Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1895)
Heft: 1373-1398

Artikel: Über die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen

Autor: Wagner, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319080

C. Wagner.

Eingereicht den 12. Juni 1895.

Über die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

Bei meinen Untersuchungen über die Bessel'schen Funktionen I. Art mit vielfachem Argumente — es handelt sich darum, die Funktionen mit vielfachem Argumente durch ebensolche Funktionen mit einfachem Argumente möglichst elegant darzustellen — stiess ich auf verschiedene bestimmte Integrale von der Form

$$\int_0^\pi \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi, \quad \int_0^\pi \cos^3 (x \sin \varphi)\, d\varphi, \ \ldots \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi,$$

welche sich leicht durch Bessel'sche Funktionen erster Art mit gleichem Index, in unserem Falle Null, und vielfachem Grundargumente, in unserem Falle x, ausdrücken lassen. Ich glaube, dass diese Entwicklungen einigen Wert besitzen, zumal ich in der diesbezüglichen Litteratur — soweit sie mir zugänglich war — keine derartigen ähnlichen Beziehungen zu finden vermochte. Andererseits zeigt aber diese Darstellung eine ganz eigentümliche Ähnlichkeit mit Entwicklungen der gewöhnlichen Cosinus-Funktion, so dass auch hieraus, wie ich glaube, gefolgert werden darf, dass die Bessel'schen Funktionen in der höheren Analysis eine weit wichtigere Rolle zu spielen berufen sind, als es im ersten Augenblicke den Anschein hat. Sie vertreten in gewissem Sinne die Cosinus-Funktion in der höheren Analysis. Ich werde am Schlusse vorliegender Arbeit hierauf zurückkommen.

Die Bessel'sche Funktion erster Art für den Index Null und das Argument x sei gegeben in der einfachen Form

$$\overset{0}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Für das Argument $x + y$ wird:

$$\overset{0}{J}(x+y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos([x+y]\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big\{\cos(x\sin\varphi)\cos(y\sin\varphi) -$$

$$- \sin(x\sin\varphi)\sin(y\sin\varphi)\Big\}\, d\varphi$$

oder für $x = y$

$$\overset{0}{J}(2\,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big\{\cos^2(x\sin\varphi) - \sin^2(x\sin\varphi)\Big\}\, d\varphi.$$

Ersetzt man hierin die Sinusfunktion in bekannter Weise durch die Cosinusfunktion, so entsteht

$$\overset{0}{J}(2\,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x\sin\varphi)\, d\varphi - 1$$

oder

$$1) \qquad \int_0^\pi \cos^2(x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\Big\{\overset{0}{J}(2\,x) + \overset{0}{J}(0)\Big\}$$

weil ist:

$$\overset{0}{J}(0) = 1.$$

In ganz ähnlicher Weise kann man $\overset{0}{J}(3\,x)$ berechnen, wobei das Integral

$$\int_0^\pi \cos^3(x\sin\varphi)\, d\varphi$$

auftritt, welches in folgender Form durch Bessel'sche Funktionen ausgedrückt ist:

$$2) \qquad \int_0^\pi \cos^3(x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\Big\{\overset{0}{J}(3\,x) + 3\,\overset{0}{J}(x)\Big\}.$$

In gleicher Weise fortfahrend erhält man

$$3)\qquad \int_0^\pi \cos^4 (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{8} \left\{ \overset{0}{J}(4\,x) + 4\,\overset{0}{J}(2\,x) + 3\,\overset{0}{J}(0) \right\}$$

u. s. f.

Für die allgemeine Formel hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

I) n = einer ungeraden Zahl, 1, 3, 5 . . . 2m + 1.

$$A:\quad \int_0^\pi \cos^n (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(n\,x) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}((n-2)x) + \binom{n}{2} \overset{0}{J}((n-4)x) + \cdots \right\},$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis das Argument x auftritt, z. B.:

$$\int_0^\pi \cos^9 (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{256} \left\{ \overset{0}{J}(9\,x) + 9\,\overset{0}{J}(7\,x) + 36\,\overset{0}{J}(5\,x) + 84\,\overset{0}{J}(3\,x) + 126\,\overset{0}{J}(x) \right\}.$$

II) n = einer geraden Zahl, 0, 2, 4 . . . 2m.

$$B:\quad \int_0^\pi \cos^n (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(0) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \overset{0}{J}(2\,x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \overset{0}{J}(4\,x) + \cdots \right\},$$

welche Reihe so weit fortzusetzen ist, bis das Argument nx auftritt, z. B.

$$\int_0^\pi \cos^6 (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{32} \left\{ 10\,\overset{0}{J}(0) + 15\,\overset{0}{J}(2\,x) + 6\,\overset{0}{J}(4\,x) + \overset{0}{J}(6\,x) \right\},$$

wobei zu bemerken ist, dass man hat

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

nach der bekannten Formel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Beide Formeln A und B lassen sich unter gewissen Voraussetzungen in eine einzige zusammenfassen, worüber ich in einer besonderen Arbeit mitteilen werde.

Diese Formeln erscheinen mir deshalb bemerkenswert, weil man mit ihrer Hülfe, wenn man die Funktionen mit mehrfachem Argumente durch solche mit einfachem Argumente ausdrückt, zu einer verhältnismässig einfachen Darstellung fraglicher Integrale gelangen kann. Mit den diesbezüglichen Untersuchungen bin ich gegenwärtig beschäftigt. Es handelt sich hierbei hauptsächlich darum, zu untersuchen, ob das Integral

$$\int_0^\pi \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi$$

nicht vielleicht als J-Funktion dargestellt werden kann, oder, mit anderen Worten, ob die in folgender Gleichung

$$\int_0^\pi \cos^2 (x \sin \varphi)\, d\varphi = A \,.\left[\int_0^\pi \cos (x \sin \varphi)\, d\varphi\right]^2 = A \,.\, [\pi \,.\, \overset{0}{J}(x)]^2$$

vorkommende, noch unbekannte Grösse A in irgend einer Weise als J-Funktion anzusehen ist, d. h. als Produkt oder Quotient von J-Funktionen mit einfachem Argumente betrachtet werden kann.

Für den Spezialfall

$$x = 1$$

entsteht unter sonst gleichen Bedingungen aus Gleichung A die Gleichung:

$$\int_0^\pi \cos^n (\sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(n) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}(n-2) + \binom{n}{2} \overset{0}{J}(n-4) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt, bis das Argument 1 auftritt, und aus Gleichung B die Relation:

$$\int_0^\pi \cos^n(\sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(0) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \overset{0}{J}(2) \right.$$
$$\left. + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \overset{0}{J}(4) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt, bis das Argument n auftritt.

Die vorher angedeutete Ähnlichkeit mit Entwicklungen der gewöhnlichen Cosinus-Funktion

$$\cos x$$

möge durch folgende Gleichungen bewiesen sein:

Man hat

$$\cos^0 x = 1$$
$$\cos^1 x = \cos x$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left\{ \cos (2x) + \cos 0 \right\}$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \left\{ \cos (3x) + 3 \cos x \right\}$$

oder allgemein:

I. n = einer ungeraden Zahl, $1, 3, 5 \ldots 2m + 1$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \cos (n x) + \binom{n}{1} \cos ((n-2)x) + \binom{n}{2} \cos ((n-4)x) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt bis zum Gliede $\cos x$.

II. n = einer geraden Zahl, $0, 2, 4 \ldots 2m$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \cos 0 + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \cos (2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \cos (4x) + \cdots \right\}$$

fortgesetzt bis zum Gliede $\cos (n x)$.