

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern

**Band:** - (1896)

**Heft:** 1399-1435

**Artikel:** Ueber die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen [Fortzsetzung]

**Autor:** Wagner, C.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319084>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

C. Wagner.

Eingereicht den 5. August 1895.

# Ueber die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

(F o r t s e t z u n g.)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich die beiden folgenden allgemeinen Formeln gegeben:

$$\text{I. } \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ {}_0^0 J(nx) + \binom{n}{1} {}_0^0 J((n-2)x) + \binom{n}{2} \cdot {}_0^0 J((n-4)x) + \dots + \binom{n-1}{2} {}_0^0 J(x) \right\}$$

für jedes positive ganze ungerade  $n$ ;

$$\text{II. } \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} {}_0^0 J(0) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} {}_0^0 J(2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} {}_0^0 J(4x) + \dots + \binom{n}{0} {}_0^0 J(nx) \right\}$$

für jedes positive ganze gerade  $n$ .

Alle in diesen beiden Relationen vorkommenden Bessel'schen  $J$ -Funktionen haben denselben Index Null, dagegen sind ihre Argumente ungleich, wenn auch stets Vielfache desselben  $x$ . Es handelt sich nun darum, Funktionen mit verschiedenen Indices, aber mit gleichen Argumenten in vorstehende Gleichungen I und II einzuführen.

<sup>1)</sup> Berner Mittheilungen 1895. Seite 115.

Bessel hat für die Addition der Argumente bei der J-Funktion folgende allgemeine Formel gegeben :<sup>1)</sup>

$$J(u+v) = \left(1 + \frac{v}{u}\right)^m \left[ J(u) - v \left(1 + \frac{v}{2u}\right) \frac{\frac{m+1}{1!} J(u)}{1!} + v^2 \left(1 + \frac{v}{2u}\right)^2 \frac{\frac{m+2}{2!} J(u)}{2!} + \dots \right];$$

für den Spezialfall  $m = o$  lautet dieselbe

$${}^0J(u+v) = \left[ {}^0J(u) - v \left( 1 + \frac{v}{2u} \right) \frac{J(u)}{1!} + v^2 \left( 1 + \frac{v}{2u} \right)^2 \frac{J(u)}{2!} - \dots \right],$$

welche wir nun benutzen wollen.

Mit Berücksichtigung derselben ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} {}^0J(nx) &= {}^0J(x + (n-1)x) = {}^0J(x) - (n-1)x \left(1 + \frac{(n-1)x}{2x}\right) \frac{\frac{1}{1!}}{1!} + \\ &\quad \left\{(n-1)x\right\}^2 \left\{1 + \frac{(n-1)x}{2x}\right\}^2 \frac{\frac{2}{2!}}{2!} + \dots \\ &= {}^0J(x) - \frac{(n+1)(n-1)}{2} x \frac{\frac{1}{1!}}{1!} + \left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2 x^2 \frac{\frac{2}{2!}}{2!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0J((n-2)x) &= {}^0J(x) + (n-3)x = {}^0J(x) - (n-3)x \left(1 + \frac{(n-3)x}{2x}\right) \frac{{}^1J(x)}{1!} \\ &\quad + \left\{(n-3)x\right\}^2 \left\{1 + \frac{(n-3)x}{2x}\right\}^2 \frac{{}^2J(x)}{2!} + \dots \\ &= {}^0J(x) - \frac{(n-1)(n-3)}{2} x \frac{{}^1J(x)}{1!} + \left\{\frac{(n-1)(n-3)}{2}\right\}^2 x^2 \frac{{}^2J(x)}{2!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^0J((n-4)x) &= {}^0J(x + (n-5)x) = {}^0J(x) - (n-5)x \left(1 + \frac{(n-5)x}{2x}\right) \frac{{}^1J(x)}{1!} \\ &\quad + \left\{(n-5)x\right\}^2 \left\{1 + \frac{(n-5)x}{2x}\right\}^2 \frac{{}^2J(x)}{2!} + \dots \\ &= {}^0J(x) - \frac{(n-3)(n-5)}{2}x \frac{{}^1J(x)}{1!} + \left\{\frac{(n-3)(n-5)}{2}\right\}^2 x^2 \frac{{}^2J(x)}{2!} + \dots \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Bessel: Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1824.

$${}^0 J(5x) = {}^0 J(x + 4x) = {}^0 J(x) - 4x \left(1 + \frac{4x}{2x}\right) \frac{{}^1 J(x)}{1!} + (4x)^2 \left(1 + \frac{4x}{2x}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$$= {}^0 J(x) - \frac{6 \cdot 4 \cdot x}{2} \frac{{}^1 J(x)}{1!} + \left(\frac{6 \cdot 4 \cdot x}{2}\right)^2 \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$${}^0 J(4x) = {}^0 J(x + 3x) = {}^0 J(x) - 3x \left(1 + \frac{3x}{2x}\right) \frac{{}^1 J(x)}{1!} + (3x)^2 \left(1 + \frac{3x}{2x}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$$= {}^0 J(x) - \frac{5 \cdot 3}{2} x \frac{{}^1 J(x)}{1!} + \left(\frac{5 \cdot 3}{2} x\right)^2 \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$${}^0 J(3x) = {}^0 J(x + 2x) = {}^0 J(x) - 2x \left(1 + \frac{2x}{2x}\right) \frac{{}^1 J(x)}{1!} + (2x)^2 \left(1 + \frac{2x}{2x}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$$= {}^0 J(x) - \frac{4 \cdot 2}{2} x \frac{{}^1 J(x)}{1!} + \left(\frac{4 \cdot 2}{2} x\right)^2 \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$${}^0 J(2x) = {}^0 J(x + x) = {}^0 J(x) - x \left(1 + \frac{x}{2x}\right) \frac{{}^1 J(x)}{1!} + x^2 \left(1 + \frac{x}{2x}\right)^2 \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$$= {}^0 J(x) - \left(\frac{3 \cdot 1}{2} x\right) \frac{{}^1 J(x)}{1!} + \left(\frac{3 \cdot 1}{2} x\right)^2 \frac{{}^2 J(x)}{2!} + \dots$$

$${}^0 J(x) = {}^0 J(x).$$

Unter der Voraussetzung

$n =$  einer pos. ganzen ungeraden Zahl

erhält man somit für das verlangte Integral den Werth:

Hier nach wird z. B. für  $n = 9$ :

$$\int_0^\pi \cos^9(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{256} \left\{ (1 + 9 + 36 + 84 + 126) J(0) - (40 + 9 \cdot 24 + 36 \cdot 12 \right.$$

$$+ 84 \cdot 4) x \frac{J(1)}{1!} + ((40)^2 + 9 \cdot (24)^2$$

$$+ 36 \cdot (12)^2 +$$

$$+ 84 \cdot (4)^2) x^2 \frac{J(2)}{2!} + \dots \right\}.$$

Unter der Voraussetzung

$n =$  einer positiven ganzen geraden Zahl  
entsteht in gleicher Weise:

$$\begin{aligned}
 \text{IIa. } \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi &= \frac{\pi}{2^{n-1}} \left( \left[ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \right] + \right. \\
 &\quad + \left[ \binom{\frac{n}{2}-1}{0} + \binom{\frac{n}{2}-2}{0} + \dots + \binom{n}{0} \right] J(x) - \\
 &\quad - \left[ \binom{\frac{n}{2}-1}{0} \frac{3 \cdot 1}{2} + \binom{\frac{n}{2}-2}{0} \frac{5 \cdot 3}{2} + \dots \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \binom{n}{0} \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right] x \frac{J(x)}{1!} \\
 &\quad + \left[ \binom{\frac{n}{2}-1}{0} \left( \frac{3 \cdot 1}{2} \right)^2 + \binom{\frac{n}{2}-2}{0} \left( \frac{5 \cdot 3}{2} \right)^2 + \dots \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + \binom{n}{0} \left\{ \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right\}^2 \right] x^2 \frac{J(x)}{2!} \\
 &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\quad + (-1)^r \left[ \binom{\frac{n}{2}-1}{0} \left( \frac{3 \cdot 1}{2} \right)^r + \binom{\frac{n}{2}-2}{0} \left( \frac{5 \cdot 3}{2} \right)^r + \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. \dots + \binom{n}{0} \left\{ \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right\}^r \right] x^r \frac{J(x)}{r!} \\
 &\quad \left. \mp \dots \dots \dots \right),
 \end{aligned}$$

so z. B. für  $n = 6$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \cos^6(x \sin \varphi) d\varphi &= \frac{\pi}{32} \left\{ 10 + \left[ 15 + 6 + 1 \right] J(x) - \left[ 15 \cdot \left( \frac{3 \cdot 1}{2} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + 6 \cdot \left( \frac{5 \cdot 3}{2} \right) + 1 \cdot \left( \frac{7 \cdot 5}{2} \right) \right] x \frac{J(x)}{1!} + \\
 &\quad \quad \quad \left. + \left[ 15 \cdot \left( \frac{3 \cdot 1}{2} \right)^2 + 6 \cdot \left( \frac{5 \cdot 3}{2} \right)^2 + 1 \cdot \left( \frac{7 \cdot 5}{2} \right)^2 \right] x^2 \frac{J(x)}{2!} \mp \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Unsere weitere Aufgabe ist nun, die in den Relationen I<sup>a</sup> und II<sup>a</sup> vorkommenden J-Funktionen sämtlich durch die  $J_0^0$  und  $J_1^1$ -Funktion zu ersetzen.

Der Einfachheit wegen schreiben wir die Gleichungen I<sup>a</sup> und II<sup>a</sup> in der Form:

$$I^{b \cdot} \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \alpha_0 J_0^0(x) - \alpha_1 \frac{x}{1!} J_1^1(x) + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} J_0^2(x) \mp \dots + (-1)^r \alpha_r \frac{x^r}{r!} J_0^r(x) \pm \dots \right\}$$

$$II^{b \cdot} \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \beta_0 J_0^0(x) - \beta_1 \frac{x}{1!} J_1^1(x) + \beta_2 \frac{x^2}{2!} J_0^2(x) \mp \dots + (-1)^r \beta_r \frac{x^r}{r!} J_0^r(x) \pm \dots \right\},$$

wobei die Größen  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$  die entsprechenden in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke ersetzen sollen.

Bekanntlich kann man durch zwei gegebene J-Funktionen alle übrigen ausdrücken, analog der bereits von Bessel gefundenen Reduktionsformel<sup>1)</sup>

$$J_v(x) = \frac{2(v-1)}{x} J_{v-1}(x) - J_{v-2}(x),$$

oder auch, wenn man statt  $v$  die Größe  $v+1$  einführt

$$\frac{2v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x).$$

Mit Hilfe ersterer kann  $J_v(x)$  auf  $J_{v-1}(x)$  und  $J_{v-2}(x)$  reduziert werden. Drückt man alsdann mittelst der gleichen Formel  $J_{v-1}(x)$  durch  $J_{v-2}(x)$  und  $J_{v-3}(x)$  aus, und setzt diesen Werth in obige Gleichung ein, so erscheint  $J_v(x)$  durch  $J_{v-2}(x)$  und  $J_{v-3}(x)$  bestimmt. Durch m-malige Wiederholung

---

<sup>1)</sup> Ebendaselbst.

dieses Verfahrens kann schliesslich  $J_v(x)$  durch  $J_m(x)$  und  $J_{m-1}(x)$  ausgedrückt werden, was zuerst Lommel bekannt gab. Seine Formel lautet<sup>1)</sup>:

$$J_v(x) = J_m(x) \sum_{p=0}^{v-m} (-1)^p \frac{(m-p)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2p)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} - \\ - J_{m-1}(x) \sum_{p=0}^{v-m-1} (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}}.$$

Setzt man hierin  $v = m + 1$ ,

so entsteht:

$$J_{m+1}(x) = J_m(x) \sum_{p=0}^{m+1} (-1)^p \frac{(m-p)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} - \\ - J_{m-1}(x) \sum_{p=0}^m (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}},$$

wo die Ausdrücke hinter den Summenzeichen die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder daraus hervorgehen, wenn man statt  $p$  der Reihe nach  $0, 1, 2, \dots$  und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Reihe braucht man  $p$  nicht grösser als  $\frac{m}{2}$  zu nehmen, weil für grössere Werthe von  $p$  der Faktor  $(m-p)^{p+1}$  und damit alle folgenden Glieder der Reihe Null werden; ebenso ist der grösste Werth für  $p$  in der zweiten Reihe gleich  $\frac{m-1}{2}$ . Setzt man in dieser Gleichung nach und nach  $m = 1, 2, 3, \dots, (r-1), \dots$ , so erhält man die einzelnen Funktionen  $J_2(x), J_3(x), J_4(x), \dots, J_r(x), \dots$  ausgedrückt durch die Funktionen  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$ .

Wir schreiben:

$$J_2(x) = A_1 J_1(x) - B_1 J_0(x) \\ J_3(x) = A_2 J_2(x) - B_2 J_1(x) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ J_r(x) = A_{r-1} J_{r-1}(x) - B_{r-1} J_{r-2}(x),$$

wo:

$$A_1 = \sum_{p=0}^2 (-1)^p \frac{(1-p)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{1-2p|2}}{x^{1-2p}}; \\ A_2 = \sum_{p=0}^3 (-1)^p \frac{(2-p)^{p+1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{2-2p|2}}{x^{2-2p}} \\ \vdots \quad \vdots$$

---

<sup>1)</sup> Lommel: «Studien über die Bessel'schen Funktionen.» Leipzig, 1868.  
Seite 3.

$$A_{r-1} = \sum (-1)^p \frac{(r-1-p)^{p-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{r-1-2p|2}}{x^{r-1-2p}} \dots \dots \dots$$

und

$$B_1 = \sum (-1)^p \frac{(1-1-p)^{p-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{1-1-2p|2}}{x^{1-1-2p}},$$

$$B_2 = \sum (-1)^p \frac{(2-1-p)^{p-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{2-1-2p|2}}{x^{2-1-2p}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_{r-1} = \sum (-1)^p \frac{(r-1-1-p)^{p-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{r-1-1-2p|2}}{x^{r-1-1-2p}}, \dots \dots \text{ist.}$$

Mit Berücksichtigung dieser Substitutionen erhalten wir für unsere beiden Integrale, wenn wir die in Gleichung I<sup>b</sup> und II<sup>b</sup> angegebenen Coeffizienten gehörig beobachten, schliesslich die Formeln:

$$I^c. \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \left[ \alpha_0 - \alpha_2 B_1 \frac{x^2}{2!} + \alpha_3 B_2 \frac{x^3}{3!} \mp \dots \right. \right.$$

$$+ (-1)^{r+1} \alpha_r B_{r-1} \frac{x^r}{r!} \mp \dots \left. \left. \right] J(x) \right. \\ \left. + \left[ -\alpha_1 \frac{x}{1!} + \alpha_2 A_1 \frac{x^2}{2!} - \alpha_3 A_2 \frac{x^3}{3!} \pm \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^r \alpha_r A_{r-1} \frac{x^r}{r!} \mp \dots \right] J(x) \right\};$$

$$II^c. \int_0^\pi \cos^n(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \beta + \left[ \beta^0 - \beta_2 B_1 \frac{x^2}{2!} + \beta_3 B_2 \frac{x^3}{3!} \mp \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{r+1} \beta_r B_{r-1} \frac{x^r}{r!} \pm \dots \right] J(x) \right. \\ \left. + \left[ -\beta_1 \frac{x}{1!} + \beta_2 A_1 \frac{x^2}{2!} - \beta_3 A_2 \frac{x^3}{3!} \pm \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^r \beta_r A_{r-1} \frac{x^r}{r!} + \dots \right] J(x) \right\}.$$