha n(n+\alpha-4)+1-\frac{1}{6}(\alpha-1)^{3|-1}$ noth«wendige Punkte a auf dieser Fläche f^α gehen»; oder «dass jede Voll«curve R^{n^2}, die durch jene Punkte a geht, die Fläche f^α auch noch in «diesen nothwendigen Punkten a_0 durchbohrt.»

«7. Ich glaube früher bei ebenen Curven gefunden zu haben: «dass «wenn C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte a von C^α und C^β gehen soll, «$n>\alpha>\beta$, dann die Zahl der Nothwendigen
«$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$ sei; d. h. geht C^n durch

$$«\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)$$

«der $\alpha\beta$ Punkte a, so geht sie auch durch die übrigen. Die C^n ist daher «bestimmt, wenn sie, ausser durch die $\alpha\beta$ Punkte a, noch durch andere «gegebene

$$«\frac{1}{2}n(n+3)+\frac{1}{2}(\alpha+\beta-n-1)(\alpha+\beta-n-2)-\alpha\beta=$$

$$(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(2n+3)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)-1$$

«Punkte b gehen soll; also bei $\alpha=\beta$, durch

«$(n+1)(n+2)-\alpha(2n+3)+\alpha^2-1$, und bei $\alpha=\beta=n-1$ «durch 5 Punkte b gehen soll, was nur für $n=2$ nicht stimmt. — «Um die analogen Sätze für die Flächen zu finden, habe ich mich «wochenlang verrechnet, darob die Besinnung verloren, dass ich nicht «weiss, was wahr oder falsch ist. Im Folgenden einige Proben, und «dann wenden Sie den Entwurzler an.

«8. Enthält ein Flächenbüschel $B(f^n)$ zwei zerfallene Glieder

«$f^n = f^a + f^\alpha$ und $f^n = f^b + f^\beta$, so besteht seine Grundcurve aus «vier Theilen $= R^{ab} + R^{a\beta} + R^{\alpha b} + R^{\alpha\beta}$. Daher: «*Eine Fläche f^n «erleidet denselben Zwang — wofern ihre freie Natur dadurch be«schränkt wird — ob sie durch die gegebene Vollcurve R^{ab} oder $R^{a\beta}$ «oder $R^{\alpha b}$ oder $R^{\alpha\beta}$ gehen soll; denn enthält eine dieser Curven, so «sind auch die drei andern auf ihr möglich.*» (Dabei ist $a + \beta =$ «$b + \beta = n$, und fortan sei $a > b > \beta > \alpha$.)

«Gehen durch die Vollcurve R^{ab} zweier gegebenen Flächen f^a, f^b «irgend zwei (höhere) Flächen f^m und f^n, $m > n$, *so schneiden sich «diese noch in einer R^{mn-ab}, durch die allemal eine Fläche $f^{m+n-a-b}$ «geht,* die zugleich auch noch durch die auf vorige Weise durch f^a und «f^b auf f^m und f^n bestimmten Curven $R^{(m-a)(m-b)} = {}^{\alpha\beta}$ und $R^{(n-a)(n-b)}$ «geht. — Daraus viele Sätzli, wenn $m = n$ und $a = b$, oder $m = n$ «$= a + 1 = b + 1$.

«Geht f^n durch die R^{ab}, so schneidet sie die gegebene f^a noch «in $R^{a(n-b)} = {}^{\alpha\beta}$, durch die eine f^{n-b} geht und (mehr als) bestimmt «ist; für sich ist sie durch $\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1}-1$ auf der f^a beliebig «gewählte Punkte q bestimmt; da nun durch $R^{ab} + R^{a(n-b)}$ eine $S^2(f^n)$ «gehen, der Gesammtschnitt von f^n mit f^a aber durch

$$«\frac{1}{2}a(n-a)(n+4) - 2 + \frac{1}{6}(a+1)^{3|1} \text{ Punkte}$$

«bestimmt ist (6), so zählt die Bedingung, dass f^n durch R^{ab} gehen «muss, für

$$«\frac{1}{2}a(n-a)(n+4) - 2 + \frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1} - \left[\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1} - 1\right]$$

$$« = \frac{1}{2}an(n-a+4) + 1 + \frac{1}{6}(a-1)^{3|-1} - \frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}$$

«bestimmende Punkte p; und werden auf der R^{ab} so viele «Punkte p frei gewählt, so enthält jede durch dieselben «gehende f^n die R^{ab} ganz. Oder auch so: Die f^a und f^b haben «Schnitt R^{ab}. Auf f^a nehme beliebige $\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1}-1$ Punkte q, so «bestimmen sie die f^{n-b}, und diese mit f^a die $R^{a(n-b)}$. Auf f^{n-b} be«liebig gewählte $\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}-1$ Punkte r bestimmen eine f^{n-a}, und «diese mit f^{n-b} eine $R^{(n-a)(n-b)}$ und mit f^b eine $R^{(n-a)b}$. Nun ist «durch (die ganze) R^{ab} und durch alle Punkte q und r ein $B(f^n)$ be«stimmt, folglich ist die Zahl bestimmender Punkte p, die durch R^{ab} «vertreten werden

$$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}-2-\left[\frac{1}{6}(n-b+1)^{3|1}-1+\frac{1}{6}(n-a+1)^{3|1}-1\right]$$

$$=nab+\frac{1}{6}(a+b-n-1)^{3|-1}-\frac{1}{2}ab(a+b-4)\ldots=P,$$

«*so dass durch so viele auf ihr frei gewählte Punkte p jede durch-* «*gehende* f^n *die ganze* R^{ab} *enthalten muss.* Lässt man einen dieser «Punkte p ganz weg, so entsteht ein $G(f^n)$, das die R^{ab} (ausser in «den übrigen Punkten p) in

$$\frac{1}{2}ab(a+b-4)+1-\frac{1}{6}(a+b-n-1)^{3-1}\ldots.=P_0$$

«nothwendigen Punkten p_0 schneidet (was Ihr zweiter Donnstigs- «Satz ist).

«9. Enthält ein $G(f^n)$ eine *partielle Grundcurve* R^{ab}, so zählt sie «ebenfalls für P bestimmende Punkte p; aber wieviele von den «$n^3+3-\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}$ *nothwendigen* Punkte p fallen dann in R^{ab}, «etwa $ab(2n-a-b)$?, und wieviele liegen auswärts, im Freien?

«10. Durch wieviele der abc-Schnitte dreier Flächen f^a, f^b «u. f^c muss eine f^n gehen, damit sie *nothwendig* auch durch alle «übrigen geht? — Gehen drei Flächen f^m, f^n und f^p durch eine «gegebene *Vollcurve* R^{ab}, so schneiden sie sich auswärts noch in «$mnp-ab(m+n+p-a-b)$ Punkten (?). Gehen aber die drei Flächen «durch eine *Theilcurve* R^ν — wie dann?

«11. Schon vor Jahren fand ich, dass ein $N(C^n)$ im Besondern «höchstens n^2-n+1 Grundpunkte haben kann, und zwar wird ein «solches Netz z. B. bestimmt 1) durch zwei C^n, von deren Schnitten «$n-1$ in einer Geraden liegen, durch die n^2-n+1 übrigen geht «dann $N(C^n)$; 2) die gesammten Pampolaren in Bezug auf $B(C^r)$ bilden «ein $N(C^{2r-1})$ mit $(2r-1)^2-(2r-1)+1$ Grundpunkten. — Dem «analog sind $G(f^n)$ und $N(f^n)$ hervorzubringen, die ziemlich hohe «*partielle Grundcurven* haben, nebst andern possirlichen Eigen- «schaften. Als z. B.

I. «Gehen 2 Flächen n^{ten} Grads f^n und f_1^n durch eine gegebene «C^{n-1}, deren Ebene E heissen soll, so schneiden sie sich «noch in einer R^{n^2-n+1}, durch die ein $G(f^n)$ geht. Durch «$C^{n-1}+R^{n^2-n+1}$ geht ein $B(f^n)$, der von der E (ausser der «C^{n-1}) in einem Strahlbüschel $B(g)$ geschnitten wird, dessen «Mittelpunkt g_0 (nicht in C^{n-1} sondern) in R^{n^2-n+1} liegt, «derjenige der n^2-n+1 Schnitte der E und R^{n^2-n+1} ist, der «nicht in C^{n-1} liegt. Jedes Glied f^n des $G(f^n)$ wird von allen «andern in ebenen Curven C^{n-1} geschnitten, deren Ebenen E «sämmtlich durch die derselben angehörige Gerade g gehen; «und umgekehrt: legt man durch irgend eine, durch den «ausgezeichneten Punkt g_0 gehende Gerade g einen B(E), «so schneidet jede E die R^{n^2-n+1}, ausser in g_0, in n(n—1) «Punkten, die in einer C^{n-1} liegen und die $S(C^{n-1})$ liegen «in einem Glied f^n des $G(f^n)$, so dass also $G(f^n)$ durch R^{n^2-n+1} «und G(g) um g_0 sich Glied gegen Glied entsprechen. Der«jenigen Geraden $t(=g)$, welche Tangente der R^{n^2-n+1} in «g_0 ist, entspricht eine $f_0{}^n(=f^n)$, die g_0 zum Knotenpunkt «hat; die Schmiegungsebene der R^{n^2-n+1} berührt den Kno«tenkegel längs t. Durch zwei frei gewählte Punkte ist eine «f^n bestimmt; drei f^n können ausser R^{n^2-n+1} keinen Punkt «gemein haben (wohl eine C^{n-1}). — Was folgt, wenn die «bestimmenden Flächen f^n und $f_1{}^n$ durch eine R^{n-1} statt C^{n-1} «gehen? oder nur durch C^{n-2}? etc. — Soll eine f^n durch «$\frac{1}{6}(n+1)^{3|1}$—3 beliebig gewählte Punkte in R^{n^2-n+1} gehen, «so enthält sie diese ganz und ist Glied des $G(f^n)$; ist ein «Punkt weniger gegeben, so geht sie durch «$\frac{1}{6}(n^2-1)(5n-12)+1$ nothwendige Punkte auf R^{n^2-n+1}. (?)

II. «*Gegeben $B(f^n)$.* Für jeden Pol p ist die Pampolare eine «Fläche p^{2n-1} die durch die Grundcurve R^{n^2} und durch die «$4(n-1)^3$ Knotenpunkte π des $B(f^n)$ geht, sowie auch durch «die Grundcurve $R^{(n-1)^2}$ des $B(f^{n-1})$ erste Polaren von p auf «$B(f^n)$, und auch durch p selbst. Die erste Polare von p auf «seine Pampolare p^{2n-1} ist eine Fläche $p^{2(n-1)}$, die auch durch «jene R^{n^2} und p geht; der aus p seiner Pampolare p^{2n-1} um«schriebene Kegel K zerfällt in 3 Theile: 1) in die Berühr«ungsebene in p, zählt für 2 Grade; 2) in den durch die «R^{n2} gehenden Kegel $K_1{}^{n2}$, der in R^{n^2} selbst berührt; und «3) in einen andern Kegel t^x (dessen Grad x bestimmt ist «und die t-Tangenten im Doppelpampolare der durch p gehen«den in Glieder des $B(f^n)$ berührenden Ebenen sind). *Liegt «p insbesondere in der Grundcurve R^{n2}, so ist er ein d r e i- «f a c h e r Knotenpunkt seiner Pamporalen p^{2n-1}.* Die allen p «des Raumes entsprechenden Pamporalen bilden eine $N(p^{2n-1})$, «das die R^{n^2} zur *partiellen Grundcurve* und jene $4(n-1)^3$ «Knotenpunkt π zu Grundpunkten hat. Die Kernfläche P^x «des $N(p^{2n-1})$ hat die R^{n^2} zur zwei- (oder drei-) fachen Linie, «und die π zu Knotenpunkten. Allen p in einer gegebenen «Ebene E entspricht ein $G(p^{2n-1})$, dessen *Kerncurve* R^y (Ort «der Knotenpunkte) aus R^{n^2} + einer durch die $4(n-1)^3$ «π gehenden Curve R^{y-n^2} besteht; dieses $G(p^{2n-1})$ hat, ausser «der R^{n^2} und den $4(n-1)^3 \cdot \pi$, auch noch die $3(n-1)^2$ Punkte «zu Grundpunkten, in welchen die E von Gliedern des $B(f^n)$ «berührt wird. Die R^{n^2} vertritt daher $(2n-1)^2-4(n-1)^3$ «$-3(n-1)^2=(4n-3)n^2$ Grundpunkte des $G(p^{2n-1})$. — Zum «$B(f^n)$ gehören eine Schaar Kernflächen $P^{4(n-2)^3}$; sie erfüllen «den Raum $4(n-2)^3$-fach, d. h. durch jeden p gehen so viele «derselben; jede $P^{4(n-2)^3}$ schneidet ihre f^n in einer $R^{4n\,(n-2)^3}$ «$= R_0$; liegt p insbesondere in der R^{n^2}, so gehen auch «$4(n-2)^3$ solche R_0 durch ihn und deren zugehörige Rück«kehrtangenten t_0 (nicht Tangenten der R_0) liegen sämmtlich «im Knotenkegel der zugehörigen Pampolare p_0^{2n-1}. Ist der «Ort aller R_0 eine Fläche f^z? und hat dieselbe die R^{n^2} zur «4-fachen Linie? $[z=4n+4(n-2)^3$?]. — Wie viele Rück«kehrtangenten t_0 aller Glieder des $B(f^n)$ gehen durch einen «freien Pol p? — Wenn f^m durch die R^{n^2} des $B(f^n)$ geht, «wie viele f^n berührt sie dann in R^{n^2} selbst, und wie viele «auswärts? $m > n$.

«12. Auch sehr viel an Folgendem abgemüht: «Wie viele Glieder «können bei $B(f^n)$ oder $G(f^n)$ oder $N(f^n)$ in Theile zerfallen und wie «mannichfacher Art können die Theile sein?» «Kann bei $B(f^n)$ die «R^{n^2} in Theile zerfallen, ohne dass auch Glieder f^n zerfallen, und «wie?» Näheres:

I. « *Vom $B(f^n)$.* Soll dieser zerfallene Glieder enthalten, so sind «es im Allgemeinen nur zwei, f^a+f^α, f^b+f^β, wobei dann «die R^{n^2} aus 4 Theilen besteht (8). Im Besondern kann aber «$B(f^n)$ mehr zerfallene Glieder enthalten, namentlich wenn «$n=\nu \, . \, \alpha$ ist. Nämlich 1) ist $n=2\alpha$, so kann $B(f^n)$ drei «Glieder von der Form $f^\alpha+f_1^\alpha$ haben, wobei die Grundcurve «R^{n^2} aus vier Curven R^{α^2} besteht (die wie die Ecken eines «Vierecks und jene drei Glieder wie die 3 Paar Gegenseiten «desselben anzusehen sind). 2) ist $n=3\alpha$, so kann der «$B(f^n)$ vier Glieder von der Form $f^{2\alpha}+f^\alpha$ haben (durch drei «ist das 4^{te} bestimmt); die vier Theilflächen f^{α} gehen alle durch «dieselbe Curve R^{α^2}, und die vier $f^{2\alpha}$ schneiden sich zu 3 und «3 in vier Curven $R^{2\alpha^2}$, jede geht durch drei der letztern, «und durch jede $R^{2\alpha^2}$ geht auch je eine f^{α}; so besteht also «R^{n^2} aus 5 Theilen, $= R^{\alpha^2} + 4\ R^{2\alpha^2}$. 3) ist $n = 4\ \alpha$, so «kann es 5 Glieder $f^{3\alpha} + f^{\alpha}$ geben, wobei alle fünf f^{α} durch «eine R^{α^2} gehen, u. s. w. Und ist $n = x\ \alpha$, so kann es $x + 1$ «Glieder $f^{(x-1)\alpha} + f^{\alpha}$ geben, wobei die $x + 1$ Theilflächen «f^{α} durch eine und dieselbe R^{α^2} gehen und jede f^{α} sich mit «den ihr nicht zugehörigen x Flächen $f^{(x-1)\alpha}$ in einer und «derselben $R^{(x-1)\alpha^2}$ schneidet, so dass

$$R^{n^2} = R^{\alpha^2} + (x + 1)\ R^{(x-1)\alpha^2}$$

«ist. So kann der $B(f^n)$ insbesondere auch $n + 1$ Glieder «von der Form $f^{n-1} + f^1$ haben, wobei dann die $n + 1$ «Ebenen f^1 durch dieselbe Gerade R^1 gehen, und die Grund-«curve R^{n^2} aus diesen Geraden R^1 und aus $n + 1$ ebenen «Curven C^{n-1} besteht. — Durch wie viele dieser $n + 1$ Glieder «werden die übrigen *nothwendig?*

«Der $B(f^n)$ kann aber auch in der Art drei zerfallene «Glieder $f^a + f^{\alpha}$, $f^b + f^{\beta}$ und $f^c + f^{\gamma}$ enthalten, dass sich die «Theilflächen, wie etwa f^a und f^b, nicht in *ganzen* sondern in «*zerfallenen* Curven schneiden, also etwa in zwei Curven A «und B, so dass Schnitt $(f^a\ f^b) = A + B$, oder was wir kurz «so bezeichnen wollen: $a\ b = A + B$. Besteht dergestalt der «Schnitt je zweier nicht zusammgehöriger Theilflächen aus *zwei* «Theilen, so stellt sich die Verbindung wie folgt dar:

$a\ b = A + B$	$a\ c = A + D$	$b\ c = A + H$
$a\ \beta = C + D$	$a\ \gamma = B + C$	$b\ \gamma = B + G$
$\alpha\ \beta = E + F$	$\alpha\ c = E + H$	$\beta\ c = D + E$
$\alpha\ b = G + H$	$\alpha\ \gamma = F + G$	$\beta\ \gamma = C + G$

«Dabei besteht R^{n^2} aus den 8 Curven A, B, C, ... H; «durch jede von diesen gehen 3 Theilflächen der 3 zerfallenen «Glieder, wie f^a, f^{β} und f^c durch D. Sind die Grade a, α, b, «β, c, γ einzeln gegeben und man nimmt den Grad einer der «8 Curven A, B, ... H beliebig an, so sind die Grade der «7 andern bestimmt.

«Wenn ferner die Schnittcurve je zweier Theilflächen in «3 Theile zerfällt, also $(f^a\ f^b)$ oder $a\ b = A + B + C\ (= R^{ab})$ «ist, wobei dann die zwei Glieder $f^a + f^{\alpha}$ und $f^b + f^{\beta}$ zwölf

«solche Partialcurven bewirken, die zusammen die R^{n^2} aus-
«machen, so scheinen mir noch zwei andere zerfallene Glieder «$f^c + f^\gamma$ und $f^d + f^\delta$ möglich zu sein, so dass dann durch «jede der 12 Curven vier Theilflächen gehen, und in jeder «von diesen 6 von jenen liegen. — Welches ist der niedrigste «Grad n, bei dem dieser Fall eintreten kann? Geht's bei $n = 4$, «für 4 Paar Flächen $f^2 + f_1{}^2$, wenn sich jede zwei, die nicht «zu einem Paar gehören, in $C^2 + 2\,g$ schneiden? Oder giebt «es bei $n = 6$ vier Paar Flächen $f^3 + f_1{}^3$, wovon je zwei «Paar einander in 12 Partialcurven 3^{ten} Grads (R^3 oder C^3) «schneiden, und wobei durch jede dieser Curven vier Theil- «flächen gehen und jede der letztern durch 6 von jenen geht? «— Ferner ebenso wenn die Schnitte der Theilflächen in 4 «Theile zerfallen, $ab = A + B + C + D$; oder wenn einzelne «Glieder des $B(f^n)$ aus 3 oder mehr Theilflächen bestehen; «und s. w. kurz das Zerfallen der Glieder und der Grund- «curve R^{n^2} des $B(f^n)$ vollständig zu berüsseln; ich kann nicht «Alles schreiben, was ich versucht habe.

II. «*Vom $G(f^n)$.* Dieses hat, im Allgemeinen, keine zerfallene «Glieder. Nimmt man aber zwei Glieder an, wovon das eine «aus α und das andere aus β Theilflächen besteht, so ordnen «sich demgemäss die n^3 Grundpunkte in $\alpha\,.\,\beta$ Gruppen. Sind «die $\frac{1}{2}\,\alpha\,(\alpha-1)$ Curven, in denen die α Theilflächen einander «schneiden, nicht Bestandtheile der *Kerncurve* $R_0{}^x$ (Ort der «Knotenpunkte) des $G(f^n)$? — Wie viele zerfallene Glieder «kann das $G(f^n)$ haben unter den mannichfaltigsten Bedingungen, «wie z. B., dass jedes zerfallene Glied nur 2, oder 3, 4, . . . «Theile haben soll? — Es giebt solche bornirte $G(f^n)$, wo jedes «Glied zerfällt, alle Glieder eine Theilfläche f^a gemein haben; «auch solche, die partielle Grundcurven haben. — Zur Er- «leichterung kann man zur Bestimmung des $G(f^n)$ einen solchen «$B(f^n)$ annehmen, der nach dem Vorigen (I.) schon viele zer- «fallene Glieder enthält. Ist R^{n^2-n+1} die höchste *Grund-* «*curve* die ein $G(f^n)$ haben kann?

«Das Gebüsch 2^{ten} Grads $G(f^2)$ kann im Besondern 6 «Glieder haben, die aus Ebenenpaaren bestehen, wobei dann «die *Kerncurve* $R^6 = 6\,g$ ist. Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder «aus Ebenenpaaren bestehen, ist dann nicht ein 4^{tes} solches «Glied *nothwendig*, und bei fünfen das 6^{te}?

III. «*Vom* $N(f^n)$. Enthält es nothwendig zerfallene Glieder? wie-«viele und von welcher Art? Die Selbstschnitte der zerfallenen «Glieder (wie $(f^a f^\alpha) = R^{a\alpha}$) liegen in der Kernfläche $P^{4(n-1)^3}$ «des Gebüschs; dieselbe ist überhaupt der Ort aller Selbst-«schnitte, wozu ja auch die Knotenpunkte und vielfachen Linien «gehören. Enthält $N(f^n)$ immer solche Glieder die *vielfache* «*Linien* haben? und wieviele? — Wieviele Grundpunkte kann «$N(f^n)$ höchstens haben? und welches ist seine höchste par-«tielle Grundcurve R^x?

«Wählt man in einem $N(f^n)$ drei solche $B(f^n)$, wovon «keine zwei ein gemeinschaftliches Glied f^n haben, so werden «ihre 3 Grundcurven R^{n^2} von einer Schaar andern Grund-«curven, $S(R_1{}^{n^2})$, geschnitten, d. h. jede $R_1{}^{n^2}$ schneidet jede «R^{n^2} in n^3 Punkten, und dann werden diese $S(R_1{}^{n^2})$ nicht allein «von jenen dreien, sondern von einer $S(R^{n^2})$ geschnitten, und «beide Schaaren liegen in einer Fläche f^{2n} (wie beim Hyper-«boloid, das für $n = 1$ eintritt).

«H. *Borchardt,* dem ich angab, dass beim $N(f^2)$ 10 Glieder «aus $f' + f_1'$ beständen, war erst ganz enchantirt und glaubte «es leicht beweisen zu können; jetzt aber verzweifelt er, weil «er auf 27 kommt und nicht reduciren kann. Er wollte etwas «Spezielles haben, was ich nach meiner Weise so übersetze:

«Wenn zwei in derselben Ebene liegende Kegelschnitte «$N(A^2)$ und $N(B^2)$ einen Büschel $B(C^2)$ gemein haben, giebt «es dann solche Gliederpaare A^2 und B^2, die sich in zwei «Punkten berühren? und wieviele?»

«Eben war *Borchardt* wieder bei mir; er hat die Eli-«mination gemacht, 10 gefunden, und für diese spezielle Frage «4. Musste Brief aufweisen.

«Derselbe überbrachte mir vorgestern 2 Abhandlungen «von *Hesse* (aus *Crelle* Bd. 49., was ich noch nicht erhalten) «über die Doppeltangenten der C^4, datirt 1853; er hat endlich «auch die 63 Systeme eingeschriebene C^2 gefunden; bei den «315 C^2 citirt er *Salmons* Werk: «Treatise on the higher «plane curves by George Salmon, M. A., Dublin 1852.» — «Meiner wird nicht erwähnt, durch meine Trödelei, seit 1846 «soll ich leer ausgehen.

«Ich wünsche und hoffe, dass Sie gesunder sind, als ich; «dann haben Sie an dem Vorstehenden auf 14 Tage Futter «genug, und wenn auch wenig Grünes darunter ist, schmeckt «es Ihnen doch, da Sie *Alles* bewältigen und *verschlingen* «*wollen*.

«Leben Sie wohl, d. h. *flott* beir Gräfin und *rennend* «über das Wylerfeld.

«Die üblichen Grüsse an *Rettig, Mutz, Leuenberger* und «*Frau*, (Fr. und H. *Walter*), etc. Ihr hinfälliger

«Berlin 24.—27. Januar 1855. Steiner.»

«N.B. Übersehen Sie nicht den beiliegenden Zettel und «gehen Sie gleich zu *Leuenberger*, bitte!»[1])

1855. Steiner an Schläfli.[2])

Wahrscheinlich 1855, Anfang Januar.

«*Lieber Freund!*

«*Rache ist süss*» sagt ein Sprüchwort. Sie wollen mich wohl «fühlen lassen, wie peinlich einem zu Muthe ist, wenn man keine «Antwort erhält. Desshalb muss ich ein *ernstes Wort* mit Ihnen «sprechen.

«Wer in der Schweiz — wie auch in Preussen — ein *unehe*-«*liches* Kind erzeugt, muss Alimente bezahlen *von Rechts wegen*. Auf «diesen *Rechts-Grund* gestützt, dränge ich Sie hierdurch zum dritten «Mal, für die Erziehung und Ausbildung Ihres Bankerts, den Sie mir «so lieblos halb nackt ins Haus geschoben, väterlich zu bezahlen. Dass «es obendrein noch ein Zwillingspaar ist, will ich nicht einmal in «Rechnung bringen. Aber in seinen alten Tagen noch fremde Kinder, «ja Kinder des *Leichtsinns* — um nicht zu sagen der *Unkeuschheit* — «aufpäppeln zu sollen, ist erschrecklich. Schon wochenlang quäle ich «mich mit den Wechselbälgern ab, und kann sie weder zur Ruhe noch «ins Reine bringen.

«Die vornehmsten Grenzfälle, in die meines Erachtens der (Kno-«ten-) Kegel zweiten Grads, sowie die (Streif-) Curve zweiter Klasse «übergehen kann, sind folgende.

«1° Der Kegel kann sich α) auf seine *erste* oder *Hauptaxen*-«*ebene* reduciren, wobei seine Fläche die Winkel-Axe, d. h. die Winkel-«fläche zwischen den Scheitelkanten dieser Axenebenen doppelt bedeckt,

[1]) Derselbe ist natürlich nicht mehr vorhanden.

[2]) Hiezu existirt ein Concept.

«oder β) er kann sich in die *dritte ideelle Axenebene* ausbreiten und «dieselbe doppelt bedecken; oder γ) sich auf die Hauptaxe zusammen-«ziehen (Knotenaxe).

«2^0 Ferner kann er sich in zwei Ebenen ausbreiten (*Knoten-«ebenen*, ihr Schnitt *Knotenkante*), wobei dann alle Berührungsebenen «durch die Kante der zwei Ebenen gehen, letztere können α) *reell* «sein, β) *aufeinanderfallen*, γ) *imaginär* sein; nun scheint mir syn-«thetisch der Fall (β) mit dem vorigen (1$^0\beta$), sowie (γ) mit (1$^0\gamma$) iden-«tisch zu sein, aber (γ) kann vernünftig nur so, wie in (1^0) angegeben, «entstehen. Das Polare davon ist:

«I. Der Kegelschnitt (Streifcurve) kann in zwei Gerade über-«gehen, deren Schnitt der Mittelpunkt ist; die Geraden können a) «*reell* (Hyperbel) oder b) *imaginär* (Ellipse, die sich auf ihren Mittel-«punkt zusammengezogen) sein, oder c) *zusammenfallen* (doppelte «Gerade).

«II. Ferner kann sich der Kegelschnitt auf zwei Arten auf eine «doppelte Gerade reduciren; a) auf die doppelte *erste Axe*, oder sich «b) auf den Mittelpunkt oder c) als Hyperbel auf die doppelte *zweite* «*ideelle Axe* reduciren. Die Tangenten des Kegelschnitts bilden zwei «Strahlbüschel, welche die Scheitel der Axe zu Mittelpunkten haben; «im Falle (c) sind sie sämmtlich imaginär, bis auf die Axe selbst, «die reell wird.

«Nun die Schwierigkeiten (für die blosse synthetische Anschau-«ung). Im Fall (II a) finden zwei Kegelschnitte zugleich statt: Die «*Doppelstrecke zwischen den Scheiteln* ist Ellipse, und die äussere *Dop-«pelstrecke*, die durchs Unendliche geht, ist Hyperbel. Wenn nun vor «der Reduction die Streifcurve Ellipse war, so könnte man wähnen, «es wäre nur die *elliptische Strecke* der Streifaxe *reell* und die *hyper-«bolische* ideell oder imaginär. Nun gesetzt, Sie haben Recht, beim «Uebergang der Streifellipse in ihre Axe trete nun auch die Hyperbel «in ihrer Strecke in Evidenz (wie *Plücker* sagt), so hat der aus jedem «Punkt der Axe (Streifaxe) der Fläche umschriebene Kegel die Ebene «zur *Wendeebene* und die Axe zum *Wendestrahl*, und wenn der Punkt «aus der Ellipsenstrecke in die Hyperbelstrecke übergeht, so soll der «Kegel seine Lage gegen die Streifebene ändern; daher wäre also die «letztere eine Art *Wendeebene* der Fläche, aber mit Wechsel von der «einen Strecke zur andern, — was aber findet an den Grenzen, in «den beiden Scheiteln statt? muss hier der Kegel sich nicht *selbst* «*berühren* und die Axe zum Selbstberührungsstrahl und die Ebene «zur Selbstberührungsebene haben? oder was geht vor? — Dieselbe «Ungewissheit quält mich beim entsprechenden Fall ($2^0\alpha$), wo ich auch «nicht weiss, ob die durch die Knotenkante gelegte Ebene in beiden «Paar Scheitelwinkel der Knotenebenen *reell* schneidet oder vielleicht «nur im einen; und ob die Knotenebene selbst nicht mit *Selbstberüh-«rungspunkt* (oder etwa mit *zweimaligem* Selbstberührungspunkt) schnei-«det? Etwas anders, als Sie es angegeben haben, muss es sein, ich «möchte drauf wetten.

«So quälen mich alle obigen Fälle, z. B. der Fall (I a oder b, c). «Wird aus irgend einem Punkte in der Streifebene der Fläche ein «Kegel umschrieben, so hat er die Ebene zur *Wendeebene* und den «aus dem Punkt durch den Mittelpunkt (Schnitt der beiden Streif-«geraden) gehenden Strahl zum *Wendestrahl;* was Besonderes tritt «nun aber ein, wenn jener Punkt der Mittelpunkt selbst ist? Oder «andererseits, wie schneiden die Axenebenen in ($1^0\alpha$ und β) die Fläche? «nur mit *schlichtem* dreifachem Punkt, wie Sie sagen, oder anders, «etwa mit dreimaligem Wendepunkt etc.? — Ich bin darüber ganz in «Verwirrung, es ist synthetisch zu schwer oder ich bin zu schwach «und stumpf; ich corrigire und streiche wieder, weil ich nicht weiss, «was wahr oder falsch ist. Setzen Sie an! und geben Sie mir die «Resultate mit der Ihnen sonst *eigenen* Zuverlässigkeit.

«Bei der Definition der Polarflächen möchte ich auch die Eigen-«schaften des der Basis f^m umschriebenen Kegels angeben, nämlich «Grad $= m\,(m - 1)$, Klasse $= m\,(m - 1)^2$, Zahl der Doppel-«ebenen $= \frac{1}{2}\,m\,(m - 1)\,(m - 2)\,(m^3 - m^2 + m - 12)$, Zahl «der Wendeebenen $= w$ (?), Zahl der Doppelstrahlen $= d$ (?) und Zahl «der Rückkehrstrahlen $= r$ (?). Ich glaube Sie sagten es sei $w = 4\,r$, «also werden Sie alle 3 Fragen leicht *richtig* beantworten können. — «Einst theilte ich Ihnen die Eigenschaften der Abwickelbaren mit, welche «der Fläche *m^{ten} Grads* längs des ebenen Schnittes umschrieben «ist: Grad, Klasse und Grad der Rückkehrlinie, im Augenblick weiss «ich sie nicht, werde sie aber wohl notirt haben; Sie haben dieselben «bestätigt und wie mich dünkt noch erweitert. Fasst man die Fläche «nach *Klasse* auf, wird der Fläche *m^{ter} Klasse* längs des Schnitts mit «irgend einer Ebene E die Abwickelbare umschrieben, so ist dieser «eine Fläche $(m - 1)^{ten}$ Grads eingeschrieben, die erste Polare der «Ebene E in Bezug auf die Basis; die letzte Polare ist ein Punkt, «*Polarpunkt* der E in Bezug auf die Basis. Versetzt man E ins Un «endliche, so ist ihr Polarpunkt eine Art *Mittelpunkt* (Schwerpunkt, «Punkt mittlerer Entfernung), *nämlich die Summe der aus ihm auf «je ein System vom m parallelen Berührungsebenen der Basis ist alle-«mal gleich Null* (ist es wahr?). Die Schnittcurve der E mit der «Basis stimmt mit dem vorigen Kegel in den 6 Eigenschaften überein; «die Abwickelbare mit der Berührungscurve des Kegels u. s. w.

«Da ich nicht weiss, ob Sie mich *verworfen* haben, darf ich «nicht weiter schreiben, hoffe aber, dass Sie mich bald aus dieser pein-«lichen Ungewissheit erlösen werden. Ich war damals krank und «ganz unthätig, — Sie sind über solche Zustände Zeitlebens er-«haben, wie Sie selbst meinten.

«Ihr treuer

Steiner.»

«Grüssen Sie Prof. *Vogt* [1]) und sagen ihm, ich hätte mich über «seinen *wackern Carl* [2]) bei Lesung der «*Bilder aus dem Thierreich*» «sehr gefreut, theils aus *collegialischem* Anlass. Unterlassen Sie «es nicht.

«Ein hiesiger Gymnasiums-Professor der Mathematik, *Müller,* «meinte, ich sollte *Geflecht* statt *Gebüsch* oder *Netzbasis* sagen, es «drücke gerade etwas *Räumliches* aus. Was sagen Sie dazu?

«Die gewöhnlichen Grüsse. — Haben Sie Chelini (in den Statuten «steht Ch*i*lini) geschrieben? — Denken Sie, ich habe mich noch nicht «bedankt! es ist schändlich.

«Lassen Sie mich nicht im Stich, damit ich in den, nächste «Woche eintretenden, Ferien die Redaction fortsetzen kann. Ich «werde auch bald mich umsehen, wie ich es anzufangen habe, um «auf Jahr und Tag Urlaub zu erhalten.

«Mein kleiner Aufsatz ist in Liouville's Journal noch nicht er-«schienen, Dr. *Wöpke*[3]) scheint ihn nicht übersetzt zu haben; ich sollte «an *Poncelet* schreiben — aber es geschieht nicht. Auch von Ihren «Sachen scheint noch nichts aufgenommen zu sein. *Crelle* sehe ich «nie. Bei ihm ziehen sich die Sachen lange hin. Ich werde näch-«stens nach der Druckerei gehen und mich beim Setzer erkundigen.

«Zum *Donnstig!* bald Antwort und sollte es eine *Kriegserklärung*

---

[1]) Seit 1835 Professor der Medizin in Bern.

[2]) Bezieht sich auf Carl Vogt, Professor in Genf † 1895.

[3]) Wöpke Franz, geb. 6. Mai 1826, Lehrer der Mathematik, lebte abwechselnd in Berlin und Paris; † 1864.

«sein, nur nicht eine so *tiefdurchdachte Stellung* eingenommen, wie «Preussen; heraus aus der neutralen Passivität, ehe Sebastopol «fällt.»

Steiner an Schläfli.

Berlin, 25. Febr. 1855.

«*Lieber und getreuer Freund!*

«Hollohoh! wo hängt's? Sind Sie böse, oder grasen Sie, oder «mangen Sie Vorsichtskasse [1]), oder waren meine Aufgaben zu schwer, «dass in drei Wochen noch keine Antwort kommt?

«Ich habe die Redaction wieder begonnen. Es geht erbärmlich «langsam. Ihre Definitionen machen mir viel zu schaffen. Es giebt «mehrere Dinge, die ich nicht klar anschauen kann, — und sicher »habe ich schon Falsches geschrieben. Wenn ich Ihren Entwurf lese, «ist es mir gerade wie beim Spazieren: diese *Selbstsucht*, die sich «nicht um den schwächeren Begleiter kümmert! Nun begreife ich «*Borchardt's* Urtheil auf dem Rigi! Um Sie jedoch nicht, wie «früher, zu ärgern, gebe ich mir Mühe, Ihrem Concepte treulich zu «folgen; aber etwas Schulmeisterei wird doch eingeflochten, was Ihnen «unlieb sein mag, da Sie dafür kein Organ haben, wie für schönen «Weg und humane Ruhe auf Ausflügen, worüber *Walter, Rettig* [2]), ich «und Alle zu *weinen und klagen* haben. — Ich sitze gegenwärtig die «8^{te} Leidens-Stör zu Hause ab. Das Alter macht sich schon stark gel- «tend, die frühere Allgewalt der Phantasie ist halb erloschen; ich «kann nicht mehr klar anschauen, und nur mit saurer Mühe. Ich «bitte Sie daher mir folgende Sachen (die mir ehemals leicht ge- «wesen wären) *sicher zu entscheiden.*

«1. Der aus jedem Punkte P in einer f^m dieser umschriebene «Kegel hat die zugehörige Berührungsebene E zur Doppelebene und «*berührt sie längs der beiden Tangenten ihrer Schnittcurve in P.* (?) «Wenn nun die E mit *Rückkehrpunkt* schneidet, so ist sie eine *Wende-* «ebene (nicht Rückkehrebene?) des Kegels; und wenn sie mit *Selbst-* «*berührungspunkt* schneidet, so ist sie eine *Selbstberührungsebene* des «Kegels.

«2. Wenn 2 Flächen sich in P berühren, so hat die ihnen ge-

[1]) Schläfli war ca. 5 Jahre lang Liquidationsrechner der National-Vorsichts-Kasse.

[2]) Prof. der Philologie in Bern, jetzt noch lebend.

«meinsam umschriebene Abwickelbare die zugehörige E zur Doppel-«ebene und berührt sie längs *der beiden Tangenten der Schnittcurve «der Flächen;* die E wird *Wende-* oder Selbstberührungsebene der Ab-«wickelbaren, wenn P ein *Rückkehr-* oder Selbstberührungspunkt der «Curve ist; dabei ist die Rückkehrtangente eine *Asymptote* in der «Involution, welche durch die zwei Tangentenpaare der Schnittcurven «von E mit den 2 Flächen bestimmt ist; ebenso die *Selbstberührungs-«tangente.*

«3. Die Schnittcurve des Knotenkegels n^{ten} Grads K^n mit der «Fläche f^m sendet $n(n+1)$ Zweige durch den Knotenpunkt P, deren «Tangenten t (in P) *alle in den K* fallen; berührt eine E den K längs «einer dieser t, so ist diese eine *Selbstberührungstangente ihres «Schnittes* (so verstand ich Ihren rücksichtslos-dunkeln Satz), und für «die vorhergehenden und nachfolgenden, den K berührenden Ebenen «ändert deren Schnittcurve die positive Seite ihrer Rückkehrtangente. «Geht aber eine E frei durch solche t, so hat ihr Schnitt dieselbe «zur *Wendetangente* (?).

«Ich muss hierbei nochmals vom Knotenpunkt 2^{ter} Ordnung «sprechen, der mich sehr würgt, weil ich ihn nicht ganz zu fres-«sen vermag, und sicher Falsches darüber ins Reine geschrieben «habe, wie ich jetzt einsehe. Er heisst *hyperpoloidisch* (nicht hyper-«polisch) oder *ellipsoidisch*, nachdem der K^2 reell oder imaginär ist. «Nun kann ich mich damit nicht zufrieden geben, obschon Sie mich «in Bern abschnauzten und wiewohl ich bereits ins Reine schrieb, «dass der Uebergangsfall zwischen beiden der *paraboloidische* Knoten-«punkt sei — was offenbar Unsinn ist. Mit träger Vorstellung sah «ich Folgendes, was Sie controlliren und sicher begründen wollen.

«Der hyperb. Knotenpunkt hat zwei *Grenzfälle:* 1^0) wo K^2 sich «auf eine einzige Gerade = Knotenkante, reducirt, welche dann *Selbst-«berührungs-* oder *Rückkehrtangente* des Schnittes jeder durch sie «gehenden Ebene ist, so dass also die Fläche einen Selbstberührungs-«Knotenpunkt oder Rückkehr-Knotenpunkt (eine Spitze, die im Kno-«tenpunkt endet) hat (Beispiele an Umdrehungsflächen); 2^0) wo «K^2 sich in eine Ebene=Knotenebene ausbreitet, welche von jeder «durch den Knotenpunkt gehenden Ebene in einer *Rückkehrtangente* «oder Selbstberührungstangente (?) geschnitten wird, und insbesondere «drei durch den Knotenpunkt gehende solche Gerade enthält, welche «für jede durchgehende Ebene Selbstberührungstangenten sind, so dass «die Fläche drei glatte Spitzen hat, die im Knotenpunkt enden (wie «unten, bei Ihrem Fall). Oder wird hier die von jeder durch den «Knotenpunkt gehenden andern E in einer Selbstberührungstangente «(statt rt) geschnitten? Beispiel: wenn man eine Curve und die Nor- «male in einem Wende- (oder Selbstberührungs-) Punkt herumbewegt. «— Zerfällt K^2 in 2 Ebenen, die *reell* oder *imaginär* sind, so heisst «jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Ist nun dieser «elliptische Fall mit dem vorigen (1^0) identisch? oder wodurch unter- «scheiden sie sich? Und ist ebenso der hiesige hyperbolische Grenz- «fall, wo beide Knotenebenen zusammenfallen, mit dem vorigen (2^0) «*identisch* oder *verschieden?* Wie schwer es mir wird einzusehen, «dass in jeder der beiden Ebenen drei famöse t liegen, habe ich «Ihnen bereits im vorigen Brief unterbreitet und erwarte bald sichere «Auskunft. — Statt *Dehnebene* bin ich jetzt auf den Namen *Streifebene* «gekommen; *Streifcurve.* Ihre *Umschreibungsebene* wäre auch sach- «gemäss.

«Hat die f^3 einen Kp=P, so wird sie vom K^2 längs dreien Strah- «len t berührt (?); daher hat f^3 die sie längs diesen t berührenden «drei Ebenen zu *Streifebenen.* — Hat f^3 vier Knotenpunkte (wie z. B. «die 2^{te} Polarenveloppe eine E in Bezug auf Basis F^3), die ein Te- «traeder T bestimmen, so berührt jeder Knotenkegel längs der drei «anliegenden Kanten, und je zwei Knotenkegel berühren sich längs «der ihnen gemeinsamen Kante und haben daher noch einen (durch «die beiden anderen Knotenpunkte gehenden) ebenen Schnitt C^2. Die «Ebenen der sechs C^2 gehen durch *einen* Punkt. Die 4 Knotenkegel «sind irgend einer f^2 umschrieben, welche alle 6 Kanten des T be- «rührt; endlich hat f^3 sechs Streifebenen, die sie längs der 6 Kanten «streifen und die respectiven Ecken des T zu Mittelpunkten der donn- «stigs Strahlbüschel haben. — Für die F^3 (3^{te} Klasse) alles analog. «Was daran Wahres ist, werden Sie bald erkennen; gleich nach der «Ankunft in hier habe ich so was angeschaut; jetzt sehe ich nichts «deutlich.

«4. Der einer f^m aus freiem P umschriebene Kegel K ist vom «m (m—1) ^{ten} Grad. Ist P insbesondere ein Kp n^{ter} Ordnung von f^m, «so besteht $K^{m\,(m-1)}$ aus $(n+1)\ K^n + K^{m\,(m-1)\,-\,n\,(n+1)}$ d. h. aus «dem (n+1)fachen Knotenkegel K^n und aus einem andern Kegel «[m (m—1) — n (n+1)] ^{ten} Grads, der für das Maximum von n, für «n = m — 1, verschwindet.

«5. Braucht man *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen, «*eine Doppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt werden «*gleichen Grads*» oder «*gleicher Klasse*», oder liegt dies schon drin?

«Kann man bei einer Doppelschaar Flächen «*von drei successiven* «*Flächen*» sprechen, da ja jede gleichsam von einer Schaar nächst«folgender umgeben ist?

«6. Da wir die Klasse der einer gegebenen f^m doppelt umschrie«benen Abwickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berüh«rungscurve R^x zu finden sein. Dann ist jene Klasse $=\mu$, so gehen «durch jeden P μ Doppelebenen der f^m, und daher schneidet die erste «Polare von P, f^{m-1}, die R^x in 24 Punkten, so dass $(m-1) \times x =$ «2μ, also $x = \frac{2\mu}{m-1}$ ist. (?) — Von welchem Grad ist die Abwickel«bare? und von welchem ihre Rückkehrlinie? Muss zu finden sein.

«Sind f^m und f^n gegeben, so ist die ihnen gemeinsam umschrie«bene Abwickelbare von der $m(m-1)^2 \times n(n-1)^{2ten}$ Klasse; ihre «Berührungscurven $R\mu$ und $R\nu$ mit f^m und f^n werden also von den er«sten Polaren f^{m-1} und f^{n-1} jedes P in $m(m-1)^2$ $n(n-1)^2$ Punkten «geschnitten, so dass danach $\mu = m(m-1).\ n(n-1)^2$ und

«$\nu = m(m-1)^2.\ n(n-1)$ wäre. (?)

«Die den Flächen f^m und f^n längs ihrer Schnittcurve R^{mn} umschrie«benen Abwickelbaren sind beziehlich von der $mn(m-1)^{ten}$ und «$mn(n-1)^{ten}$ Klasse. Daher müssen bei zwei Flächen m^{ter} und n^{ter} Klasse «F^m und F^n die Berührungscurven $R\mu$ und $R\nu$ der ihnen gemeinsam «umschriebenen Abwickelbaren vom $mn(m-1)^{ten}$ und $mn(n-1)^{ten}$ «Grad sein. (?) — Ich wollte von da aus weiter gehen und finden, «*um wieviel die Doppel- und Rückkehrlinie einer* F *deren Klasse er*«*niedrigen*, aber ich bin zu sehr abattu und confus, vielleicht gelingt «es ein andermal.

«Wenn Ihr Stillschweigen keinen andern Grund hat, als dass Sie «sich an einigen schwierigern Fragen verbissen haben, so bitte ich «recht sehr, mir vorerst die leichteren bald zu beantworten, damit «ich mit der Redaction vorwärts komme.

«*Fetscherin's* Tod hat mich frappirt; er war noch so rüstig und «kaum oder nur wenig älter als ich; 96er. Woran starb er?

«Sollten den Herren *Rettig, Leuenberger*, *Dr. Schneider* oder *Vogt*, «*Ries*, Signore etc. Dissertationen in ihren respectiven Fächern genehm «sein, so würde ich durch Buchhändler Ihnen ein Pack zuschicken «und Sie könnten das Porto repartiren nach Stückzahl und Inhalt. «Einst gab ich *Schlatter* (=Post-Heiri) in Solothurn circa 30 Stück.

«Leben Sie wohl, bleiben Sie *ewig gesund, jung und rüstig* — «wie Sie selbst meinten — und *antworten* Sie bald

Ihrem dankbaren *J. Steiner.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich nehme herzlichen Antheil an Ihren Leiden und bewundere «die Selbstüberwindung und den Heroismus, mit dem Sie, denselben «trotzend, die schwersten Fragen der Geometrie angreifen, von denen «es mir fast unmöglich scheint, dass sie in der Anschauung allein «sollten abgethan werden können.

«*Ad 1°*. Der aus einem beliebigen Punkte P einer *nach Grad* «*freien* Fläche f dieser umschriebene Kegel K hat die zu P gehörende «Berührungsebene E der f zur Doppeltangentialebene, und die zwei «Berührungsstrahlen derselben sind die Tangenten im Doppelpunkt P «des Berührungsschnitts der E. — Fällt aber P in den Durchschnitt «der Kernfläche und wird daher zum Rückkehrpunkt des Schnitts E, «so zählt die Rückkehrtangente für *vier vereinigte Strahlen*, welche «K mit E gemein hat (analytisch sicher!). — Ist endlich P einer der «Punkte π, wo die Curve (E, f) diesen zum Selbstberührungspunkt «hat, so sendet K durch die Selbstberührungstangente *zwei* Lappen, «welche beide längs derselben von der E oskulirt werden. (Analytisch «ist dieses wenigstens das Mindeste, was geschehen muss; ich glaube «aber nicht, dass es im Allgemeinen noch höher gehe. Den Ueber«gang vom vorigen Falle zu diesem speziellsten vermag ich freilich «in der Anschauung nicht zu verfolgen. Doch! denn in π wird die «Curve R d. h. (Q, f) von der Berührungscurve S der doppelt um«schriebenen Abwickelbaren berührt.) — Fällt der Punkt P irgendwo «in die S, so ist die E dreifache Berührungsebene des Kegels K; zu «den zwei sonst bekannten Berührungsstrahlen kömmt nämlich als «dritter noch der Strahl hinzu, welcher beide Berührungspunkte der «E (mit f) verbindet.

«*Ad 3°*. Wenn eine Fläche f (m^{ten} Grades) einen Knotenkegel «N (n^{ten} Grades) hat, und man wählt den Scheitel desselben zum Eck «(x, y, z) des Fundamentaltetraeders und nennt w die gegenüberliegende «Ebene, so bekömmt das Polynom der Fläche, nach den fallenden «Potenzen von w geordnet, die Form: $f = Nw^{m-n} + Pw^{m-n-1} +$ etc. «Dann ist also P ein Kegel $(n+1)^{ten}$ Grades, der mit dem Knoten«kegel den Scheitel gemein hat, aber sonst von ihm durchaus unab«hängig ist. Von den $n(n+1)$ gemeinschaftlichen Strahlen beider «können also bis auf die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nothwendigen alle übrigen «beliebig auf N angenommen werden; wenn demnach dieser N nur «vom zweiten Grade ist, so giebt es *keinen* nothwendigen Strahl, «sondern alle 6 können beliebig auf den N gesetzt werden, selbst «noch wenn dieser ein *Ebenenpaar* ist; nur wenn N aus zwei *ver-«einigten* Ebenen besteht, und dem P keine Gewalt angethan werden «soll, können in der Ebene N nur 3 Strahlen beliebig gesetzt wer-«den, deren jeder für zwei vereinigte Strahlen gilt. Frägt man nun «(im allgemeinen Fall), wie die Curve aussieht, in welcher die Basis «f vom Knotenkegel N geschnitten wird, so hat man für dieselbe das «System ($N = o$, $Pw^{m-n-1} + Qw^{m-n-2} +$ etc. $= o$), also mit erster «Annäherung ($N = o$, $P = o$), d. h. die erwähnten $n(n+1)$ Strahlen «sind Tangenten der Zweige, welche die Curve durch den Knoten-«punkt sendet. Wählt man die Fundamentalebene x so, dass sie den «N berührt, und lässt die y durch den Berührungsstrahl gehen, so «bekömmt man $N = xz^{n-1} + pz^{n-2} +$ etc., wo p ein homogenes «Polynom zweiten Grades in x, y bedeutet. Ist nun Q ganz frei, so «ist sein niedrigstes Glied z^{n+1}; in der Gleichung des Schnitts $x = o$ «sind also die niedrigsten Glieder $y^2z^{n-2}w^{m-n-1}$, $z^{n+1}w^{m-n-2}$ (mit «Weglassung der constanten Coefficienten), oder gekürzt: y^2w, z^3, d. «h. der Berührungsstrahl (x, y) ist Rückkehrtangente des ebenen Be-«rührungsschnitts (x) der Basis f. Geht aber der Kegel P durch «diesen Strahl (x, y), so ist sein niedrigstes Glied yz^n; aber das nied-«rigste Glied von Q im Allgemeinen immer noch z^{n+2}; man hat dann «im Ganzen drei Glieder von derselben niedrigsten Ordnung, in ge-«kürzter Form: y^2w^2, yz^2w, z^4, welche zusammen in die Gestalt des «Products $(yw + \alpha z^2)(yw + \beta z^2)$ gebracht werden können, d. h. die «Gleichung des ebenen Schnitts zerfällt in erster Annäherung in die «zwei Curven $yw + \alpha z^2 = o$, $yw + \beta z^2 = o$, mit andern Worten, «der Schnitt hat hier einen Selbstberührungspunkt, dessen Tangente «der Strahl (x, y) ist. — Geht eine schneidende Ebene frei durch «einen der $n(n+1)$ Strahlen (N, P), und nehmen wir sie als Ebene «x an und lassen auch noch die Ebene y durch diesen Strahl gehen, «so fällt in N das Glied z^n und in P das z^{n+1} weg; aber Q wird ein «Glied z^{n+2} haben; die auf die niedrigsten Glieder beschränkte (und «gekürzte) Gleichung der Basis f wird demnach für $x = o$ zu $yw^2 +$ «$z^3 = o$; d. h. der Strahl (x, y) ist eine Wendetangente der Schnitt-«curve. — Für das Mass eines Briefs konnte ich diese Sache nicht «wohl ausführlicher erörtern; aber ich hoffe, dieses reiche hin, um «die Dunkelheit zu verscheuchen.

«Ist ein *Knotenpunkt* (zweiten Grades) K *reell* und geschieht «ihm weiter keine Gewalt, so ist nur zweierlei möglich: 1⁰ entweder «ist der Knotenkegel N *reell*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 - z^2$; also «der Knotenpunkt *reell verbunden* (hyperboloidisch); 2⁰ oder der Knoten-«kegel N ist *imaginär*, indem z. B. $N = x^2 + y^2 + z^2$; also der «Knotenpunkt *isolirt* (ellipsoidisch). Der vermittelnde Gränzfall zwischen «beiden kann offenbar *nur* der sein, wo $N = x^2 + y^2$ wird, d. h. wo «der Knotenkegel aus zwei *conjugirten imaginären* Ebenen besteht; «consequent müssten Sie ihn einen *elliptisch-paraboloidischen* Knoten-«punkt nennen; ein solcher entsteht z. B. wenn man die *Neil*'sche «Parabel um ihre Rückkehrtangente herumdreht (man kann dann «nachträglich die auf der Umdrehungsaxe senkrechten kreisförmigen «Querschnitte zu Ellipsen ausstrecken). Der Uebergang ist leicht in «der Anschauung zu verfolgen. Setzt man nämlich $N = x^2 + y^2 - \alpha z^2$, «wo α einen *sehr kleinen* pos. Coefficienten bedeutet, so werden in «der Nähe des K die Verhältnisse $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sehr klein, der Knotenkegel «wird also sehr spitz und zieht sich gleichsam auf seine Axe (x, y) «zusammen; für eine erste Annäherung braucht man daher in P nur «das niedrigste Glied z^3 zu berücksichtigen (für dessen Coefficient ich «kurz 1 setze); man bekömmt so für die Basis annähernd

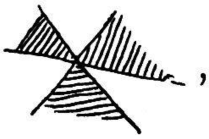
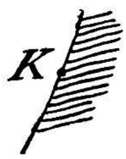
$$-\alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right)^3 = o, \text{ d. h. } \frac{z}{w} = \alpha,$$

«der *eine* Lappen oder Trichter der Basis bildet einen sehr kleinen «geschlossenen Sack, dessen Länge in der Richtung der Axe von «der Ordnung α, die Querdimensionen hingegen von der Ordnung «$\frac{z}{w}\sqrt{\alpha}$ sind. Setzt man hingegen

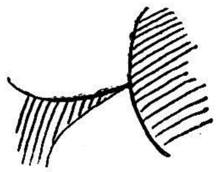
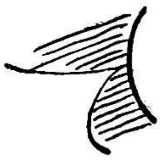
«$N = x^2 + y^2 + \alpha z^2$, $P = - z^3 +$ etc., so erhält man für die Basis «annähernd: $-\left(\frac{z}{w}\right)^3 + \alpha\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{x^2+y^2}{w^2} +$ etc. $= o$, d. h. für «$o < \frac{z}{w} < \alpha$ ist in unmittelbarer Nähe des Strahls oder der Axe (x, y) «die Fläche unterbrochen, während sie jenseits, für $\frac{z}{w} > \alpha$, reelle Aus-«dehnung erhält, sie kömmt also mit einem stark gekrümmten Buckel «dem isolirten Knotenpunkt (x, y, z) entgegen, ohne ihn wirklich zu «erreichen.

«Nehmen wir jetzt den Fall, wo der Knotenkegel N in zwei ver-«schiedene Ebenen zerfällt, so sind nur zwei Arten möglich. *Ent-«weder* ist $N = x^2 + y^2$, der schon besprochene Gränzfall, wo die «zwei Ebenen conjugirt imaginär sind, *elliptischer* Kantenknotenpunkt; «ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt immer eine Ellipse; «ein frei durch K gehender Schnitt bekömmt den Punkt K zum *isolirten* «Doppelpunkt; jeder durch die Kante geführte ebene Schnitt hat K «zum Rückkehrpunkt, dessen Oeffnung die Richtung nie wechselt. «Einen ebenen Schnitt mit Selbstberührungspunkt kann es ohne «höhern Zwang nicht geben. (Dieser Zwang bestände nämlich in «der einzigen Bedingung, dass in P das Glied z^3 wegfiele, d. h. dass «der Kegel P dritten Grades durch die Knotenpunkte selbst gienge. «Dann sind allerdings für $x = o$ die niedrigsten Glieder $y^2 w^2$, $y z^2 w$, «z^4; und jede durch die Kante gelegte Ebene schneidet die Basis mit «Selbstberührungspunkt.) — Oder es ist $N = x^2 - y^2$, die zwei «Ebenen ($x + y = o$, $x - y = o$) sind reell, *hyperbolischer* Kanten-«knotenpunkt; ein ebener Schnitt in der Nähe von K giebt eine Curve, «die in der Nähe mit einer Hyperbel übereinkömmt; ein frei durch «K gehender ebener Schnitt bekömmt ihn zum *verbundenen* Doppel-«punkt; ein frei durch die Knotenkante geführter ebener Schnitt «hat diese Kante zur Rückkehrtangente in K, und zwar ist in zwei «Scheitelkeilen die Oeffnung des Rückkehrpunktes nach der einen «Seite, in den zwei andern nach der andern Seite der Kante ge-«wendet. Jede Ebene des Knotenkegels endlich schneidet die Basis «in einer Curve, welche die Zweige frei durch K sendet; die Tangenten «derselben sind die drei Strahlen, welche diese Ebene mit dem Kegel «P dritten Grades gemein hat.

«Als Gränzfall zwischen dem elliptischen und hyperbolischen «Kantenknotenpunkt steht der Planknotenpunkt in der Mitte; der «Knotenkegel reducirt sich auf zwei vereinigte Ebenen, es ist $N = x^2$; «jeder frei durch K geführte ebene Schnitt hat K zum Rückkehr-«punkt, dessen Tangente in die Knotenebene fällt; diese Ebene selbst «schneidet in einer Curve, welche drei freie Zweige durch K sendet, «von denen wenigstens einer reell ist; ihre Tangenten sind durch «$x = o$, $P = o$ bestimmt. Geht eine Schnittebene frei durch eine dieser «Tangenten, so hat der Schnitt K zum Selbstberührungspunkt. — Will «man ohne Ausübung von Zwang hier noch Arten unterscheiden, so «kann es nur zwei geben. Das System $x = o$, $P = o$ giebt näm-«lich für das Verhältniss $y : z$ drei verschiedene reelle Werthe *oder* nur «einen reellen; dem ersten Fall entsprechen die drei platten Spitzen

 , dem zweiten eine platte Schneide, 

in K völ-«lig scharf, weiter davon weg immer mehr abgestumpft. Der zwischen-«liegende Gränzfall ist der, wo zwei Lösungen von $x = o$, $P = o$ «zusammenfallen; dann ist der Schnitt der Knotenebene eine Curve, «welche in K einen Rückkehrpunkt hat, durch den noch ein Zweig «frei durchgeht; also entweder

 oder 

«Fallen alle drei Lösungen zusammen, so wird die Gleichung «des Schnitts der Knotenebene in erster Annäherung von der Form «$y^3w + z^4 = o$, ein $\left(\frac{3}{4}\right)$punkt, der jeder frei durchgehenden Ge-«raden für drei, aber die ächten Tangente ($y = o$) für vier ver-«einigte Punkte zählt. — Um mich den von Ihnen angeführten sehr «starken Specialitäten zu nähern, muss ich annehmen, dass der Kegel «P dritten Grades zerfalle in die Knotenebene x selbst und einen «Kegel zweiten Grades, d. h. dass P durch x theilbar sei. Die Basis «erscheint dann in der Nähe von K wie *zwei sich in K berührende* «*Flächen zweiten Grades*. Doch halte ich es für rathsam, sich hier «nicht zu tief in Specialitäten einzulassen.

«Obgleich ich durch das bisherige Ihre Fragen über Identität «oder Verschiedenheit gewisser Fälle hinreichend beantwortet glaube, «will ich doch noch ausdrücklich bemerken, dass der *hyperbolische* «*Knotenpunkt* (hyperbolisch - paraboloidischer Knotenpunkt) nur ein «Gränzfall ist zwischen zwei verschiedenen Lagen des hyperboloidischen «(reell verbundenen) Knotenpunkts. Halbiren wir die Winkel des «reellen Ebenenpaars durch zwei Ebenen, nennen diese x, y und «legen durch K senkrecht auf die vorigen noch eine Ebene z, so «können wir uns den Uebergang in einen ächten Kegel auf doppelte «Weise vorstellen, entweder so, dass die Ebene x den Kegel elliptisch «(d. i. nur in einem reellen Punkt) schneidet, oder dass die Ebene y «es thut.

«Um kein Missverständniss übrig zu lassen, gebe ich noch fol-«gende Uebersicht: *Knotenpunkt*; I. im Allgemeinen (Knotenkegel «ächt vom 2^ten^ Grade, d. h. untheilbar) entweder α) reell verbunden, «oder β) isolirt; II. im Besondern: Kantenknotenpunkt (der Knoten-«kegel zerfällt in zwei Ebenen): 1° im Allgemeinen, die zwei Ebenen «sind verschieden und entweder α) beide reell, oder β) beide con-«jugirt-imaginär; 2° im Besondern: Planknotenpunkt (der Knotenkegel «besteht aus zwei vereinigten Ebenen); A. im Allgemeinen entweder «α) Dreispitzpunkt, β) Messerschneidepunkt; B. im Besondern, die «Knotenebene schneidet die Basis mit Rückkehrpunkt, durch den ein «freier Curvenzweig geht, und zwar entweder α) der Rückkehrpunkt «hat eine volle, oder β) leere Höhlung.

«Ueber die Fläche dritten Grades, welche *einen* Knotenpunkt hat, «sind Sie im Irrthum. Der Knotenkegel schneidet die Basis (im All-«gemeinen) in *sechs* verschiedenen Geraden; jede von diesen zählt «für *zwei sich nicht schneidende Cayley*'sche Gerade; alle 6 Paare ver-«einigter Geraden bilden einen Doppelsechser (Gitter) $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$ «wo immer je zwei entsprechende (sich also nicht schneidende) «Strahlen wie a_1 und b_1 zusammenfallen. Die 15 übrigen Geraden «c_{12}, etc. hingegen sind sämmtlich verschieden. Durch den Knoten-«punkt gehen 30 *Caylay*'sche Ebenen, welche paarweise zusammen-«halten, wie (a_1 b_2 c_{12}) und (a_2 b_1 c_{12}); hingegegen die 15 übrigen «Ebenen wie (c_{12} c_{34} c_{56}) sind sämmtlich verschieden.

«Was Sie über die Fläche dritten Grades mit *vier* Knotenpunk-«ten sagen, erkenne ich alles als richtig an, nur dass ich noch nicht «merke, was Sie mit den Strahlbüscheln meinen. Im Knotenpunkt-«tetraeder zählt jede Kante für 4 *Cayley*'sche Gerade. Nimmt man die «Polarebenen der Knotenpunkte in Bezug auf die den 4 Knotenkegeln «eingeschriebene Fläche zweiten Grades, so sind diese 4 *Sylvester*'-«sche Ebenen; und die 4 Geraden, in denen sie die entsprechenden «Tetraederebenen schneiden, liegen in der fünften *Sylvester*'schen «Ebene, und bilden hier ein Vierseit, dessen Diagonalen die drei «noch übrigen (einzelnen) *Cayley*'schen Geraden sind; durch jede von «diesen gehen zwei durch Gegenkanten gelegte Streifebenen der Basis. «Mich dünkt aber fast, ich habe Ihnen dieses schon geschrieben.

«*Ad 4.* Dass im Knotenpunkt n^{ten} Grades den Grad des von ihm «aus der Basis umschriebenen Kegels um n(n + 1) erniedrigt, hat «seine volle Richtigkeit; aber zu der Erklärung, die Sie beifügen, «dass nämlich der Knotenkegel selbst n + 1 mal dazu zu zählen sei, «kann ich nicht beistimmen, weil die Elimination nichts davon an- «zeigt. Wollten Sie denn auch bei einer ebenen Curve, die einen «n fachen Punkt hat, behaupten, wenn man sie als Schaar ihrer Tan- «genten auffasst, so sei jede der n Tangenten des Knotens n + 1 «mal zu zählen? Sie würden eher sagen, der Knoten sei ein n (n + 1) «mal zu zählender Strahlbüschel.

«*Ad 5.* Sie haben selbst das Wort *Schaar* in den Sprachge- «brauch eingeführt und wollen nun, nachdem Sie es unzählig oft ge- «braucht haben, erst noch definiren! Verstehen Sie denn unter *Schaar* «nicht eine unzählige Menge unendlich nahe auf einander folgender «geometrischer Gebilde, die des *allmäligen* Uebergangs in einander «fähig sind? In analytischer Sprache würde ich sagen: wenn in einer «Gleichung oder einem Systeme von Gleichungen, welches ein geo- «metrisches Gebilde darstellt, eine Constante variirt wird, so entsteht «eine Schaar, wenn deren 2, 3 . . . unter sich unabhängige variirt «werden, so entsteht eine Doppel-, dreifache, . . . Schaar. Dass Cur- «ven oder Flächen, die des allmäligen Uebergangs in einander fähig «sind, von gleichem Grade sein müssen, versteht sich dann von selbst. «— Die Franzosen gebrauchen das Wort successif, wenn ich nicht irre, «im Sinne vo *unendlich nahe auf einander folgend;* ich habe nun das «kurze Wort dem ellenlangen vorgezogen. Ich weiss nicht bestimmt, «ob sie im Gegenssatze dazu das Wort consécutif im Sinne von *durch* «*Zwischenräume getrennt auf einander folgend* gebrauchen. Es wäre «aber bequem, wenn man zwei einfache Wörter hätte, um diesen «Unterschied zu bezeichnen. — Ich kann mich nicht mehr erinnern, «wo ich von *drei successiven Flächen einer Doppelschaar* gesprochen «habe; doch denke ich, ich werde den schleppenden Beisatz, dass «der Ausdruck *im Allgemeinen* zu verstehen sei, weggelassen haben; «wäre hingegen die *Bedingung* hinzugekommen, dass die drei succes- «siven Flächen einer und derselben einfachen Schaar angehören soll- «ten, so würde ich dieses wohl ausdrücklich gesagt haben.

«*Ad 6.* Ich bin erstaunt darüber, dass Ihre einfache Betrach- «tung über den Grad x der Berührungscurve der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren einer Basis n^{ten} Grades mir nicht eingefallen ist. Ich «habe das System von Gleichungen, welches diese Berührungscurve «darstellt, durch Nachahmung des *Jacobi*'schen Verfahrens für die

«Doppeltangenten einer ebenen Curve erhalten — die Discussion ist «freilich viel schwieriger als bei den Curven — und habe genau den «Grad gefunden, den Sie so leicht geschlossen haben, ohne nur den «Zusammenhang mit der Classe der Abwickelbaren zu bemerken. Es «folgt dann ferner daraus, dass die Anzahl der Ebenen, welche die «Basis in einer Curve schneiden, die zugleich einen Rückkehrpunkt «und einen Doppelpunkt hat, $4\, n\, (n-2)\, (n-3)\, (n^3+3n-16)$ ist, al- «so 1920 für die f^4. — Wenn α den *Grad* der doppelt umschriebenen «Abwickelbaren und β die Anzahl der dreifach berührenden Ebenen be- «zeichnen, so ist demnach

$$2\alpha + 3\beta = \frac{1}{2}\, n\, (n-2)\, (n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45\, n^4 + 118\, n^3 - 115\, n^2 + 508\, n - 912).$$

«Für $n = 4$ sehe ich die Möglichkeit vor, α zu bestimmen; aber ich bin «noch nicht im Stande gewesen, die Discussion der betreffenden Systems- «gleichungen befriedigend abzuschliessen. Für $n > 4$ verzweifle ich «daran, α oder β je finden zu können. — Wenn in meinem Schlüssen «nicht irgendwo ein Trug untergelaufen ist, so hat jene Berührungscurve «der doppelt umschriebenen Abwickelbaren die merkwürdige Eigenschaft, «dass sie eine *Vollcurve* ist, und mein Verfahren, dieselbe darzustellen, «führt, auf die Fläche dritten Grades angewandt, direct zur Auffindung «einer (aus einer vielfachen Schaar) Fläche 9ten Grades, welche durch «die 27 *Cayley*'schen Geraden geht.

«Ihren Schluss auf die Grade der zwei Berührungscurven der «zweien Flächen umschriebenen Abwickelbaren muss ich als richtig «anerkennen.

«Ist n der Grad der Basis (nach Classe frei), g, k Grad und Classe «einer Doppellinie oder Rückkehrlinie desselben, so erniedrigt jene «an sich die Classe der Basis um $g\, n + 2\, k$, diese an sich um $2\, g\, n + 3\, k$, «d. h. abgesehen von singulären Punkten einer jeden. — Jede Stelle, «wo drei Lappen der Fläche sich frei durchschneiden, an sich erniedrigt «die Classe um 3. Die Berührungsebene π, die mit Selbstberührungs- «punkt schneidet, sieht polarisirt so sonderbar aus, dass ich keine Be- «schreibung wage; mit grosser Mühe habe ich bewiesen, dass dieser «complicirte Punkt die Classe um 6 erniedrigt. — Jeder Punkt endlich, «wo ein Lappen der Fläche ihre Rückkehrlinie frei durchschneidet, «ihre Doppellinie also einen gewöhnlichen Rückkehrpunkt hat, erniedrigt «die Classe der Fläche um 4.

«*Ad* 2⁰ Ich werde Ihnen über die gemeinsam umschriebene «Abwickelbare zweier Flächen, die sich berühren, später antworten. «Ich hatte sogleich nach Empfang Ihres zweiten Briefes angefangen, «diese Abwickelbare für zwei sich berührende Flächen zweiten Grades «aufzusuchen; da ich aber nicht weiss, wie lange mich noch die Ent- «wicklung einer 5-stelligen Determinante, die erst nach Entfernung «eines jetzt noch nicht sichtbaren linearen Factors das Gradespolynom «jener Abwickelbaren geben wird, aufgehalten hätte, so beeile ich mich «Ihnen endlich einmal zu antworten. Für jetzt nur so viel, dass mir «die Wendeebene der Abwickelbaren, die einem Rückkehrpunkt der «Durchschnittscurve entsprechen soll, spanisch vorkömmt!

«Nun sollte ich auf Ihren ersten Brief antworten. Es sind aber «darin theils Sachen, die kaum einer Bestätigung bedürfen, oder die «ich Ihrer freien Willkür überlassen muss, theils Betrachtungen, in «denen ich keine grössere logische Kraft zu erkennen vermag, als in «den entsprechenden eigenen, theils Betrachtungen, denen ich noch nicht «habe folgen können. Ich werde später im Einzelnen zu antworten «suchen. — Ihren Auftrag an *Leuenberger* habe ich besorgt. — Die «versprochenen Berliner-Dissertationen nehme ich recht gerne an und «werde sie an die betreffenden Herren vertheilen.

«Ihnen Glück, Kraft und gute Gesundheit wünschend

«Bern, den 7. März 1855. Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich vermuthe zwar, dass Sie meinen Brief, den ich wahrschein- «lich am 6. März Morgens um 9 Uhr auf die Post gethan habe, so- «gleich nach dem Abgang des Ihrigen werden erhalten haben. Da er «aber auch verloren sein könnte, so muss ich Sie nun bitten, mir so «zu sagen mit umgehender Post anzuzeigen, ob Sie ihn erhalten haben. «Ich habe mich darin bemüht, vorzüglich die auf den Grad bezüglichen «Eigenschaften des Knotenpunkts einer sonst *nach Grad möglichst* «*freien* Fläche, und seiner nächsten Degenerationen in den *Kanten-* «*knotenpunkt* und (noch spezieller) in den *Planknotenpunkt* deutlich «und in logischer Ordnung anzugeben. Ihr letzter Brief offenbart mir «aber eine so tiefe Verschiedenheit unserer Auffassungen dieses Gegen- «standes, dass ich mich bewogen fühle, noch einige Worte beizufügen.

«Wenn wir einer (als Doppelschaar von *Punkten* gefassten) Fläche die «geringste Beschränkung auflegen, so ist es die Existenz eines Kno- «tenpunkts. Halten wir nun diesen fest und setzen ihm irgend eine «feste Ebene gegenüber, so wird diese vom Knotenkegel in irgend «einem Kegelschnitt geschnitten. Da wir aber die Fläche nach *Grad* «aufgefasst haben, so müssen wir konsequenter Weise den Knotenkegel «als Schaar von Strahlen, den Kegelschnitt also als Schaar von Punkten «auffassen. Nun möchte ich fragen, ob denn da nicht die nächste, mit «einer einzigen neuen Bedingung zu erreichende Degeneration die «eines Paares verschiedener Gerader sei, und ob nicht erst zuletzt «die ärgste, weil drei Bedingungen erfordernde, Degeneration in zwei «vereinigte Gerade zu setzen sei. Im letzten Falle ist es der Punkt- «oder Gradesauffassung völlig fremd, den Punkt auf der, durch Vereini- «gung zweier, entstandenen Geraden irgendwo anhalten zu wollen, «mag nun das Gebilde aus der Ellipse oder aus der Hyperbel degene- «rirt sein. Ein Paar geschiedener Punkte, also ein Gebilde *nullten* «Grades, dürfen wir gewiss nicht an die Stelle einer Curve zweiten «Grades setzen! — Die Sache verhielte sich freilich anders, wenn wir «den Kegelschnitt als Schaar seiner Tangenten (nach Klasse) auffassten; «dann wäre die nächste Degeneration ein Paar geschiedener Strahl- «büschel, und erst die letzte ein Paar vereinigter Strahlbüschel; aber «auch bei diesem würden Sie doch gewiss nicht die Strahlen auf die «zwei leeren Scheitelwinkel der Hyperbel beschränken wollen; sondern «wenn Sie einmal den Strahlbüschel gesetzt haben, so dreht sich der «Strahl ohne Aufenthalt ringsum; ein Paar verschiedener Geraden, «als Gebilde *nullter* Klasse, an die Stelle eines Kegelschnittes gesetzt, «wäre nun bei der Klassenauffassung eben solcher Unsinn, wie das «Punktenpaar bei der Gradesauffassung. — Ich halte daher an dieser «Rangordnung fest: Zuerst der Knotenpunkt schlechthin (zweiten Gra- «des), 1 Bedingung für die Fläche; dann der Kantenknotenpunkt, «2 Bedingungen (im Ganzen); zuletzt der Planknotenpunkt, 4 Bedin- «gungen. Der erste erniedrigt die Klasse der Fläche um 2, der zweite «um 3, der letzte um 6. — Die Scheidung zwischen Reellem und Ima- «ginärem ist untergeordneter Natur, und darf daher nicht die Haupt- «eintheilung abgeben.

«Das Polare, Streifebene einer nach Klasse möglichst freien Flä- «che, ist entweder reine Uebersetzung alles für die Gradesauffassung «Gesagten; oder aber, wenn wir diese neuen Gebilde nun auch nach «Grad anschauen wollen, so müssen wir vorher am Knotenpunkt der

«Gradesfläche die von ihm oder sehr nahen Punkten aus umschriebe-
«nen Kegel gehörig studirt haben; dieses ist aber gar nicht leicht;
«und ich bin jetzt noch nicht im Stande, darüber zergliederte Aus-
«kunft zu geben.

«Bei dem einer Gradesfläche n^{ten} Grades umschriebenen Kegel
«ist $r=n(n-1)(n-2)$; denn der Rückkehrstrahl berührt die Basis
«da, wo die erste und zweite Polare des Kegelscheitels durchgehen;
«$w=4n(n-1)(n-2)$; denn die Wendestrahlen berühren die Basis
«da, wo erste Polare und Kernfläche Q durchgehen;

$$d=\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

«Wird diese Fläche von einer Ebene geschnitten und werden
«längs des Schnitts Berührungsebenen an sie gelegt, so bilden diese
«eine Abwickelbare $n(n-1)$ ter Klasse und $n(3n-5)$ ten Grades;
«ihre Rückkehrlinie scheint nur vom $6n(n-2)$ ten Grade zu sein;
«denn sie berührt die Ebene in den Wendepunkten des Schnitts, und
«ich wüsste nicht, wo sie ihr sonst begegnen könnte.

«Wenn bei der Klassenauffassung eine Ebene die Rolle des Pols
«übernimmt, dürfte man ihr vielleicht einen andern Namen, etwa *Po-*
«*lane* geben. Ihr Satz über den (letzten) Polarpunkt der unendlich
«entfernten Ebene ist richtig; nur sind die Worte «gefällten Perpendikel»
«aus Versehen weggelassen.

«Ihren Auftrag an Prof. *Vogt* werde ich sogleich besorgen. Herrn
«*Chelini* habe ich leider noch nicht geschrieben. Bleiben Sie nun
«einmal bei *Büschel, Gebüsch, Netz* stehen; denn *Geflecht* ist um kein
«Haar besser als Gebüsch; sonst entsteht zwischen uns zweien baby-
«lonische Sprachverwirrung.

«Wenn eine f^3 einen Kantenknotenpunkt hat, so enthält jede
«Knotenebene drei vom Knotenpunkt ausgehende Gerade (von freier
«Lage), deren jede *drei* sich nicht schneidende Cayley'sche Gerade in
«sich vereinigt. Die übrigen 9 Cayley'schen Geraden sind vereinzelt
«und werden von einem Triederpaar gebildet. Jede Knotenebene
«vereinigt in sich 6 Dreiseite. Legt man durch je eine Gerade der
«einen und irgend eine der andern Knotenebene eine Ebene (was 9
«mal geschieht), so vereinigt diese Ebene 3 Dreiseite in sich. Es
«bleiben nur noch 6 vereinzelte Dreiseite übrig, die vom Triederpaar
«gebildet werden und nicht durch den Knotenpunkt gehen. — Beim
«Planknotenpunkt vereinigt jede der drei in der Knotenebene befind-
«lichen Geraden in sich 4 Paare sich schneidender Cayley'scher Ge-
«raden, so dass nur noch 3 vereinzelte Cayley'sche Gerade übrig bleiben,

«welche ein getrenntes Dreiseit bilden. Durch jene 3 ersten Geraden «gehen 3 Streifebenen der Fläche. In die Knotenebene fallen 32 Dreiseite «(von den 3 Streifstrahlen gebildet, also nullen Inhalts); in jede Streif-«ebene fallen 4 Dreiseite (schmal und lang); 1 Dreiseit ist vernünftig. «— Sie herzlich grüssend

«Bern, den 13. März 1855, Abends 7 Uhr.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

18. März 1855. [1])

«*Treuer Freund!*

«Kaum hatte meine Dienstbare das Haus mit meinem Brief ver-«lassen, als mich der Briefträger mit dem Ihrigen herausklingelte. «Ich danke sehr für die schätzbaren und willkommenen Aufschlüsse.

«Dass Sie aber seit zwei Monaten meinen ersten Brief unbe-«achtet gelassen — *müht* mich sehr. Ueber den zweiten machen «Sie mir den Kopf gross, dagegen den ersten erklären Sie am Ende «Ihres vorletzten Briefes — wenn auch nur indirect für Blödsinn. «Dennoch hat mir der erste ungleich mehr Mühe gemacht; er ist «aus einem Wust von 9 Bogen Manuscript ausgezogen, und schwellte «meine Brust mit froher Hoffnung: Sie würden schöne Ergänzungen «und Erweiterungen darauf bauen! Er muss Sie bei reichem anderm «Lieblingsfutter getroffen haben. Beweist er nicht die zwei Sätze, «welche Sie im Entwurf in Klammern ( ) nur *als wahrscheinlich* an-«gaben? Zudem enthält er den Stoff zur reichhaltigen, eines Schul-«meisters würdigen Erweiterung und Ausstaffirung des „*§ über die* «*Bestimmbarkeit der Flächen durch Punkte*“. Da ich eben mit Redi-«giren daran komme, so bitte ich sehr auch diesem Plunder einige «Theilnahme zu schenken. Lassen Sie für kurze Zeit andere Partien «des Universums fahren, um mir recht bald das Ergebniss der Ver-«besserung zuzusenden. Die analytischen Deductionen können Sie «meist sparen, und nur die *sichern Resultate* angeben, da ich — im «Bewusstsein meines hocherhabenen synthetischen Standpunkts — doch «nirgends davon Gebrauch machen darf. Daher beurtheilen Sie mich «auch falsch, wenn Sie oft wähnen, ich schaue die Gegenstände eben-«falls in ihren analytischen Gründen an.

---

[1]) Dazu existirt ein Concept vom 17.—19. März 1855.

«Diesmal habe ich keine neue Fragen vorzulegen; nur sah ich «beim Vorbeifliegen den folgenden Satz:

«Wird einer f^3 aus beliebigem Pol P ein Kegel umschrieben, «der sie in einer R^6 berührt und nebstdem in einer $R_1{}^6$ schneidet, «so gehen durch diese zwei Curven beziehlich zwei Flächen f^2 und «$f_1{}^2$, welche einander umschrieben sind, und zwar liegt ihre Berühr-«ungscurve in der allen drei Flächen f^3, f^2 und $f_1{}^2$ gemeinsamen «Polarebene des Pols P in Bezug auf dieselben, so dass also der den «Flächen f^2 und $f_1{}^2$, längs der Berührungscurve gemeinsam umschrie-«bene Kegel seinen Scheitel im Pol P hat.

«Allerdings zählt jede der n-Tangenten im n-fachen Punkt einer «C^m für $n+1$ Tangenten, wofern man die C^m als von der $m(m-1)$ «Klasse ansehen will, was häufig erforderlich ist. Die von Ihnen ge-«machte Unterscheidung ist mir nicht recht klar, vielleicht wird es «nachträglich noch kommen.

«Morgen werde ich meine Vorlesungen schliessen. Es harrten «nur 3 Zuhörer bis an's Ende aus; davon sind zwei Eidgenossen: der «Sohn des alten *Sidler*[1]) (Zug-Zürich, Commissär in Mailand) und der «Sohn meines Universitätsgenossen Prof. *Hagenbach*[2]) in Basel; sie sind «die einzigen bezahlenden, alle übrigen gestundet. Ich stand also in «diesem Semester pekuniär nicht viel besser als Sie.

«Heute früh fiel hier starker warmer Regen, von Süd und Süd-«west her; der Schnee schmolz mit Macht; jetzt um 12 Uhr scheint «die Sonne schön, wie über Lord *Raglan's* Lager vor Sebastopol. — «Indem ich Ihnen das Wylerfeld[3]) auch schneefrei wünsche, grüsse ich «dankbarlich und herzlich

«Ihr

J. Steiner.»

«Berlin, den 18. März 1855.

«Wer am 18. März 1796 geboren, verlebt heute seinen 60ten Ge-«burtstag. — Es ist erschrecklich die Arbeiten und Pläne noch un-«vollendet herumliegen zu haben! Die Unfähigkeit nimmt zu — wie

---

[1]) Professor Dr. G. Sidler, mein verehrter Lehrer und Kollege.

[2]) Professor E. Hagenbach-Bischoff in Basel.

[3]) Bevorzugter Spaziergang Schläfli's.

«lange wird's noch dauern bis der *jüngste* Tag — die *Auflösung* «eintritt!

«Lese ich recht, proponiren Sie für die Ebene, welche die Rolle «des Pols übernimmt, den Namen *Polane* und nicht *Polare?*

«Oh Gedächtniss! Oh Schafskopf!»

4^ter^ Brief[1]). März 17—19. Cima's vom 13. erst 17. 2 Uhr erhalten.

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

«Wenn z. B. eine Curve sammt ihrer Ebene sich um eine «ihrer Tangenten herumbewegt (auch eine Raumcurve mit dem «ganzen Raume sich um eine ihrer Tangenten, als feste Axe.) «Der andere Fall könnte so erzeugt werden, dass die Curve um die «Normalen in einem ihrer Wendepunkte oder in einem Selbstberüh- «rungspunkt herumbewegt wird. — Es sind nicht Übergangsfälle, «sondern Grenzfälle des hyperboloidischen Knotenpunkts, und daher «habe ich gefehlt, dass ich in der Reinschrift den ersten Fall *para- «boloidisch* genannt habe.

«Zerfällt der Knotenkegel in 2 Ebenen die *reell* oder *imaginär* «sind, so heisst jetzt der Knotenpunkt *hyperbolisch* oder *elliptisch*. Wie «schwer es mir wird einzusehen, dass dabei in jeder der beiden Ebenen «drei t liegen, habe ich Ihnen schon unterbreitet und erwarte *sichere* «Auskunft.

«Hat die f^3 einen kp, so wird sie vom Kk längs dreien Strahlen «s berührt; und daher hat f^3 die längs diesen s berührenden 3 Ebenen «zu *Dehn-Streifebene* (oder Voll- oder wie man sie heissen soll) Ebenen. «Hat f^3 vier Knotenpunkte, die ein Tetraeder T bestimmen, so berührt «jeder Knotenkegel längs der 3 anliegenden Kanten, und je zwei be- «rühren sich längs einer Kante und haben daher noch einen durch «die zwei andern kp gehenden ebenen Schnitt C^2. Die Ebene der sechs «C^2 gehen durch einen Punkt Q. Die 4 Knotenkegel sind einer f^2 «umschrieben, welche die 6 Kanten des T berührt; und die f^3 hat 6 «Dehnebenen, die sie längs der 6 Kanten von T berühren und die «Ecken zu Grenzpunkt haben. — Für die Fläche *dritter Klasse* ist alles «analog.

---

[1]) Zum Teil ein Concept zum Brief vom 18. März 1855 wenigstens bis zum Ausdruck «analytischen Gründen an».

4. «Braucht (man) *Schaar* nicht zu definiren? — Wenn Sie sagen «*eine* «*Doppelschaar von Flächen*» muss da nicht hinzugesetzt worden «gleichen «Grads» oder «gleicher Klasse»? oder liegt dies schon drin? Kann «man bei einer Doppelschaar Fläche «von drei successiven Flächen» «sprechen, da doch jede gleichsam von einer Schaar nächstfolgenden «umgeben ist?

5. «Da wir die Klasse der einer f^m doppeltumschriebenen Ab- «wickelbaren kennen, so muss auch der Grad ihrer Berührungscurve «R^x zu finden sein. Denn ist jene Klasse $= \mu$, so gehen durch jeden «P μ-Doppelebenen und daher schneidet die erste Polare f^{m-1} von P «die R^x in $2 \times \mu$ Punkten, so dass $(m - 1) \times x = 2\,\mu$, also «$x = \frac{2\,\mu}{m-1}$ ist.

«Bei zwei gegebenen Flächen f^m und f^n ist die ihnen gemeinsam «umschriebene Abwickelbare von der $m\,(m - 1)^2 \times n\,(n - 1)^{2\text{ten}}$ «Klasse; ihre B. C. M^μ und N^ν mit den Flächen werden also von

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

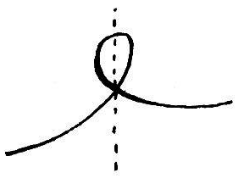
Schläfli an Steiner.

Lieber Freund!

«(18. März.) Ich fühle mich veranlasst, eine falsche Vorstellung «über die *Streifebene* wegzuräumen, die sich voriges Jahr in Bern uns «im Gespräch über diesen Gegenstand aufgedrungen hatte, als ob «nämlich ihr Berührungs- oder Streifkegelschnitt als *dreifacher* (!) «Bestandtheil ihres ganzen Schnitts mit der Basis zu zählen wäre. «Um die Sache zu entscheiden, ziehen wir in der Streifebene eine «beliebige Gerade und fragen uns, wie oft jeder der zwei Punkte «zählt, in denen sie den Streifkegelschnitt schneidet. Ist die Basis «von der nten Classe und rücksichtlich dieser möglichst wenig be- «schränkt, so muss die vom Grade $n\,(n - 1)^2 - 2$ sein; die Gerade «schneidet also die Basis im Ganzen nur in soviel Punkten.

«Polarisiren wir nun zurück, so heisst die Frage: Wie viele «Berührungsebenen können an eine Basis nten Grades, die einen «Knotenpunkt hat, durch einen von diesen ausgehenden Strahl gelegt «werden? Die Analysis antwortet: Nur $n\,(n - 1)^2 - 6$, deren Be- «rührungspunkte nicht mit dem Knotenpunkt zusammenfallen. Es «gehen also nur 4 Berührungsebenen verloren, nicht 6; denn die

«Classe der Fläche ist nur n $(n-1)^2-2$. Diese 4 verlorenen «Ebenen sind wohl in den zwei durch jenen Strahl an den Knoten-«kegel gelegten Umschreibungsebenen wieder zu finden, wenn jede «doppelt gezählt wird. — Demnach schneidet die Streifebene einer «Basis nter Classe dieselbe in dem *doppelt* zu zählenden Streifkegel-«schnitt und ausserdem noch in einer Curve vom Grade $n(n-1)^2-6$ «und der Classe $n(n-1)-6$. Ist die Basis von dritter Classe, «so besteht diese Curve nur aus den 6 ausgezeichneten Tangenten des «Streifkegelschnitts.

«Gradesauffassung: Der aus dem Knotenpunkt einer Fläche drit-«ten Grades dieser umschriebene Kegel besteht aus dem doppelt zu «zählenden Knotenkegel und denjenigen 6 Ebenenbüscheln, in deren «Axen sich je zwei entsprechende (also sich nicht schneidende) Strahlen «des durch den Knotenpunkt gehenden Doppelsechsers vereinigen. — «Mich dünkt, diese Ansicht sei auch durch geometrische Betrachtung «zu rechtfertigen. Denken wir uns eine Curve mit Knotenpunkt, «welche von einem durch diesen gehenden Strahl symmetrisch ge-«theilt wird,  nehmen auf diesen Strahl nahe beim «Knotenpunkt (auf der convexen Seite der Zweige) einen Punkt an und «ziehen von da aus die 4 gewöhnlichen Tangenten, deren Berührungs-«punkte in der Nähe liegen. Indem wir jetzt die Figur um die Axe der «Symmetrie herumdrehen, erhalten wir auch zugleich *zwei* umschriebene «Kegel, die beim Zusammenfallen ihres Scheitels mit dem Knoten-«punkt sich endlich im Knotenkegel vereinigen.

«(23. März.) Da ich fürchte, es möchte zu lange dauern, bis ich «alle die *Streifebene* betreffenden Einzelheiten erledigt habe, so fange «ich an, das sicher gewordene niederzuschreiben.

«1°. Die *gemeine Streifebene berührt* die Fläche nter Classe längs «eines Kegelschnitts und zwar in 6 Intervallen abwechselnd von oben «und von unten. Diese Intervalle sind durch die Berührungspunkte «der 6 *ausgezeichneten Tangenten* getrennt, längs denen 6 Lappen «der gemeinsamen Abwickelbaren des Kegelschnitts und der Basis «die Streifebene berühren. Diese 6 t haben dieselbe Eigenschaft in «Beziehung auf die der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebenen

«Abwickelbaren, und sind zugleich höchst wahrscheinlich Tangenten «dieser Rückkehrlinie. — Die Streifebene schneidet die Basis ausser- «dem in einer Curve Grades $n (n - 1)^2 - 6$ und Classe «$n (n - 1) - 6$.

«2⁰. Die *Gerad-Streifebene* (mit reellem Punktpaar A, B) *osculirt* «die Basis längs der Streifgeraden A, B und schneidet sie ausserdem «in einer Curve Grades $n (n - 1)^2 - 6$ und Classe $n (n - 1) - 6$. «(Der Gerad der Fläche ist nämlich nur $n (n - 1)^2 - 3$). Denkt «man sich A B vorwärts gerichtet, und ist zwischen A und B der «Sinn der Wendung von links unten nach rechts hinauf, so ist er ausser- «halb von links oben nach rechts hinunter. Von den 6t gehen drei durch «A, drei durch B (sonst ihre Lage frei). Verbindet man je eine von «jenen mit einer von diesen, so erhält man ein Dreieck F G U (auf 6 «Arten; ich spreche aber nur von irgend einer aus diesen), so dass nun «A F, A G, A U; B F, B G, B U die sechs ausgezeichneten Strahlen «(Tangenten) sind. Man betrachte die Streifgerade A B als Transver- «sale des Dreiecks F G U, und nehme den zugeordneten Punkt F «(Schwerpunkt, wenn A B unendlich entfernt). Die *Classen-Kernfläche* «hat dann das Dreieck A B Γ zur *Dreipunkt-Streifebene* (dritter Classe). «Man zeichne nun eine Curve u dritten Grades, welche F zum Doppel- «punkt und die Seiten des Dreiecks F G U zu Wendungstangenten «hat, deren Punkte auf der Streifgeraden A B liegen und ziehe end- «lich aus A und B an die u die *acht gewöhnlichen Tangenten* τ. «(Diese werden immer dieselben Geraden sein, welches von den 6 «möglichen Dreiecken F G U man auch gewählt haben mag.) Nun, die «der Basis längs ihrer Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare sendet «8 Lappen hin, um die Streifebene längs den 8 soeben construirten «τ zu berühren. Wie die Rückkehrlinie in A und B selbst aussieht «und was sie da für Tangenten hat, wage ich noch nicht zu ent- «scheiden. Es wird unten (Kernflächen!) etwas kommen, das Sie «hieher beziehen können.

«3⁰. Die *Punkt-Streifebene* (mit zwei vereinigten Punkten O) «hat 3 ausgezeichnete Punkte F, G, U (eine noch unklare Art von «Knotenpunkten), *berührt* die Fläche längs der Strahlen O F, O G, O U «und schneidet sie ausserdem in einer Curve Grades $n (n - 1)^2 - 12$ «und Classe $n (n - 1) - 6$; (denn der Grad der Fläche ist nur «$n (n - 1)^2 - 6$.) Man umschreibe dem Dreieck F G H einen «Kegelschnitt K harmonisch zum Streifpunkt O, (d. h. wenn O der «Schwerpunkt ist, so sind die Tangenten des Kegelschnitts in den

«Ecken parallel mit den Seiten). Die Classen-Kernfläche hat dann die «Streifebene zu einer solchen 4^{ter} Classe, indem die Streifcurve aus K «und dem doppelten Punkte O besteht. Die der Basis längs ihrer «Rückkehrlinie umschriebene Abwickelbare *osculirt* die Streifebene «längs der von O aus an K gehenden zwei Tangenten und *berührt* «*sie zweilappig* längs jeder der Geraden O F, O G, O H; jede von «diesen (eigentlich ein t paar) ist Selbstberührungsstrahl der Ab-«wickelbaren.

«Sie sehen aus dem Bisherigen, dass ich die Kernfläche einer «Fläche n^{ten} *Grades* für den gemeinen, den Kanten- und den Plan-«knotenpunkt untersucht habe. Da bei der Classenauffassung manches «nicht deutlich vorgestellt werden kann, was für die Gradesauffassung «leicht ist, so suche ich das Vorige noch durch einige *vom Grad aus* «gemachte Bemerkungen zu ergänzen. Sie erinnern sich vielleicht «aus dem perhorrescirten analytischen Beweise für die *freie* Lage der «6 ausgezeichneten Strahlen des Knotenkegels, selbst wenn dieser «in ein Ebenenpaar übergeht, (den ich, unschuldig genug, in der «guten Absicht anbrachte, um Sie von der Richtigkeit meiner An-«schauung zu überzeugen), dass ich ausser dem Knotenkegel N noch «einen Kegel P dritten Grades mit gleichem Scheitel gebrauchte, um «die 6 ausgezeichneten Strahlen jenes N darzustellen. Nun dieser P «ist in allen drei Fällen vollkommen frei, hat aber an sich keine Be-«deutung; sondern wenn man zu N noch irgend eine durch den «Knotenpunkt gehende Ebene hinzunimmt, um einen Kegel dritten «Grades zu haben, der mit P einen Büschel bestimmt, so *darf* P durch «jeden Kegel dieses Büschels ersetzt werden. Ist N ächt, so sind in «diesem Büschel 15 Trieder; 6 wenn N ein Paar getrennter Ebenen «ist; endlich nur 1 Trieder, wenn N eine doppelte Ebene ist. Im «letzten Falle bekömmt das Trieder wesentliche Bedeutung; der Schnitt «einer Ebene desselben wird (im Unendlichkleinen betrachtet) von «der Selbstberührungstangente (in der Knotenebene) symmetrisch ge-«theilt, so dass die Krümmungshalbmesser der sich berührenden Zweige «der Schnittcurve gleich und entgegengesetzt sind: während jeder «andere durch denselben ausgezeichneten Strahl geführte ebene Schnitt «zwar auch noch den Knotenpunkt zum Selbstberührungspunkt hat, «aber auf allgemeine Weise. Ich schreibe nun diesem Trieder einen «Kegel zweiten Grades ein, so dass jeder Berührungsstrahl mit dem «entsprechenden ausgezeichneten Strahl der Knotenebene harmonisch «ist in Bezug auf die zwei betreffenden Kanten des Trieders. Dieser

«Kegel J möge die Knotenebene in den zwei Strahlen i schneiden. «Dann hat die *Kernfläche* hier einen Knotenpunkt 4^{ten} Grades, be«stehend aus der doppelten Knotenebene und dem Kegel J; und ihr «Schnitt mit der Basis sendet 1. zwei Paare von Zweigen in den «Knotenpunkt, welche die Strahlen i zu Rückkehrtangenten haben, «aber den Kegel J auf gewöhnliche Weise berühren; 2. drei Paare «von Zweigen, welche die drei ausgezeichneten Strahlen (in denen «das Trieder die Knotenebene schneidet) zu Selbstberührungstangenten «haben, aber die Triederebenen auf gewöhnliche Weise berühren.

«Beim Kantenknotenpunkt will ich, was den Schnitt der Kern«fläche und Basis betrifft, nicht das schon Gesagte zurück polarisiren; «es ist bei der Classenauffassung wohl deutlich genug ausgedrückt.

«Nun etwas, was für die Classenaufführung auch von Wichtig«keit wäre, indem es die Stellen der Rückkehrlinie betrifft, wo ihre «Tangente zusammenfällt mit dem Strahl der längs ihr der Basis um«schriebenen Abwickelbaren. Sie wissen, dass eine freie Fläche n^{ten} «Grades $2\,n\,(n-2)\,(11\,n-24)$ Stellen π hat, wo sie von der Be«rührungsebene mit Selbstberührungspunkt geschnitten wird. Ich «habe nun analytisch sicher bewiesen, dass ein gemeiner Knotenpunkt «24 solche π verschlingt, ein Kantenkontenpunkt 36; für den Plan«knotenpunkt ist mir die Discussion des verwickelten Systems von «Gleichungen noch nicht gelungen; aber, wenn man von der Fläche «3^{ten} Grades aus schliessen darf, so muss er 48 π verschlingen.

«Beim gemeinen Knotenpunkt bekömmt wohl jeder der 6 Curven«zweige, welche die Kernfläche mit der Basis gemein hat, 4 solche «verschlungene π; aber beim *Kantenknotenpunkt* entsteht die wun«derliche Frage, wie man die 36 π auf die 8 Curvenzweige ver«theilen soll.

«Ich habe die Classengleichung einer Fläche 3^{ten} Grades mit «Planknotenpunkt (die also durch 15 gegebene Punkte bestimmt wird) «entwickelt und mittelst derselben eine klare Anschauung gewonnen, «wie eine Fläche 6^{ten} Grades und 3^{ter} Classe mit einer Punkt-Streif«ebene in der Nachbarschaft des zweieinigen Streifpunkts aussieht. «Um schulmeisterlich zu reden, denke ich mir ein reguläres Tetraeder «FGHZ und fälle aus der Spitze Z auf die Basis FGH die senkrechte «ZO. Dann soll die Basis die Streifebene, O der zweieinige Streif«punkt, und OF, OG, OH, die drei ausgezeichneten (zweieinigen) «Strahlen sein. In der Basis brauche ich Polarcoordinaten, wo der «Leitstrahl (radius vector) r von O ausgeht und mit dem ersten Strahl

«OF den Winkel $180^{0} + \varphi$ bildet; die dritte Coordinate z sei der «senkrechte Abstand eines Punkts der Fläche von der Basis. Be«deutet nun a eine constante Linie, und ist $\frac{r}{a}$ unendlich klein, so «hat die Fläche hier einen obern und einen untern Lappen (wenig«stens wenn man nur positive Werthe von r betrachtet), deren «Gleichungen

$$«2a^2z = -r^3 \cos^2 \frac{3\varphi}{2} \text{ und } 2a^2z = + r^3 \sin^2 \frac{3\varphi}{2}$$

«sind. Die Streifebene wird also ringsum von der Fläche doppelt oscu«lirt, vom obern Lappen längs der positiven Strahlhälften OF, OG, OH «gestreift, vom untern längs den negativen Hälften. Ich muss aber «zwischen hinein etwas corrigiren. Nur die Basis FGH soll ein regu«läres Dreieck sein, die Wände FGZ, GHZ, FHZ soll darauf senkrecht «stehen und um a von O entfernt sein; der Scheitel Z liegt also un«endlich weit weg; er ist der einzige freie Triederknoten der Fläche, «welche die Geraden ZF, ZG, ZH enthält. Die Classen-Kernfläche «reducirt sich auf den doppelt zu zählenden Streifpunkt O und den «aus diesem Centrum durch F, G, H gelegten Kreis. Die ihr und der «Basis gemeinschaftliche Abwickelbare ist der letztern längs ihrer «Rückkehrlinie umschrieben, welche eigentlich vom 24sten Grade sein «sollte; ihr ächtes untheilbares Stück ist aber nur vom 6ten Grade; «es gehen nämlich durch eine Fläche dritten Grades und eine Um«drehungsfläche zweiten Grades, deren Gleichungen

$$«(6a - z)\, r \cos 3\varphi + 9a^2 + 4az - z^2 = o,$$

$$«9r^2 + 4z^2 - 24az = o$$

«sind. Der Verlust ist zum Theil zu erklären, durch die drei Geraden «OF, OG, OH, deren jede 4 mal zählt; aber das fehlende 6 weiss ich «nicht herauszubringen. Aus der Gradesauffassung durch Polari«sirung hinüber zu schliessen, müssten die vom Centrum O an den «Kreis gehenden zwei Tangenten eine Rolle spielen, indem jede die «Zahl 3 verschlänge; aber diese liegen gar nicht in der Basis, son«dern schneiden sie nur im Centrum 6-punktig. — So weit die Schul«meisterei. Verwandeln Sie nun perspectivisch nach Belieben, und Sie «haben den wahren Begriff von der Sache.

«Ich habe auch die Polarisirung der Fläche dritten Grades mit «Kantenknotenpunkt (also 9ter Classe) unternommen. Merkwürdiger «Weise gelingt sie mittelst der *Steiner-Hesse-Aronhold*'schen Theorie «der Wendepunkte der Curve dritten Grades. Aber die hiezu nöthigen «Entwicklungen werden noch längere Zeit in Anspruch nehmen.

«(25. März.) Um nichts zu unterlassen, was bei den classischen «Flächen mit Streifebene zur Veranschaulichung beitragen kann, habe «ich die Gegend des Punkts untersucht, wo der Streifkegelschnitt «von einer seiner 6 ausgezeichneten Tangenten t berührt wird, also «die Längsberührungs- oder Streifungsweise der Basis aus einer obern «(über der horizontal gedachten Streifebene) in eine untere übergeht. «Der Punkt ist ein sehr specialisirter Planknotenpunkt P der Basis, «wo nämlich alle drei ausgezeichneten Strahlen der Knotenebene mit «t zusammenfallen. Ein durch P frei geführter ebener Schnitt schnei- «det die Basis mit Rückkehrpunkt; aber ein durch t geführter ebener «Schnitt sendet zwei horizontale Zweige durch P, welche beide hier «einen Wendepunkt haben. Will man die Gegend der Fläche um P «herum im unendlich kleinen in erster Annäherung ausdrücken, so «bedarf man hiezu einer Fläche 6^{ten} Grades. Nehmen wir die t als «erste Axe, senkrecht darauf in der Streifebene eine zweite, und senk- «recht auf diese Ebene eine dritte Axe des Coordinatensystems an, «und setzen dann die der ersten Axeparallele Abmessung als unend- «lich klein erster Ordnung, so sind die zwei folgenden Abmessungen «oder Coordinaten resp. zweiter und dritter Ordnung. Hebt man «durch Dehnung der zweiten und dritten Axe das Missverhältniss auf, «so dass die Fläche nach allen Richtungen von gleicher Ordnung er- «scheint, so zeigt sie eine Doppellinie, welche in P die Axe t und «die Streifebene berührt, und durch eine Art enger in P sich zu- «spitzender Röhre entsteht, aus welchem Vorgang, wie ich glaube, Sie «sich das Umschlagen der Streifungsweise aus oben in unten werden «veranschaulichen können. Da hier 4 π zu Grunde gehen, so muss «ausser der Rückkehrlinie auch noch die Doppellinie hieher gelangen, «aber ihr beiderseitiges Verhalten vermag ich mir nicht recht klar «zu machen. Vielleicht später! Sie mögen hieraus entnehmen, welche «Arbeit es kosten wird, auch bei der Geradstreifebene die Gegend «um einen der zwei Streifpunkte aufzuklären.

«Ich glaube mit diesen Mittheilungen wenigstens einem Theile «Ihrer Wünsche zu entsprechen, und nehmen Sie es mir nicht übel, «dass ich nicht mit allem auf einmal fertig werden kann. Ich bin die «verflossene Woche mit Examen beschäftigt gewesen, und auch diese «noch werde ich es sein; dazu werden meine Vorlesungen bis Mai «fortdauern. Ihren ersten Brief werde ich noch, soweit es mir mög- «lich ist, beantworten; nur werden Sie mir nicht zumuthen, dass ich «so schwierige Vorstellungen im ersten Anlauf zu durchdringen ver-

«möge. Ihren letzten Satz habe leider noch nicht geprüft. Unter-«brechen Sie die Correspondenz nicht zu lange.

«Vergessen Sie die Zusendung der Dissertationen nicht.

«*Polane* mit n habe ich mit Fleiss geschrieben, weil das Ding «dem *Pol* und nicht der Polare entsprechen soll.

«Ich sollte mich noch gegen eine Masse von Vorwürfen ver-«theidigen; aber der Raum fehlt dazu. Seien Sie herzlich gegrüsst «und halten mich immer für

«Ihren treuen Schüler

«Bern, den 25. März, Abends. *L. Schläfli.*»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(27. März.) Endlich versuche ich, auf Ihren werthen Brief vom «28. Jan. zu antworten. Sie werden wohl kaum eine Abschrift des-«selben haben; aber ich muss mich doch der Kürze wegen auf die Num-«mern desselben beziehen, um nicht Ihre eigenen Worte wiederholen «zu müssen. Es mag mir auch manchmal begegnen, dass ich Ihnen «dieselben Dinge zweimal schreibe, weil ich mich nicht daran erin-«nere, sie Ihnen schon geschrieben zu haben. Zur Sache!

«*Ad 4.* Stimme bei.

«*Ad 5.* An Ihrer Stelle liesse ich diese künstliche, nicht über-«zeugende Ableitung fahren. Wenn Sie einmal eine f^n dadurch, dass «Sie $\binom{n+2}{2}$ Punkte derselben in einer Ebene annehmen, gezwungen «haben, diese Ebene zu enthalten, so dünkt mich, seien Sie auf rein «anschaulichem Boden nicht befugt zu wissen, ob nun die Aufgabe «bestimmt oder unbestimmt oder unmöglich sei. Da ich keine Vor-«stellung davon habe, wie man eine algebraische Fläche anders defi-«niren kann als durch ihr Polynom, so dünkt mich hier das einzig «Natürliche, sich an die Zahl der Glieder des Polynoms zu halten; «diese liegt aber ganz klar vor als Zahl der Combinationen mit Wie-«derholung von 4 Elementen zu je n, also $\binom{n+3}{n} = \binom{n+3}{3}$; «folglich ist $\binom{n+3}{3} - 1$ die Zahl der Bedingungen, durch welche «die f^n bestimmt wird.

«*Ad 6.* Sie setzen die Zahl der Bedingungen, damit eine Fläche «in drei von den Graden α, β, γ zerfalle, doppelt an; sie ist bloss

$$«\frac{1}{2}\left\{\left(\sum\alpha+4\right)\sum\beta\gamma-\alpha\beta\gamma\right\}.$$

«Alle Flächen nten Grades, die durch eine Vollcurve $\alpha\times n^{\text{ten}}$ «Grades gehen, bilden eine $\binom{n-\alpha+3}{3}$ fache Schaar, nicht eine «$\left\{\binom{n-\alpha+3}{3}-2\right\}$fache.

«*Ad 7.* Der von Ihnen bemerkte Widerspruch rührt nur daher, «dass Sie den Satz über nothwendige Punkte nicht vollständig aus-«sprechen. Er muss heissen: «Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen «α, β übertroffen wird, und es soll eine C^n durch die $\alpha\beta$ Schnittpunkte «einer C^α und C^β gehen, so ist unter diesen *keiner* nothwendig, wenn «$n>\alpha+\beta-3$; aber $\binom{\alpha+\beta-n-1}{2}$, wenn $n<\alpha+\beta$ ist.» Für $\alpha=\beta$ «$=1$, $n=2$ giebt es daher *keinen* nothwendigen Punkt. — Der ähn-«liche Satz über Flächen heisst so:

«Wenn die Zahl n von keiner der Zahlen α, β, γ übertroffen «wird, und es soll eine f^n durch die $\alpha\beta\gamma$ Schnittpunkte einer f^α, f^β, «f^γ gelegt werden, so kann es unter diesen nothwendige geben. Um «deren Anzahl zu bestimmen, lasse man im Aggregat

$$«1+x)^{\alpha+\beta+\gamma-n-1}-(1+x)^{\alpha+\beta-n-1}-(1+x)^{\alpha+\gamma-n-1}$$
$$-(1+x)^{\beta+\gamma-n-1}$$

«diejenigen Glieder weg, deren Exponenten *negativ* sind, und ent-«wickle den Rest nach den Potenzen von x, dann ist der Coefficient «von x^3 die gesuchte Anzahl.»

«Mich dünkt, ich habe Ihnen diesen Satz schon geschrieben. «Er ist eine nothwendige Folge aus der freilich noch unbewiesenen «einzigen Hypothese, auf der unsere ganze Raumcurventheorie etc. «beruht.

«*Ad 8.* Anfang; stimme bei. — Aber: mein Satz über die «Zahl der nothwendigen unter den nab Punkten, in denen eine f^n «eine Vollcurve (f^a, f^b) schneidet, ist nicht unbedingt so, wie Sie ihn «aussprechen, sondern: Diese Zahl ist $\frac{1}{2}$ ab $(a+b-4)+1$, wenn «$n>a+b-4$ ist; hingegen $\frac{1}{2}$ ab $(a+b-4)+1-\binom{a+b-n-1}{3}$, «wenn $n < a+b$ ist. Der Binomialcoefficient ist nur dann abzuzie-«hen, wenn der Exponent $a+b-n-1$ positiv ist, was wiederum für «dessen Werthe 0, 1, 2 unnöthig wird, weil dann der Binomial-«coefficient verschwindet. Aber für einen negativen Werth von «$a+b-n-1$ verschwindet der Binomialcoefficient nicht, und die For-«mel ist falsch, wenn sie ihn dann noch enthält.

«*Ad 10.* Muss vor Nr. 9 beantwortet werden. — Es sei ϱ «eine Raumcurve g^{ten} Grades und k^{ter} Classe; durch diese mögen «drei Flächen M, N, P resp. m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Grades gehen. Dann «schneiden sich M, N ausser ϱ noch in einer R Raumcurve $(mn-g)^{\text{ten}}$ «Grades. Um zu wissen, wie viele nicht in der ϱ liegende Punkte «diese R mit der Fläche P gemein hat, müssen wir zuvor die Zahl $\varkappa$ «der gemeinschaftlichen Punkte von R und ϱ kennen. Denken wir uns «nun eine beliebige Gerade l gegeben, so wird der Ort eines Punkts «X, dessen auf M, N bezüglichen Polarebenen mit l einen Punkt gemein «haben, eine Fläche $(m+n-2)^{\text{ten}}$ Grades sein und 1° die ϱ in allen «k Punkten schneiden, in denen sie von einer durch l gelegten Ebene «berührt wird, 2° durch alle $\varkappa$ Punkte, in denen ϱ und R sich begeg-«nen, also die Flächen M, N sich berühren. Folglich ist

$$«k+\varkappa=g\,(m+n-2).$$

Es war aber $p\,(mn-g)-\varkappa$ die Zahl der freien Punkte, in denen «die Curve R von der Fläche P geschnitten wird, mit andern Worten, «die Zahl der freien Schnittpunkte der Flächen M, N, P; diese ist also

$$mnp+k-g\,(m+n+p-2).$$

«Da für eine Vollcurve $\varrho^{a\times b}$ die Classe $k = ab\,(a+b-2)$ «ist, so ist Ihre Formel trotz des Fragezeichens richtig. Im Allgemeinen «muss ich noch bemerken, dass wenn die ϱ gewöhnliche Doppel-«punkte hat, in der Zahl k jeder derselben mit dem Betrage 2 mit-«gezählt werden muss; oder, wenn k die reine Classe darstellt, so «muss man zu der vorliegenden Formel noch die doppelte Anzahl der «Doppelpunkte der ϱ addiren. — Nebenbei gesagt: wenn Sie die «Zahl der Punkte, in denen eine *Abwickelbare* von einer Geraden ge-«schnitten wird, den *Grad* derselben nennen, so müssen Sie conse-«quenter Weise unter *Classe* einer Raumcurve dasselbe verstehen «wie ich, nämlich die Zahl ihrer Berührungsebenen, welche durch «eine Gerade gehen. Die Zahl der Schmiegungsebenen hingegen, «welche durch einen gegebenen Punkt gehen, ist im Allgemeinen ein «hohes Ding, das wegen der Schwierigkeiten, denen seine Betrach-«tung unterliegt, einen so vertraulichen Namen, wie *Classe*, nicht «verdient; es implicirt ja schon die Abgeleiteten dritter Ordnung.

«*Ad 9.* Wenn ein Flächengebüsch n^{ten} Grades eine Grundcurve «R enthält, deren Grad g, die Classe k ist, und welche unter den gn «Schnittpunkten irgend einer f^n Θ nothwendige zählt, so beträgt die «Anzahl der im Freien liegenden nothwendigen Grundpunkte des «Gebüschs

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \left\{ 2\,g\,(n-1) + \Theta - k - 1 \right\},$$

«also für eine Vollcurve $a \times b^{ten}$ Grades

$$n^3 + 3 - \binom{n+3}{3} - \frac{1}{2}\,a\,b\,(4\,n - a - b - 4),$$

«wenn $n > a + b - 4$ ist; aber um $\binom{a+b-n-1}{3}$ mehr, wenn «$n < a + b$ ist.

«Ich erinnere übrigens daran, dass die Zahl Θ durch g, k, n «noch nicht bestimmt ist; ich habe früher Beispiele geliefert ver- «schiedener Arten von Raumcurven desselben Grades und derselben «Classe, welche sich durch die Zahl der nothwendigen Punkte unter- «schieden.

«(28. März) *Ad 11.* Dass ein ebenes Curvennetz n^{ten} Grades «nicht mehr als $n^2 - n + 1$ Grundpunkte haben kann, vermag ich «nicht einzusehen; obgleich ich leicht deren bilden kann, welche «$n^2 - \alpha\,n + \alpha^2$ Grundpunkte haben. — *Absatz I.* Stimme vollständig «bei. Ich verwundere mich nur, dass Sie nicht gleich die Sache etwas «allgemeiner gefasst haben. Sie konnten in ähnlicher Weise eine «Theilcurve Grades $n^2 - n\,\alpha + \alpha^2$ construiren von der Eigenschaft, «dass alle durchgelegten Flächen n^{ten} Grades bloss ein Gebüsch bilden, «und dass je zwei derselben sich in einer Vollcurve $(n - \alpha) \times \alpha^{ten}$ «Grades schneiden, und dass irgend drei keinen *freien* Schnittpunkt «haben. Bei der Zahl der nothwendigen Punkte Ihrer R^{n^2-n+1} können «Sie das Fragzeichen weglassen.

«*Absatz II.* Bei dem aus Pol p seiner Pampolare umschriebenen «Kegel K würde ich die Berührungsebene in p ganz weglassen; der «Theilkegel t^x hat den Grad $3\,n\,(n - 2)$ und geht durch die Theil- «curve des $(3\,(n - 1)^2 - 1)^{ten}$ Grades, in der die Pampolare von ihrer «ersten Polare aus p geschnitten wird. Was bezeichnen Sie mit der «Kernfläche P^x des $N\,(p^{2n-1})$? Wohl dasselbe, was Sie sonst mit «dem Q bezeichneten, den Ort der Knotenpunkte aller Pampolaren; «dann ist ja der Grad $x = 8\,(n - 1)$! Ist diese gemeint, so kann «sie die Grundcurve des Büschels nicht zur Doppellinie haben, sondern «wenigstens zur dreifachen.

«Ich muss hier abbrechen, da der schwieriger werdende Rest «mich noch längere Zeit beschäftigen könnte, und andere dringende «Arbeiten mich abrufen. In der Meinung, dass Sie dieses Wenige viel«leicht schon benutzen können, und um Sie nicht zu lange warten zu «lassen, sende ich Ihnen diese Zeilen schon jetzt.

«In der Hoffnung, Sie werden mich immer für Ihren treuen Freund «halten, grüsse ich Sie herzlich Ihr

«Bern, den 28. März, Abends spät. *L. Schläfli.*»

Steiner an Schläfli. 6. IV. 1855.

«*Treuer Freund!*

«Indem ich Ihnen für die Correctionen und die aufopfernden ge«waltigen Anstrengungen herzlich danke, muss ich daneben bedauern, «dass Sie stellenweise meinem Gedächtniss zu viel zumutheten. Weiss «ich ja oft nicht, was ich vor 3 Tagen geschrieben habe — geschweige «denn vor 3 Monaten. Jener erste Brief ist die Quint-Essenz aus «einem confusen Brouillion von 9 Bogen; aber was darin ad 4., ad «11. Absatz I.. etc. steht, weiss ich nicht; desgleichen ad 10. «*Die* «*Formel mit Fragezeichen.*» Leider weiss ich auch nicht mehr genau «wie ich Ihren zweiten Satz bewiesen habe. Kurz ich bin weit «dümmer, als Sie wähnen. Daher geht die Redaction erbärmlich lang«sam, nur des Vormittags und da noch matt — ohne Kraft, ohne Ge«dächtniss und ohne Phantasie; am Abend fast ganz stumpf.

«Neue Fragen fallen mir im Augenblick nicht ein, nur folgendes «altes Spiel mit Büscheln.

«1. Bekanntlich schneidet der $B(C^2)$ jede Gerade G in einem «Punkt-System (Involution). Ein guter Oekonom verfolgt nun alle «speziellen Fälle, die zahlreich sind. Hier nur der: Wenn die 4 «Grundpunkte in *einen* P zusammenfallen, wird dann aus $B(C^2)$ noth«wendig ein Strahl-System? oder wenn der $B(C^2)$ durch zwei «spezielle Glieder die Doppelgerade $(A)^2$ und $(B)^2$ sind, bestimmt «wird, folgt dann nothwendig, dass jedes andere Glied C^2 aus einem «Paar Geraden $C+C_1$ besteht, die zu jenen (als den Asymptoten) «harmonisch sind?

«2. Ebenso schneidet nun $B(C^3)$ jede G in einem Dreipunkt«System, welches 4 Asymptotentenpunkte hat. Ist dasselbe durch zwei

«Trippel von Punkten bestimmt? und welche Relation findet zwischen «drei Trippeln statt (entsprechend der Involution in 1.)? — Die Spe- «zialisirung der zwei Glieder, durch welche B (C^3) bestimmt wird, «gewährt noch mehr Fälle, als vorhin (1.), und jeder fast giebt ein «Sätzchen. Einst war dieser Gedanke dem *Schmützer* (Aronhold) will- «kommen und half ihm zu Etwas. Jene Glieder lässt man aus C^2 und «aus einfachen, doppelten und dreifachen G bestehen. Für Sie das: «Wenn die 9 Grundpunkte sich in Einen P vereinen, geht dann B (C^3) «in ein Dreistrahlsystem um P über? mit wie viel Asymptoten (4?) «und welcher metrischen Relation? so dass, wenn umgekehrt zwei «Trippel durch P gehende Strahlen A, A_1, A_2 und B, B_1, B_2 als be- «stimmende Glieder aus $A + (A_1)^2$ und $B + (B_1)^2$ oder aus 3-fachen «Geraden $(A)^3$ und $(B)^3$ bestehen? Ihr Mächtiger wird dies leicht ent- «wurzeln, selbst für B (C^n).

«3. Ist $n = \alpha\beta$ und wird der B (C^n) insbesondere durch zwei «Glieder $(A^\alpha)^\beta$ und $(B^\beta)^\alpha$ bestimmt, so ist von deren $\alpha\beta$ Schnitten «P jeder nur ein Doppelpunkt (?) jedes andern Gliedes C^n. Nun bilden «jene 2 Glieder in jedem P ein unendlich kleines Gitter mit $\alpha\beta$ «Schnitten p, und durch diese müssen die zwei Zweige jeder C^n gehen «— davon berührt der eine die einfache A^α α-punktig der andern «(einfache) B^β β-punktig: aber nun weiss ich nicht, wie viel punktig «sich die entsprechenden Zweige zweier Glieder C^n daselbst berühren!?.

«Ist $n = 2\alpha$ und man bestimmt den B (C^n) durch zwei Glieder «$(A^\alpha)^2$ und $(B^\alpha)^2$, so ist jeder der α^2 Schnitte P ein Doppelpunkt «von jedem Glied C^n; aber muss dabei jedes Glied nothwendig in C^α «$+ C_1{}^\alpha$ zerfallen? und sind diese Paare so bestimmt, dass sie zu «A^α und B^α harmonisch sind? oder waltet eine höhere Relation ob, so «dass es ausser A^α und B^α noch mehr Asymptoten giebt?

«Wie stehts, wenn $n = 3\alpha$ und B (C^n) durch $(A^\alpha)^3$ und $(B^\alpha)^3$ «bestimmt wird? etc.

«Bei den Flächen kann man ähnlicherweise schulmeistern, aber «ich drang noch weniger durch. Hier nur ein Fall. Wird der B(f^n) «durch n Ebenen A und n Ebenen B bestimmt, die sämmtlich durch «einen Punkt P gehen, so müssen wohl alle Glieder f^n Kegel sein; «der Schnitt einer durch P gehenden Ebene E ist ein n-Strahl- «System, in welches ein B (C^n) übergeht, wenn die n^2 Grundpunkte «sich in P vereinen; daraus ist klar, wie das System durch zwei «n tupel bestimmt ist. Machen Sie es, ich verstehe doch nichts davon, «es ist mir wie im Traum.

«Es kam mir der Gedanke, statt einer Abhandlung, lieber eine «kleine selbstständige Schrift zu verfassen, darin vor den Flächen zu«erst alle meine Witze über ebene Curven aufzutischen; dazu müsste «ich aber eben so schriftstellerisch vorwärts kommen und arbeiten «können, wie Sie. Wenn wir nur gemeinschaftlich arbeiten könnten, «so dass Sie immer auf der Stelle oder doch am selben Tag meiner «Unbehülflichkeit im Ausdruck Worte verliehen — dann würde es «schnell gehen. Freilich blieb die letztjährige Probe hinter meiner «Erwartung zurück. Wenn durch Friedensschluss die Zeiten günstiger «werden, so dürfte ein Verleger zu finden und ein Honorar zu er«halten sein, durch welches Sie fast so knapp, wie von der Vorsichts«kasse entschädigt würden. Zudem könnten Sie den Gegenstand ana«lytisch ordnen, mit weitern Zuthaten versehen und darauf beim «*selben* oder einem andern Verleger herausgeben. Ein Buch hat «immer mehr Gewicht und macht mehr bekannt, als einzelne zer«streute Abhandlungen.

«Ob ich auf Jahre fortbleiben kann, weiss ich nicht, da der «Urlaub, ohne den König, nur für ein Semester bewilligt werden kann; «im Herbst würde die Verlängerung hoffentlich gewährt werden, ob «aber übers Jahr weiter — wer weiss das! Zumal wenn indessen «keine Arbeit zu Stande käme. Desshalb bin ich auch in Verlegen«heit, ob ich meine Wohnung aufgeben, oder unnütz jährlich 600 Fr. «bezahlen soll. Welche Curen ich machen werde, weiss ich nicht; «der Arzt wird im Attest von *Teplitz*, Gastei und Pfeffers sprechen. «Sollte ich Paris sehen und es günstig finden, d. h. *Liouville* etc. da «treffen, so müssen Sie nachkommen, das Honorar in spe muss die «Kosten decken.

«Da Sie mit Arbeiten überhäuft und nur glücklich sind, wenn «Sie recht überladen: so möchte ich bitten, mit einigen kurzen Wor«ten das im Nachfolgenden verlangte Attest zu verfassen, was mir un«möglich ist. Dasselbe kann deutsch oder französisch sein. Es kann «etwa gesagt werden: die mir von ihm bekannten Arbeiten in *Crelle's* «und *Liouville's* Journal zeugten von mathematischem Genie (ich habe «wenig davon gelesen), die englischen verstände ich leider nicht. — «Er kann uns später auch nützlich sein.

«*Monsieur!*

«Je prends la liberté de vous adresser cette lettre — «je viens de m'offrir comme candidat pour une des Exa-

«minerships in Mathematics for civil Appointments in In-
«dia. Cela me serait un grand honneur et je serais on
«ne peut plus obligé si vous voudriez bien me donner
«une attestation par rapport à mon caractère de géomètre
«et ma capacité pour remplir cet office.

«Je suis Monsieur

«votre très humble serviteur

2 Stone Buildgs Londres *A. Cayley.*

28 mars 1855.

«Unermüdlicher Signore baldige Antwort.

«Herzlichen Gruss

«von Ihrem dankbaren

«Berlin, 6ten April 1855. *J. Steiner.*

«NB. Die Dissertationen habe ich nicht vergessen, aber noch «nicht zusammengesucht, soll nächstens geschehen.»

Berliner Poststation 6. April. Bern erhalten den 9. April, Mittags[1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(8. April.) Es thut mir leid, inzwischen keine Nachricht von «Ihnen erhalten zu haben. Sind Sie vielleicht mir etwas gram, weil «ich mit der Beantwortung Ihres Briefes vom 28. Januar so lange zu «thun habe? Ich kann Sie aber versichern, dass mir diese Dinge «immer wie eine schwere Last auf dem Herzen gelegen haben. Hier «erhalten Sie endlich den vollständigen Rest meiner Antworten.

«*Ad 4.* Sie können zu der geradlinigen Fläche nten Grades «(also auch nter Classe) noch bemerken, dass sie nothwendig eine «*Doppellinie* (welches Grades?) hat, die von jeder erzeugenden Geraden «in 1— 2 Punkten getroffen wird; Aehnliches gilt von ihrer doppelt «umschriebenen Abwickelbaren.

«*Ad 11.* Meine Versuche, Ihren Satz, «dass drei unter sich «unabhängige ebene Curven nten Grades nicht mehr als $n^2 - n + 1$ «Punkte gemein haben können,» zu beweisen, sind vergeblich ge-«wesen. Es würde mich sehr freuen, wenn Sie mir Ihren Beweis «mittheilten. Können Sie vielleicht auch drei verschiedene C^n durch «$n^2 - n$ gemeinschaftliche Punkte legen, welche nicht auf einer

[1]) Notiz von L. Schläfli.

«C^{n-1} liegen? — Sie sollten übrigens hier nicht zwei Fälle unter-«scheiden, da das Netz der Pampolaren, schon als sehr spezieller Fall «im ersten allgemeinen Falle enthalten ist.

«*Ad 11, I.* Wenn Sie Ihr Gebüsch nten Grades in der Weise «verallgemeinern, dass je zwei Flächen desselben sich in einer Voll-«curve $(n - \alpha) \times \alpha^{ten}$ Grades und überdiess in der festen Theil-«curve (Grundcurve) R vom Grade $n^2 - \alpha n + \alpha^2$ schneiden, so «werden die Flächen $(n - \alpha)^{ten}$ und α^{ten} Grades, welche jene Vollcurve «bestimmen, entsprechende Glieder zweier quasi perspektivischer Ge-«büsche sein. Für $n - \alpha > \alpha$ ist das niedrigere Gebüsch unver-«änderlich; das höhere hingegen kann natürlich auf mannigfaltige Arten «mittelst des niedern umgewandelt werden.

«Ist nun l der Grad irgend einer die R schneidenden Fläche, «so sind unter den $l\,(n^2 - n\alpha + \alpha^2)$ Schnittpunkte

$$(n - 1)\,(n^2 - n - 1) - \frac{1}{2}\,\alpha\,(n - \alpha)\,(3n - 4) - ?$$

$$\binom{2n - \alpha - 1 - 1}{3} - ?\binom{n + \alpha - 1 - 0}{3}$$

«nothwendige. Die Fragezeichen vor den zwei Binomialcoefficienten sollen «bedeuten, dass dieselben wegzulassen sind, sobald ihre oberen Zahlen «negativ sind, d. h. wenn der Exponent des Binoms negativ ausfällt.

«Sie haben bei Ihrem Gebüsch von einer einzigen Gebüschfläche «gesprochen, die ihren Knotenpunkt auf der $R^{n^2 - n + 1}$ in jenem «Grundpunkt g_0 des auxiliären Ebenengebüsches hat, und bemerken «dazu, dass der betreffende Knotenkegel von der Schmiegungsebene «der R längs ihrer Tangente berührt wird. Dasselbe gilt aber über-«haupt für jeden Punkt der R, weil das andere auxiliäre Gebüsch «$(n - 1)^{ten}$ Grades seinen $(n - 1)^3$ Grundpunkten auf der R freien «Lauf lässt. Ich will aber diese Sache sogleich allgemein für meine «$R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ aussprechen.

«Wenn ein Gebüsch von Flächen nten Grades eine Grundcurve «rten Grades hat, so kann man im Allgemeinen nur zeigen, dass seine «Knotencurve $6\,(n - 1)^2$ten Grades $r\,(3n - 4)$ Punkte mit jener «Grundcurve gemein hat. Aber bei meinem erwähnten speziellen «Gebüsch gehört die ganze $R^{n^2 - n\alpha + \alpha^2}$ der Knotencurve an; und «in jedem Punkte der R berührt die Schmiegungsebene derselben den «Knotenkegel der betreffenden Gebüschfläche längs der Tangente «der R.

«*Ad 11, II.* Wegen des von Ihnen betrachteten Netzes aller

«Pampolaren eines Flächenbüschels muss ich zum voraus einen allge-
«meinen Satz aussprechen.

«Wenn ein Netz algebraischer Flächen eine Grundcurve hat, «mag diese nun eine Vollcurve oder Theilcurve sein, so ist die-«selbe eine *dreifache Linie* der Knotenfläche des Netzes.»

«Ich habe diesen Satz streng bewiesen; die vielfache Linie ist «im Allgemeinen sicher nicht höher. Ausser diesem kann ich von «der Knotenfläche ($Q^{8(n-1)}$) Ihres Pampolarennetzes nichts Eigen-«thümliches aussagen.

«Sie nehmen einen Punkt X der R als Pol der Pampolare an, «und dann bekömmt diese in X einen Knotenkegel dritten Grades K. «Nun, die Strahlen dieses K sind die Doppelpunktstangenten der hier «geführten ebenen Berührungsschnitte aller Flächen des ursprüng-«lichen Büschels. Fällt die eine dieser Doppelpunktstangenten mit der «Tangente t der R zusammen, so wird die betreffende Büschelfläche «von der Schmiegungsebene berührt.

«Rücken Sie jetzt den Pol A der Pampolare auf der t fort, so «hat sie in X einen unveränderlichen Knotenkegel *zweiten* Grades, «nämlich den Polarkegel der Tangente t (XA) in Bezug auf jenen K.

«Wenn der Pol der Pampolare an eine Ebene gebannt ist, so zählt «die Grundcurve R als *doppelter* Bestandtheil der Knotencurve des Pam-«polarengebüsches. Der freie Rest dieser Knotencurve ist also vom «Grade $24\,(n-1)^2 - 2\,n^2$, geht aber *nicht* durch die $4\,(n-1)^3$ «Knotenpunkte π des Büschels. — Was Sie hingegen von den (freien) «Grundpunkten dieses Pampolarengebüsches sagen, ist richtig.

«Sie lassen die *Pol*kernfläche P einer Fläche des urprünglichen «Büschels diese in einer R_0 schneiden und betrachten die Ortsfläche «dieser R_0; hier kann ich nicht folgen. Wenn ich auch den Kernpol «P in die Grundcurve R rücke, so giebt es wenigstens *keine* Büschel-«fläche, für die dann P mit dem Knotenpunkt X seiner auf jene be-«zogenen ersten Polare zusammenfiele; so lange aber P und X geschieden «sind, ist es mir unmöglich, etwas auszusagen. Daher ist mir auch die «Bedeutung der Rückkehrtangenten t_0 unverständlich.

«Es ist ein Flächenbüschel n^{ten} Grades gegeben. Bei jeder Fläche «nehmen Sie die osculirend umschriebene Abwickelbare und fragen «nun, wie oft diese nun einen gegebenen Punkt passire. Die Antwort ist

$$4\,n^3 - 19\,n^2 + 25\,n - 8$$

«mal, also für $n = 3$ z. B. 4 mal.

«Wenn durch die Grundcurve R des vorigen Büschels eine feste «f^m geht, so wird sie auf der R von *jeder* Hälfte des Büschels in $(m-n)\,n^2$ «Punkten berührt. Die Anzahl der einzelnen Büschelflächen, welche «sie überdiess noch ausserhalb berühren, ist

$$(m+2)\,(m-2)^2 + 2\,(m-4)\,(n-1)\,(m-n-1)$$
$$=(m-4)\,(m^2+2\,m\,n-2\,n^2)+6\,m.$$

«Die Formel gilt aber nur für $m > n$; für $m = n$ wird sie un- «sinnig, was Sie aber nicht als Argument gegen ihre Richtigkeit an- «sehen dürfen. Setzen Sie z. B. $n = 1$, $m = 3$, so bekommen Sie «die richtige Zahl 5.

«*Ad 12.* Sie wissen es gewiss ganz gut, dass die Grundcurve «eines Flächenbüschels in zwei Theilcurven oder eine Theilcurve und «eine Vollcurve zerfallen kann, und dass es in diesem Falle eine reine «Unmöglichkeit ist, dass ein Glied des Büschels zerfalle.

«Wenn ich auch in einem Flächenbüschel zwei zerfallene Glieder «annehme, so ist doch das Zerfallen eines dritten Gliedes eine so «furchtbare Grausamkeit, dass der Schreck meinen analytischen Ver- «stand lähmt. Sie sagen in Ihrem Briefe kein Wort über das leitende «Princip, nach dem Sie diese gewiss höchst speciellen Büschel con- «struiren.

«Wenn in einem Gebüsch eine Fläche zerfällt, so versteht es sich «ja von selbst, dass die Schnittcurve ihrer Bestandtheile der Knoten- «curve des Gebüschs angehört.

«Die Frage nach der höchsten Grundcurve eines $G(f^n)$ ist mir «zu schwer.

«Wenn beim $G(f^2)$ drei Glieder Ebenenpaare sind, so vermag ich «die Nothwendigkeit eines vierten solchen durchaus nicht einzusehen.

«Dass ein $N(f^n)$ *nothwendig* zerfallene Glieder enthalten sollte, «ist für $n > 2$ entschieden zu verneinen. Ebenso wenig kann von «Doppellinien die Rede sein.

«Der Satz über die drei in einem Netz enthaltenen Büschel, deren «keine zwei ein Glied gemein haben, ist hübsch und analytisch leicht «zu verificiren.

«Ich möchte Sie ersuchen, künftig bei Flächennetzen die Pol- «kernfläche P und die Knotenkernfläche (oder: Knotenfläche) Q deutlich «zu unterscheiden. Jene wäre der Ort des Punkts, in welchem die «Polarebenen eines Knotens Q in Bezug auf sämmtliche Netzflächen sich «schneiden. Ueberdiess wäre dann noch eine dritte Fläche zu be- «trachten, die ich *reciproke Fläche* genannt habe, nämlich der Ort des «Punkts, welcher die 4 arbiträren Constanten, deren drei Verhältnisse «die Netzfläche bestimmen, zu Coordinaten hat. Beim Pampolarennetz «ist diese reciproke Fläche der Ort derjenigen Pole A, deren Pampo- «laren einen Knotenpunkt X (oder Q) haben. Beim Netze der ersten «Polaren einer gegebenen Basis fällt sie hingegen mit der Polkern- «fläche P zusammen.

«Darf ich nun hoffen, Sie werden mit diesen freilich sparsamen «Resultaten einer mühsamen Arbeit zufrieden sein und mich bald mit «einer Antwort erfreuen? Oder soll morgen die quälende Ungewiss- «heit mein Stück Krautkuchen vergällen? — Mit freundschaftlichem «Gruss Ihr treuer und dankbarer Schüler

«Bern, den 8. April 1855. *L. Schläfli.*»

«Abends 11 Uhr geschlossen.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«(11. April.) Ihren werthen Brief vom 6ten habe am 9ten Mit- «tags erhalten, nachdem ich am Morgen meinen auf die Post gegeben «hatte. Ich beeile mich auf die darin enthaltenen Fragen zu ant- «worten.

«1. Wenn die 4 Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten «sich in einen Punkt vereinigen, so sind nur zwei Fälle möglich. «A. Der Büschel ist bestimmt durch einen Kegelschnitt und eine «doppelt gezählte Tangente desselben; alle Curven haben also hier «eine vierpunktige Berührung und schneiden eine freie Gerade wie «gewöhnlich.

«B. Der Büschel ist bestimmt durch zwei Doppelgeraden, besteht «also aus lauter Geradenpaaren, die ein involutorisches Strahlensystem «bilden, dessen Asymptoten jene Doppelgeraden sind.

«2. Für das Punktdreiersystem einer Geraden ist es ganz gleich- «gültig, ob es von einem schneidenden Curvenbüschel dritten Grades, «oder von dessen Ausartung in ein System von je drei Strahlen, die «alle von den in einen vereinigten 9 Grundpunkten ausgehen, hervor- «gebracht werde. Indess kann die Vereinigung auch geschehen, in- «dem man den Büschel bestimmt durch eine freie Curve und eine «dreifach gezählte Wendungstangente derselben; er besteht dann aus

«Curven, die sich alle hier 9-punktig berühren. Das Punktsystem auf «der freien Transversale ist natürlich durch zwei beliebig zu setzende «Dreier vollständig bestimmt. Die metrischen Relationen zwischen den «Punkten dreier Dreier sind zwar algebraisch sehr einfach; aber ich «weiss noch keinen passenden geometrischen Ausdruck dafür. Da«gegen wird Sie interessiren, was ich vor der Hand über die gegen«seitige Lage derjenigen 4 Punktdreier AAA′, BBB′, CCC′, DDD′, in «deren jedem je zwei Punkte zusammenfallen, angeben kann. Es «giebt zwei (nicht zum System gehörende) Punkte M, M′, für welche «alle 4 Paare AB, A′B′, CD, C′D′, harmonisch sind, ebenso zwei Punkte «N, N′ für die Paare AC, A′C′ BD, B′D′ und endlich zwei Asymp«toten-Punkte P, P′ für die Paare AD, A′D′, BC, B′C′; und von den «Punktpaaren MM′, NN′, PP′ ist jedes in Beziehung auf jedes har«monisch. Hieraus ist sofort klar, dass, wenn alle 4 Berührungs«punkte des Büschels A, B, C, D reell sind, dann von den drei letzten «Paaren zwei reell und eines conjugirt-imaginär ist. Wird ein Punkt «aller Dreier dadurch festgebannt, dass man die Transversale durch «einen Grundpunkt sendet, so bleiben natürlich ausserdem nur invo«lutorische Punktpaare übrig. Ein dem dritten Grad eigenthümlicher «spezieller Zustand des Punktsystems tritt nur dann ein, wenn die «Transversale an einer oder an zwei Stellen osculirt wird; im letzten «Falle ist aus jedem Dreier immer nur ein Punkt reell, und die Lage «jedes der zwei übrigen gegen den vorigen und jene zwei dreifachen «Punkte ist durch ein perspectivisches Doppelverhältniss bestimmt, «welches der einen oder andern imaginären Cubikwurzel aus 1 «gleich ist.

«3. Wenn $n = \alpha\beta$ und α, β keinen gemeinschaftlichen Faktor «haben, so sei ein Büschel bestimmt durch eine βfache C^α und eine «αfache C^β. Wenn $\alpha < \beta$, so ist jeder Grundpunkt ein spezieller «αfacher Punkt der freien Büschelcurve, insofern diese hier von «einer frei durchgehenden Geraden in α vereinigten Punkten ge«schnitten wird; aber mit der einfachen C^β hat sie hier mehr, näm«lich β vereinigte Punkte gemein; und irgend zwei Büschelcurven «haben natürlich hier $\alpha\beta$ Punkte gemein. Die α Zweige einer und «derselben Büschelcurve sehen so aus, als hätten sie hier alle die «Tangente der C^β gemein; aber die Krümmung ist eine ungewöhn«liche und hängt von der Natur des Bruchs $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ab; der *Taylor*'sche «Satz ist en défaut. — Wenn hingegen α, β den grössten gemein-

«schaftlichen Faktor ε haben, so zerfällt jede Büschelcurve in ε ver-
«schiedene Curven $\frac{\alpha\beta}{\varepsilon}^{\text{ten}}$ Grades.

«Wenn Sie den Büschel durch zwei Paare vereinigter Curven «bestimmen, so zerfällt Ihnen jedes andere Glied desselben nothwen-«dig in zwei verschiedene Curven $\frac{n}{2}^{\text{ten}}$ Grades; und wenn Sie in «einem Grundpunkte die Tangenten ziehen, so haben Sie ein involu-«torisches Strahlensystem. — Wenn n einen Factor α hat, und Sie «setzen zwei Curven p, q vom $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grade, nehmen jede α fach und «bestimmen damit einen Büschel, so zerfällt jedes andere Glied in «α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades; die Tangenten in einem Grund-«punkt bilden ein höchst spezielles Strahlensystem α^{ten} Grades. Für «ein ungerades α ist immer eine der Curven, aus denen das Glied «besteht, reell, alle übrigen sind imaginär; für ein gerades α sind «zwei Curven reell, die $\alpha - 2$ übrigen imaginär. In einem Grundpunkt «bilden die Tangenten der zwei reellen Punkte ein Strahlensystem «zweiten Grades (eine Involution). — Ich möchte Ihnen aber ab-«rathen, solche Dinge zu publiziren, denn es dreht sich hier alles nur «um die elementarsten Begriffe von der Gleichung $x^{\alpha} - 1 = 0$ herum. «Zudem müssten Sie die Sache etwas allgemeiner angreifen, z. B. aus «dem Büschel (p, q) irgend α verschiedene Curven herausnehmen und «daraus eine Curve A vom n^{ten} Grade zusammensetzen, ferner ebenso «eine Curve B, und nun einen Büschel (A, B) bilden; jedes Glied «dieses wird dann wieder in α verschiedene Curven $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades «zerfallen; aber $2(\alpha - 1)$ Male wird es begegnen, dass zwei von den «α Componenten eines Gliedes sich vereinigen; auch kann es jetzt «geschehen, dass alle α Componenten zugleich reell sind. Die Tan-«genten in einem Grundpunkt bilden ein Strahlensystem α^{ten} Grades; «und das Punktsystem auf einer Transversalen ist zwar vom n^{ten} Grade, «aber so spezialisirt, dass es in α Systeme $\frac{n}{\alpha}^{\text{ten}}$ Grades zerfällt.

«Wenn Sie durch einen und denselben Punkt O zuerst n Ebenen «legen, deren Gesammtheit A heissen soll, dann wieder so eine Ge-«sammtheit B, so ist der Büschel (A, B) ein ungeheurer spezialisirter «Kegelbüschel. Hier ist weiter nichts zu machen; denn die Sache «spielt eigentlich nicht im Raume, sondern ist nur so, wie wenn Sie «auf einer beliebigen Transversalebene einen Curvenbüschel durch «zwei n seite bestimmen.

«Wenn ich es wagen darf, zu Ihren Entschliessungen mit meinem «Rath etwas beizutragen, so möchte ich Sie wirklich bewegen, gegen «die Akademie Ihre Pflicht zu erfüllen. Ich hätte es in Ihrem In- «teresse sehr gerne gesehen, wenn Sie die projectirte Abhandlung «bereits im Dezember vorgelegt hätten; und es thut mir leid, wenn «die Unvollständigkeit meiner Verifikationen an dem Aufschub Schuld «gewesen ist. Wenn Sie nun einen nahen Termin vor sich haben, «so thun Sie das Mögliche, um die Abhandlung bis dahin vorzulegen, «drängen Sie darin alles auf die einfachen und schönen Resultate zu- «sammen, die uns nun seit langem schon gut bekannt sind, und «lassen complicirtere, für Laien unfassliche Sachen bei Seite. In der «Einleitung lassen Sie den Begriff der algebraischen Fläche auf die «natürlichste Weise von der Welt sich selbst entwickeln. Zwei Auf- «fassungen: als Doppelschaar von Punkten, und als solche von Ebenen. «In jenem Sinn ist die Fläche frei, wenn jeder sehr kleine Theil als «Ebene (verlängert: Berührungsebene) annähernd sich darstellt; in «diesem, wenn alle unendlich wenig von einander abweichenden «Ebenen annähernd durch einen einzigen Punkt (Berührungspunkt) «gehen, oder vervollständigt als Ebenengebüsch gefasst werden dürfen. «Dann wird gezeigt, wie über dem zweiten Grade beide Freiheits- «begriffe sich nothwendig widersprechen.

«I. *Gradesauffassung.* Die Berührungsebene schneidet die Fläche «in einer C^n mit Doppelpunkt; die zwei Tangenten desselben sind «entweder reell oder conjugirt-imaginär. Daher theilt sich die Fläche «in zwei Regionen: eine hyperboloidische (Krümmungsmaass negativ) «und eine ellipsoidische (Krümmungsmaass positiv), geschieden durch «die $R^{4n(n-2)}$, über deren Construction mittelst der Kernfläche später. «Längs der R *cylindrische* Natur; Berührungsschnitt mit Rückkehrpunkt «(als natürlicher Uebergang zwischen beiden Arten von Doppelpunkt); «also *osculirende Abwickelbare;* erster Widerspruch gegen den Klassen- «freiheitsbegriff, da die Osculation in der Drehbarkeit der Ebene einen «Halt verursacht. — Die Berührungsebene hat doppelte Beweglichkeit, «ein zweiter Doppelpunkt ihres Schnitts ist nur eine Bedingung; also «eine Schaar Doppelberührungsebenen; *doppelt umschriebene Abwickel- «bare* und darunter eine bestimmte Zahl dreifach berührender Ebenen;

«zweiter Widerspruch; denn successive Ebenen können sich in mehr «als einem Punkte schneiden. Die Berührungscurve S der doppelt «umschriebenen Abwickelbaren berührt die R in einer gewissen An- «zahl Punkte π und schneidet sie in noch andern Punkten ϱ. Der «Berührungsebeneschnitt in π hat einen Selbstberührungspunkt, dessen «Tangente diejenige der R. Die Berührungsebene in ϱ schneidet hier «mit Rückkehrpunkt und anderswo noch mit Doppelpunkt. Hiemit «sind alle singulären Zustände, in welche die Berührungsebene einer «nach Grad freien Fläche kommen kann, erschöpft.

II. *Klassenauffassung.* Rückkehrlinie; Doppellinie; triedrische «Knoten; Stellen, wo die Rückkehrlinie und Doppellinie so zusammen- «treffen, dass die zwei Berührungsebenen der letztern sich mit der- «jenigen der erstern vereinigen; Knoten, wo die Rückkehrlinie frei «von einem Lappen der Fläche geschnitten wird. — Jetzt über ein- «fachen Zwang bei Gradesfreiheit; gewöhnlicher oder gemeiner Knoten- «punkt; doppelter Zwang: Kantenknotenpunkt; vierfacher Zwang: «Planknotenpunkt. Dann für Klassenfreiheit: gemeine Streifebene; «Strahlstreifebene (Zweipunktstreifebene, Osculationsstreifebene); Ein- «punktstreifebene. — Nur erste Polaren (bloss für Gradesauffassung); «ihr Verhalten zu Knotenpunkten; Knotenfläche derselben (Kernfläche «Q); entsprechende Polfläche (Polkernfläche P). — Begriff des Büschels, «Gebüschs, Netzes; nothwendige Punkte. — Pampolaren. Jetzt in «specie die Fläche dritten Grades. Voran jene Berührungscurve S, «dessen Grad schon zum Voraus für f^n bestimmt ist, muss in lauter «Gerade zerfallen, weil eine C^n die zwei Doppelpunkte hat, nothwen- «dig in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Darauf mannig- «faltige Constructionen der f^3 gebaut, welche das Vorhandensein der «Geraden schon voraussetzen. Für das übrige reiche Material weiss «ich selbst nicht Rath. Nur thäte es mir leid, wenn Sie die mühsam «errungenen 5 Gattungen der freien f^3 wegliessen: 1. 27 Strahlen, «45 Ebenen reell; 2. 15 Strahlen, 15 Ebenen reell (gegründet auf «ein imaginäres Gitter, wo je zwei entsprechende [sich nicht schnei- «dende] Strahlen conjugirt sind; 3. 7 Strahlen, 5 Ebenen reell «(nämlich 1 Strahl, durch den 3 reelle Dreiseite und 2 imaginäre, «deren Ebenen reell sind, gehen); 4. 3 Strahlen, 13 Ebenen reell «(ein einziges reelles Dreiseit, und durch jede Seite noch 4 reelle «Ebenen); 5. 3 reelle Strahlen und 7 reelle Ebenen (ein reelles Drei- «seit, und durch jede Seite nur noch zwei reelle Ebenen). — Machen «Sie von meinen Sachen freien Gebrauch und denken Sie mehr an «die sachgemässe Abrundung des Stoffs, als dass Sie ängstlich fragen. «wo er hergekommen ist. Seien Sie nicht ein Baumeister, der ein «Haus nicht zusammenfügen will, weil er nicht alle Steine dazu selbst «gehauen hat. — Doch es ist wohl Zeit, dass ich mit dieser langen «Predigt aufhöre. In den Abhandlungen der Berlinerakademie ist «die Mathematik so spärlich vertreten. Es wäre gut, wenn wieder «einmal ein tüchtiger Aufsatz hineinkäme und sich keck neben hotten- «tottische Sprachstudien, *Ehrenberg*'sches unsichtbares Leben und Be- «richte über alte Mährchen hinstellte.

«Wenn Sie der Akademie ihren Tribut entrichtet haben, so «bleibt es uns ja noch unbenommen, einen ausführlichen Tractat über «die alg. Flächen en compagnie zu schreiben. Nur bauen Sie nicht «auf den Friedensschluss.

«Bis Ende Sept. muss ich mit der Liquidationsrechnung der vor- «sichtigen Gesellschaft pro 1854 zu Ende sein. Wie das mit dem «Abstecher nach Paris zusammengeht, weiss ich nicht; er müsste sich «etwa auf 14 Tage beschränken; am sichersten im Anfang Oct., wenn «man *Liouville* in den Ferien besuchen kann.

«*Attest.* «Ich rechne es mir zur Ehre an, einem so wackern «Geometer, wie Herrn C.[1]), ein Zeugniss ausstellen zu können. Seine «mir zugänglichen Arbeiten in den Journalen von *Crelle* und *Liouville* «beurkunden eine grosse Gewandtheit in Handhabung der Analysis «für geometrische Zwecke und eine vollkommene Bekanntschaft mit «den gegenwärtigen Methoden der Geometrie, zu deren Förderung «Herr C. selbst wesentlich beigetragen hat. Seine in englischen Jour- «nalen erschienenen Arbeiten kann ich leider der Sprache wegen nicht «lesen; aber was mir davon durch Mittheilung Anderer bekannt ge- «worden ist, sind zum Theil geniale Entdeckungen, die in der Ge- «schichte der Geometrie Epoche machen. Nach meiner Ueberzeugung «ist demnach dieser ehrenwerthe Mann wohl befähigt, um als Exami- «nator in der Mathematik für bürgerliche Anstellungen in Indien ge- «wählt zu werden.»

«Was wollen Sie aber zu seinen übereilten Behauptungen, z. B. «in Betreff seiner wirklich genialen Theorie der Hyperdéterminants, «und dazu sagen, dass im Dublin Math. Journal ganze Seiten mit fal- «schen Formeln angefüllt sind?

«Sie haben zu meiner Beschreibung der Streifebene kein Wort

---

[1]) Cayley.

«gesagt; ich glaube doch nun die gröbsten Schwierigkeiten für die «Anschauung, namentlich bei der Strahlstreifebene, die uns voriges «Jahr während unseres Umgangs so sehr zu schaffen machte, beseitigt «zu haben. Ich habe wirklich hier etwas überwunden, was ich an- «fangs meine Kräfte zu übersteigen glaubte.

«Die Ernennungen an das eidg. Polytechnikum werden Ihnen «bekannt geworden sein. Ich habe mir von Anfang gedacht, dass «*Raabe* darauf aspiriren werde.

«Warten Sie nicht zu lange mit der Correspondenz, und lassen «Sie mich es wissen, wann Sie wieder vorzutragen haben. Schreiben «Sie mir jedenfalls noch, bevor Sie Berlin verlassen.

«Sie herzlich grüssend

«Bern, den 12. Apr. 1855.

«Ihr dankbarer Schüler

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

«*Treuer Freund!*

«(13. April.) 1. Die alte Windhundsnase freut sich, dem Gewalts- «Rüssel auch einmal helfen zu können. Das N (C^n) mit n^2-n+1 «Grundpunkten wird unter andern einfach dadurch bestimmt, dass «durch n—1 Punkte, die in einer Geraden liegen, zwei beliebige C^n «gelegt werden; ihre übrigen Schnitte sind alsdann jene Grundpunkte. «Dass umgekehrt bei einem Netz mit n^2-n+1 Grundpunkten je zwei «Glieder sich noch in n—1 Punkten auf einer Geraden schneiden, «folgt leicht. Sei n=4. Gehen drei Curven A^4, B^4 und C^4 durch 13p «und wird A^4 nebstdem von B^4 in q, r, s und von C^4 in t, u, v ge- «schnitten, und man zieht die Geraden qr=C, tu=B, so sind B^4+B «und C^4+C zwei Curven 5^{ten} Grads, B^5 und C^5, welche die A^4 in den- «selben 17 Punkten, nämlich 13p+q+r+t+u, schneiden, folglich «müssen auch beide durch dieselben 3 nothwendigen Punkte gehen, «daher muss C durch s, B durch v gehen, und B und C müssen ihren «Schnitt, etwa a, auf der A^4 haben. Alle Geraden, welche die A^4 auf «diese Weise mit sämmtlichen übrigen Curven bestimmt, gehen durch «denselben Punkt a, den ich bei einer andern Betrachtung den *Leibpol* «der A^4 genannt habe; die Betrachtung ist mir im Augenblick nicht «gegenwärtig; aber die gesammten Leibpole spielten dabei eine Rolle, «auch eine der beiden Kerncurven des Netzes, welche die 13 p zu dp «hat. — Für n beliebig verfährt man ebenso; die Geraden $qr=C$ und «$tu=B$ bilden mit C^n und B^n Curven C^{n+1} und B^{n+1}, welche die A^n «in denselben $(n^2-n+1)\ p+q+r+t+u=n^2-n+5$ Punkten schnei- «den; jede hat mit A^n noch $n\ (n+1) - (n^2-n+5) = 2n-5$ Schnitte, «was für $n>4$ weniger als die Zahl der nothwendigen $\frac{1}{2}(n-1)\ (n-2)$ «ist, nämlich um $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ weniger, also müssen umsomehr «C^{n+1} und B^{n+1} die $2n-5$ Schnitte als *nothwendige* gemein haben, und «zwar sind sie Schnitte der Geraden C und B mit A^n. — Jetzt disku- «tiren Sie und ergänzen was oberflächlich ist. Danach kann $G\ (C^n)$ «nicht mehr als n^2-n+1 Grundpunkte haben.

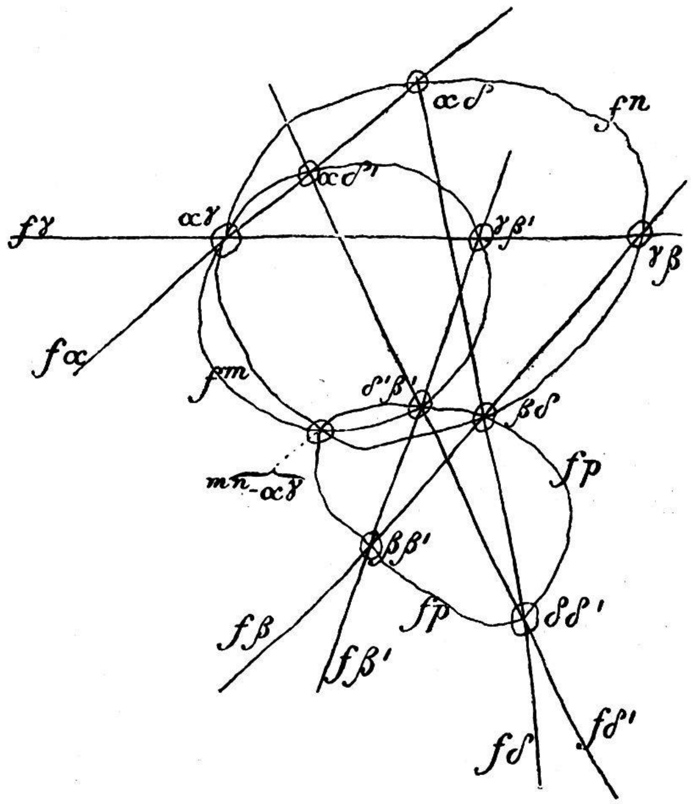
«Daraus folgt nun auch (mittels ebener Schnitte), dass wenn ein «$N\ (f^n)$ eine partielle Grundc. R^{n^2-n+1} hat, dann jedes Glied A^n von «jedem andern noch in einer ebenen Curve C^{n-1} geschnitten wird, «deren Ebene stets durch eine in A^n liegende Gerade a geht. Die «Grundcurve kann auch nicht höher sein.

«2. Wenn $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, und $\alpha\geqq\gamma\geqq\delta\geqq\beta$ und man bestimmt durch «die Glieder $f^\alpha+f^\beta$ und $f^\gamma+f^\delta$ ein $B\ (f^n)$, so dass dessen Grundc. «$R^{n^2}=R^{\alpha\gamma}+R^{\alpha\gamma}+R^{\beta\gamma}+R^{\beta\delta}$, so ist für ein freies Glied f^n des Büschels «die niedrigste Curve $R^{\beta\delta}$ (so wie auch $R^{\beta\gamma}$), im Allgemeinen, wohl «eine einzige ihrer Art, d. h. f^n enthält keine andere ihrer Art, und «sie ist wohl auch überhaupt die niedrigste Vollcurve auf f^n; dagegen «finden von den höheren Curven $R^{\alpha\gamma}$ und $R^{\alpha\beta}$ Schaaren statt. Wann «findet nur eine einzige $R^{\beta\delta}$ statt? und wann eine bestimmte Anzahl? «wie z. B. 27, wenn $n=3$ und $\beta=\delta=1$ ist.

«Legt man durch die gegebene Vollc. $(f^\alpha\ f^\gamma)=R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige «f^n, so schneidet sie f^α und f^γ noch in neuen Curven $R^{\alpha(m-\gamma)=\alpha\delta}$ «und $R^{\gamma\beta}$, durch welche neue (mehr als bestimmte) Flächen f^δ «und f^β gehen und deren Schnitt $(f^\delta\ f^\beta)=R^{\beta\gamma}$ *nothwendig* auf der «f^n liegt. Sei ferner $m=\alpha+\beta_1=\gamma+\delta_1$ und $\gamma\geqq\delta_1\geqq\beta_1$, und man legt «durch dieselbe $R^{\alpha\gamma}$ eine beliebige f^m, so schneidet sie f^α und f^γ eben «so in neuen Curven $R^{\alpha\delta_1}$ und $R^{\gamma\beta_1}$, durch welche neue Flächen f^{δ_1} «und f^{β_1} bestimmt sind, deren Schnitt $(f^{\delta_1}\ f^{\beta_1})=R^{\beta_1\delta_1}$ nothwendig in «f^m fällt; und f^n und f^m schneiden sich noch in einer neuen Curve «$R^{mn-\alpha\gamma}$, *welche mit $R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ zusammen in einer Fläche f^p* «$(p=m+n-\alpha-\gamma=\beta+\delta_1=\beta_1+\delta)$ *liegt*. Aber noch mehr: *auf diese* «*Fläche f^p fällt auch der Schnitt* $(f^\beta\ f^{\beta_1})=R^{\beta\beta_1}$, *sowie der Schnitt*

«$(f^{\delta}\ f^{\delta_1}) = R^{\delta\delta_1}$. [Beweis: die drei Flächen $f^n + f^{\delta}$, $f^m + f^{\delta_1}$, $f^p + f^{\alpha}$, «sind von gleichem Grad und haben $R^{\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta_1} + R^{\beta_1\delta_1} + R^{mn-\alpha\gamma} + R^{\alpha\delta}$ «$+ B^{\beta\delta}$ gemein, und daher müssen sie auch noch $R^{\delta\delta_1}$ gemein haben, «d. h. diese muss auf f^p liegen.] Ferner. Während $R^{\alpha\gamma}$, f^{α} sowie f^m, «f^n fest bleiben, kann sich f^{α} unendlichfach ändern, und dann ändern «sich auch f^{δ} und f^{δ_1}; aber diese gehen stets durch die festen Curven «$R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ und ihr Schnitt $R^{\delta\delta_1}$ bewegt sich auf der festen Fläche «f^p, so dass also f^p eine vielfache Schaar Curven $R^{\delta\delta_1}$ enthält, oder «durch zwei quasi projektivische Gebüsche G (f^{δ}) und G (f^{δ_1}) um die «festen partiellen Grundcurven $R^{\beta\delta}$ und $R^{\beta_1\delta_1}$ erzeugt wird. — Was folgt «noch weiter daraus? Wenn eine blinde Sau eine Eichel findet, so «weiss sie dieselbe zu fressen — ich nicht recht. Machen Sie weitere «Verse daraus, wenn's geht. (Für m=n wird die Sache interessant, «f^p wird wie ein einfaches Hyperboloid, etc.)

«Zur Anschauung, wenn Sie solche nöthig haben.



«3. Wenn in n Ebenen in jeder eine Curve n^{ten} Grads gegeben, «und wenn je zwei Curven auf der Kante ihrer Ebenen sich in n «Punkten schneiden, *so sind die n Curven zusammen die Grundcurve* «R^{n^2} *eines Büschels B* (f^n). Versteht sich dieser Satz analytisch von «selbst? Synthetisch habe ich ihn bewiesen. Umgekehrt ist klar, dass «durch n Ebenen und durch eine f^n ein B (f^n) bestimmt und $R^{n^2} =$ «n C^n ist.

«Lässt man eine C^n weg, so bestimmen die n—1 übrigen ein «G (f^n) (oder N (f^n)?), von dessen Gliedern sich je zwei in noch einer «C^n schneiden.

«4. Aus alter Zeit. Spezielle Flächen f^n, die projectivisch er«zeugt werden. Werden B (f^α) und B (f^β) projectivisch bezogen, so «erzeugen sie eine $f^{\alpha+\beta=n}$, welche durch die Grundcurven R^{α^2} und «R^{β^2} geht, eine einfache S ($R^{\alpha\beta}$) und, wofern $\alpha > \beta$, eine SS (R^{α^2}) [oder «nur S (R^{α^2})?], aber im Allgemeinen nur die einzige R^{β^2} enthält. Was «spielt weiter? — Wenn $\alpha = \beta = \frac{1}{2}n$, so sind dabei drei Nüancen zu «unterscheiden, nämlich

I. «die B (f^α) und B ($f^{\beta=\alpha}$) haben kein gemeinschaftliches Glied «sind in *allgemein schiefer Lage;* oder

II. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied f^α_2, welchem be«ziehlich zwei andere f_1^α und f_1^β entsprechen, sind noch in «*beschränkter schiefer Lage;* oder

III. «sie haben ein gemeinschaftliches Glied f_2^α, welches *sich selbst*, «*entspricht* und sind in *perspectivischer Lage.*

«Bei (I.) ist f^n wie das Hyperboloid beschaffen, sie enthält 2 «Curvenschaaren α^2 Grads, S (R^{α^2}, R^{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$), in welche eine «Schaar-Schaar von Flächen f^α und f^β wechselweise einhacken, oder «es finden zwei Schaaren von Büscheln statt, S [B (f^α), B (f^β)] und »S [B (f^α f^β)], von denen je zwei aus *gleicher* Schaar allgemein «projectivisch sind; je zwei aus verschiedenen Schaaren dagegen wohl «ein gemeinschaftliches Glied haben, aber nicht projectivisch bezogen «sind?

«Bei (II.) wird f^n von den Gliedern f_1^α und f_1^β (bei dem f_2^α ent«sprechen) beziehlich in den Grundcurven R^{α^2} und R^{β^2} der gegebenen «Büschel berührt; die zwei Curvenschaaren S (R^{α^2}, R^{β^2}) und S ($R^{\alpha\beta}$) «fliessen in einander, in jeder wird f^n von einem Gliede f_1^α (oder «f_1^β) berührt, so dass f^n für diese Schaar S (f_1^α, f_1^β) die *Umschrei«bungsfläche* ist; (aber wie kann man diese Schaar für sich be«stimmen?).

«Bei (III.) zerfällt die f^n in f_2^α und in einen *perspectivischen «Durchschnitt* $= f^{\frac{1}{2}n}$, in welchem die S ($R^{\alpha\beta}$) liegen, und deren ge«meinsames Glied aller Büschel B (f^α f^β) ist. — Sonst noch was?

«Mit der kurzen Abfertigung der Flächenbüschel Ad 12 bin ich «nicht so sehr zufrieden, denn gerade darüber hoffte ich viel von «Ihrem Witz, weil ich im Moment wähnte, Sie könnten auch das «Unmögliche möglich machen; nun soll ich glauben, es sei nicht so. «Sie verlangen mein leitendes Prinzip zu wissen: Windhundsnase, «unmittelbare Anschauung, Formenlehre. Es sollte gezeigt werden, «dass die angegebenen Fälle (die ich als möglich anschaute) in der «That möglich sind, wenn die Grade der Theilflächen, so wie die «Grade der Theile, in welche ihre Schnittcurven zerfallen, von ge«wisser Grösse sind. Z. B. wird verlangt, es soll der durch $f^\alpha + f^\beta$ «und $f^\gamma + f^\delta$ besimmte $B(f^n)$ noch ein drittes Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ ent«halten (wo $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = n$), ohne dass die Voll«curven $R^{\alpha\gamma}$, $R^{\alpha\delta}$, $R^{\beta\gamma}$, $R^{\beta\delta}$ (aus denen die R^{n^2} besteht) selbst in «weitere Theile zerfallen, so ist der Fall nur möglich, wenn $\alpha = \beta =$ «$\gamma = \delta = \varepsilon = \varphi$ ist. Wird dagegen gestattet (oder verlangt), dass jede «der genannten vier Vollcurven in zwei Theile zerfalle, etwa in «$R^{\alpha\gamma - u} + R^u$, $R^{\alpha\delta - x} + R^x$, $R^{\alpha\gamma - y} + R^y$, $R^{\alpha\delta - z} + R^z$, ohne dass «die Flächen f^α, f^β, f^δ, f^γ selbst auch zerfallen, so ist die Frage, «ob das dritte Glied $f^\varepsilon + f^\varphi$ auch nur dann möglich sei, wenn $\alpha = \gamma = \varepsilon$ «und $u = x = y = z$ und dazu noch $x = \frac{1}{2}\alpha^2$? Für $n = 4$ sind z. B. «leicht 3 Paar Flächen zweiten Grads $f^\alpha + f^\beta$, $f^\gamma + f^\delta$, $f^\varepsilon + f^\varphi$ «($\alpha = \gamma = \varepsilon = 2$) anzuschauen, die sich in 8 Kegelschnitten C^2 schneiden, «welche die Grundcurve R^{16} des $B(f^4)$ bilden. Erlaubt man, dass «jede der vier Vollcurven der Glieder $f^\alpha + f^\beta$ und $f^\gamma + f^\delta$ in drei «Theile zerfallen darf, so schien mir, es müssen noch zwei der glei«chen Glieder möglich sein $f^\varepsilon + f^\varphi$ und $f^\eta + f^\lambda$, und es ist die «Frage, wie sich dabei die Grade (α, γ, . . . λ) der Theilflächen und «die Grade der 12 Curven (aus denen die genannten 4 oder die R^{n^2} «bestehen) zu einander verhalten. U. s. w. — Ein tappen. Es ist wie «die Entdeckung von besondern Polyedern, regelmässigen und halb«regelmässigen.

«Dass, wenn $n = \mu\alpha$, dann ein $B(f^n)$ mit $\mu + 1$ Gliedern «von der Form $f^{(\mu-1)\alpha} + f^\alpha$ möglich ist, dessen R^{n^2} aus einer R^{α^2} «und $\mu + 1$ Curven $R^{(\mu-1)\alpha^2}$ besteht, ist von mir angeschaut und «wird von Signore nicht bestritten — sondern bewiesen werden. «Durch μ Glieder ist das letzte nothwendig.

«Mit tiefstem Bedauern Ihnen das schöne Stück Krautkuchen «hiedurch zu vergällen — grüsst Sie

«Ihr dankbarer schrecklich aufgeblähter

«15. April 55, Abends. *J. Steiner.*

«NB. Setzen Sie fortan auf meine Adresse «Kronenstrasse 55», «dann erhalte ich die Briefe schneller, auf der Post schreibt man es «immer erst darauf, weil die Briefträger ihre Tour stets wechseln.

«(16ten April.) Das Trödeln hilft; heut Morgen 8 Uhr erhielt «ich Ihren Brief, wofür meinen besten Dank.

«In diesem Jahr komme ich in der Akademie nicht an die «Ramme, weder im Plenum noch in der Klasse; indessen wäre das «kein Hinderniss, wenn die Abhandlung fertig wäre, — davon bin «ich aber weiter entfernt, als vor einem Jahr. Die Streifebenen (wo-«rauf Sie *mit Recht* stolz sind) und Knotenpunkte sind *sehr schön* ins «Reine geschrieben — aber falsch, — und nun soll es geändert wer-«den, was für mich besonders schwer ist, von je her.

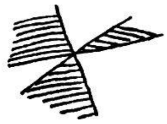
«Vor Juni werde ich kaum von hier abreisen, wo soll ich hin, «da Sie wieder an der verfluchten Vorsichtskasse zu fressen haben «um $\frac{1}{3}$ Löhnung? nach Paris? ist auch nicht viel zu machen. — Im «October ist *Liouville* noch in Toul, man müsste ihn da besuchen; «die Curse beginnen glaube erst Ende Octoder oder Anfang November.

«Nicht wahr wenn f^3 nur zwei Knotenpunkte p und q hat, so «berühren sich die Knotenkegel p^2 und q^2 schon längs der Geraden «pq und für die längs diese berührende Streifebene reducirt sich der «Schnitt auf die dreifache pq, oder diese zählt für 3 *Cayley*'sche G. Os-«culirt die Streifebene dabei die f^3?»

Schläfli an Steiner.

«*Mein lieber Freund!*

«Ihren werthen Brief vom 10. April habe am 14ten erhalten und «freue mich, daraus Ihr Wohlsein zu vernehmen. Indem ich sogleich «anfange, Ihre Fragen zu beantworten, möchte ich zuerst einige Namen «und Definitionen Ihrem Urtheil vorlegen. Eine ebene Curve hat einen «*Selbstberührungspunkt* (eine *Autapse*), wenn zwei Zweige derselben «sich auf gewöhnliche Weise berühren; er erniedrigt die Classe um «4 und verschlingt 12 Wendepunkte. Eine Fläche hat einen *Horn-«punkt*, wenn jede frei durchgehende Ebene die Fläche mit *Doppel-«punkt* schneidet, und alle mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen «einen freien Kegel zweiten Grades umhüllen; unter diesen Ebenen «können immerhin einige bestimmte mit *Autapse* schneiden. Wenn «aber insbesondere die mit *Rückkehrpunkt* schneidenden Ebenen alle «dieselbe *Gerade* gemein haben, so heisse der singuläre Punkt *Kanten-«punkt,* und die Gerade seine *Kante;* es gehen dann zwei Ebenen «durch diese Kante, welche die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneiden; «sind diese imaginär, so hat hier die Fläche eine fadendünne Stelle. «Schneidet endlich jede durch den Punkt gehende Ebene die Fläche «mit *Rückkehrpunkt,* so liegen alle Rückkehrtangenten in einer Ebene

«welche selbst die Fläche mit *dreifachem Punkte* schneidet  ;

«wenn alle drei Tangenten des dreifachen Punkts reell sind, so treffen «hier drei platte Spitzen der Fläche zusammen, und jeder liegt eine «entsprechende Lücke gegenüber; darf man ihn wohl *Dreispitzpunkt* «und die Ebene, welche die Fläche eigentlich zweimal mit dreifachem «Punkte schneidet, dessen *Platte?* — Wenn eine algebraische Curve «nie als vollständiger Durchschnitt zweier Flächen dargestellt werden «kann, so nenne ich sie *Untercurve,* im Gegentheil *Vollcurve;* wenn «aus dieser oder jener keine Curve niedrigern Grades herausgenommen «werden kann, so heise sie *untheilbar.*

«Verlangt man die Punkte, in denen eine Fläche F^m von einem «$B(f^n)$ berührt wird, so sind diese identisch mit den Durchschnitts-«punkten der F und einer gewissen Untercurve $\{3(n-1)^2 + 2(m-1)(n-1) + (m-1)^2\}$ ten Grades, des Orts eines Pols, dessen auf F be-«zügliche Polarebene durch die Axe des auf B(f) bezüglichen Polar-«ebenenbüschels geht. Hat F einen *Hornpunkt,* einen *Kantenpunkt,* «einen *Dreispitzpunkt,* so geht die Untercurve durch resp. 1^0 mit freier «Tangente, 2^0 die Kante berührend, 3^0 mit Doppelpunkt, dessen Ebene «die Platte ist; also zählt der singuläre Punkt resp. für 2, 3, 6 Lö-«sungen der Aufgabe. — Hat F eine *Doppellinie,* so zerfällt jene Unter-«curve: 1^0 in diese Doppellinie, einfach gezählt, 2^0 in eine untheilbare «Untercurve, welche die Doppellinie in allen (u. nur in diesen) Punkten «schneidet, wo sie von B(f) berührt wird, wobei jeder dieser Punkte «für zwei Lösungen der Aufgabe zählt, und endlich ausserdem die F «in den übrigen Punkten, wo B(f) auf gewöhnliche Weise berührt. — «Zerfällt F in m Ebenen, so sind vorerst aus der vollständigen Unter-«curve die $\frac{m(m-1)}{2}$ Durchschnittsgeraden wegzulassen, die übrige

«untheilbare Untercurve ist dann nur vom $\{3(n-1)^2 + 2(m-1)$

«$(n-1) + \left.\frac{(m-1)(m-2)}{2}\right\}$ten Grade und geht frei durch jeden der «$\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$ Durchschnittspunkte (also je 3 Lösungen der Auf«gabe; denn hier ist mehr als Hornpunkt!), schneidet ausserdem jede «Gerade noch in den $2(n-1)$ Punkten, wo sie von B(f) berührt wird «(je 2 Lösungen, für die Gerade im Ganzen $4(n-1)$) und endlich «ausserdem jede Ebene in den $3(n-1)^2$ Punkten, in denen sie allein «von B(f) berührt wird. — Wenn eine Fläche aus B(f) in eine Doppel«ebene von $(e)^2$ und eine g^{n-2} zerfällt, so wird auch jene die Aufgabe «lösende Untercurve theilbar, 1° in eine völlig unbestimmte, der e an«gehörige Curve $(m+3n-5)^{ten}$ Grades, 2° in die ebene Curve «$(e, g)^{n-2}$, 3° in eine untheilbare Untercurve vom Grade

$$3n^2 - 10n + g + (2n-3)(m-1) + (m-1)^2.$$

«Für $n = 2$ reducirt sich diese Zahl auf $m^2 - m + 1$. Wenn also «ein $B(f^2)$ eine Doppelebene enthält, so berührt er eine F^m nur in «$m(m^2 - m + 1)$ Punkten auf gewöhnliche Weise.

«Von einem gegebenen Punkt A gehen an eine F^m nur

$$m(m^2 - m + 1)$$

«Normalen. Ihre Fusspunkte liegen nämlich auf einer Untercurve «$(m^2 - m + 1)^{ten}$ Grades, dem Orte eines Pols P, dessen auf F be«zügliche Polarebene auf dem Strahl AP senkrecht steht.

«Eine freie Vollcurve $(F^p, G^q) = C^{p \times q}$ wird von einem $B(f^n)$ «in $pq(2n + p + q - 4)$ Punkten berührt. Denn diese liegen auf «einer Untercurve $(2n + p + q - 4)^{ten}$ Grades, dem Orte des Poles, «für welchen die zwei Polarebenen von F und G sich auf der Axe des «Polarebenenbüschels von B(f) schneiden. Die Untersuchung für den «Fall einer beliebigen Untercurve C soll etwa später einmal vorge«nommen werden.

«Wenn eine Fläche F^m und ein Halbnetz $(f, f', f'')^n$ gegeben sind, «so ist der Ort des Pols, dessen auf F, f, f', f'' bezüglichen Polarebenen «einen Punkt gemein haben, eine Fläche $H^{m-1+3(n-1)}$; und in jedem «Punkte der Vollcurve (F, H) oder $R^{m(m+3n-4)}$ wird F von einer «Fläche des Halbnetzes berührt.

«Wenn vier beliebige f^n gegeben sind, und P ist ein Pol, für «den die ersten Polarflächen aller vier f einen Punkt Q gemein haben, «so ist der Ort von Q eine Fläche $4(n-1)^{ten}$ Grades.

«Werden durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke der Fläche «dritten Grades Ebenen gelegt, so geht durch die drei Kegelschnitte «immer eine Fläche zweiten Grades. Soll diese ein Kegel sein, so ist «wirklich der Ort seines Scheitels eine Fläche *vierten* Grades, was mir «höchst merkwürdig erscheint. — Was Sie über die schiefen Fünfecke «aussagen, ist Alles richtig. Wird nämlich aus den 27 Geraden eine «f herausgehoben, so giebt es 16 welche sie nicht schneiden; eine «von diesen sei a. Dann giebt es nur fünf Geraden, welche wohl a, «aber f nicht schneiden; eine von diesen sei b, so giebt es nur vier «Geraden, welche b, aber weder a noch f, schneiden. Eine von diesen «sei c, so giebt es noch 3 Geraden, welche c, aber keine der übrigen «schneiden. Eine darunter sei d, dann giebt es nur noch zwei Geraden, «welche a und d, aber keine der übrigen schneiden. Eine von diesen sei e, «so hat man ein schiefes Fünfeck a b c d e. Wird f festgehalten, so hat man also «16 . 5 . 4 . 3 . 2 solche Fünfecke. Da man aber mit jeder der fünf Seiten «anfangen, und von derselben aus sowohl rechts als links fortgehen «kann, so ist soeben jedes Fünfeck 10 mal gezählt worden; folglich ist «die Zahl aller verschiedenen zur Geraden f gehörenden Fünfecke «$16 \cdot 4 \cdot 3 = 192$. Ist umgekehrt das Fünfeck a b c d e gegeben, so «giebt es nur noch zwei Geraden, welche keine Seite desselben «schneiden; ja — das Fünfeck kömmt also in zwei Systemen (f, abcde) «vor und im Ganzen giebt es $27 \cdot 192$ solche Systeme; folglich giebt «es nur $27 \cdot 96 = 2592$ Fünfecke.

«Da es 216 Paare sich nicht schneidender Geraden giebt, «so entsprechen jedem Paare 12 Fünfecke, welche aus den 10 «Geraden, die keine das Paar schneiden, gebildet werden können. «In der That wird die erste Seite des Fünfecks nur von drei «dieser 10 Geraden, die zweite nur von 2 übrigen, die dritte «auch nur von 2 übrigen geschnitten und wenn aus diesen die vierte «gewählt ist, so ist die fünfte Seite nothwendig; also muss die «Zahl der verschiedenen Fünfecke $\frac{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{10} = 12$ sein. «Wenn von jenen 10 Geraden 5 zu einem Fünfeck verwendet wor«den sind, so bilden die 5 übrigen auch wieder ein Fünfeck. Ich «weiss vor der Hand diese Fünfecke nicht weiter zu systematisiren, «wie Sie sagen; ich sehe keine Beziehung derselben, weder zu den 40 «Gruppen von je drei Triederpaaren, noch zu den 360 Flächen zwei«ten Grades, deren jede die cubische Fläche in 6 Geraden schneidet. «Ich glaube, Ihnen einmal ein Verzeichniss der 45 Dreiecke, wo die

«27 Geraden mit Ziffern bezeichnet sind, gegeben zu haben. Tabellen «der Fünfecke, etc. in ähnlichem Sinne würden ganze Bogen anfüllen; «wenn Sie etwas der Art verlangen, so bitte ich Sie, es mir näher «zu bezeichnen; ich würde es Ihnen dann ungesäumt ausfertigen und «zuschicken.

«Wenn Sie von Einem Systeme der Sylvester'schen 5 Grund-«ebenen sprechen, so müssen Sie das Prädicat *reell* weglassen; denn «es giebt überhaupt nur *ein* System; und wenn die 19 Gleichungen «dritten Grades mehrere Lösungen haben, so können sie sich nur «durch *Permutation* der 5 Grundebenen unterscheiden. Die 10 Schnitt-«punkte der Grundebene sind allerdings gewöhnliche Hornpunkte. «Nimmt man zu dem Berührungskegel zweiten Grades eines solchen Horn-«punkts seinen in Beziehung auf das entsprechende Trieder harmonischen «Strahl, so bekömmt man 10 Strahlen; je 4 von diesen, welche einem «Tetraeder entsprechen, treffen in einem Punkt zusammen; es «giebt also 5 solche Punkte. Wenn nämlich ein Kegelschnitt einem «Dreieck umschrieben ist, so entspricht jedem Punkt des Kegelschnitts «in Beziehung auf das Dreieck eine harmonische Transversale, und «während jener Punkt sich auf der Curve bewegt, dreht sich die «Transversale um einen festen Punkt. Diesen nenne ich den har-«monischen Punkt für den Kegelschnitt in Beziehung auf das Dreiseit. «Aehnlich für das Trieder und den umschriebenen quadratischen Kegel. «Analytisch dargestellt wird dieses

«Nimmt man die Polynome v, w, x, y, z der Grundebenen so an, dass

$$v^3 + w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

«die Gleichung der Fläche wird und ist dann

$$av + bw + cx + dy + ez = 0$$

«die identische Relation zwischen den fünf Polynomen, so ist

$$vwxyz\left(\frac{a^2}{v} + \frac{b^2}{w} + \frac{c^2}{x} + \frac{d^2}{y} + \frac{e^2}{z}\right) = 0$$

«die Gleichung der Kernfläche; folglich

$$c^2yz + d^2xz + e^2xy = 0$$

«z. B. die Gleichung des quadratischen Berührungskegels im Horn-«punkt (x y z) und

$$x : y : z = c^2 : d^2 : e^2$$

«sind die Gleichungen des harmonischen Strahls. — Der Schnitt R^{12} oder

$$\left(\sum v^3 = 0, \quad \sum a^2wxyz = 0\right)$$

«*geht* nicht bloss *durch* die zwei Asymptotenpunkte jeder der 27 «Cayley'schen Geraden, sondern *berührt* sie in denselben, die Curve «R hat also die 27 Geraden zu *Doppeltangenten*. Die Curve 4^{ten} «Grades, in welcher jede der 45 Cayley'schen Ebenen die Kernfläche «schneidet, gehört einem Büschel an, der einerseits vom Vierseit, «dessen 6 Ecken jene Asymptotenpunkte sind, anderseits vom Cayley'- «schen (Diagonalen-) Dreiseit und noch einer vierten Geraden bestimmt «ist. Die Kernfläche geht überdies durch die 240 Scheitel der 120 «Cayley'schen Triederpaare. Das Cayley'sche System liefert also im «Ganzen 348 Punkte der Kernfläche; das Sylvester'sche System liefert «ihre 10 Geraden und die Berührungskegel in ihren 10 Hornpunkten. — «Wenn P, Q auf der Kernfläche befindliche conjugirte reciproke Pole «der ursprünglichen Fläche sind, und P bewegt sich auf der Curve «R, so durchläuft Q eine Curve S, durch die ich bis jetzt keine «niedrige Fläche als siebenten Grades habe legen können, deren «Gleichung

$$\sum a\,b\,c\,(v^3 + w^3 + x^3)\,y^2\,z^2 = 0.$$

«Wenn P und Q je zusammenfallen sollten, so würde die ursprüngliche «Fläche bornirt; in den Durchschnitten von R und S vereinigen sich «daher nicht conjugirte P und Q. Ueber die Lage der Polarkegel «von P und Q gegen einander weiss ich nichts besonderes anzugeben. — «Die Curve R kann wenigstens keine Doppelpunkte, etc. haben; denn, «wenn man verlangt, dass die ursprüngliche Fläche von ihrer Kern- «fläche berührt werde, so kann dieser Forderung *unter Anderem* «durch die sehr einfache Bedingung

$$a^{3/2} + b^{3/2} + c^{3/2} + d^{3/2} + e^{3/2} = 0$$

«entsprochen werden; aber immer wird dadurch die ursprüngliche «Fläche bornirt [1]).

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Sie haben leider Ihren Beweis für den Satz, dass drei ebene Cur- «ven n^{ten} Grades, welche nicht n^2 Punkte gemein haben, nicht mehr als «n^2-n+1 Punkte gemein haben können, nicht in strengen Formen «ausgeführt; und was Sie davon mittheilen, vermag mich nicht zu

[1]) Unterschrift fehlt.

«überzeugen. Der Mangel liegt darin, dass Sie vom Satze über die «nothwendigen Punkte eine unerlaubte Anwendung machen. Dieser «Satz darf nämlich nur so ausgesprochen werden:

«Wenn $m \gtreqless n$, so sind *unter* den mn Punkten, welche eine C^m «mit einer C^n gemein hat, $\binom{n-1}{2}$ nothwendig.» Daraus folgt aber «noch nicht, dass, wenn von den gemeinschaftlichen Punkten $mn - \binom{n-1}{2}$ oder sogar mehr fixirt sind, dann alle übrigen nothwendig «sind. Der Schluss würde nur gelten, wenn die $mn - \binom{n-1}{2}$ «Punkte *frei* auf der C^n gewählt werden. Wenn aber diese schon «gegenseitig bedingt sind, so können im Besondern unter ihnen so «viele nothwendige Punkte vorkommen, dass immer noch von den «übrigen einige *nach Belieben* auf der C^n gesetzt werden dürfen. «Den Gedankengang, den Sie mir an die Hand geben, hatte ich schon «vorher durchlaufen, aber eben die erwähnte Schwierigkeit veranlasste «mich zu der Klage, dass ich für Ihren Satz keinen Beweis habe fin- «den können. Zum Ueberfluss füge ich noch hinzu, dass für $n > 4$ «stets $\binom{n-1}{2} > n-1$ ist, und dass also, wenn Ihre Fassung des «Satzes von den nothwendigen Punkten richtig wäre, und drei Curven «n^{ten} Grades A, B, C schon n^2-n+1 Punkte gemein haben, dann die «$n-1$ übrigen nothwendig wären, also alle drei A, B, C zum selben «Büschel gehören müssten. — Sie sagen kein Wort zu dem von mir «zur Sprache gebrachten Falle, wo A, B, C nur $n^2-n\alpha+\alpha^2$ Punkte «gemein haben $\left(\alpha < \frac{n}{2}\right)$; ungeachtet die Construction der Ihrigen «ganz ähnlich ist; nämlich je zwei Glieder des Netzes schneiden sich «ausser jenen Grundpunkten noch in $n-\alpha$ auf einer C^α liegenden «Punkten. Wenn man nun versucht, durch zwei von diesen Punkten «eine Gerade zu legen und mittelst dieser eine C^{n+1} zu bilden, so «kann man wiederum mittelst Ihrer weiten Fassung des Satzes von «den nothwendigen Punkten den schönsten Unsinn herausbringen. «Also noch einmal: Haben Sie die Güte, für Ihren interessanten Satz «einen logisch gegliederten Beweis zu geben, zu dem ich von ganzem «Herzen Ja und Amen sagen kann. Wenn das Netz mehr als $\binom{n+2}{2} - 3$

«Grundpunkte hat, so sind diese gewiss gegenseitig bedingt, und «es wäre nun wichtig zu wissen, ob alle Zahlen von hier an bis «n^2-n+1 möglich sind, oder nur einige derselben, wie z. B. alle von «der Form $n^2-n\alpha+\alpha^2$.

«Wenn A, C, D, B vier Flächen sind, deren fallende Grade eine «arithmetische Proportion bilden, und man bildet aus den zwei zusam«mengesetzten Gliedern n^{ten} Grades AB und CD einen Flächenbüschel, «so ist wirklich auf einem freien Gliede dieses Büschels (B, D) die «niedrigste Vollcurve und unbeweglich (also einzig). Auch (C, B) ist «unbeweglich und einzig; hingegen (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ «fache Schaar, und (A, D) eine $\binom{\alpha-\gamma+3}{3}$ fache. *Ausnahmen:* Wenn «$\alpha=\gamma$, $\delta=\beta$, aber $\alpha>\delta$, so ist immer noch die Vollcurve (B, D) einzig «und (A, C) bildet eine $\binom{\alpha-\delta+3}{3}$ fache Schaar; aber (A, D) und (C, B) «sind Glieder einer und derselben einfachen Schaar. Wenn endlich «$\alpha=\gamma=\delta=\beta$, so sind auch (A, C) und (D, B) Glieder einer einfachen «Schaar. — Wenn $n>3$, so sind die unbeweglichen Vollcurven nur in «der Anzahl 1 vorhanden; um deren mehrere zu haben, müsste man «Gewalt brauchen.

«Mit Ihrem Schema $\left\Vert\begin{matrix} A\,.\,D\,.\,D_1 \\ C\,.\,B\,.\,B_1 \end{matrix}\right\Vert$ einer Theilcurve haben Sie die «R^3 im Allgemeinen nachgeahmt. Wenn Sie meine frühern Briefe «nachsehen, werden Sie finden, dass ich schon von solchen Schema«ten von Theilcurven mit mehr als zwei Horizontalzeilen gesprochen, «aber dann auch alle diese Darstellungsweisen als unzureichend für «eine möglichst allgemeine Classification der Theilcurven erkannt habe.

«Es sind n Ebenen gegeben, und in jeder soll eine Curve n^{ten} «Grades so gezeichnet werden, dass je zwei Curven die Kante ihrer «Ebenen in denselben n Punkten schneiden. Diese Aufgabe bietet «eine sonderbare Schwierigkeit dar. Giebt man nämlich zuerst in «jeder Ebene $\binom{n+2}{2}-1$ Punkte zur Bestimmung der Curve, so sind «dann wegen der Bedingung auf jeder Kante n Punkte abzuziehen. «Es bleiben so nur $2\,n^2$ Punkte übrig, welche zur Bestimmung des «ganzen Curvensystems hinzureichen scheinen. Aber dann würde nicht «bloss ein *Büschel* von Flächen n^{ten} Grades durchgehen. Das Umge-

«kehrte hingegen, dass eine f^n und eine Gruppe von n Ebenen einen «Büschel bestimmen, ist vollkommen klar.

«Eine f^n und eine Gruppe von n—1 Ebenen bestimmen nicht «ein Netz, sondern eine *vierfache* Schaar.

«Wenn Sie zwei Büschel B (f^α), B (f^β) projectivisch auf einander «beziehen, und es ist $\alpha > \beta$, so erzeugen sie eine $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ fache «Schaar von Vollcurven $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades.

«Es sei F die Fläche $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Grades, Ort des Durchschnitts «je einer Fläche des einen Büschels mit der entsprechenden des «andern; schneiden Sie F mit einer beliebigen Fläche $(\alpha-\beta)^{\text{ten}}$ Grades «und nehmen diese Vollcurve zu der Grundcurve des B (f^β) hinzu, «so haben Sie eine zusammengesetzte Curve $\alpha^{2\text{ten}}$ Grades, welche der «erwähnten vielfachen Schaar angehört. Nehmen Sie aus dieser viel-«fachen Schaar irgend zwei Vollcurven frei heraus, so schneiden sich «dieselben in $\alpha^2 (\alpha-\beta)$ Punkten, welche alle auf derselben Fläche «$(\alpha-\beta)^{\text{ten}}$ Grades liegen. Jede solche Vollcurve wird von jeder «$R^{\alpha\times\beta}$ in $\alpha^2\beta$ Punkten geschnitten; aber keine zwei $R^{\alpha\times\beta}$ haben «einen Punkt gemein. — Es seien A, A′, A″ irgend drei Glieder «des höhern, B, B′, B″, die entsprechenden des niedrigern Büschels. «Sie setzen auf der F nach Belieben $\binom{\alpha-\beta+3}{3}$ Punkte und legen «durch diese und jeweilen durch eine der Vollcurven (A, B), (A′, B′), «(A″, B″) resp. die Flächen α^{ten} Grades $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, so bestimmen diese «einen neuen Büschel α^{ten} Grades, der mit dem unveränderlichen Büschel «β^{ten} Grades projectivisch ist und zwar so, dass $\mathfrak{A}$, B; $\mathfrak{A}'$, B′; $\mathfrak{A}''$, B″ «sich paarweise entsprechen; durch drei Paare ist aber hinreichend «bestimmt, welche Fläche des Büschels ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$) jeder Fläche des un-«veränderlichen Büschels (B, B′) entspricht. — Doch ich bin hier-«über wohl weitläufiger als nöthig ist. Sie haben es durch Ihre «Frage, *was weiter spiele*, veranlasst. Die Fläche F ist jämmerlich be-«schränkt; und diese Vorstellung ist bei unsern frühern Unter-«suchungen schon häufig benutzt worden. Ich kann daher nicht recht «begreifen, warum Sie wieder darauf zurückkommen; Sie repetiren «damit nur die einfachsten analytischen Hülfsmittel, die für andere «Untersuchungen dienen mögen, aber an sich nicht werth sind, viel «besprochen zu werden.

«Sie setzen nun $\alpha = \beta$ und specialisiren stufenweise. I. Die «projectivischen Büschel (A, A′, A″) und (B, B′, B″) haben kein ge-

«meinschaftliches Glied. Die von ihnen erzeugte F Fläche $2\alpha^{ten}$ «Grades enthält zwei geschiedene Schaaren (A, A′) und (A, B) von «Curven α^{2ten} Grades; je zwei Curven derselben Schaar können «durchaus keinen Punkt gemein haben; aber jede Curve der einen «Schaar wird von jeder der andern in α^3 Punkten geschnitten; und «durch diese zwei Curven geht immer eine Fläche C‴, welche sowohl «dem Büschel (C, C′, C″, . . .) als auch dem Büschel (A‴, B‴, C‴, . . .) «angehört.

«II. Die projectivischen Büschel (p, q) und (q, r) haben ein ge- «meinschaftliches nicht entsprechendes Glied q. Dann enthält die F eine «einzige Schaar von Curven α^{2ten} Grades, welche sämmtlich durch die «α^3 (festen) Knotenpunkte der F gehen. Daher bilden alle Flächen «der Büschelschaar zusammen ein *Gebüsch*, und jede solche Fläche «geht durch *zwei* Curven R^{α^2} und ist durch diese bestimmt, ausge- «nommen, wenn sie die F längs einer R^{α^2} berührt. Alle solche «Flächen P (α^{ten} Grades), welche die F längs einer R berühren, bilden «natürlich eine einfache Schaar von der zunächst auf den *Büschel* fol- «genden Ordnung, indem durch irgend einen im Raume gegebenen «Punkt nicht nur eine (wie beim Büschel), sondern *zwei* Flächen P «gehen. Man könnte also diese Schaar einen quadratischen Büschel «nennen, wenn man den gewöhnlichen Büschel mit Grundcurve einen «*linearen Büschel* nennen wollte. Ich kann nicht umhin, die an sich «sehr klare Sache analytisch auszudrücken. Wir haben $F = pr - q^2$ «als Polynom der erzeugten Fläche $2\alpha^{ten}$ Grades. Sind nun λ, μ «irgend zwei Projectivitätsfactoren, und setzt man

«$P = p + 2\lambda q + \lambda^2 r$, $Q = p + (\lambda + \mu) q + \lambda\mu r$, $R = p + 2\mu q + \mu^2 r$, «so ist auch

$$(\lambda - \mu)^2 F = PR - Q^2.$$

«D. h. die Fläche F wird von der Fläche P längs der Curve $(p + \lambda q,$ «$q + \lambda r)$ und von der Fläche R längs der Curve $(p + \mu q,\ q + \mu r)$ be- «rührt, und die Fläche Q geht durch diese zwei Curven. Da $\lambda + \mu$, «$\lambda\mu$ jede beliebigen zwei Zahlen sein können, so ist Q jede Fläche «des Gebüschs (p, q, r); hingegen P bildet eine einfache Schaar, dar- «gestellt durch die Gleichung $p + 2\lambda q + \lambda^2 r = o$.

«III. Wenn die Büschel (p, q) (p, r) projectivisch sind und das «Glied p gemein haben, so ist $F = p(q - r)$, und was noch klarer «als diese Formel sein kann, weiss ich nicht.

«Wenn die zusammengesetzten Flächen AB, CD einen Büschel bil- «den sollen, der wieder ein zusammengesetztes Glied EF enthält, so ist «dieses freilich, wenn (A, C), (A, D), (B, C), (B, D) lauter Vollcurven «sein sollen, nur möglich, indem alle 6 Polynomen A, B, C, D, E, F «vom gleichen Grade sind und alle 6 Flächen demselben Gebüsch «angehören.

«Antwort verspätet wegen Examenreisen, und daherigen beim «Witterungsumschlag vom 20. April zugezogenen Katarrh. Leider nur «aus Pflicht geschrieben, sonst unfähig in diese verhexten Zer-«fällungen einzutreten, bei denen ich kein treibendes Interesse «verspüre. Ihr treuer

«Bern, den 1. Mai 1855.

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

7.—12. V. 1855.

«*Gestrenger Signore!*

«Ihr ungnädiges Gripp-Schreiben nimmt mir fast den Muth neue «Fragen zu stellen. Sie haben keinen Massstab für die Verstandes-«und Gedächtnissschwäche Anderer, urtheilen bloss nach sich, da-«her keine Nachsicht. Bei meiner Erschlaffung kann ich nicht «immer mit hohen Sätzen rumpeln; zudem besteht meine *Grösse* ja «nur im *Kleinen*, im sorgfältigen allseitigen Erforschen desselben; und «wahrlich ich sage Euch», wer nur Grosses fressen will, sieht das «Gras nicht wachsen, kann die Welt nicht unmittelbar belehren. «Die meisten Menschen steigen vom Kleinen aufwärts; es giebt wenige «Bevorzugte, die Alles auf einmal und von Oben herab verschlingen, «es sind Elephanten, mehr als der alte Mezzo-Elefanti in Rom war.

«Ob Sie mir alle Fragen beantwortet haben, weiss ich nicht. «Von Ihren Katarrh-Formeln kann ich keinen Gebrauch machen, wie «schon früher bemerkt worden, glücklicherweise hatte ich mich schon «zuvor erinnert, wie sich die Sache verhält. — Einiges scheinen Sie «zu flüchtig angesehen zu haben, wie ich zeigen werde. Halten Sie «zu Gnaden, wenn ich dabei vielleicht Dinge vorbringe, die schon in «Früherem enthalten; in meinen Manuscripten kommt manches 3 bis «7 Mal vor. Uebrigens macht mich dies Kapitel über die nothwendi-«gen Punkte und Curven bei Flächen halb verrückt, ich drehe und «wende mich fortwährend noch darin, ohne zu Ende zu kommen.

«1. «Warum ich zu den $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Punkten dreier C^n nichts «sage?» weil ich sie schon zuvor betrachtet habe, sammt dem ana-

«logen Fall bei Flächen, worüber, wie mich dünkt, auch Andeutungen «in meinen Briefen enthalten; da ich aber vom Maximum sprach, so «war dieses $n^2 - n + 1$.

«Wenn Sie aus meinem angegebenen Verfahren «den schönsten «Unsinn» herleiten, so erinnere ich an das Echo: «Wie man in den «Wald hineinschreit, so schallt es zurück». Bei $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ darf «man nicht durch *zwei* der übrigen Punkte eine Gerade legen wollen, «sondern sachgemäss durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkte eine «Curve C^α, dann sind die Schlüsse gleich und führen zum richtigen «Resultat. Dass Sie dies übersahen, bezeugt Ihre Krankheit und Miss- «muth. Wenn Sie von Ihrer gestrengen Forderung abstehen wollen «*einen logisch gegliederten Beweis zu geben*, — was ja doch nicht «eigentlich Sache meiner Nase ist — so werde ich es noch einmal «versuchen, Ihnen das Verfahren ausführlicher anzudeuten. Das Ganze «ist ein Spiel mit Curvenbüscheln und Netzen, theils mit zerfallenen «Gliedern, ähnlich demjenigen, welches Sie am Ende Ihres Briefes «so sehr ennüirt, dass Sie es mit Formeln in die Luft sprengen, als «wäre es Sebastopol. Die *übergrosse Zahl Grundpunkte* des Netzes «fand ich schon in den 30er Jahren; sie brachten mich erst in grosse «Verwirrung; in Rom wurde darüber mit Rex [1]) verhandelt; 1846—49 «stiess ich von verschiedenen Seiten wieder darauf, theilte auch einiges «dem Schmützer [2]) mit. Indessen kam die Frage nicht vor, auf welche «Signore jetzt sehr drängt: *alle Ueberzahlen anzugeben*. Zur Sache.

«Der Hauptfall entsteht einfach so: Legt man durch die α^2 Grund- «punkte p eines B ($B^\alpha\ C^\alpha\ D^\alpha \ldots$) eine beliebige Curve A^n, $n > \alpha$, «so schneidet sie jedes Glied des Büschels, wie etwa B^α, noch in «$n\alpha - \alpha^2$ Punkten b, und wird durch diese Punkte b eine beliebige «Curve B^n gelegt, so schneidet sie die A^n noch in den *donnstigs* «$(n^2 - n\alpha + \alpha^2)$ Punkten q, durch welche ein G (C^n) gehen, wo- «von jede das Mitglied A^n in *gleicher* Gruppe von $n\alpha - \alpha^2$ Punkten «(b, oder c, oder d, ...) schneidet, wie je ein Glied B^α, C^α, D^α, ... «des gegebenen Büschels, [und durch die q, und durch jede dieser «Gruppen geht je ein B (C^n)].

«Haben nun irgend drei Curven n^{ten} Grads A^n, B^n, D^n eine «solche Zahl m Punkte q gemein, die

$$«> \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 \text{ und } < n^2,$$

«so hat A^n mit B^n, D^n noch $n^2 - m$ Schnitte, beziehlich b, d; man «suche dasjenige α, für welches

[1]) Jakobi. — [2]) Aronhold.

«$m > n^2 - n(\alpha - 1) + (\alpha + 1)^2$ und $m < n^2 - n\alpha + \alpha^2$,
etwa $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2 + x$, (wo $x = +$ und ganz),
«und lege sodann durch $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ der Punkte b sowie «d beziehlich die Curven B^α und D^α: so sind $B^n + D^\alpha$ und $D^n + B^\alpha$ «zwei Curven $B^{n+\alpha}$ und $D^{n+\alpha}$, welche die A^n in denselben «m Punkten q und $\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 1$ Punkten b sowie d «schneiden, zusammen in $m + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$ Punkten, «also in mehr als

$$«\frac{1}{2}(n + 1)(n + 3) - 3 + (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2$$

«und auch, wie leicht zu zeigen in mehr als

$$«n(n + \alpha) - \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

«Punkten, daher haben sie auch noch ihre übrigen Schnitte mit der «A^n gemein, im Ganzen $n(n + \alpha)$ Schnitte; diese weiteren Schnitte «bestehen aus solchen, welche 1) B^n und B^α, 2) D^n und D^α, 3) B^α «und D^α jeweilen mit A^n gemein haben; es können aber B^n und B^α «höchstens nur die $n^2 - m$ Punkte b mit A^n gemein haben (da B^n «nicht mehr hat), und D^n und D^α nicht mehr als die $n^2 - m$ Punkte «d, daher müssen B^α und D^α die noch übrigen

$$n(n + \alpha) - m - 2 \times (n^2 - m) = m + n\alpha - n^2 = \alpha^2 + x$$

«Punkte mit A^n gemein haben, allein da B^α und D^α nicht mehr als «α^2 Schnitte haben können, so muss $x = o$ sein. «*Folglich giebt es,* «*wenn kein Glied zerfallen darf, keine andere übergrosse Zahl m von* «*Grundpunkten q des G (C^n), als von der Form $n^2 - n\alpha + \alpha^2$*». «Dies ist das Verfahren; sollte demselben oder der Logik des Be- «weises, oder der Rechnung was fehlen, so ergänzen Sie es; meine «Nase ist zum Spüren — wozu haben Sie den Entwurzler? Signore, «c'est à vous d'y mettre la main!

«Bei Theilcurven stellt es sich z. B. so. Eine C^β hat (für sie «schneidende höhere Curven) $\frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ nothwendige Punkte «r; nehmen *in ihr* $n\beta - \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$ beliebige Punkte p, «und *ausser ihr* noch

$$«\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 —— n\beta + \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2)$$

«willkürliche Punkte q an: so geht durch beide (p und q) ein G (C^n), «welches *nothwendig* auch noch jenen Punkt r gemein hat, also im «Ganzen

$$«\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 3 + \frac{1}{2}(\beta - 1)(\beta - 2) = M$$

«Grundpunkte hat. Je zwei Glieder desselben, etwa A^n und B^n, «schneiden sich ausserdem noch in n^2 — M Punkten q_1, welche jedes-«mal mit jenen festen Punkten q in einer $C^{n-\beta}$ liegen, so dass «stets $C^\beta + C^{n-\beta}$ ein Glied des durch A^n und B^n bestimmten «Büschels ist, (wobei also nur $C^{n-\beta}$ veränderlich, dagegen C^β «stereotyp ist). — Auch hier ist das Maximum der Ueberzahl «$M = n^2 - n + 1$, und tritt ein, wenn $\beta = n - 1$. Ein ande-«rer Fall, wo beide Ueberzahlen m und M gleich werden, ist der, «wo $\alpha = 2$ und $\beta = n - 2$. Das Weitere — c'est encore à «vous . . . !

«Darüber noch *Eins* aus den höhern Staatsgeheimnissen. Ein «Prozess, wobei das G (C^n) mit $m = n^2 - n\alpha + \alpha^2$ q in Evidenz «tritt, fällt mir aus alter Zeit ein. Werden zwei Netze (= Gebüsch) «in einer Ebene N (C^n) und N (C^α), mit irgend einem dritten ebe-«nen Netze N (C^α) [auch N (g) oder N (p), d. i. Gerade oder Punkt] «projektivisch bezogen, so sind sie dadurch auch unter sich projek-«tivisch, so dass je zwei sich entsprechende Büschel B (C^n) und «B (C^α) eine Curve $C^{n+\alpha}$ erzeugen und die gesammten $C^{n+\alpha}$ «bilden ein N ($C^{n+\alpha}$) mit $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ Grundpunkten q. «(Quatsch! Die zwei Netze werden einfach unter sich projektivisch «bezogen, die Vermittlung ist nicht nöthig).

«Für diesen Hochverrath wird mich Signore durch gütige Aus-«führung der analogen Betrachtung über Flächen belohnen, was, wie «ich glaube, mir nicht ganz gelungen ist. Bei G (f^n) und G (f^α) «entsteht, wenn ich nicht irre, ein G ($f^{n+\alpha}$) mit übergrosser Grund-«curve $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$. — Dann: Werden zwei Netze N (f^n) und N (f^α) «mittels [unter sich] eines dritten N (f^n) projektivisch bezogen, so «erzeugen je zwei entsprechende Büschel B (f^n) und B (f^α) eine bor-«nirte Fläche $f^{n+\alpha}$; je zwei entsprechende G (f^n) und G (f^α) ein «G ($f^{n+\alpha}$) mit $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$: und diese Gesammten R (sowie auch «alle $f^{n+\alpha}$) gehen durch eine bestimmte Anzahl N fester Grund-«punkte. *Diese Zahl N zu finden.* Wahrscheinlich steht sie schon «in einem Ihrer Briefe, da je zwei $R^{n^2-n\alpha+\alpha^2}$ in einer $f^{n+\alpha}$

«liegen, — aber Sie können sie doch wiederholen. Bei N (f^2) und «N (f_1^2) ist N = 4, das bekannte Quadrupel.

«*Zweiter Theil des Geheimnisses,* dem Ersten analytisch wohl «gleich, synthetisch durch die Farbe verschieden und speziell. — *Sind «zwei Basen $f^n + 1$ und $f^\alpha + 1$ gegeben, so giebt es dieselbe Zahl N «von solchen Polen P, deren Polarebenen (letzte Polaren) zusammen«fallen.*

«*Zugabe.* Ort von P, dessen Polarebenen 1) in Bezug auf drei «gegebene Basen f^α, f^β, f^γ sich in einer Geraden g schneiden, und «Ort dieser g? oder 2) in Bezug auf 4 gegebene Basen sich in einem «Punkte Q schneiden und Ort des letzteren? Auch: wieviele g giebt «es noch bei 4 Basen? keine! — So noch Anderes, was ich im «Augenblick nicht weiss.

«2. Die Nase kann nochmals helfen. Dass durch n gegebene C^n, «die in n Ebenen E liegen und sich auf den Kanten in je n Punkten q «schneiden, ein B (f^n) geht und bestimmt ist, folgt so:

«In der ersten Ebene E_1 ist C^n_1 bestimmt durch

$$«\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1 \qquad = \qquad N \text{ Punkte } p;$$

«In E_2 ist C^n_2, ausser den n Punkten q in der «(E_1, E_2), bestimmt durch = N — n » p;

«In E_3 ist C^n_3, ausser den $2 \times n \cdot q$ in zwei Kan«ten, bestimmt durch = N — 2 n » p;

«In E_4 ist von den $3 \times n$ q *einer nothwendig,* also die C^n_4 bestimmt durch = N — 3 n + 1 » p;

«In E sind von den $(n-1) \times n$ q nothwendige «$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$, also C^n_n betimmt durch =

$$«N-(n-1)\,n+\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ Punkte } p;$$

«Also die Gesammtzahl der bestimmenden Punkte

$$«p = nN - \frac{1}{2}(n-1)\,n^2 + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6}(n+1)^{3|1} - 2,$$

«wodurch gerade der B (f^n) bestimmt wird. — (Legt man durch die n Cur«ven C^n eine f^{n+1}, so schneidet sie jede E noch in einer Geraden g und «alle n g liegen in einer Ebene; also die f^{n+1} sehr bornirt; des«gleichen $f^{n+\alpha}$.) Sind in n + 1 Ebenen *gleicherweise* n + 1 Curven «C^n gegeben, so liegen sie in *einer bestimmten* f^n.

«3. *Warnung:* Sind im Raume 4 Punkte und eine f^2 gegeben, «so giebt es 8 solche f_1^2, welche durch die Punkte gehen und der «f^2 umschrieben sind; auch bilden die 8 Berührungsebenen mit den «4 Flächen des durch die 4 Punkte bestimmten Tetraeders eine nette «Configuration. — Von unten herauf folgt dies leicht — analytisch «schwer — daher setzen Sie lieber an den folgenden Sätzen an, die «für Sie leicht und für mich nöthiger sind.

«4. Wenn von 3 Flächen 2 n^{ten} Grads A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei sich «in zwei Theilcurven gleichen (also $2\,n^{2\text{ten}}$) Grads schneiden, etwa (AB) «in $\gamma^{2n^2} + \gamma_1^{2n^2}$, (AC) in $\beta^{2n^2} + \beta_1^{2n^2}$, (BC) in $\alpha^{2n^2} + \alpha_1^{2n^2}$, so dass «also durch diese Curven 3 Flächenpaare n^{ten} Grades gehen, c^n und c_1^n, «b^n und b_1^n, a^n und a_1^n, die Glieder des durch jene 3 Flächen be«stimmten $G(f^{2n})$ sind, so gehören diese 3 Paare zu *einem Büschel* «dieses Gebüsches, d. h. von den 6 Theilflächen schneiden sich 4 mal «3 in einer Vollcurve R^{n^2}, und alle 6 Flächen gehören zu einem kleinen «$G(f^n)$, in dessen n^3 Grundpunkten q sich alle 4 Curven R^{n^2} schnei«den (?). Die $(2\,n)^3$ Grundpunkte p des grossen $G(f^{2n})$ zerfallen in «8 Gruppen zu je n^3 p, in jeder R^{u^2} liegen Gruppen. Die 3 Flächen«paare a und a_1, b und b_1, c und c_1 im $G(f^n)$, sind wie die Gegen«flächen eines vollständigen *Vierkants.*

«Fallen nun die Curven γ und γ_1 in *eine* γ_0 zusammen, so sind «die Flächen A und B sich längs derselben umschrieben und die durch «dieselbe gehende Fläche c_0^n ist als Doppelfläche (c^n und c_1^n vereint) «anzusehen; ebenso vereinigen sich die 4 Curven R^{n^2} paarweise, etc. «Vereinigen sich ferner auch β und β_1 in eine β_0, längs der sich A «und C berühren und durch die eine doppelt gedachte Fläche b_0^n «geht, so vereinigen sich die 4 R^{n^2} in eine einzige $R_0^{n^2}$, Schnitt (b_0^n «c_0^n), und alsdann ist das Flächenpaar a^n und a_1^n zu den Berührungs«flächen c_0^n und b_0^n zugeordnet harmonisch (alle 4 gehören zu einem «Büschel um R_0). Also: „*Wird eine gegebene Fläche A^{2n} von beliebigen «zwei Flächen b_0^n und c_0^n in zwei Curven* $\beta_0^{2n\cdot n}$ und $\gamma_0^{2n\cdot n}$ *ge«schnitten, und werden ihr längs diesen Curven irgend zwei Flächen «B^{2n} und C^{2n} umschrieben, so schneiden sich diese allemal p l a n, «d. h. in 2 Theilcurven α^{2n^2} und $\alpha_1^{2n^2}$, durch welche zwei (mehr als «bestimmte) Flächen a^n und a_1^n gehen, die sich allemal mit jenen «Flächen b_0 und c_0 in derselben Curve R_0 schneiden und zu ihnen har«monisch sind.*“ Alle Paare a^n und a_1^n bilden also ein Involutions«System, welches b_0^n und c_0^n zu Asymptoten hat. — Darf man um«kehren? und sagen: Wenn zwei Flächen $2n^{\text{ten}}$ Grads A^{2n} und B^{2n} «einander *voll umschrieben* sind, so geht durch die Berührungscurve «immer eine Fläche n^{ten} Grads, $c_o{}^n$. und wenn zwei Flächen B^{2n} und «C^{2n} einer dritten A^{2n} voll umschrieben sind, so schneiden sie sich «*plan,* und die beiden Planflächen a^n und $a_1{}^n$ gehen durch den Schnitt «R_o der Berührungsflächen $b_o{}^n$ und $c_o{}^n$, und sind zu diesen harmo-«nisch. He!? für $n = 1$ ist es so. Folgende Umkehrung ist er-«laubt: „*Schneiden sich zwei Flächen B^{2n} und C^{2n} plan und man legt «durch den Schnitt $R_o{}^{n^2}$ ihrer Planflächen a^n und $a_1{}^n$, irgend ein Paar «zu diesen harmonischen Flächen $c_o{}^n$ und $b_o{}^n$, so schneiden letztere jene «ersten Flächen B^{2n} und C^{2n} (oder auch C^{2n} und B^{2n}) in solchen Curven «γ_o und β_o, längs denen ihnen eine und dieselbe Fläche A^{2n} umschrie-«ben ist.*“ Also giebt es eine $S(A^{2n})$, welche den 2 gegebenen B^{2n} «und C^{2n} gemeinsam und vollumschrieben sind, und die Schaar Paare «Berührungsflächen $c_o{}^n$ und $b_o{}^n$ haben die Planflächen a^n und $a_1{}^n$ zu «Asymptoten. Fixirt man aus der Schaar $S(A^{2n})$ irgend zwei Glieder «A^{2n} und $A_1{}^{2n}$, bezeichnet die Berührungsflächen von $A_1{}^{2n}$ mit B^{2n} und «C^{2n} beziehlich durch $c_1{}^n$ und $b_1{}^n$, so müssen sich auch A^{2n} und $A_1{}^{2n}$ «plan schneiden und ihre Planflächen, etwa d^n und $d_1{}^n$, müssen (mit «$c_o{}^n$, $b_o{}^n$, a^n, $a_1{}^n$) durch dieselbe $R_o{}^{n^2}$ gehen, und sowohl zu $c_o{}^n$ und «$c_1{}^n$, als $b_o{}^n$ und $b_1{}^n$, als a^n und $a_1{}^n$ harmonisch sein. Also: «Ist ein «Flächenpaar B^{2n} und C^{2n} einem andern A^{2n} und $A_1{}^{2n}$ voll umschrie-«ben, so schneidet sich jedes Paar plan, und die Planflächen, a^n u. $a_1{}^n$, «des einen Paars, sind zu denen des andern, d^n u. $d_1{}^n$, harmonisch.» Etc. «— Haben Sie die Güte dies bald ergänzend zu verifiziren; mir wird's «sauer — Ihnen ist es Erholung, oder wie man sagt «ein gefundenes «Fressen». Stossen Sie sich nicht an «*plan*», hab' es bloss hier zur «Kürzung gebraucht. Schon vor 30 Jahren, in meiner ersten Ab-«handlung, habe ich vom ersten Satze den Anfang gegeben, s. *Crelle*'s «Journ. Bd. I. S. 46, Satz VI.

«Ferner noch die vielleicht unsinnige Frage: Wenn sich f^m und «f^n längs einer Curve R_1 berühren und längs R_2 schneiden, sind dann «diese Curven selbständige (organische) Theile der $R^{m \times n}$, d. h. «sind sie solche $R_1{}^x$ und $R_2{}^y$, wo $2x + y = mn$, und durch welche «etwa solche Flächen f^α und f^β gehen, wo $2\alpha + \beta = m > n$ ist? «— Können von 3 Flächen A^{2n}, B^{2n}, C^{2n} je zwei einander voll um-«schrieben sein? scheint nicht; geht es für 3 Curven $2\,n^{ten}$ Grads? «Für Kegelschnitte schon vor 30 Jahren ausgebeutet.

«5. Durch drei beliebige Curven C^2 ist das $N(C^2)$ bestimmt; «zunächst die Trippelcurve $C_o{}^3$ und durch diese die Basis C^3. Wenn «nun aber von den gegebenen drei C^2 1) zwei einander *doppelt* be-

«rühren, oder 2) wenn zwei die dritte *doppelt berühren,* oder 3) wenn «je zwei sich *doppelt berühren*, wie ist dann die Basis C^3 und die «Trippelcurve $C_0{}^3$ beschaffen? — Von drei f^2 können zwei der dritten «voll umschrieben sein und *einander* selbst in zweien Punkten be-«rühren. Wie müsste f^3 beschaffen sein, wenn sie dieselben zu Po-«laren haben sollte?

«Oder welche besondere Eigenschaft hat dort das N (C^2) und «hier das G (f^2)?

«6. Wenn ein Kegel K^2 durch 5 feste Punkte p gehen und eine «feste Ebene E *streifen* soll, welches ist dann der Ort seines Scheitels «(eine Curve in der Ebene E)? Oder: Wenn eine Curve C^2 fünf «feste E berühren und durch einen festen p gehen soll, welchen Ort «hat dann ihre Ebene? (einen Kegel, dessen Scheitel in p), und in «welcher Fläche liegen alle C^2?

«7. Welche Enveloppe hat die S (K^2), die durch 5 feste p gehen «und ihre Scheitel in einer festen Geraden g haben? Oder: zu welcher «Fläche liegt die S (C^2), welche 5 gegebene E berühren und deren «Ebenen sämmtlich durch eine feste g gehen?

«Aus Furcht, dass diese Fragen (6 u. 7) schwierig sind und ich «die Antwort im Augenblick nicht gerade nöthig habe, darf ich nicht «weiter gehen.

«Die grössten Mathematiker werden erkannt und berufen: *Wolf,* «*Lazarus* und *Marquis;* ich grüsse und gratulire dem «Nous vivons «entre nous», dass er einen ihm widerlichen Anblick los wird.

«Sie haben mir nie gesagt, was aus der Schuster-Forderung ge-«worden ist!

«Ueber meine Reise habe ich noch keinen definitiven Plan ge-«fasst. Nichts lockt mich an; Urlaub noch nicht durch die Kanzlei «angelangt (natürlich habe ich die Vorlesungen nicht begonnen); Gastei «ist mir verordnet, kann auch nichts helfen, ganze Darmkanal ist «futsch; Paris wird unverschämt theuer sein, müsste zuvor an Jemand «schreiben, aber geschieht nicht; Bern ist auch nichts, giebt Rheu-«matismen und Gicht und Signore taglöhnert: also wohin? was «machen? Hier komme ich mit der Arbeit auch nicht vorwärts, kann «nur ein paar Stunden täglich arbeiten, ohne Kraft, Gedächtniss und «Phantasie, am Abend, was sonst die beste Zeit war, gar nicht mehr. «Es ist schade, dass der fromme Wunsch, den ich schon voriges Jahr «hegte, nicht zu realisiren ist, nämlich meine Redaction gewisser-«massen unter Ihren Augen auszuführen, unter Ihrer plötzlichen (täg-«lichen) Hülfe im Ausdruck, in der Anordnung und Combination, in «der Richtigkeit der Formeln (Gedächtniss), wobei aber doch meine «Schulmeister-Methode befolgt würde, was ohne Zweifel später auch «Ihre eigenen Arbeiten etwas *herablassender* gestalten und sie dem «Publikum leichter und zugänglicher machen müsste (denn selbst «*Nudel* bezeugte, dass er sehr viel von meinem *Spinnen* gelernt). «Aber wenn diess auch nur je in einer Stunde geschehe, etwa spät «Abends, und Sie sonst mit allem Spazieren verschont blieben, da «mir rasches Gehen immer saurer wird, so würden Sie sich doch «schwer darein finden, weil es oft mehr Kleinliches, Ihnen werthlos «Scheinendes zu ordnen, als Stämmiges zu entwurzeln gäbe. Sonst «scheint mir, müsste auf diese Weise etwas zu Stande kommen.

«Mit einem andern Wunsch, dass diese Lieferung Sie ohne «Katarrh und Grippe, in guter Laune treffen möge, grüsst Sie und «die Andern

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«Berlin, vom 7.—12. Mai 55.

(Das Ende von Nr. 1 und Nr. 4. 5 bald.)

Steiner an Schläfli.

12. Juni 1855.

«*Lieber Freund!*

«Diesmal ist mir Ihr Schweigen unerklärlich. Auf Ihren Brief «vom 1. Mai antwortete ich am 12. Mai, gab Ihnen ausführliche Aus-«kunft über das beanstandete $n^2 - n\alpha + \alpha^2$ und über die n C^n in n E, «nebst andere Dinge, und fügte neue (für Sie leichte) Fragen bei mit «der dringenden Bitte, sie nach wenig Tagen zu *bejahen*, weil ich sie «im Augenblick nöthig brauche. Umsonst harre ich seitdem auf Be-«scheid; weiss nicht, ob Sie krank sind, oder Launen haben, oder den «Brief nicht erhalten. Was es auch sein mag, werde ich hoffentlich «mit umgehender Post aus dieser Nichtwissens-Qual befreit werden.

«Schon am 18. und 19. Mai wollte ich Ihnen meinen Triumph «über die 10 Glieder $f^2 = 2$ E im allgemeinen $N(f^2)$ nebst vielen andern «Eigenschaften des letztern melden; allein da ich täglich Ihrer Antwort «gewärtig war, so schob ich es auf; jetzt muss ich es lassen, bis mir «kund wird, wie es steht. —

«Seitdem habe ich mich in's Gebüsch verloren und schrecklich «gequält um mich darin zurecht zu finden und wieder herauszukommen; «nämlich ich habe das allgemeine $G(f^2)$ und seine R^6 *secirt* und *anatomirt*; «es ergaben sich dabei fast gespensterhafte geradlinige (theils abwickel-«bare) Flächen, die einander längs charakteristischer Curven umschrieben «sind; die Schaar Quintupel, $S(Q_5)$, habe ich so ziemlich aufgefressen, «sie spielen eine Hauptrolle; jedes Q_5 hat 10 Diagonalebenen und allen «insgesammt ist von der Natur eine sehr tiefdurchdachte Stellung an-«gewiesen. — Jedoch Eins, was vielleicht ganz leicht, macht mich seit «5 Tagen halb verrückt, nämlich folgendes. Die Pole Q einer E in «Bezug auf die einzelnen Glieder eines $G(f^2)$ liegen in einer f^3; und «bewegt sich ein Pol P in derselben E, so schneiden sich seine ge-«sammten Polarebenen stets in je einem Punkte Q, dessen Ort die «nämliche f^3 ist, so dass also jeder Punkt Q einerseits der Pol eines «bestimmten Gliedes f^2 ist und andererseits einem bestimmten Pol P «in der E entspricht, und damit auch P und f^2 sich entsprechen und «projectivisch sind; *zudem berührt die Polarebene von P in Bezug auf* «*f^2 die Fläche f^3 in Q.* Nun folgt leicht, dass wenn sich P längs einer «Geraden G (in E) bewegt, dann sein conjugirter Q eine R^3 (auf f^3) durch-«läuft; und dass die Pole Q jedes in dem $G(f^2)$ enthaltenen Büschels «$B(f^2)$ ebenfalls in einer R^3 liegen; *aber nun vermag ich nicht zu be-* «*weisen: «dass die diesem $B(f^2)$ entsprechenden Punkte P in einer G* «*liegen; oder dass im ersten Falle die den Punkten P in der gegebenen* «*G entsprechenden f^2 einen Büschel bilden.*» Meine Bemühungen darum «lieferten viele curiose Schulmeister-Sätze.

«Mein Aufsatz über Normalen aus P auf C oder f^n ist endlich «im Februarheft des *Liouville* Journals erschienen, übersetzt von einem «Preussischen premier Lieutenant *v. Horn,* bei den schwereren Stellen, «wie er mir schreibt, mit Dr. *Wöpke's* Hülfe. Kürzlich ersuchte ich «den Hauptsetzer des hiesigen Journals, den Redacteur desselben ge-«legentlich an Ihre Abhandlung zu erinnern; er versprach mir es zu «thun, obschon *Crelle* nur bei ihm imponirenden Persönlichkeiten von «der chronologischen Folge abweiche.

«Prof. *Schönemann,*[1]) der Ende Mai einige Tage hier war, meinte «ich sollte versuchen, Sie hieher zu bringen. Es ist schwer, weil «Sie zu wenig bekannt sind, und doch wären Sie in vieler Hinsicht «der geeignetste (z. B. über Arbeiten Anderer zu berichten). Ich werde «Morgen oder Uebermorgen bei einem Ministerialrath auf den Busch «schlagen. Von solchen, die bisher im Ministerium genannt worden

[1]) Schönemann, Theodor, geb. 4. IV. 1812. Prof. der Mathematik.

«sein sollen, wären *Kummer* (Breslau), *Weierstrass* (in Braunsberg), «der grosse *Heine* (in Bonn). — *Schönemann,* der sich selbst mit Eli-«mination beschäftigt hat, klagt, dass Sie ihm kein Exemplar Ihrer «Wiener-Abhandlung geschickt haben. Was soll man da sagen? — «Ziegel!

«In *Crelle* finden sich Aufsätze vom besagten *Weierstrass;* eli-«miniren Sie ihn!

«Im vorigen Brief habe ich Ihnen über mein Befinden, über «meine Unschlüssigkeit, etc. gemüthlich geklagt; Ihr Schweigen hat «diesen Jammer noch vermehrt, jetzt weiss ich erst recht nicht, was «ich *thun* oder *lassen* soll. Am 22. oder 23. d. Monats muss ich wohl «endlich nach Gastein abreissen, zuvor erwartet Antwort

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

Schläfli an Steiner.

«Bern, den 17. Juni 1855.

«Mein Unwohlsein hat einen entsetzlichen Schlendrian nach sich «gezogen. Da ich nicht *sogleich* die Antwort auf Ihren Brief vom 12. «Mai in Angriff nahm, so ist durch stetes Aufschieben diese lange «Verzögerung entstanden. Um mich einigermassen zu entschuldigen, «will ich anführen, dass ich an den 4 ersten Wochentagen Morgens «von 6—8 und von 10—12 Unterricht habe, dass der Nachmittag «durch die grosse Hitze die ernste Arbeit erschwert, und dass in «die letzte Zeit auch allerlei Commissionsgeschäfte gefallen sind. «Mein Schnupfen hat auch auffallender Weise während der grossen «Hitze fortgedauert und mir den Schlaf gestört. Ich hoffe nun, die «jetzige Abkühlung werde zu meiner Erholung beitragen; aber leider «kommt nun die Vorsichtsrechnung.

«Da ich die Antwort nicht länger aufschieben kann, so ant-«worte ich für jetzt nur auf Ihren letzten Brief vom 12. Juni. — «Sie betrachten da die Pole Q einer Ebene E in Bezug auf die Glieder «f eines Gebüsches zweiten Grades; jedem Punkt Q entspricht in «der Ebene E ein Punkt P, dessen sämmtliche Polarebenen sich in Q «schneiden. Es ist *richtig,* dass die Polarebene von P in Bezug auf «die entsprechende Gebüschfläche f die Ortsfläche Q dritten Grades «im entsprechenden Punkt Q *berührt.* Aber, wenn Sie aus dem «Gebüsch einen Büschel herausnehmen, so liegen die entsprechenden

«P nicht in einer Geraden, sondern in einer Curve *fünften* Grades. «Setzen Sie nämlich als Ort von P zuerst eine Gerade, so durchläuft «Q eine auf jener Fläche^3 liegende R^3; setzen Sie dann irgend einen «Büschel aus dem Gebüsch der f, so durchläuft der Punkt Q wieder «eine auf derselben Fläche^3 liegende Curve S^3. Beide R^3 und S^3 «liegen auf einer und derselben Fläche zweiten Grades, gehören aber «hier zu verschiedenen Schaaren und schneiden sich daher in 5 Punkten «Q; diesen entsprechen also 5 auf jener Geraden befindlichen Punkte «P; folglich entspricht dem Büschel f eine in E liegende Ortscurve «P 5$^{\text{ten}}$ Grades. Ich würde es nicht wagen, die Punkte P und die «ihnen entsprechenden Gebüschflächen f *projectivisch* zu nennen, weil «keine *Proportionalität* der beide Doppelschaaren characterisirenden «Constanten stattfindet.

«Sie gehen gar nicht auf die Mängel ein, die ich mit vollem «Recht an dem Beweise für das Maximum $n^2 - n + 1$ gerügt habe. «Es frägt sich ja eben, wie wir in den Wald hineinschreien sollen. «Wenn die logische Kette nicht geschlossen ist, so giebt es keinen «electrischen Strom.

«Die Sachen sind immer noch zu schwer und zu bunt, und ich «jetzt durchaus nicht fähig, sie zu bewältigen. — Gastein liegt im «Salzburgischen; wenn ich einmal Ihre Adresse weiss, so werde ich «dorthin schreiben können. — Wenn Sie bereit sind, später einmal «einen Aufsatz von mir der Berliner-Akademie vorzulegen, so arbeite «ich gerne für diesen Zweck etwas aus.

«Ich danke Herrn *Schönemann* für sein Wohlwollen und lasse «ihn grüssen.

«Die Schusterforderung ist als verjährt anerkannt, wie mir «*Leuenberger* gesagt hat.

«Sie wegen meiner Schläfrigkeit in der Correspondenz um Nach«sicht bittend, und Sie herzlich grüssend

«Ihr treuer und dankbarer

L. Schläfli.»

Steiner an Schläfli.

«*Lieber Freund!*

«Diesmal dauerte es lange bis ich Berlin verliess, bis 5. Juli, «wiewohl ich schon am 18. Mai im Besitz des Urlaubs war. Ohn«mächtig quälte ich mich mit theils schon früher behandelten Be-

«trachtungen ab, bis ich zuletzt gar nichts mehr davon verstand und «nicht mehr wusste, was ich eigentlich wollte. Dann kramte ich 8 «Tage herum mit Ordnen und Einpacken, und ebenso lange trödelte «ich auf der Reise bis hieher, in Leipzig, München und Salzburg. «Durch Ihren Missmuth ist meine Arbeit sehr ins Stocken gerathen; «Sie verschmähten die Kleinigkeiten, wollen immer nur Neues und «Grosses fressen, während ich nicht umhin kann, an kleinlicher Ab-«rundung und möglicher Vollständigkeit zu knabern. Eigentlich bin «ich jetzt fast weiter zurück, als voriges Jahr; an die Flächen 3ten «Grads bin ich noch gar nicht gekommen, und die Ausstellung war-«tete nicht auf mich.

«Heute nahm ich das 11te Bad; verspüre noch keinen grossen «Erfolg; die ersten Bäder bewirkten den Buckel voll Rheumatismus, «der noch nicht ganz weg ist. Die Flora kommt mir hier einfältig «vor; einige Cimen, von der Höhe des Ochsen, wären hübsch, wenn «man erst oben wäre; aber meine Kraft langt nicht. Am 5ten August «werde ich wohl das 21ste und letzte Bad nehmen und am 6ten oder «7ten von dannen ziehen. An der Dauer dieses Briefes ist zu ermes-«sen, ob Zeit genug ist, falls Sie mir hieher etwas melden wollen.

«Es war mein Plan, von hier nach dem Engadin und Chur zu «gehen, aber die ersten 8 Stunden müssen zu Fuss oder à cheval und «theils über Schnee gemacht werden, was mir nicht ansteht. Will «ich nach der Schweiz kommen, so muss ich also über Salzburg nach «München zurück. Was habe ich aber davon, wenn ich schon wieder «nach Bern komme? Die gräulichste Langeweile! Signore taglöhnert «um schnöden Sold, macht Hausknechts-Rechnungen, bis ihm Kopf und «Herz bricht; bleibt mir nur übrig, mit *Rettig* Klaglieder zu singen, «oder mit Mutz auf die St. Petersinsel zu gehen. Wo bekäme ich «ein gesundes Sonnseitzimmer? Ist der Stern nicht zu ordinär? Spre-«chen Sie mit *Leuenberger*. — Wenn ich komme, werde ich mich «wohl in St. Gallen, Zürich, Aarau, Langenthal, Burgdorf oder Kirch-«berg je 1—3 Tage aufhalten.

«Am 2ten Juli der *Reimer*'schen Buchhandlung das versprochene «Päckli Dissertationen übergeben: es enthält nebst Gutem auch Schund; «was für Sie und Andere spezifisch ist, können Sie gleich ausschei-«den und vertheilen; das Uebrige ordnen und sich *auch einmal ob-«jectiv verhalten* und *klug überlegen*, für wen jedes Stück am besten «passe, damit wir dann zusammen berathen, wem es angeboten wer-«den soll; meine Grossmutter, eine Elsässerin, pflegte zu sagen: «es

«giebt der Nasen zwoo, was die eine nicht will, ist die ander' froh.»
«Die Medicinischen werde ich selbst theilen oder loosen lassen.

«Einige Aufgaben, die ich in Berlin noch hatte, weiss ich im «Augenblick nicht mehr, Ihre Laune lähmte mich noch mehr; viel-«leicht liegen sie unten in der Koffer — in Bern werde ich aus-«packen.

«Frisch! täglich gerechnet bis Sie sturm werden, dann mag am «Abend die Gräfin ergötzen.

«Seien Sie freundlichst gegrüsst und desgleichen Rettig, Schni-«der, Mutz, Leuenberger *und Frau*, etc.

«*Bad Gastein*, den 25^{ten} Juli 1855.

«Ihr dankbarer

J. Steiner.»

«N. B. Bei der Abgabe der Dissertationen sprach ich Reimer «selbst, erzählte ihm eine $^1/_2$ Stunde von Monsignore und klagte, dass «Ihre Abhandlung — die doch wichtiger als Vieles des Erschienenen «sei — noch nicht gedruckt worden sei. Er interessirte sich dafür «und versprach die Aufnahme zu beschleunigen. Da immer 2—3 «Hefte in Arbeit sind, ehe sie ausgegeben werden, so kann es also «doch noch 6 Monat dauern, bis Ihre höchste Arbeit erscheint.

«Bei meiner Abreise war Dr. *Borchart* zum Mitglied der Akade-«mie vorgeschlagen.»

Schläfli an Steiner.

«*Herr Professor!*

«Ich habe früher einmal gegen Sie Zweifel geäussert, über den «Satz von den Brennpunkten dreier einem Vierseit eingeschriebener «Kegelschnitte (*Crelle* 45. Mai 1852). Was einen stutzig machen kann, «ist, dass man auf den ersten Blick glaubt, der Satz gelte ausschliess-«lich von den Distanzen. Er ist aber dort unvollständig ausgedrückt, «insofern auch von den Projectionen der Distanzen etwas ausgesagt «werden kann.

«Es seien a, α die zwei reellen Brennpunkte des ersten Kegel-«schnitts, p die Strecke auf der Mittelpunktsgeraden vom Mittelpunkt «des zweiten bis zum Mittelpunkt des dritten Kegelschnitts; b, β, q «und c, γ, r haben der Reihe nach ähnliche Bedeutung; est ist also «$p + q + r = o$. Den Winkel, den die Distanz (ab) mit der als «positiv angenommenen Richtung der Mittelpunktsgeraden bildet, be-«zeichne ich mit $\angle$ (ab). Dann ist

$$\begin{aligned}
&\angle(a\,b) + \angle(a\,\beta) + \angle(\alpha\,c) + \angle(\alpha\,\gamma) = \angle(\alpha\,b) + \angle(\alpha\,\beta) \\
&\qquad + \angle(a\,c) + \angle(a\,\gamma) \\
&= \angle(b\,c) + \angle(b\,\gamma) + \angle(\beta\,a) + \angle(\beta\,\alpha) = \angle(\beta\,c) + \angle(\beta\,\gamma) \\
&\qquad + \angle(b\,a) + \angle\,b\,\alpha) \\
&= \angle(c\,a) + \angle(c\,\alpha) + \angle(\gamma\,b) + \angle(\gamma\,\beta) = \angle(\gamma\,a) + \angle(\gamma\,\alpha) \\
&\qquad + \angle(c\,b) + \angle(c\,\beta)
\end{aligned}$$

«und die drei Werthe

$$\begin{aligned}
«(a\,b)\,(a\,\beta)\,(\alpha\,c)\,(\alpha\,\gamma) &= (\alpha\,b)\,(\alpha\,\beta)\,(a\,c)\,(a\,\gamma), \\
«(b\,c)\,(b\,\gamma)\,(\beta\,a)\,(\beta\,\alpha) &= (\beta\,c)\,(\beta\,\gamma)\,(b\,a)\,(b\,\alpha), \\
«(c\,a)\,(c\,\alpha)\,(\beta\,b)\,(\gamma\,\beta) &= (\gamma\,a)\,(\gamma\,\alpha)\,(c\,b)\,(c(\beta
\end{aligned}$$

«sind mit $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$ proportional, so dass also die Summe der drei «umgekehrten Werthe gleich Null ist. Die Vorzeichen der Distanzen «sind so einzurichten, dass obige sechs Winkelsummen nach dem Modus «2π congruiren. Vom Brennpunkt der Parabel gilt nicht nur, dass «das Product seiner Entfernungen von beiden Brennpunkten irgend «eines andern Kegelschnitts constant ist, sondern dass eine feste Ge-«rade den Winkel zwischen diesen Entfernungen halbirt.

«Bern, den 7. Juli 1857.

L. Schläfli.»

Schläfli an Steiner.

«*Lieber Freund!*

«Ich kann nun den Punkt U, wo die bekannte Fusspunktlinie «ihre Umhüllte berührt, bestimmen. Er liegt eben so weit von «dem Scheitel der Parabel als der Berührungspunkt jenes dem Drei-«seit eingeschriebenen Kegelschnitts, welcher die Leitlinie der Parabel «im Höhenpunkt berührt.

«Ich möchte Sie bitten, diesen Abend um 8 Uhr zur Gräfin zu «kommen.

«Mit freundlichem Gruss *L. Schläfli.*»

Bern, 11. September 1855.

Der Briefwechsel stockte den ganzen Winter 1855/56. Zum nachfolgenden Brief finden sich 2 Concepte, eines vom 31. Oktober 1855 und eines vom 20.—23. April 1856. Es bestätigt dies die Behauptung *Steiners*, dass er *Schläfli* stets habe schreiben wollen, aber nichts zu Stande gebracht habe.

1856. Steiner an Schläfli.

Berlin, 20^{ten} April 1856.

«*Lieber Schläfli!*

«So wirkt das Verhängniss! so weit hat uns Ihr vorjähriger «Kathar auseinander gebracht. Es ist nicht Rache für die acht Höllen-«tage in Bern, sondern mein geistiges Beharrungsvermögen (Inertia). «Es liegen sogar freudige Briefanfänge vom 4^{ten} October (Paris) und «November (Berlin) vor mir, auch spätere, aber es wollte nicht gehen, «weil die Kraft, Lust und der Inhalt fehlten, auch das Vertrauen: dass «Sie im eigenen Interesse nicht thun würden, was ich verlange. — «Der seitherige Verlauf ist so:

«In Paris traf ich erst Niemand, Alles verreist, 11 leere Besuche; «nach 8—10 Tagen kamen sie an. Am ersten Mittwoch des October «lud mich *Sturm* mit *Bertrand* und *Catalan* zum Frühstück (11—5 Uhr) «ein. Als ich dabei von Ihrem Schicksal mit *Liouville* (*Crelle* und *Wien*) «sprach, war *Sturm* sehr gerührt und platzte mit dem Urtheil heraus: «dass Ihr Aufsatz über elliptische Transcendenten in *Grunert's* Archiv «das Beste wäre, was er über denselben Gegenstand gelesen habe.» «Potz Donnerwetter! wie zuckte das mir durch die Glieder. Nun hatten «auch die beiden Andern grosses Interesse und drängten, *Sturm* solle «die Abhandlung übersetzen; endlich wollte *Bertrand* sie von einem «seiner Schüler übersetzen lassen und *Sturm* sollte ein Paar Vorworte «machen; doch jener ist *Franzose* und dieser ist leider gestorben. «Als ich von Ihren andern Arbeiten (Wiener Abhandlungen) sprach, «musste ich — zu Ihrem grossen Leid! — auch Ihre *unmenschliche* «Seite berühren, zur Erklärung, warum Sie noch keine Exemplare ge-«schickt haben und meine Befehle fruchtlos blieben. Da baten mich «*Sturm* und *Bertrand*, die Deutsch lesen, Sie nochmals zu *puffen*, was «sogleich (folgenden Tags) ich zu thun versprach; aber es gelang mir «nicht, — auch entmuthigte mich die wahrscheinliche Erfolglosigkeit, «Hätte ich Macht über den Ziegel, so würde ich jetzt noch donnernd «befehlen sogleich Exemplare zu schicken und zwar an: 1) die Akademie, «2) *Poncelet*, 3) *Lamé*, 4) *Liouville*, 5) *Chasles*, 6) *Bienaymé*, 7) *Binet*, «8) *Hermite*, 9) *Bertrand*, 10) *Serret*, 11) Dr. *Wertheim*, 12) Abbé «*Moigno*, 13) Dr. *Wöpcke* (arabisch drauf), 14) *Terquem* (ein Wort «hebräisch drauf), und Andere.

«Wenn dieser Befehl binnen 8 Tagen nicht ausgeführt wird, so «hol Sie . . . .

«Auf ein Exemplar setzen Sie:
A l'Académie des Sciences
hommage de l'auteur.
«oder: hommage de la part de l'auteur
«auf die andern:
A Monsieur N.
Hommage de la part de l'auteur.
«Alle Exemplare in ein Packet und darauf die Adresse
A Monsieur
Monsieur le Président
de l'Académie des Sciences Impériale
à Paris.

«und das Paket der Gesandtschaft übergeben in der Kramgasse N. 48 (?) «höflich ersucht um Beförderung. So mache ich es hier, warum sollt's «in Bern nicht auch gehen? zum Donnstig! Den meisten habe ich «von Ihnen gesprochen und Exemplare versprochen — wird mich der «Ziegel zum Lügner machen?! Erst vor 4 Wochen erhielt Prof. «*Schönemann* endlich ein Exemplar, er freute sich dennoch und dankt.

«Leider sah ich *Liouville* nicht; aber ich habe *Vielen so* ein«dringlich ans Herz gelegt, mit ihm Ihretwegen zu sprechen, dass «es geholfen hat; im einen Heft (glaube November) beginnt Ihr Auf«satz und im folgenden ist er beendet.

«[N. B. zu Oben. Wenn Sie etwa ein kleines Sätzchen «für *Liouville* oder *Terquem* bereit haben, so können Sie «es in dessen Exemplare hineilegen und mit dünnem «Faden zubinden (auch so g'macht); an *Terquem* (-Türk«heim) können sie Deutsch schreiben, von mir sprechen, «und wenn Sie irgend ein Wort hebräisch beisetzen, werden «Sie feurige Kohlen auf seinem Haupte sammeln.]»

«Meine vorjährige Verwendung bei *Reimer* zu Gunsten Ihrer «hiesigen Abhandlung blieb deshalb erfolglos, weil *Crelle* bereits mehr «als 2 Bände zum Voraus hatte drucken lassen; so sagte mir *Reimer*, «als ich nach meiner Rückkunft mich flugs danach erkundigte. Bei «diesem Anlass verlangte *Reimer* von mir Rath über einen neuen Re«dacteur; ich schlug ihm vor und leitete es ein, so dass Dr. *Borchardt* «es wurde; als Unterstützer werden auch *Steiner, Schellbach, Kummer* «und *Kronecker* genannt. Die noch vorräthigen, dem alten Redacteur «eingesandten Abhandlungen wurden meist den Autoren zurückgeschickt;

«bei der Ihrigen protestirte ich, ob ich sie aber durchbringen werde, «weiss ich noch nicht; Anstand ist: weil Sie etwas von 22 Bogen «darauf schrieben, wovor man Respect hat, siehe Exempel an *Oettinger* «und *Gudermann. Borchardt* schlug vor, Ihnen einen Verleger zu suchen, «er wolle helfen; aber die Zeitumstände für solche Werke sind ungünstig; «ich ging desshalb bereits 2 mal zu *Reimer,* aber traf ihn nicht. «Sollte sich ein Verleger finden, so wären Sie wohl auch bereit, das «Werk zu ergänzen (den *Liouville*'schen Brocken einzuverleiben) «und geeignet zu redigiren. Geben Sie darüber Antwort. Ob ich «etwas Honorar erpressen kann, ist zweifelhaft. Findet sich kein Ver-«leger, so *zwenge* ich es durch fürs Journal. —

«Im 4ten Heft des 50sten Bandes wird Signore durch *Cayley* «verherrlicht.

«*21. April.* In Paris wollte ich Mr *Terquem* mit Ihrem mira-«ckelösen Satz über die Fusspunktenlinie G beim Dreieck beglücken, «aber ich konnte damit nicht zu Rechte kommen. Hier zurückge-«kehrt sollte es mein erstes Geschäft sein, allein die Verwickelung «ward immer grösser, ich gerieth immer tiefer hinein, endlich fing «es an zu tagen, alles Wunderbare verschwand, so dass zuletzt am «7. Januar ein gerade nöthiger Klassen-Vortrag daraus werden konnte, «wie Sie aus dem Monatsbericht wohl schon ersehen haben. Als ich «am 31. Januar einen Plenum-Vortrag halten musste und nichts wusste, «nahm ich etwas von der f^3, was zu meinem Erstaunen bei Freund «und Feind, bei Geweihten und Laien Furore machte. Den ersten «Vortrag wollte ich mit den zahlreichen Nebensätzchen ausarbeiten «(im Monatsbericht ist das Naivste verheimlicht) und in die Denk-«schriften der Akademie geben, allein bis jetzt kam ich noch nicht «dazu, — immer einschlafen oder alberne Phantastereien. Ebenso «sollte aus einigen lumpigen Sätzchen (wovon ein Theil bereits «*Terquem* übergeben ward) eine Abhandlung werden, freiwillig in der «Akademie vorzutragen, aber auch damit kam ich nicht zu Stande, «gerieth tiefer hinein und stiess auf Schwierigkeiten, die nur Der, «welcher niemals schwach werden wollte, überwinden wird, und dem «ich sie unten mittheile. An die allgemeinen Flächen bin ich noch «nicht wieder rangekommen, seitdem meine schönen Hoffnungen in «Bern an der Knechtsgestalt zerschellten.

«Da ich geistig immer tiefer sinke, und da man mich da oben, «wo Muckerei und «*Umkehr der Wissenschaft*» auf der Fahne steht, «ganz *verworfen*, auf meine vorjährige Eingabe um gebührende Stel-

«lung mich keiner Antwort gewürdigt hat, und in 22 Jahren mir keine «Beförderung angedeihen liess, was, wie vor Jahren Staatsrath *v.* «*Hermann* in München sagte: «nur zu Preussens nicht zu meiner «Schande gereiche, denn ich habe ja eine geometrische Welt ge- «schaffen», so reifte mein Vorsatz, das letzte Mittel zur Herausgabe «meiner Productionen zu benutzen, nämlich mit fremden Kälbern zu «pflügen. Zu diesem Behuf bin ich am 1^{ten} April um einen zwei- «jährigen Urlaub eingekommen, motivirt: «durch Annahme der mir «angebotenen Hülfe treuer Schüler, Prof. *Schläfli* in Bern und Dr. «*Sidler* in Zürich, so wie meines Freundes, General *Poncelet* in Paris, «zur Veröffentlichung meiner Forschungen im Gebiete der Geometrie.» «Als ich 3 Wochen zuvor mein Vorhaben dem Geh. Rath *Sch.* «mündlich erzählte, da erinnerte sich der Kerl sogleich, dass ich ihm «vor Jahren Ihretwegen Anträge gemacht habe, obschon er damals «nicht darauf zu hören schien. Nehmen Sie's nicht übel, dass ich Sie «als Schüler nannte, Sie haben es mir ja selbst eingeredet. Sollten «nunmehr weder Sie noch *Sidler* geneigt sein, sich mit mir zu be- «fassen, so schadet es meiner Berufung auf euch doch nichts, ich «wende mich dann an Andere, in Pforzheim, Ludwigsburg, etc., oder «gehe nach Paris und mache da, so viel ich vermag. Nach 2 Jahren: «Verlängerung des Urlaubs; wird gewährt, damit ich hier nicht überall «klage und resonnire und zwar mit gutem Grund. Kontrast mit «Ihrer Weise.

«Mein heimlicher Glauben, mit den Flächen einen Preis von «3000 Fr. zu gewinnen und mit Signore zu theilen, war irrig. Es «bleibt nur die Hoffnung auf das Honorar. Bereits sind mir 2 Fried- «rich-d'or ($= 41\frac{1}{2}$ Fr.) per Bogen geboten. Etwa 10—12 Bogen «kanns werden.

«Das Beste wird sein, dass ich den *Helfer* adoptire, oder ihm «eine lebenslängliche Rente aussetze, d. h, die Zinsen eines unver- «äusserlichen Kapitals, wofür er noch nach meinem Tode fort redigirt «und wenn er stirbt, das Kapital entweder einem meiner Verwandten «zufällt, oder die Zinsen alljährlich für wissenschaftliche Leistungen »oder für andere nützliche Erfindungen als Preis ertheilt werden, «Denn dass ich das durch grosse Sparsamkeit mühsam Erworbene «alles ungeschlachten Verwandten soll zukommen lassen, ist *nicht* «*möglich, absolut unmöglich, das thue ich nicht.* Bloss einige Schwester- «kinder in Koppigen sollen den gebührenden Antheil erhalten. Jene

«Schwester, welche Sie in Utzenstorf sahen, ist am 2ten Februar in «Kirchberg gestorben, und dabei sind Unbilligkeiten vorgefallen, die «mich aufs Aeusserste empört haben. Genug mein Entschluss, den «ich ohne diess schon lange hegte, steht fest: einem Theil meines «Vermögens eine ewig fortdauernde wissenschaftliche Bestimmung zu «geben.

«Da Sie in eigenen Angelegenheiten so verschlossenen Charak- «ters sind, so werden Sie vor der Hand auch Niemand von meinem «Urlaub, etc. sprechen.

«*(22. April.)* Nun sollen Sie auch etwas für den Rüssel haben, «wenn derselbe noch bei Kräften ist. Ich hatte diesen Winter einige «Male so eine einzelne Aufgabe; wo dieselben sind, und was ich jetzt «aufgable, weiss ich nicht. Auf die Ordnung kommt's nicht an, daher «will ich blindlings beginnen.

«Ein Mr. Terquem übergebenes Sätzli heisst:

«Haben drei begrenzte Gerade aα, bβ, cγ, in einer Ebene, den- «selben Punkt m zur Mitte, so sind sie Durchmesser eines bestimm- «ten Kegelschnitts m^2, und so schneiden sich sowohl die vier Kreise «abc, a$\beta\gamma$, b$\alpha\gamma$, c$\alpha\beta$ in einem Punkte d, als auch die 4 Kreise $\alpha\beta\gamma$, «αbc, βac, γab in einem Punkte δ, und es ist dδ ein vierter Durch- «messer des Kegelschnitts m^2.» (Beweis: elementar.)

«Daraus werden durch «*Spinnen und Drehen auf dem Absatz*» «eine Reihe Folgerungen gezogen. Z. B. fixirt man die Kreise abc «und $\alpha\beta\gamma$ und lässt sodann die Durchmesser bβ und cγ dem festen «aα ∞ nahe rücken, so wird der erste Kreis der Krümmungskreis in «a, und ist sehr einfach und elegant durch den zweiten bestimmt. «Eine weitere Folge ist: «Dass wenn m insbesondere der Schwer- «punkt des Dreiecks abc und somit m^2 nothwendig Ellipse ist, als- «dann die drei Krümmungskreise in a, b, c durch einen und denselben «Punkt d in m^2 gehen, und abcd in einem Kreise liegen.» Und umge- «kehrt: «Durch jeden Punkt d der Ellipse gehen 3 Krümmungskreise «und ihre Osculationspunkte a, b, c sind die Ecken eines eingeschrie- «benen Dreiecks von grösstem Inhalte und liegen mit d in einem «Kreise.»

«Dies findet alles *wörtlich gleich* beim sphärischen Kegelschnitt «statt (Schnitt der Kugel mit einem concentrischen Kegel 2ten Grads).

«Nun aber beginnt mein Jammer. Auf der Kugel ist der Satz «*sphärisch polarisirbar*, wobei Kreis in Kreis übergeht, so dass ein «neuer Satz über das dem sphärischen Kegelschnitt umschriebene *Drei-*

«*seit* vom *kleinsten Umfang* entsteht. Danach fühlte ich, dass auch «beim *ebenen* Kegelschnitt m^2 entsprechende Sätze stattfinden müssen, «wenn auch nicht *polare* so doch *duale*, und zwar in folgender dop-«pelter Gestalt.

«I. Sind in 1 Ebene drei Paar ⌗ Gerade $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ von einem «Punkte m gleich weit abstehend (jedes Paar für sich), so berühren «sie einen Kegelschnitt m^2. Dem Dreiseit abc lassen sich 4 Kreise K «einschreiben; ebenso den Dreiseiten $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$. $c\alpha\beta$ je 4 Kreise K_1, «K_2, K_3. Von diesen Kreisen müssen nun 4 Mal 4, je von jeder Gruppe «einer, eine gemeinschaftliche Tangente d haben, welche zugleich auch «den Kegelschnitt m^2 berührt. Oder: Jeder der 4 Kreise K muss mit «*einem bestimmten* der 4 Kreise K_1 eine gemeinschaftliche Tangente «d haben, welche auch m^2 berührt (und zwar sind a und d conjugirte «gemeinsame Tangenten der Kreise K und K_1, d. h. entweder beide «*äussere* oder beide *innere*).

«II. Werden drei beliebige Winkel $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, in 1 Ebene, von «derselben Geraden m gehälftet, so sind sie einem bestimmten Kegel-«schnitt m^2 umschrieben, welcher m zur Axe hat. Die den 4 Drei-«seiten abc, $a\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ eingeschriebenen Kreise haben die vorige «Eigenschaft, nämlich zu vier 4 gt=4d, welche auch m^2 berühren. «— Die den 4 Dreiseiseiten $\alpha\beta\gamma$, αbc, βac, γab entsprechenden 4 δ «schneiden ihre correspondirenden 4 d auf der Axe m, und diese hälf-«tet die Winkel $d\delta$.

«Lässt man nun, bei I. oder II., die Geraden b und c der festen a «unendlich nahe rücken, so gehen von den 4 Kreisen K zwei in einen «Punkt über, der dritte wird ∞, und der 4^{te} wird Schmiegungskreis «im Berührungspunkt a_0 der a, und hat mit m^2 noch die Tangente d «gemein. Und daher weiter: Ist dem m^2 ein Dreiseit abc von klein-«stem Umfang umschrieben, so haben die drei Krümmungskreise in «den drei Berührungspunkten a_0, b_0, c_0 mit m^2 dieselbe Tangente d «gemein; und umgekehrt: Jede Tangente d des Kegelschnitts m^2 wird «von irgend drei Krümmungskreisen desselben berührt, und die den «Osculationspunkten a_0, b_0, c_0 zugehörigen Tangenten a, b, c bilden ein «umschriebenes Dreieck von kleinstem Umfang, dessen innerer Kreis «(derjenige von den 4 K, der innerhalb des Dreiseits liegt) auch die «d berührt; die drei äussern Kreise berühren m^2 (sowie die Seiten) «gerade in den Punkten a_0, b_0, c_0. (Siehe Ende meiner Abhandlung «Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe» in Crelles Journal «1847.) Wohlan! setzen Sie an, und entscheiden Sie bald, was daran «wahr oder falsch ist, damit ich den Aufsatz beenden kann. — Es «muss gewiss auch projektivisch gehen, wenn ich Kraft hätte. — Beim «sphärischen Kegelschnitt ist alles analog.

«Das Bestreben, etwas Analoges bei der allgemeinen f^2 zu finden, «führte auf einen schönen Satz, den ich Ihnen nicht vorenthalten «darf, obschon Sie ihn v. J. selbst auffinden sollten, aber den Dienst, «als nicht amtlich, verweigerten. Er offenbart eine neue Eigenschaft «eines speziellen G (f^2). Ich leite wie folgt ein.

«Gegeben eine f^2. Bewegt sich Pol P in einer Geraden G, so «dreht sich seine Polarebene um eine andere Gerade H, und umgekehrt. Ich nenne G und H *reciproke Gerade* in Bezug auf f^2.

«*Zieht man in f^2 irgend drei Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, welche ein «Paar reziprocke Zwecke G, H schneiden, so gehen die vier Ebenen «abc, $\alpha\beta\gamma$, $b\alpha\gamma$, $c\alpha\beta$ durch einen Punkte d, sowie die 4 Ebenen $\alpha\beta\gamma$, «abc, βac, γab durch einen Punkt δ, beide Punkte liegen in der Fläche «f^2 uud die Sehne d δ schneidet G und H.*" Die Endpunkte jeder «Sehne und ihre Schnitte mit G, H sind harmonisch. *Die Schnitt- «linie, etwa L, je zweier Gegenebenen abc und $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ und abc, etc. «schneidet ebenfalls beide Gerade G, H.* (Welche Beziehung haben «diese 4 L zu jenen 4 Sehnen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$? folgen diese rück- «wärts aus jenen?).

«Auf dem Absatz gedreht, scheint mir zu folgen:

«Alle f^2, welche durch die 6 Endpunkte abc$\alpha\beta\gamma$ gehen und «G, H zu reziprocken Geraden haben, gehen auch durch die beiden «Schnittpunkte d und δ der zweimal 4 Ebenen und bilden ein G(f^2), «dessen Kerncurve R^6 aus G, H und dem 4 L besteht.»

«Sind G, H und etwa die 3 Endpunkte a, b, c beliebig gegeben, «so sind α, β, γ, als vierte harmonische Punkte, bestimmt; also wird «im Grunde nur verlangt: die f^2 soll durch drei gegebene Punkte «a, b, c gehen und die gegebenen G, H zu reziproken Geraden «haben; folglich zählt ein gegebenes Paar G und H für 4 Beding- «ungen, für 4 Punkte.

«Schneiden zwei Gerade G, H irgend 4 begrenzte Gerade a α, «b β, c γ, e ε harmonisch, so sind letztere gemeinsame Sehnen eines «B(f^2), von dessen Grundcurve R^4 unendlich viele Punktenpaare d, δ «leicht zu construiren sind; nämlich je drei der 4 Sehnen geben «mittels der durch ihre Endpunkte gelegten 2 mal 4 Ebenen ein «solches Paar, oder eine neue Sehne d δ; und sodann bestimmen «diese 4 neuen Sehnen, unter sich (?) und mit den gegebenen zu je «drei verbunden, wiederum andere neue Sehnen, u. s. w. in infinitum. «Alle sind Sehnen der R^4 und werden von G, H harmonisch ge«schnitten; aber sie liegen nicht in einem Hyperboloid, sondern in «(?) in f^4; denn eine freie Gerade J bestimmt mit G und H ein Hy«perboloid J^2, das die R^4 in 8 Punkten, und zwar in 4 Paaren d, δ «schneidet, so dass also J von 4 Sehnen d δ getroffen wird, und folg«lich der Ort der letztern $= f^4$ ist.

«Sei gegeben $B(f^2)$. In beliebigem Punkte g der R^4 sei G die «Tangente; durch G alle Ebenen E, jede E schneidet die R^4 in zwei «Punkten h und h_1; die Schaar Geraden $hh_1 = H$ liegen in einem «Hyperboloid H^2, und G gehört zu dessen andern Schaar, und H^2 ist «Glied des $B(f^2)$. Kommt der Punkt h_1 in g zu liegen, so berührt «hier E das Hyperboloid H^2 und osculirt die R^4, und der in E durch «h gehende und die G in g berührende Kreis ist Krümmungskreis «der R^4, très beau! auch schneidet dabei die E den $B(f^2)$ in einem «B (C^2), die durch Punkt h gehen und sich im Punkt g osculiren, «jenen Krümmungskreis gemein haben. — Ist alles richtig?

«*23. April.* Gegeben B (C^n). Aus Pol P Normalen auf alle C^n, «so ist der Ort der Fusspunkte Q eine Q^{2n}, welche durch P, durch «die n^2 Grundpunkte p, und durch die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte d des «$B(C^n)$ geht. In jedem Q an die zugehörige C^n die Tangente t, deren «Ort $= t^x$. Dieses x hat mich genarrt; für Determinanten wird es «nicht witzig sein. x ist die Zahl der t, welche durch irgend einen «Punkt A gehen; nun schneidet der Kreis über Durchmesser AP die «Q^{2n} (ausser in P noch) in $4n-1$ Punkten Q, deren zugehörige t «durch A gehen, also sollte $x = 4n-1$ sein. Dagegen ist die Pam«polare von A in Bezug auf B (C^n) eine Curve Q^{2n-1}, die vom ge«nannten Kreise, ausser in A, nur in $4n-3$ Punkten Q geschnitten «wird, deren zugehörigen Normalen durch P gehen, so dass $x = 4n-3$ «sein muss. Dies folgt auch daraus, dass die $2n \times (2n-1)$ Schnitte «der Curven Q^{2n} und Q^{2n-1} aus den n^2p, $3(n-1)^2$ d und $(4n-3)$ «Q bestehen. Jene zwei falschen Punkte, welche der Kreis mit Q^{2n} «gemein haben soll, sind wohl die Donnstigs zwei Kreispunkte auf «G_∞! he? Dabei ist noch Eins. Ist P_1 ein anderer Pol und Q_1^{2n} «seine Pamfusspunkten-Curve, so bestehen die $2n \times 2n$ Schnitte der «Q^{2n} und Q_1^{2n} aus den $n^2p + 3(n-1)^2 d + 2(n-1) Q_1$, diese Q_1 in «der Geraden PP_1, es fehlen also noch $4n-2$ Punkte Q, oder wenn «man die zwei Kreispunkte auf G_∞ annimmt, so fehlen noch 4 (n—1) «Punkte Q. Diese weiss ich nur so zu deuten: *Die G_∞ wird von «2 (n—1) Gliedern C^n des $B(C^n)$ berührt, durch die Berührungspunkte «gehen nothwendig Q^{2n} und Q_1^{2n}, aber sie müssen sich in derselben be- «rühren, so dass sie 2 (n—1) Asymptoten gemein haben, was die «4 (n—1) Q ausmacht.“ He?* Die analogen Betrachtungen bei Flächen, «bei B (f^n) und G (f^n).

«Kann es zwei solche Kegelschnitte geben, wovon jeder durch «ein Triangel conjugirte Punkte (x, y, z) des andern geht? — Des- «gleichen bei den Flächen f^2 rücksichtlich der Quadrupel; hier wird «es gehen, aber wie weit kann man die Forderung steigern?

«An Ihre *Menschlichkeit* möchte ich schliesslich noch die Bitte «wagen: zuerst jene leichten Dinge zu beantworten, die ich zu meinem «Aufsatze gebrauche, und die Andern nachher zu verzehren.

«Es grüsst Sie und die Andern (Leuenberger u. Frau).

Ihr dankbarer *J. Steiner.*»

«Wär's nicht möglich, dass Signore die Antwort mir flugs selbst «überbrächte? Kaum 150 Fr. Kosten; dafür Verleger, Honorar, Ge- «lehrte aller Art, Bibliothek; *A. Braun* [1]), so gutmüthig wie Sie, würde «sich freuen, ihm viel erzählt, auch *Klotsch.* Kommen Sie, lassen Sie «die $1\frac{1}{2}$ Zuhörer!»

Steiner an Schläfli. [2])

Berlin, 17. Mai 1856.

«*Lieber Freund!*

«Am 23. vorigen Monats trug ich einen Brief an Sie nach dem «Anhaltischen Bahnhof, derselbe erzählte Ihnen von Paris, von meinem «Vegetiren und meinen Endzwecken, enthielt mehrere Sätze und Auf- «gaben, so wie auch eine wesentliche Frage über Ihre hiesige Ab- «handlung und deren Fortsetzung. Das Ausbleiben Ihrer Antwort ver- «ursacht mir viel Kopfbrechen und setzt mich in *mehrfache* Verlegen- «heit. Denn letzthin besuchte mich *Reimer* (als ich ihn zum 3ten Mal «nicht traf) und erklärte sich bereit, Ihre Arbeit ins Journal aufzu- «nehmen und zugleich, als Buch, 200 Extraabzüge zu veranstalten; auch «liess er sich zu einem kleinen Honorar bewegen, bot 4 Thaler; als

---

[1]) Direktor des botanischen Gartens in Berlin.

[2]) Ein Concept vorhanden.

«ich sagte, das wäre nur 15 Fr., er solle auf 20 Fr. steigen, lächelte «er und meinte, es käme nicht wieder ein. *Borchardt* ist aber noch «nicht so wohl geneigt, hinter meinem Rücken eher entgegen. Nun «kann ich es aber nicht durchzwengen, bevor ich Ihren Willen kenne. «Kurz ich stecke drinn — weiss nicht, was machen. Dass mein «Brief verloren gegangen, ist unwahrscheinlich. Dass Sie todtkrank, «ebenso; dass Knechtsarbeit eine Antwort unmöglich macht, eben«so; dass meine Aufgaben unlösbar, ebenso, zudem brauchen sie nicht «absolut gelöst zu werden; dass Sie böse sind, ebenso, denn ich «wüsste nicht wesshalb, auch wäre es kleinlich, unmännlich mir nicht «— wenn auch derb — die Gründe anzugeben. Was daher auch ob«walten mag, so sind Sie so gut, mich mit umgehender Post aus dieser «peinlichen Ungewissheit zu erlösen. Bisdahin enthalte ich mich jeder «weitern Frage über Dinge, die ich beschliessen muss, z. B. über die «Denkschriften der Akademie und andern Bücher, ob ich sie ver«kaufen oder mitschleppen soll, etc.; eben so der Sätze und Aufgaben.

«Mit Spannung einer Antwort entgegensehend grüsst Sie «herzlich Ihr dankbarer

J. Steiner.

«NB. *Reimer* war bereit ein Werk von mir über «Algeb. «Curven und Flächen» 20—30 Bogen zu verlegen. Auch lehnte er «nicht ab, denselben Gegenstand von Ihnen analytisch behandelt, oder «eine Analytische Geometrie später noch folgen zu lassen, als ich ihm «versicherte, dass dieselbe reicher und besser sein würde, als alle «bisherigen.»

Schläfli an Steiner.

Bern, den 19. Mai 1856.

«*Lieber Freund!*

«Der längere Aufschub meiner Antwort rührt davon her, dass «ich mich vorbereitete, um ausführlicher auf Ihren letzten Brief zu «antworten. Mit Ihrem ersten Vortrag in der Akademie ist es sonderbar «zugegangen. Sie haben die Hypocycloide mit den drei Rückkehr«punkten zu betrachten fortgefahren und daran Dinge entdeckt, die ich «nicht ahnte. Und gleich nach Ihrer Abreise habe ich mich auf das «gleichseitige, der gleichseitigen Hypocycloide eingeschriebene, Dreieck «geworfen, und da ebenfalls artige Dinge gefunden, wie unter anderm «eine Umhüllte, die ihre eigene Polare ist (in Bezug auf einen Kegel-

«schnitt). Auf Ihre Fragen kann ich jetzt noch nicht antworten, ich «habe die Zeit gebraucht um die Hypocycloide zu verdauen. In Ihrer «Abhandlung steckt ein Rechnungsfehler. Das Curvendreieck ist *doppelt* «so gross als der eingeschriebene Kreis. Die Rectification ist richtig.

«Sie erwähnen mit keiner Silbe, ob Herr *Crelle* noch unter den «Lebenden weilt. Was meine Abhandlung über n-Dimensionen betrifft, «so bin ich mit 15 Fr. zufrieden; und wenn an dieser Bedingung der «Abdruck scheitern sollte, so abstrahire ich von derselben und ver-«lange nur, dass sie nach vielen Jahren endlich einmal veröffentlicht «werde. Die Fortsetzung ist längst geschrieben; ich könnte zwar «manches jetzt anders redigiren; doch ist dieses nicht von grossem «Belang. Es ist durchaus keine Gefahr, dass es damit wie bei *Oettinger* «und *Gudermann* gehe; ich bin nicht so weitschweifig.

«Ich werde fortan die Zeit zu mathematischer Thätigkeit nur «noch stehlen müssen. Denn einmal habe ich für drei Halbjahre den «Unterricht in der reinen Mathematik am hiesigen Vorbereitungscurs «auf das Polytechnikum übernommen, sodann die Liquidation der 18 «Versicherungsgesellschaften, mit der Verbindlichkeit, ungefähr in einem «Monat, je eine Gesellschaft zu spediren. Das letzte ist freilich eine «beschwerliche Last, wird mich aber ein für allemal ökonomisch sicher «stellen.

«Von *Liouville* habe ich nie eine Antwort erhalten, und ver-«wunderte mich auch darüber, dass Sie mir nicht von Paris aus «schrieben. Die Abhandlung, die *Liouville* aufgenommen hat, ist ans «Ende des Bandes gerathen, so dass ich nicht ein Druckfehlerverzeichniss «einsenden kann, und doch ist gleich auf der ersten Seite ein sinn-«störender Druckfehler und nachher kommen noch mehr. Wie ich «jetzt die Abhandlung ansehe, reut es mich, dass ich keine Beweise «dazu gegeben habe.

«In aller Eile schliessend grüsst Sie herzlich

«Ihr dankbarer Schüler

«Nachmittags 4 Uhr. *L. Schläfli.*»

Von diesem Zeitpunkte an stockt der Briefwechsel, denn *Schläfli* war über *Steiner* sehr ungehalten und die beiden Freunde überwarfen sich, nicht, dass es *Schläfli* äusserlich zeigte, aber er beschränkte den Verkehr mit *Steiner* auf das Nothwendigste, besonders auch dann als *Steiner* ganz sich zurückgezogen hatte und von seiner Pension in Bern oder Utzenstorf lebte. Das Zerwürfniss kam hauptsächlich zum Ausbruch bei Anlass der Abhandlung *Steiners* «Ueber eine besondere Curve 3ter Classe und 4ten Grades» gelesen in der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 7. Januar 1856. (Vergl. den Brief vom 20. April an *Schläfli.*) Die Abhandlung ist in den Monatsberichten der K. Akademie und im *Crelle*'schen Journal, Band LIII (auch Ges. Werke, Werk II p. 640—47) abgedruckt.

Wie aus dem Briefwechsel sich ergiebt, hat *Steiner* das genannte Problem *Schläfli* vorgelegt und letzterem auch eine Reihe der interessantesten Sätze über die fragliche Umhüllungscurve mitgetheilt.

Die Entdeckung aber, dass die Curve eine *Hypocycloide* sei, schrieb *Schläfli* sich selber zu. *Steiner* aber hat in der ganzen Abhandlung den Namen «Hypocycloide» nirgends ausgesprochen, *Schläfli's*
zen/ erst gegen Schluss der Abhandlung bei Anlass einer andern Er~~gän~~-zung der Curve genannt (Ges. Werke II. p. 646, Zeile 9 von unten), und dann bloss beigefügt: «Die Curve wird ferner auch durch rollende Bewegung erzeugt.»