Beiträge zur Entwicklung der Bessel'schen Funktion I. Art

Autor(en): **Wagner, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1894)**

Heft 1335-1372

PDF erstellt am: **25.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-319071

C. Wagner.

Beiträge
zur
Entwicklung der Bessel'schen Funktion I. Art.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung meines verehrten früheren Lehrers, Herrn Prof. Dr. J. H. Graf in Bern, unternommen. Sie ist im allgemeinen eine Abhandlung historisch-analytischen Inhaltes und will im Zusammenhange kurz die Entwicklung der für Mathematiker, wie Physiker und Astronomen gleich wichtigen Bessel'schen Funktion erster Art von ihrer Einführung in die Wissenschaft an bis zum Jahre 1858 darstellen, die Eigenschaften derselben klarlegen und ihre hauptsächlichsten Anwendungen kurz vorführen.

Abschnitt I enthält die Resultate der diesbezüglichen Forschungen von Fourier (Darstellung der Bessel'schen Funktion als bestimmtes Integral, Fourier'scher Satz) und Poisson (Reihenentwicklung, Konstantenbestimmung u. s. w.). Im Abschnitt II wird sodann auf die grundlegende, diese Materie betreffende Arbeit von Bessel näher eingegangen, ferner werden die Beziehungen, welche er gefunden hat, abgeleitet und die Anwendung dieser Transcendenten auf die Mittelpunktsgleichung gezeigt. Abschnitt III ist der Schilderung jener interessanten und eleganten Methode gewidmet, welche Jacobi anwandte, um aus ganz allgemeinen Betrachtungen die Bessel'sche Funktion herzuleiten. Abschnitt IV beleuchtet im näheren die Verdienste von Hansen und Anger, gibt neue Darstellungsarten und Beziehungen der Funktion (gebrochener und imaginärer Index) und leitet nochmals in einfachster Weise vollständig die Mittelpunktsgleichung ab. Abschnitt V endlich weist auf die Resultate hin, welche Schlömilch erhalten hat, und ist vorzugsweise der Betrachtung jenes unter dem Namen «Schlömilch'scher Lehrsatz» bekannten Theorems gewidmet.

Bei der Bearbeitung dieses Stoffes wurde auf möglichste Kürze und Exaktheit der grösste Wert gelegt; deshalb blieben jegliche historische Notizen, welche anderswoher leicht zu entnehmen sind, von der Aufnahme in vorliegende Arbeit ausgeschlossen. Dafür wurde aber auf genaue, wenn auch oft nur angedeutete Durchführung der Nebenrechnungen Rücksicht genommen, weil ich öfters, namentlich beim Studium der Bessel'schen Arbeiten, fand, wie mühsam und zeitraubend es unter Umständen sein kann, derartige fehlende Zwischenrechnungen zu ergänzen.

Von der Herleitung vieler Gleichungen, von denen ich auszugehen gezwungen war, musste indessen, um die Einheit vorliegender Arbeit nicht zu stören, abgesehen werden; ihre Ableitung kann in den am Schlusse angegebenen Schriften eingesehen werden.

Um sich leichter auf bereits gefundene Gleichungen beziehen zu können, wurden einige derselben numeriert; eine sonstige engere Zusammengehörigkeit soll damit nicht ausgedrückt sein.

Die Bessel'sche Funktion erster Art für das Argument x und den Index n sei ausgedrückt durch:

$$y = \overset{n}{J}(x);$$

sie ist als partikuläre Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{n^2}{x^2}\right] y = 0$$

anzusehen, welche die Differentialgleichung oder Definitionsgleichung der Bessel'schen Funktion erster Art genannt wird.

Für den Specialfall: $n = 0$ wird:

$$y_1 = \overset{0}{J}(x)$$

und die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy_1}{dx} + y_1 = 0.$$

I.

Fourier war zweifellos der erste, welcher derartige mit den Bessel'schen Transcendenten übereinstimmende Funktionen herleitete, und zwar in seiner: «Théorie analytique de la chaleur», welche 1822 erschien. Im Kapitel VI, das er mit «Du mouvement de la chaleur dans un cylindre solide» überschrieb, findet er derartige Beziehungen, und zwar ausgehend von den Gleichungen:

$$1)\ \frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx}\right) \text{ und } 2)\ \frac{h}{K}v + \frac{dv}{dx} = 0,$$

welche die Wärmebewegung in einem festen Cylinder von unendlicher Länge darstellen.

In diesen Gleichungen bezeichnet x den Radius eines cylindrischen Ringes, dessen Punkte sämtlich den gleichen Abstand von der Axe besitzen; v die Temperatur, welche alle Punkte im Abstande x von der Axe nach einer Zeit t, vom Beginn der Abkühlung an gerechnet, besitzen sollen; C, D und K sind Konstanten, und zwar bezeichnet C die specifische Wärme, D die Dichtigkeit und K die Einheit der Wärmemenge. Es ist demnach v sowohl eine Funktion von t als auch von x.

Um vorstehende Gleichungen zu integrieren, gibt Fourier für v folgenden sehr einfachen Wert. Er setzt analog der gewöhnlichen Auflösungsmethode

$$v = e^{-mt} u,$$

wobei m irgend eine Zahl und u eine Funktion von x ist.

Aus Gleichung 1) entsteht alsdann:

$$3)\ \frac{m}{k}u + \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = 0,$$

wobei: $\frac{K}{CD} = k$ gesetzt ist.

Als Wert für u, welcher dieser Gleichung 3) Genüge leistet, findet Fourier folgenden:

$$4)\quad u = 1 - \frac{1}{2^2}g\,x^2 + \frac{1}{2^2\,.\,4^2}g^2x^4 - \frac{1}{2^2.4^2.6^2}g^3x^6 \pm \cdots\cdot$$

wobei $g = \frac{m}{k}$ ist.

Gleichung 3) stimmt mit der früher angegebenen Definitionsgleichung für die Bessel'sche Funktion erster Art in der Struktur vollkommen überein. Wie leicht zu ersehen ist, ist sie die Differentialgleichung für $\overset{0}{J}(x\sqrt{g})$. Mithin wird:

$$4^a)\quad \overset{0}{J}(x\sqrt{g}) = 1 - \frac{1}{2^2} g\,x^2 + \frac{1}{2^2 . 4^2} g^2 x^4 - \frac{1}{2^2 . 4^2 . 6^2} g^3 x^6 \pm \cdots$$

Die Summe dieser Reihe findet Fourier mit Hülfe der nach ihm benannten Reihen und erhält schliesslich folgendes Resultat:

$$4^b)\quad \overset{0}{J}(x\sqrt{g}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{g}\sin r)\,dr = u,$$

welcher Wert bekanntlich mit der Normalform Bessels

$$\overset{n}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin r - n\,r)\,dr$$

übereinstimmt, wenn man $n = 0$ und $x\sqrt{g}$ für x substituiert.

Dieser Wert genügt also der Differentialgleichung 3) und behält auch einen endlichen Wert für x gleich Null.

Die Gleichung 2) geht durch Einsetzen des für v angegebenen Wertes über in:

$$2^a)\quad \frac{h}{K} u + \frac{du}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung muss auch erfüllt sein, wenn $x=X$, gleich dem Radius des Cylinders wird. In diesem Falle erhält man:

$$5)\quad u = 1 - \frac{1}{2^2} g\,X^2 + \frac{1}{2^2 . 4^2} g^2 X^4 \mp \cdots$$

Setzt man nun in Gleichung 2^a) für den Quotienten $\frac{h}{K}$ die Grösse h, so wird mit Berücksichtigung von Gleichung 5):

$$2^b)\quad h\left(1 - \frac{1}{2^2} g\,X^2 + \frac{1}{2^2 . 4^2} g^2 X^4 \mp \cdots\right) = \frac{2}{2^2} gX - \frac{4}{2^2 . 4^2} g^2 X^3 \pm \cdots$$

Setzt man ferner in Gleichung 5):

$$\vartheta = \frac{1}{2^2} g\,X^2$$

und bezeichnet mit $f(\vartheta) = y$ diese Funktion von ϑ, so wird:

$$6)\quad y = f(\vartheta) = 1 - \vartheta + \frac{1}{2^2}\vartheta^2 - \frac{1}{2^2 . 3^2}\vartheta^3 \pm \cdots$$

Multipliziert man weiter beide Seiten der Gleichung 2^b) mit $\frac{1}{2}X$, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{1}{2}\,h\,X = \frac{\vartheta - \frac{2}{2^2}\vartheta^2 + \frac{3}{2^2 . 3^2}\vartheta^3 \mp \cdots}{1 - \vartheta + \frac{1}{2^2}\vartheta^2 - \frac{1}{2^2 . 3^2}\vartheta^3 \pm \cdots}$$

oder schliesslich:

7) $\frac{1}{2}\,h\,X + \vartheta\,\frac{f'(\vartheta)}{f(\vartheta)} = 0$, wobei $f'(\vartheta) = \frac{d\,f(\vartheta)}{d\,\vartheta}$ bedeutet.

Diese Gleichung gibt nun die verschiedenen Werte von ϑ, und jeder Wert von ϑ einen für g, wegen der bestehenden Relation

$$\vartheta = \frac{1}{2^2}\,g\,X^2.$$

Die einzelnen Werte mögen sein g_1, g_2, g_3 . . . . . . Da nun schliesslich war:

$$g = \frac{m}{k},$$

so sind auch die Werte von m leicht zu bestimmen.

Fourier führt diese hier nur kurz angegebene Rechnung vollständig durch und findet als Werte für die einzelnen m schliesslich folgende:

$$m_1 = \frac{2^2 . k\,\vartheta_1}{X^2};\quad m_2 = \frac{2^2 . k\,\vartheta_2}{X^2};\quad m_3 = \frac{2^2 . k\,\vartheta_3}{X^2}\quad \text{u. s. w.}$$

Der Wert für u in Gleichung 4^b) wird alsdann:

$$4^c)\qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_1}\,\sin r\right)dr$$

mithin

$$8)\qquad v = e^{-mt}\,u = \frac{1}{\pi}\,e^{-\frac{2^2 k t \vartheta_1}{X^2}}\int_0^\pi \cos\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_1}\,\sin r\right)dr.$$

Setzt man nun jede der Wurzeln ϑ_1, ϑ_2 . . . . ., so erhält man einen allgemeineren Wert für v, nämlich:

$$9)\qquad \pi\,v = a_1\,e^{-\frac{2^2 k t \vartheta_1}{X^2}}\int^\pi \cos\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_1}\,\sin r\right)dr$$

$$+\; a_2\,e^{-\frac{2^2 k t \vartheta_2}{X^2}}\int_0^\pi \cos\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_2}\,\sin r\right)dr$$

$$+\; a_3\,e^{-\frac{2^2 k t \vartheta_3}{X^2}}\int_0^\pi \cos\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_3}\,\sin r\right)dr + \ldots$$

Es bedeuten a_1, a_2, a_3 u. s. w. willkürliche Koeffizienten, welche noch zu bestimmen sind.

Die Gleichung 9) kann man mit Anwendung der Bessel'schen Bezeichnungsweise auch schreiben:

$$9^a)\qquad v = a_1\, e^{-\frac{2^2 k t \vartheta_1}{X^2}} \overset{0}{J}\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_1}\right) + a_2\, e^{-\frac{2^2 k t \vartheta_2}{X^2}} \overset{0}{J}\left(2\,\frac{x}{X}\sqrt{\vartheta_2}\right) + \cdots$$

Bei der Bestimmung von a_1, a_2 .... stellte Fourier den nach ihm benannten Lehrsatz auf, welcher für die Theorie der Bessel'schen Funktionen von grundlegender Bedeutung geworden ist. Derselbe lautet in allgemeiner Fassung: «Bezeichnet man die positiven Wurzelwerte der Gleichung:

$$z^{-m} \cdot \overset{m}{J}(z) = 0$$

ihrer Grösse nach geordnet mit ϑ_0, ϑ_1, $\vartheta_2 \ldots \vartheta_p \ldots$, so kann jede innerhalb der Grenzen 0 bis 1 gegebene Funktion $f(x)$ in eine nach $(\vartheta_p x)^{-m} \overset{m}{J}(\vartheta_p x)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden».

Auf den Beweis dieses Satzes will ich hier nicht eingehen, obgleich ihn Fourier nur in etwas weitläufiger Form und zwar nur für den speciellen Fall $m = 0$ gegeben hat. Den allgemeinen Nachweis für seine Richtigkeit findet man bei Lommel in seiner Schrift: «Studien über die Bessel'schen Funktionen» (Seite 69).

Auf Grund dieses Satzes sind a_1, $a_2 \ldots a_p \ldots$ leicht zu bestimmen, und zwar findet Fourier (wenn auch mit anderer Bezeichnungsweise) folgenden Wert für das allgemeine Glied a :

$$a_p = \frac{2}{\left[\overset{1}{J}(\vartheta_p)\right]^2} \int_0^1 x\, f(x)\, \overset{0}{J}(\vartheta_p\, x)\, dx,$$

wobei:

$$f(x) = \Sigma\, a_p\, \overset{0}{J}(\vartheta_p\, x) \text{ ist.}$$

Diese Werte werden alsdann in Gleichung 9a) eingesetzt, und damit ist v als Funktion der gegebenen Grössen vollständig bestimmt, und zwar durch die $\overset{0}{J}$- und $\overset{1}{J}$-Funktion von Bessel.

Auch Poisson kommt in seiner Abhandlung: «Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides», welche er am 31. Dezember 1821 der Akademie der Wissenschaften zu Paris vortrug und welche im XIX. Heft des Journal de l'école polytechnique publiziert ist, auf derartige Funktionen.

Im dritten Abschnitte des citierten Werkes behandelt er die Wärmeverteilung in einem homogenen Cylinder, der in irgend einer Weise vorher erwärmt wurde und sich nun langsam abkühlt. Mit grossem Scharfsinne entwickelt er dabei diesbezügliche, oft recht komplizierte Formeln, und zwar zuerst für den allgemeinen und dann für die beiden speciellen Fälle, wo der Radius des Grundkreises ein Mal sehr klein und das andere Mal unendlich gross ist. Dabei findet er eine Integralformel, welche noch die veränderlichen Werte einer Grösse k enthält, die der Gleichung

$$1 - k + \frac{k^2}{(1.2)^2} - \frac{k^3}{(1.2.3)^2} + \frac{k^4}{(1.2.3.4)^2} \mp \ldots\ldots = 0$$

genügen muss.

Aus dieser Gleichung kann man zwar, bei dem kleinsten beginnend, nach und nach die ersten Werte für k bestimmen; bei den grösseren aber ist dies Verfahren schon schwieriger und unpraktischer, und Poisson gibt aus diesem Grunde eine andere Bestimmungsart an.

Er betrachtet k als eine stetige Variabele und setzt:

$$10) \qquad y = \int_0^\pi \cos(k \cos\omega)\, d\omega.$$

Differenziert man diese Gleichung nach k, so wird:

$$11) \qquad \frac{dy}{dk} = -\int_0^\pi \sin(k\cos\omega)\cos\omega\, d\omega,$$

und durch nochmalige Differentiation folgt:

$$12) \qquad \frac{d^2y}{dk^2} = -\int_0^\pi \cos(k\cos\omega)\cos^2\omega\, d\omega.$$

folglich

$$y + \frac{d^2y}{dk^2} = \int_0^\pi [\cos(k\cos\omega) - \cos(k\cos\omega)\cos^2\omega]\, d\omega$$

$$= \int_0^\pi \cos(k\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega.$$

Durch teilweise Integration nach der bekannten Formel:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du,$$

wobei: $u = \sin\omega$, und $dv = k\cos(k\cos\omega)\sin\omega\, d\omega$ zu setzen ist, findet man:

$$k \int_0^\pi \cos (k \cos \omega) \sin^2 \omega \, d\omega = \int_0^\pi \sin (k \cos \omega) \cos \omega \, d\omega.$$

Mithin wird:

$$y + \frac{d^2y}{dk^2} = \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin (k \cos \omega) \cos \omega \, d\omega = - \frac{1}{k} \frac{dy}{dk},$$

und darum schliesslich:

$$13) \qquad \frac{d^2y}{dk^2} + \frac{1}{k} \frac{dy}{dk} + y = 0.$$

Diese Gleichung kann (wie leicht einzusehen) auch so geschrieben werden:

$$13^a) \qquad \frac{d^2 (y \sqrt{k})}{dk^2} + \left(\frac{1}{4 k^2} + 1 \right) y \sqrt{k} = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Differentialgleichung lautet:

$$14) \qquad y \sqrt{k} = \left[A + \frac{A'}{k} + \frac{A''}{k^2} + \frac{A'''}{k^3} + \cdots \right] \cos k$$
$$+ \left[B + \frac{B'}{k} + \frac{B''}{k^2} + \frac{B'''}{k^3} + \cdots \right] \sin k.$$

A und B sind zwei willkürliche Konstanten, A', A'', A''', . . . B', B'', B''', . . . bezeichnen unabhängige Koeffizienten von k, welche sich vermittelst A und B bestimmen lassen.

Substituiert man nämlich den in Gleichung 14) gefundenen Wert für $y \sqrt{k}$ in Gleichung 13ª) und vergleicht die entsprechenden Terme mit einander, so erhält man für A' . . . , B' . . . leicht die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$2 A' + \frac{1}{4} B = 0$$

$$2 . 2 A'' + \left(1 . 2 + \frac{1}{4} \right) B' = 0$$

$$2 . 3 A''' + \left(2 . 3 + \frac{1}{4} \right) B'' = 0$$

$$2 . 4 A^{(4)} + \left(3 . 4 + \frac{1}{4} \right) B''' = 0 \text{ u. s w.}$$

und:

$$- 2 B' + \frac{1}{4} A = 0$$

$$- 2 . 2 B'' + \left(1 . 2 + \frac{1}{4} \right) A' = 0$$

$$-2\,.\,3\,B''' + \left(2\,.\,3 + \frac{1}{4}\right) A'' = 0$$

$$-2\,.\,4\,B^{(4)} + \left(3\,.\,4 + \frac{1}{4}\right) A''' = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Konstanten A und B bekommt man, wenn man in $y\sqrt{k}$ und in $\frac{d\,(y\sqrt{k})}{dk}$ setzt: $k = \infty$.

Man hat alsdann (nach Gleichung 14):

$$15) \qquad y\sqrt{k} = A \cos k + B \sin k;$$

ferner:

$$16) \quad \frac{d\,(y\sqrt{k})}{dk} = \sqrt{k}\,\frac{dy}{dk} = -A \sin k + B \cos k,$$

woraus folgt:

$$A = \left(y \cos k - \frac{dy}{dk} \sin k\right)\sqrt{k};$$

$$B = \left(y \sin k + \frac{dy}{dk} \cos k\right)\sqrt{k}.$$

Setzt man in diesen Resultaten an Stelle von y und $\frac{dy}{dk}$ die in Gleichung 10) und 11) angegebenen Werte, so entsteht:

$$17) \left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{k}\int_0^{\pi} [\cos(k\cos\omega)\cos k + \sin(k\cos\omega)\cos\omega\sin k]\,d\omega, \\ B &= \sqrt{k}\int_0^{\pi} [\cos(k\cos\omega)\sin k - \sin(k\cos\omega)\cos\omega\cos k]\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

da nun:

$$\cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2} = 1 \text{ und } \cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2} = \cos\omega,$$

so wird:

$$17^{a}) \left\{\begin{aligned} A &= \sqrt{k}\int_0^{\pi} \cos\left(2\,k\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega \\ &\qquad + \sqrt{k}\int_0^{\pi} \cos\left(2\,k\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega, \\ B &= \sqrt{k}\int_0^{\pi} \sin\left(2\,k\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega \\ &\qquad + \sqrt{k}\int_0^{\pi} \sin\left(2\,k\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

Durch zweckmässige Umformung dieser Integrale findet Poisson für den Fall: $k = \infty$ folgende Werte:

$$\sqrt{k} \int_0^\pi \cos\left(2\,k\,\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\sqrt{k} \int_0^\pi \sin\left(2\,k\,\sin^2\frac{\omega}{2}\right)\cos^2\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\sqrt{k} \int_0^\pi \cos\left(2\,k\,\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\sqrt{k} \int_0^\pi \sin\left(2\,k\,\cos^2\frac{\omega}{2}\right)\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Mithin erhält man für A und B schliesslich die Werte:

$$17^b)\qquad A = B = \sqrt{\pi},$$

demnach

$$y\sqrt{k} = (\cos k + \sin k)\sqrt{\pi};\ \frac{dy\sqrt{k}}{dk} = (\cos k - \sin k)\sqrt{\pi}.$$

Aus dieser eben betracheten Untersuchung von Poisson geht nun für die Theorie der Bessel'schen Funktionen folgendes hervor:

1) Da sowohl, wie Fourier gefunden (Gleichung 4^b), das Integral:

$$\int_0^\pi \cos\,(k\,\sin\,\omega)\,d\omega$$

$\left(\text{abgesehen vom Faktor } \frac{1}{\pi}\right)$, als auch, wie Poisson zeigte (Gleichung 10), das Integral:

$$\int_0^\pi \cos\,(k\,\cos\,\omega)\,d\omega$$

derselben Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dk^2} + \frac{1}{k}\frac{dy}{dk} + y = 0$$

genügt, so folgt hieraus, dass einerseits ist:

$$\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(k\,\sin\,\omega)\,d\omega,$$

und andrerseits:

$$\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\,(k\,\cos\,\omega)\,d\omega,$$

dass man also die $\overset{0}{J}$-funktion durch zwei von einander verschiedene bestimmte Integrale darstellen kann; auch allgemein gilt dieser Satz für die $\overset{n}{J}$-funktion; Bessel hat dies, wie ich im Abschnitt II zeigen werde, sehr einfach bewiesen.

2) Für äusserst grosse Werte von k ist der Wert der Funktion $\overset{0}{J}(k)$ dargestellt durch die Formel:

$$\overset{0}{J}(k) = \frac{A \cos k + B \sin k}{\sqrt{k}},$$

wobei $A = B = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$; d. h. die Funktion $\overset{0}{J}(k)$ verschwindet, sobald man ihr ein reelles Argument zuerteilt und dieses ins Unendliche wachsen lässt.

Auf einen Punkt, der vielleicht zu Bedenken Anlass geben könnte*), will ich hier jedoch noch aufmerksam machen. Poisson fand für die Konstanten A und B den Wert $\sqrt{\pi}$, während oben als Wert $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ angegeben wird. Dass beide Wertbestimmungen ganz auf dasselbe hinauskommen, sieht man sofort ein, wenn man berücksichtigt, dass Poisson von der Formel (Gleichung 10):

$$y = \pi \,.\, \overset{0}{J}(k) = \int_0^\pi \cos(k \cos \omega)\, d\omega$$

ausging, und man mithin, um die Konstanten für $\overset{0}{J}(k)$ zu finden, noch durch π dividieren muss, wodurch man den Wert $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ erhält, den, wie ich zeigen werde, später auch Hansen und andere fanden.

II.

Sehr eingehend beschäftigte sich Bessel mit den fraglichen Funktionen, welche daher auch nach ihm ihren Namen erhalten haben, und zwar in einer Arbeit, welche den Titel trägt: «Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht».**) Dieselbe legte er am 29. Januar 1824 der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vor.

*) Siehe Neumann: «Theorie der Bessel'schen Funktionen» Seite 50, Anmerkung.

**) Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1824. Mathemat Kl. p. 1 und Abhandlungen von F. W. Bessel I. Bd. S. 84 u. ff.

Er untersucht darin den Teil der Störungen des Radius-Vektors, der Länge in der Bahn und der Breite über der mittleren Ebene derselben. Bei der Berechnung dieser Störungen treten noch verschiedene Integrationskonstanten auf, welche, um die Aufgabe vollständig zu lösen, genauer zu bestimmen sind. Eine sehr zweckmässige Bestimmungsmethode hat er in seiner «Analytischen Lösung der Kepler'schen Aufgabe», welche am 2. Juli 1818 der Akademie vorgelegt wurde, angegeben.

In den so entstandenen Resultaten spielen nun die zwei folgenden Integrale

$$\int \cos i\,\mu \,.\, \cos \varepsilon \,.\, d\varepsilon$$

$$\int \sin i\,\mu \,.\, \sin \varepsilon \,.\, d\varepsilon.$$

eine Hauptrolle, wobei μ die mittlere, ε die excentrische Anomalie und i die Neigung der Bahn bezeichnet.

Diese beiden Integrale kann man leicht auf die Form

$$\int \cos\,(h\varepsilon - k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon$$

reduzieren, wobei h eine ganze Zahl bedeutet. Bessel war nun der erste, welcher dieses Integral zweckmässig bezeichnete, und zwar setzte er:

$$18)\qquad \int_0^{2\pi} \cos\,(h\varepsilon - k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = 2\,\pi \overset{h}{J}\,(k).$$

Man hat nämlich, wenn man mit e die Excentricität bezeichnet:

$$\int_0^{2\pi} \cos i\,\mu \,.\, \cos \varepsilon \,.\, d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \cos i\,\mu\,(1 - [1 - e \cos \varepsilon])\,\frac{d\varepsilon}{e}$$

$$= \frac{1}{e}\int_0^{2\pi} \cos i\,\mu\, d\varepsilon - \frac{1}{e}\int_0^{2\pi} \cos i\,\mu\, d\mu,$$

weil bekanntlich die Gleichung gilt:

$$\mu = \varepsilon - e \sin \varepsilon,$$

und folglich auch

$$d\mu = (1 - e \cos \varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Berücksichtigt man die Integrationsgrenzen 0 und 2 π, so verschwindet das letzte Integral und man erhält:

$$19)\qquad \int_0^{2\pi} \cos i\,\mu\,\cos\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{1}{e}\int_0^{2\pi}\cos i\,\mu\,d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{e}\int_0^{2\pi}\cos(i\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$= 2\,\pi\,.\,\frac{1}{e}\,\overset{i}{J}(i\,e)$$

Ferner hat man:

$$\int_0^{2\pi}\sin i\,\mu\sin\varepsilon\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\cos i\,\mu\,\cos\varepsilon\,d\varepsilon - \int_0^{2\pi}\cos(\varepsilon + i\,\mu)\,d\varepsilon$$

oder

$$20)\int_0^{2\pi}\sin i\,\mu\,\sin\varepsilon\,d\varepsilon = 2\,\pi\,.\,\frac{1}{e}\,\overset{i}{J}(i\,e) - 2\,\pi\,\overset{i+1}{J}(i\,e)$$

weil: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(\varepsilon + i\,\mu)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\cos([i+1]\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$

$$= 2\,\pi\,.\,\overset{i+1}{J}(i\,e).$$

Die Reihenentwicklung für $\overset{h}{J}(k)$ erhält er mittelst der in seiner Abhandlung über die Kepler'sche Aufgabe angewandten Methode und findet:

$$21)\quad \overset{h}{J}(k) = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^h}{\Pi(h)}\left\{1 - \frac{1}{h+1}\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2.(h+1)(h+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^4 \mp \cdots\right\},$$

wo $\Pi(h)$ die von Gauss eingeführte Π-Funktion vorstellt, also

$$\Pi(0) = 0,\ \Pi(1) = 1,\ \Pi(2) = 1\,.\,2, \ldots.$$

Aus dieser Reihe lassen sich verhältnismässig schnell und leicht die Zahlenwerte für $\overset{h}{J}(k)$ berechnen.

Weil die eben behandelten Integrale in der physischen Astronomie eine grosse Rolle spielen, und sich die meisten Probleme auf derartige Entwicklungen zurückführen lassen, so untersucht Bessel am Schlusse seiner citierten Arbeit dieselben noch etwas eingehender auf ihre sonstigen Eigenschaften und findet dabei einige sehr interessante Beziehungen, welche im folgenden kurz angegeben sein mögen.

Aus

$$\cos[(i+1)\,\varepsilon - k\sin\varepsilon] + \cos[(i-1)\,\varepsilon - k\sin\varepsilon] = 2\cos(i\varepsilon - k\sin\varepsilon)\cos\varepsilon$$

erhält Bessel, wenn er das Glied auf der rechten Seite schreibt:

$$\frac{2\,i}{k}\cos(i\,\varepsilon - k\sin\varepsilon) - \frac{2}{k}\,[\cos(i\,\varepsilon - k\sin\varepsilon)]\,(i - k\cos\varepsilon),$$

dasselbe multipliziert mit $d\varepsilon$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und 2π,

$$22)\quad \int_0^{2\pi}\cos[(i+1)\,\varepsilon - k\sin\varepsilon]\,d\varepsilon + \int_0^{2\pi}\cos[(i-1)\,\varepsilon - k\sin\varepsilon]\,d\varepsilon$$

$$= \frac{2\,i}{k}\int_0^{2\pi}\cos(i\,\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon - \frac{2}{k}\int_0^{2\pi}\cos(i\,\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,(i - k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite verschwindet für die Grenzen 0 und $2\,\pi$ und man erhält:

$$22^{a})\quad 2\,\pi\,\overset{i+1}{J}(k) + 2\,\pi\,\overset{i-1}{J}(k) = \frac{2\,i\,.\,2\,\pi}{k}\,\overset{i}{J}(k)$$

oder

$$22^{b})\quad \overset{i+1}{J}(k) + \overset{i-1}{J}(k) - \frac{2\,i}{k}\,\overset{i}{J}(k) = 0.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass man durch zwei bekannte J-Funktionen alle übrigen ausdrücken kann; ferner folgt hieraus:

$$23)\quad \overset{-i}{J}(k) = (-1)^{i}\,\overset{i}{J}(k).$$

Man braucht also nur J-Funktionen mit positiven ganzen Inkrementen zu betrachten.

Im Weitern gibt Bessel den Wert für $\overset{i}{J}(k)$ ausgedrückt durch $\overset{0}{J}(k)$ und $\overset{1}{J}(k)$ nach der bekannten Eigenschaft der Kettenbrüche.*) (Seite 31 der angeführten Abhandlung.)

Die Differentialgleichung für die J-Funktion, welche er bereits ebenfalls abgeleitet hat, findet man folgendermassen: Differenziert man die Gleichung:

$$2\,\pi\,\overset{i}{J}(k) = \int_0^{2\pi}\cos(i\,\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$$

nach k, so erhält man:

*) Wie ich von Prof. Dr. J. H. Graf weiss, hat derselbe bereits den Annali di Matematica einen längern Artikel eingesandt über den Zusammenhang der Kettenausdrücke und der Bessel'schen Funktion I. Art. Derselbe wird demnächst erscheinen.

$$2\pi \frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk} = \int_0^{2\pi} \sin(i\varepsilon - k\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\, d\varepsilon = 2\pi\left\{\frac{i}{k}\overset{i}{J}(k) - \overset{i+1}{J}(k)\right\}$$

oder: 24) $$\overset{i+1}{J}(k) = \frac{i}{k}\overset{i}{J}(k) - \frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk}.$$

Dividiert man vorstehende Gleichung durch $\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}$, so entsteht:

$$\frac{\overset{i+1}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}} = \frac{\frac{i}{k}\overset{i}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}} - \frac{\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk}}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}} = \frac{i.2^{i+1}}{k^{i+2}}\overset{i}{J}(k) - \frac{2^{i+1}}{k^{i+1}}\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk}$$

Ferner ist aber:

$$\frac{d\left\{\frac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i}}\right\}}{d\left(\frac{k}{2}\right)^2} = \frac{\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2\right]^{\frac{i}{2}} \cdot \frac{d\overset{i}{J}(k)}{d\left(\frac{k}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}i\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2\right]^{\frac{i}{2}-1}\overset{i}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{2i}}$$

$$= \frac{2^{i+1}}{k^{i+1}}\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk} - \frac{i\,.\,2^{i+1}}{k^{i+2}}\overset{i}{J}(k)$$

folglich:

25) $$\frac{\overset{i+}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+1}} = -\frac{d\left\{\frac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i}}\right\}}{d\left(\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)},$$

oder allgemein:

26) $$\frac{\overset{i+h}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i+h}} = (-1)^h \frac{d^h\left\{\frac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\frac{k}{2}\right)^{i}}\right\}}{d\left(\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)^h}.$$

Aus Gleichung 24) folgt nun durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\overset{i}{J}(k)}{dk^2} = \frac{i}{k}\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk} - \frac{i}{k^2}\overset{i}{J}(k) - \frac{d\overset{i+1}{J}(k)}{dk}.$$

Wendet man auf die ersten Differentialquotienten von $\overset{i}{J}(k)$ und $\overset{i+1}{J}(k)$ Gleichung 24) an, so entsteht:

$$\text{27)}\qquad \frac{d^2 \overset{i}{J}(k)}{dk^2} = \frac{i^2}{k^2}\overset{i}{J}(k) - \frac{i}{k}\overset{i+1}{J}(k) - \frac{i}{k^2}\overset{i}{J}(k) - \frac{i+1}{k}\overset{i+1}{J}(k) + \overset{i+2}{J}(k).$$

Dividiert man ferner Gleichung 24) durch k, so erhält man:

$$\frac{1}{k}\,\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk} = \frac{i}{k^2}\overset{i}{J}(k) - \frac{1}{k}\overset{i+1}{J}(k).$$

Addiert man diese Gleichung zu Gleichung 27), so folgt:

$$\frac{d^2\overset{i}{J}(k)}{dk^2} + \frac{1}{k}\,\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk} = \frac{i^2}{k^2}\overset{i}{J}(k) - \frac{2(i+1)}{k}\overset{i+1}{J}(k) + \overset{i+2}{J}(k).$$

Als Reduktionsformel gilt nun:

$$\frac{2(i+1)}{k}\overset{i+1}{J}(k) = \overset{i}{J}(k) + \overset{i+2}{J}(k).$$

Mit Benutzung derselben erhält man schliesslich:

$$\text{28)}\qquad \frac{d^2\overset{i}{J}(k)}{dk^2} + \frac{1}{k}\,\frac{d\overset{i}{J}(k)}{dk} + \left(1 - \frac{i^2}{k^2}\right)\overset{i}{J}(k) = 0,$$

womit die Differentialgleichung für $\overset{i}{J}(k)$ hergeleitet ist. Bessel hat sich auch schon mit der Addition der Argumente bei der J-Funktion beschäftigt.

Für das Argument $(k+z)$ gibt er nämlich die J-Funktion in folgender Darstellung:

Nach Gleichung 26) ist:

$$\frac{d\left\{\dfrac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^i}\right\}}{d\left(\dfrac{k}{2}\right)^2} = -\frac{\overset{i+1}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^{i+1}}$$

$$\frac{d^2\left\{\dfrac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^i}\right\}}{\left[d\left(\dfrac{k}{2}\right)^2\right]^2} = +\frac{\overset{i+2}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^{i+2}},$$

$$\frac{d^3\left\{\dfrac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^i}\right\}}{\left[d\left(\dfrac{k}{2}\right)^2\right]^3} = -\frac{\overset{i+3}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^{i+3}}, \text{ u. s. w.}$$

also nach dem Taylor'schen Satze:

$$\frac{\overset{i}{J}(k+z)}{\left(\dfrac{k+z}{2}\right)^i} = \frac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^i} + \frac{d\left\{\dfrac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^i}\right\}}{1\,.\,d\left(\dfrac{k}{2}\right)^2}\left(\frac{k\,z}{2}+\frac{z^2}{4}\right)$$

$$+\frac{d^2\left\{\dfrac{\overset{i}{J}(k)}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^i}\right\}}{1\,.\,2\,.\left[d\left(\dfrac{k}{2}\right)^2\right]^2}\left(\frac{k\,z}{2}+\frac{z^2}{4}\right)^2+\cdots$$

oder

$$29)\quad \overset{i}{J}(k+z) = \left(1+\frac{z}{k}\right)^i\left[\overset{i}{J}(k) - \frac{\overset{i+1}{J}(k)}{1}\,z\left(1+\frac{z}{2\,k}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\overset{i+2}{J}(k)}{1\,.\,2}\,z^2\left(1+\frac{z}{2\,k}\right)^2 \mp \cdots\right]$$

Bessel macht die Bemerkung, dass jene Reihe zur Berechnung und Interpolation einer Tafel dieser Funktionen verwendet werden könne, und in der That hat er mit ihrer Hülfe eine seiner Abhandlung beigegebene, von $k = 0$ bis $k = 3{,}2$ mit der Differenz 0,1 gehende, $\overset{0}{J}(k)$ und $\overset{1}{J}(k)$ enthaltende berechnet.

Auf die Funktion J lassen sich, wie Bessel ebenfalls schon zeigte, noch andere Integrale zurückführen; als Beispiel möge folgendes genügen:

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} \cos(k \sin\varepsilon)\cos^{2i}\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2\,i-1)}{k^i}\,\overset{i}{J}(k).$$

Beweis: Durch teilweise Integration erhält man für das angegebene Integral folgenden Wert:

$$\left[\sin\varepsilon \,.\, \cos^{2i-1}\varepsilon \,.\, \cos(k\sin\varepsilon) - \frac{k}{2i+1}\cos^{2i+1}\varepsilon\sin(k\sin\varepsilon)\right]_0^{2\pi}$$
$$+ (2i-1)\int_0^{2\pi}\cos(k\sin\varepsilon)\cos^{2i-2}\varepsilon\,d\varepsilon$$
$$-(2i-1)\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\varepsilon \,.\, \cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{k^2}{2i+1}\int_0^{2\pi}\cos^{2i+2}\varepsilon\cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Berücksichtigt man die angegebenen Grenzen, so verschwinden die beiden ersten Glieder, und man hat:

$$30)\quad (2i-1)\int_0^{2\pi}\cos^{2i-2}\varepsilon \,.\, \cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon - 2i\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\varepsilon \,.\, \cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$$
$$+\frac{k^2}{2i+1}\int_0^{2\pi}\cos^{2i+2}\varepsilon \,.\, \cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Führt man nun folgende Grösse ein:

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2i}\varepsilon \,.\, \cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,...\,(2i-1)}{k^i}\,\varphi(i),$$

so entsteht aus Gleichung 30)

$$31)\quad k\,\varphi(i-1) - 2i\,\varphi(i) + k\,\varphi(i+1) = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung 22b); demnach:

$$\varphi(0) = \overset{0}{J}(k), \qquad \varphi(1) = \overset{1}{J}(k),$$
$$\varphi(i) = \overset{i}{J}(k).$$

Auch das Integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^{2i}\varepsilon \,.\, \cos(k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon$$

ist eine Darstellung der Bessel'schen Funktion erster Art; dasselbe ist deshalb bemerkenswert, weil es, wie ich später zeigen werde, auch Jacobi aus allgemeinen Betrachtungen und zwar auf eine höchst interessante Weise abgeleitet hat.

Von den weiteren Beziehungen, welche Bessel noch angibt, seien hier die wichtigen Reihen für $\cos k \,.\, \overset{0}{J}(k)$ und $\sin k \,.\, \overset{0}{J}(k)$ angeführt. Es ist:

$$\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

und

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen mit cos k resp. sin k und sin k resp. — cos k und geeignete Addition findet man:

$$\cos k\,.\,\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(k - k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(2k\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)d\varepsilon$$

$$\sin k\,.\,\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(k - k\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(2k\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)d\varepsilon,$$

oder in Reihen entwickelt:

$$\cos k\,.\,\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varepsilon\left\{1 - \frac{(2k)^2\sin^4\frac{\varepsilon}{2}}{\Pi(2)} + \frac{(2k)^4\sin^8\frac{\varepsilon}{2}}{\Pi(4)} - \frac{(2k)^6\sin^{12}\frac{\varepsilon}{2}}{\Pi(6)} \pm \cdots\right\},$$

$$\sin k\,.\,\overset{0}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varepsilon\left\{2k\sin^2\frac{\varepsilon}{2} - (2k)^3\frac{\sin^6\frac{\varepsilon}{2}}{\Pi(3)} + \frac{(2k)^5\sin^{10}\frac{\varepsilon}{2}}{\Pi(5)} \mp \cdots\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Grenzen ergibt sich schliesslich:

32) $$\cos k\,.\,\overset{0}{J}(k) = 1 - \frac{3}{(\Pi(2))^2}k^2 + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{(\Pi(4))^2}k^4 - \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}{(\Pi(6))^2}k^6 \pm \cdots$$

33) $$\sin k\,.\,\overset{0}{J}(k) = k - \frac{3\,.\,5}{(\Pi(3))^2}k^3 + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{(\Pi(5))^2}k^5 - \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13}{(\Pi(7))^2}k^7 \pm \cdots$$

Ähnliche Reihen leitete später auch Anger her.

Im weitern fand Bessel, dass die Funktion $\overset{0}{J}(k)$ mit den Sinus und Cosinus die *merkwürdige Eigenschaft* gemein hat, immer, wenn ihr Argument von $2n\pi$ bis zu $(2n + 2)\pi$ wächst, zweimal zu verschwinden und dann das Vorzeichen zu wechseln. Zum Beweise zeigt er, dass $\overset{0}{J}(k)$ von $k = m\pi$ bis $\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ immer positiv ist, wenn m eine gerade Zahl, und immer negativ, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Diese Eigenschaft kommt der $\overset{0}{J}$-funktion nicht allein zu, sondern alle J-funktionen besitzen eine ähnliche. Man hat nämlich, wenn man in Gleichung 26) der Kürze wegen $J(k)$ durch $\left(\frac{k}{2}\right)^i R^{(i)}$ und $\left(\frac{k}{2}\right)^i$ durch $\varkappa$ bezeichnet:

$$R^{(i+1)} = -\frac{d R^{(i)}}{d\varkappa};$$

woraus folgt, dass $R^{(i+1)}$ verschwindet, wenn $R^{(i)}$ ein Maximum oder Minimum ist; allein zwischen zwei Werten von k oder $\varkappa$, für welche $R^{(i)}$ verschwindet, liegt notwendig ein Maximum oder Minimum, also auch ein verschwindendes $R^{(i+1)}$. Es ist daher klar, dass $\overset{1}{J}(k)$ ebenso oft Null wird, so oft $\overset{0}{J}(k)$ ein Maximum oder Minimum ist. Zwischen diesen beiden Werten von k, für welche $\overset{1}{J}(k)$ verschwindet, liegt in ganz gleicher Weise immer ein Maximum oder Minimum von $R^{(1)}$, daher ein verschwindendes $\overset{2}{J}(k)$ u. s. w.

Als *Anwendung*, welche Bessel von der J-funktion machte, ist diejenige *auf die Mittelpunktsgleichung* zu erwähnen. Er war bekanntlich der erste, welcher die *Entwicklung der Mittelpunktsgleichung und des Radius-Vektors* in Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der mittleren Anomalie fortschreiten, durch eine Integration angegeben hat, wobei er einen schon von *Euler* im XI. Bande der «Nova Acta» der Petersburger Akademie veröffentlichten Satz benutzte. In der Zeitschrift für Astronomie und in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1816 und 1817 ist seine Methode zuerst publiziert worden. Später hat er dieselbe Aufgabe in der citierten Abhandlung von 1824 nochmals mit Anwendung der J-funktion zu lösen versucht und erhielt dabei ein ganz einfaches

Resultat, welches später von Hansen und namentlich von Anger noch verallgemeinert und vereinfacht wurde.

Bezeichnet man mit μ die mittlere, ε die excentrische und ν die wahre Anomalie, mit e die Excentricität, und setzt man:

$$\nu - \mu = A_1 \sin \mu + A_2 \sin 2\mu + A_3 \sin 3\mu + \cdots,$$

so ist:

$$A_{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos i\,\mu\, d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{i\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(i\,\varepsilon - i\,e \sin \varepsilon)}{1 - e\cos\varepsilon}\, d\varepsilon,$$

weil bekanntlich ist:

$$\mu = \varepsilon - e \sin\varepsilon \text{ und } d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos\varepsilon}.$$

Ferner ist:

$$34)\quad \frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \Big\{1 + 2\lambda\cos\varepsilon + 2\lambda^2 \cos 2\varepsilon + 2\lambda^3 \cos 3\varepsilon + \cdots\Big\},$$

wobei:

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}.$$

Multipliziert man Gleichung 34) auf die beiden Seiten mit $\cos(i\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$ und integriert von 0 bis $2\,\pi$, so erhält man die Gleichung:

$$35)\quad \frac{i}{2} A_{(i)} = \overset{i}{J}(i\,e) + \lambda\,(\overset{i+1}{J}(i\,e) + \overset{i-1}{J}(i\,e)) + \lambda^2\,(\overset{i+2}{J}(i\,e) + \overset{i-2}{J}(i\,e)) + \lambda^3\,(\overset{i+3}{J}(i\,e) + \overset{i-3}{J}(i\,e)) + \cdots,$$

worin die Entwicklung der Mittelpunktsgleichung, wie Bessel sie gibt, enthalten ist.

Auf die Entwicklung des Radius-Vektors will ich hier nicht eingehen; im Verlaufe der Arbeit bietet sich Gelegenheit, einige Bemerkungen darüber zu machen.

III.

Dieser Abschnitt sei der Darstellung jener eigentümlichen Methode gewidmet, welche Jacobi anwandte, um die schon früher von Bessel gegebene Form

$$\pi\,.\,\overset{i}{J}(k) = \frac{k^i}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots(2\,i-1)} \int_0^{\pi} \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{2i}\varepsilon\, d\varepsilon$$

aus ganz allgemeinen Betrachtungen, auf einem ganz anderen Wege von neuem herzuleiten. Diese Bestimmungsweise findet sich in seiner Abhandlung «Formula transformationis integralium definitorum», vom Jahre 1835, welche zuerst im XV. Bande des Crelle'schen Journal abgedruckt wurde. Sie findet sich auch im VI. Bande der gesammelten Werke Jacobis, welche Weierstrass herausgegeben hat.

Es ist:

$$36)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x . \cos^{2n} x \, dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1 \ldots (2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2m+2n)(2m+2n-2)\ldots . 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$37)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \cos(2n\, x)\, dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos(2n\, x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \, \frac{2m(2m-1)\ldots(m+n+1)}{1.2\ldots(m-n)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$38)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)\, x \cos^{2m+1} x\, dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \sin(2n+1)\, x . dx$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \, \frac{(2m+1)\, 2m \ldots (m+n+2) . \pi}{1.2\ldots(m-n) . 2},$$

oder allgemein, wenn p — i eine gerade positive Zahl bedeutet:

$$39)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos i\, x\, dx = \frac{1}{2^p} \, \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+i}{2}+1\right)}{1.2\ldots\left(\frac{p-i}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3\ldots(2i-1)} \cdot \frac{(p-i-1)(p-i-3)\ldots 1 \ldots (2i-1)(2i-3)\ldots 1}{2.4.6\ldots(p+i)} \, \frac{\pi}{2}$$

Durch Vergleichung mit Gleichung 36) folgt:

$$39^{a})\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos i\, x\, dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3\ldots(2i-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} x \cos^{p-i} x\, dx.$$

Damit diese Formel auch gilt, wenn p — i eine ungerade Zahl bedeutet, wählt man als Integrationsgrenzen 0 und π; in diesem Falle verschwinden nämlich, für p — i gleich einer ungeraden Zahl, beide Integrale. Bezeichnen daher i und p irgendwelche ganze Zahlen, so wird:

$$40)\quad \int_0^\pi \cos^p x \cos i x\, dx = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1.3.5\dots(2i-1)} \int_0^\pi \sin^{2i} x \cos^{p-i} x\, dx.$$

Nimmt man nun an, die Funktion f(z) könne nach ganzen, positiven Potenzen von z entwickelt werden, und diese Entwicklung laute:

$$f(z) = \sum A_p z^p$$

und setzt man:

$$\frac{d^i f(z)}{(dz)^i} = f^{(i)}(z),$$

wo:

$$f^{(i)}(z) = \sum p(p-1)(p-2)\dots(p-i+1) A_p z^{p-i},$$

so entsteht aus Gleichung 40) folgende Relation:

$$41)\qquad \int_0^\pi f(\cos x) \cos i x\, dx = \sum A_p \int_0^\pi \cos^p x \cos i x\, dx$$

$$= \frac{1}{1.3.5\dots(2i-1)} \int_0^\pi \sin^{2i} x \left\{ \sum p(p-1)\dots(p-i+1) A_p \cos^{p-i} x \right\} dx$$

oder endlich:

$$42)\qquad \int_0^\pi f(\cos x) \cos i x\, dx = \frac{1}{1.3.5\dots(2i-1)} \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x\, dx.$$

Diese Formel benutzte nun Jacobi zur Herleitung des angegebenen Wertes von $\overset{i}{J}(k)$.

Bezeichnen nämlich ε, μ, e bezügl. die excentrische, mittlere Anomalie und die Excentricität, so dass

$$\mu = \varepsilon - e \sin \varepsilon,$$

so mögen folgende Reihenentwicklungen gelten:

$$43)\qquad \begin{cases} \cos n\varepsilon = p_n + 2 p_n' \cos \mu + 2 p_n'' \cos 2\mu + 2 p_n''' \cos 3\mu + \cdots \\ \sin n\varepsilon = q_n' \sin \mu + q_n'' \sin 2\mu + q_n''' \sin 3\mu + \cdots \end{cases}$$

wobei:

$$p_n^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos i\mu \cos n\varepsilon\, d\mu = \frac{n}{i\pi} \int_0^\pi \sin i\mu \sin n\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \frac{n}{2i\pi} \int_0^\pi \left[\cos\left\{(i-n)\varepsilon - i e \sin \varepsilon\right\} - \cos\left\{(i+n)\varepsilon - i e \sin \varepsilon\right\} \right] d\varepsilon$$

und:

$$q_n^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin i\mu \sin n\varepsilon\, d\mu = \frac{2n}{i\pi}\int_0^\pi \cos i\mu \cos n\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \frac{n}{i\pi}\int_0^\pi \Big[\cos\{(i-n)\varepsilon - i e \sin\varepsilon\} + \cos\{(i+n)\varepsilon - i e \sin\varepsilon\}\Big]\, d\varepsilon.$$

Vorstehende Werte erhält man leicht durch teilweise Integration, wobei die Glieder, für welche die Integration ausgeführt ist, zwischen den angegebenen Grenzen verschwinden.

Setzt man nun mit Bessel:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(i\varepsilon - k\sin\varepsilon)\, d\varepsilon = \overset{i}{J}(k)$$

so wird:

$$p_n^{(i)} = \frac{n}{2i}\left\{\overset{i-n}{J}(ie) - \overset{i+n}{J}(ie)\right\}$$

und

$$q_n^{(i)} = \frac{n}{i}\left\{\overset{i-n}{J}(ie) + \overset{i+n}{J}(ie)\right\}$$

Je nachdem i eine gerade oder ungerade Zahl bezeichnet, erhält man:

$$44)\quad \begin{cases} \overset{2i}{J}(k) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(k\sin\varepsilon)\cos(2i\varepsilon)\, d\varepsilon \\[2ex] \qquad = \dfrac{(-1)^i}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\cos(2i\varepsilon)\, d\varepsilon. \\[2ex] \overset{2i+1}{J}(k) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(k\sin\varepsilon)\sin(2i+1)\varepsilon\, d\varepsilon \\[2ex] \qquad = \dfrac{(-1)^i}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(k\cos\varepsilon)\cos(2i+1)\varepsilon\, d\varepsilon. \end{cases}$$

In gleicher Weise gelten folgende Reihenentwicklungen:

$$45)\quad \begin{cases} \cos i\mu = k^{(i)} + 2k_1^{(i)}\cos\varepsilon + 2k_2^{(i)}\cos 2\varepsilon + \cdots \\ \sin i\mu = l_1^{(i)}\sin\varepsilon + l_2^{(i)}\sin 2\varepsilon + l_3^{(i)}\sin 3\varepsilon + \cdots \end{cases}$$

wobei:

$$k_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos i\,\mu \cos n\,\varepsilon\, d\,\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[\cos\left\{(i-n)\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon\right\} + \cos\left\{(i+n)\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon\right\}\right] d\varepsilon;$$

$$l_n^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin i\,\mu \sin n\,\varepsilon\, d\,\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos\left\{(i-n)\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon\right\} - \cos\left\{(i+n)\,\varepsilon - i\,e\sin\varepsilon\right\}\right] d\varepsilon.$$

oder:

$$k_n^{(i)} = \frac{1}{2}\left\{\overset{i-n}{J}(i\,e) + \overset{i+n}{J}(i\,e)\right\} = \frac{i}{2n}\,q_n^{(i)};$$

$$l_n^{(i)} = \overset{i-n}{J}(i\,e) - \overset{i+n}{J}(i\,e) = \frac{2\,i}{n}\,p_n^{(i)}.$$

Die Umformung des Integrales für $\overset{i}{J}(k)$ gestaltet sich demnach folgendermassen. Setzt man

$$f(z) = \cos(k\,z) \quad \text{oder} \quad f(z) = \sin(k\,z),$$

so wird mit Berücksichtigung von Gleichung 42)

$$\pi\,\overset{2i}{J}(k) = (-1)^i \int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\cos(2\,i\,\varepsilon)\,d\,\varepsilon$$

$$= \frac{k^{2i}}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(4\,i-1)}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{4i}\varepsilon\,d\,\varepsilon;$$

und:

$$\pi\,\overset{2i+1}{J}(k) = (-1)^i \int_0^\pi \sin(k\cos\varepsilon)\cos(2\,i+1)\,\varepsilon\,d\,\varepsilon$$

$$= \frac{k^{2i+1}}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(4\,i+1)}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{4i+2}\varepsilon\,d\varepsilon;$$

oder allgemein für jedes positive i:

$$\text{46)} \qquad \pi\,\overset{i}{J}(k) = \frac{k^i}{1\,.\,3\,\ldots\,(2\,i-1)}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{2i}\varepsilon\,d\,\varepsilon,$$

womit die von Bessel angegebene Form wieder hergeleitet ist.

IV.

P. A. Hansen, Direktor der Sternwarte Seeberg, hat ebenfalls die Bessel'schen Funktionen in das Bereich seiner Untersuchungen gezogen und zwar im ersten Teile seiner Abhandlung: «Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung», 1843, der als Beispiel «die Berechnung der absoluten vom Saturn erzeugten Störungen des Encke'schen Kometen» enthält.

In dem Abschnitte, welcher von der Integration der von ihm gefundenen Differentiale handelt, stösst er auf derartige Grössen, und bezeichnet sie mit $\overset{0}{J}(\lambda)$, $\overset{1}{J}(\lambda)$ ... $\overset{i}{J}(\lambda)$ ... Hier muss nun bemerkt werden, dass Hansen für diese Funktion eine von der hier angenommenen abweichende Schreibweise gebraucht. Zwischen der unsrigen und ihr besteht nämlich folgende einfache Relation:

$$\overset{i}{J}(k) = \overset{i}{J}(2\lambda),$$

oder umgekehrt:

$$\overset{i}{J}(\lambda) = \overset{i}{J}\left(\frac{1}{2}k\right);$$

sie ist also identisch mit der Bessel'schen Transcendenten $\overset{i}{J}(k)$, wenn man 2λ statt k schreibt.

Wie schon bemerkt, hat Bessel eine Tafel der Funktionen $\overset{0}{J}(k)$ und $\overset{1}{J}(k)$ konstruiert, welche für alle um 0,1 verschiedenen Werte des Argumentes die zugehörigen Funktionswerte zehnstellig angibt und zwar von $k = 0$ bis $k = 3{,}20$. Hansen hat Tafeln von grösserem Umfange berechnet; dieselben gehen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 20$, d. h. von $k = 0$ bis $k = 10$, mit einem Inkremente von 0,05 resp. 0,1, und geben die Funktionswerte bis auf sechs Decimalstellen richtig an.

Durch Integration der im Verlaufe jener citierten Abhandlung gefundenen Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{\omega}{x} - \lambda - \frac{\lambda}{x^2}\right) = \frac{1}{x}$$

erhält Hansen folgenden Wert für y:

$$47)\qquad y = x^{-\omega}\, c^{\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)} \int x^{\omega-1}\, c^{-\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)}\, dx + \text{Konst.}$$

Die beiden Reihen:

$$c^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\lambda^3 x^3 + \cdots$$

$$c^{-\frac{\lambda}{x}} = 1 - \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2}{x^2} - \frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{\lambda^3}{x^3} \pm \cdots$$

geben leicht:

$$48)\quad \begin{cases} c^{\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \overset{0}{J}(\lambda) + x\,\overset{1}{J}(\lambda) + x^2\,\overset{2}{J}(\lambda) + \cdots - \frac{1}{x}\,\overset{1}{J}(\lambda) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{x^2}\,\overset{2}{J}(\lambda) - \frac{1}{x^3}\,\overset{3}{J}(\lambda) \pm \cdots \\ c^{-\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \overset{0}{J}(\lambda) - x\,\overset{1}{J}(\lambda) + x^2\,\overset{2}{J}(\lambda) \mp \cdots + \frac{1}{x}\,\overset{1}{J}(\lambda) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{x^2}\,\overset{2}{J}(\lambda) + \cdots \end{cases}$$

wobei:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = 1 - \lambda^2 + \frac{1}{2^2}\lambda^4 - \frac{1}{2^2\,.\,3^2}\lambda^6 \pm \cdots$$

$$\overset{1}{J}(\lambda) = \lambda - \frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{1}{2^2\,.\,3}\lambda^5 - \frac{1}{2^2\,.\,3^2\,.\,4}\lambda^7 \pm \cdots$$

$$\overset{2}{J}(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2\,.\,3}\lambda^4 + \frac{1}{2^2\,.\,3\,.\,4}\lambda^6 - \frac{1}{2^2\,.\,3^2\,.\,4\,.\,5}\lambda^8 \pm \cdots$$

$$\overset{3}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\,.\,3}\lambda^3 - \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\lambda^5 + \frac{1}{2^2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\lambda^7 - \frac{1}{2^2\,.\,3^2\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\lambda^9 \pm \cdots$$

u. s. w.

Substituiert man nun die Reihen 48) in Gleichung 47) und führt die Integration wirklich aus, so entsteht:

$$y = \left\{\cdots + \overset{4}{J}(\lambda)\,x^{-4} - \overset{3}{J}(\lambda)\,x^{-3} + \overset{2}{J}(\lambda)\,x^{-2} - \overset{1}{J}(\lambda)\,x^{-1} + \overset{0}{J}(\lambda) + \overset{1}{J}(\lambda)\,x + \overset{2}{J}(\lambda)\,x^2 + \cdots\right\}.$$

$$\times \left\{\cdots + \frac{\overset{4}{J}(\lambda)}{\omega+4}\,x^4 - \frac{\overset{3}{J}(\lambda)}{\omega+3}\,x^3 \pm \cdots + \frac{\overset{0}{J}(\lambda)}{\omega} + \frac{\overset{1}{J}(\lambda)}{\omega-1}\,x^{-1} + \frac{\overset{2}{J}(\lambda)}{\omega-2}\,x^{-2} + \cdots\right\} + \text{Konst.}$$

Um zu zeigen, dass alle hier vorkommenden J-Funktionen mit den betreffenden Bessel'schen identisch sind für $k = 2\lambda$, setzt Hansen:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos z,$$

woraus bekanntlich folgt:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \cos 2 z$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2 \cos 3 z \text{ u. s. w.}$$

$$x - \frac{1}{x} = 2 \varrho \sin z$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 2 \varrho \sin 2 z$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 2 \varrho \sin 3 z \text{ u. s. w.,}$$

wobei: $\varrho = \sqrt{-1}.$

Substituiert man diese Gleichungen in die erste Reihe der Gleichung 48), so erhält man:

$$c^{2\varrho\lambda \sin z} = \overset{0}{J}(\lambda) + 2\varrho \overset{1}{J}(\lambda) \sin z + 2 \overset{2}{J}(\lambda) \cos 2 z + 2\varrho \overset{3}{J}(\lambda) \sin 3 z + \cdots$$

Nach bekannten Sätzen ergibt sich nun, wenn i eine ungerade Zahl bedeutet:

$$49) \quad \varrho \overset{i}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho \sin z} \sin i z \, dz.$$

Ist i eine gerade Zahl, so wird:

$$50) \quad \overset{i}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c^{2\lambda\varrho \sin z} \cos i z \, dz.$$

Setzt man jetzt, wenn i eine ungerade Zahl bedeutet:

$$V = c^{2\lambda\varrho \sin z} \cos i z,$$

so wird:

$$d V = \varrho \lambda c^{2\lambda\varrho \sin z} \left\{ \cos (i + 1) z + \cos (i - 1) z \right\} dz - i c^{2\varrho\lambda \sin z} \sin i z \, dz$$

weil:

$$\cos (i + 1) z + \cos (i - 1) z = 2 \cos i z \cos z.$$

Ist aber i ungerade, so ist sowohl $(i + 1)$ als auch $(i - 1)$ gerade; deshalb und weil:

$$\int_0^{2\pi} d V = 0,$$

entsteht folgende Gleichung:

$$51)\qquad 0 = \lambda \left\{ \overset{i+1}{J}(\lambda) + \overset{i-1}{J}(\lambda) \right\} - i\, \overset{i}{J}(\lambda)$$

Es sei ferner, wenn i eine gerade Zahl bedeutet:

$$V = c^{2\lambda\varrho \sin z} \sin i\, z,$$

mithin:

$$d\,V = \varrho\lambda\, c^{2\varrho\lambda \sin z} \left\{ \sin(i+1)z + \sin(i-1)z \right\} dz + i\, c^{2\varrho\lambda \sin z} \cos i\, z\, dz.$$

In ganz gleicher Weise wie vorher entsteht hieraus die Gleichung:

$$51)\qquad 0 = \lambda \left\{ \overset{i+1}{J}(\lambda) + \overset{i-1}{J}(\lambda) \right\} - i\, \overset{i}{J}(\lambda),$$

welche mit der von Bessel gefundenen 22ᵇ) identisch ist. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ k entsteht nämlich:

$$51^{a})\qquad \frac{1}{2} k \left\{ \overset{i+1}{J}\left(\frac{1}{2} k\right) + \overset{i-1}{J}\left(\frac{1}{2} k\right) \right\} - i\, \overset{i}{J}\left(\frac{1}{2} k\right) = 0,$$

oder:

$$22^{b})\quad k \left\{ \overset{i+1}{J}(k) + \overset{i-1}{J}(k) \right\} - 2\, i\, \overset{i}{J}(k) = 0.$$

Für i = 0, wird Gleichung 50)

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda \sin z}\, dz, \text{ oder}$$

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos(2\,\lambda \sin z) + \varrho \sin(2\,\lambda \sin z) \right\} dz.$$

Da nun aber:

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\,\lambda \sin z)\, d\,z = 0,$$

so folgt:

$$52)\qquad \overset{0}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\,\lambda \sin z)\, dz,$$

welches der bekannte Ausdruck für diese Transcendente ist, wenn man k für $2\,\lambda$ einführt. (conf. Gleichung 18).

Im weitern gibt Hansen Ausdrücke zur Berechnung von $\overset{i}{J}(\lambda)$ auch für den Fall $\lambda = \infty$. Dieselben erhält er durch Entwicklung der Transcendenten $\overset{0}{J}(\lambda)$ in eine nach fallenden Potenzen von λ fortschreitende Reihe.

Die Gleichungen 49) und 50) ergeben:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda\sin z}\, dz$$

$$\varrho\,.\,\overset{1}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda\sin z}\sin z\, dz$$

$$\overset{2}{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda\sin z}\cos 2\,z\, dz.$$

Differenziert man die erste dieser drei Relationen, so entsteht:

$$\frac{d\,\overset{0}{J}(\lambda)}{d\,\lambda} = \frac{\varrho}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda\sin z}\sin z\,.\,d\,z = -\,2\,\overset{1}{J}(\lambda)$$

$$\frac{d^2\,\overset{0}{J}(\lambda)}{d\,\lambda^2} = -\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\varrho\lambda\sin z}\left\{1 - \cos 2\,z\right\} dz = 2\,\overset{2}{J}(\lambda) - 2\,\overset{0}{J}(\lambda).$$

Diese letzten Gleichungen geben in Verbindung mit der Bedingungsgleichung

$$\overset{2}{J}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\,\overset{1}{J}(\lambda) + \overset{0}{J}(\lambda) = 0$$

die folgende lineare Differentialgleichung der $\overset{0}{J}$-Funktion:

$$53)\qquad \frac{d^2\,\overset{0}{J}(\lambda)}{d\,\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\,\frac{d\,\overset{0}{J}(\lambda)}{d\lambda} + 4\,\overset{0}{J}(\lambda) = 0.$$

Für den Fall: $\lambda = \infty$, d. h. $\frac{1}{\lambda} = 0$,

geht vorstehende Gleichung über in:

$$\frac{d^2\,\overset{0}{J}(\lambda)}{d\lambda^2} + 4\,\overset{0}{J}(\lambda) = 0,$$

deren Integral bekanntlich ist:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = k\cos 2\,\lambda + k'\sin 2\,\lambda,$$

wobei k und k' zwei dem Integral hinzugefügte Integrationskonstanten sind. Diesen Wert für $\overset{0}{J}(\lambda)$ kann man als Näherungswert betrachten, falls λ gleich einer sehr grossen Zahl wird.

Substituieren wir denselben nun in Gleichung 53) und sehen dabei k und k' als veränderliche Grössen an, so entsteht eine identische

Gleichung und die Koeffizienten von sin 2λ und cos 2λ müssen daher jeder für sich gleich Null werden; mithin muss sein:

$$\frac{d^2k}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dk}{d\lambda} + \frac{4\,dk'}{d\lambda} + \frac{2k'}{\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2k'}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dk'}{d\lambda} - \frac{4\,dk}{d\lambda} - \frac{2k}{\lambda} = 0.$$

Setzt man jetzt:

$$k = \frac{\alpha}{\lambda^a} + \frac{\alpha_1}{\lambda^{a+1}} + \frac{\alpha_2}{\lambda^{a+2}} + \cdots$$

$$k' = \frac{\beta}{\lambda^a} + \frac{\beta_1}{\lambda^{a+1}} + \frac{\beta_2}{\lambda^{a+2}} + \cdots,$$

wobei $\alpha, \alpha_1, \ldots \beta, \beta_1, \ldots$ Konstanten sind, in die vorhergehenden Gleichungen ein, so findet man zuerst $a = \frac{1}{2}$, und nach weitern Umformungen ergibt sich schliesslich für $\overset{0}{J}(\lambda)$ folgender Ausdruck:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = c\left\{\frac{1}{\lambda^{1/2}} - \frac{9}{512\,\lambda^{5/2}} + \frac{3675}{524288\,\lambda^{9/2}} - \mp \cdots\right\} \cos(2\lambda - c') +$$

$$+ c\left\{\frac{1}{16\,\lambda^{3/2}} - \frac{75}{8192\,\lambda^{7/2}} + \frac{297675}{41943040\,\lambda^{11/2}} \mp \cdots\right\} \sin(2\lambda - c'),$$

wobei: $\alpha = c \,.\, \cos c'$, $\beta = c \,.\, \sin c'$.

Die Konstanten c und c' bestimmen sich nach einem von Laplace angegebenen Verfahren (Seite 112 u. ff. der citierten Abhandlung), und zwar wird:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad c' = \frac{1}{4}\pi.$$

Mithin lautet der vollständige Integralausdruck der Gleichung 53):

$$54)\quad \overset{0}{J}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\lambda^{1/2}} - \frac{9}{512\,\lambda^{5/2}} + \frac{3675}{524288\,\lambda^{9/2}} \mp \cdots\right\} . \cos\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{16\,\lambda^{3/2}} - \frac{75}{8192\,\lambda^{7/2}} + \frac{297675}{41943040\,\lambda^{11/2}} \mp \cdots\right\} . \sin\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right).$$

Je grösser nun λ ist, desto genauer kann man mit Hilfe dieser Gleichung $\overset{0}{J}(\lambda)$ berechnen. Ist λ sehr gross, so reicht man mit dem ersten Gliede der ersten Reihe aus, und in diesem Falle gewährt also vorliegender Ausdruck eine ungemein kurze Rechnung. Aber auch, wenn λ nicht sehr gross ist, kann man doch den obigen Ausdruck $\overset{0}{J}(\lambda)$ mit einer in den weitaus meisten Fällen hinreichenden Genauigkeit berechnen.

Wendet man die eben gefundene Formel auf die früher abgeleitete Gleichung:

$$\overset{1}{J}(\lambda) = -\frac{1}{2}\frac{d\overset{0}{J}(\lambda)}{d\lambda}$$

an, so entsteht:

$$55)\ \overset{1}{J}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\lambda^{1/2}} + \frac{15}{512\,\lambda^{5/2}} - \frac{4725}{524288\,\lambda^{9/2}} \pm \cdots \sin\right\}\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{3}{16\,\lambda^{3/2}} - \frac{105}{8192\,\lambda^{7/2}} + \frac{363825}{41943040\,\lambda^{11/2}} \mp \cdots\right\}.$$
$$.\cos\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right).$$

Da nun allgemein gilt

$$\overset{i+1}{J}(\lambda) = \frac{i}{2\lambda}\overset{i}{J}(\lambda) - \frac{1}{2}\frac{d\overset{i}{J}(\lambda)}{d\lambda},$$

so kann man durch fortgesetzte Differentiation des eben gefundenen Ausdruckes für $\overset{0}{J}(\lambda)$ alle anderen $\overset{i}{J}(\lambda)$ explicite durch Reihen, welche nach fallenden Potenzen von λ geordnet sind, darstellen.

Als Anwendung der Bessel'schen Funktionen, welche Hansen machte, ist, wie schon bemerkt, diejenige auf die Mittelpunktsgleichung zu erwähnen. Hansen hat darüber zuerst in den «Comptes rendus» und in den «Astronomischen Nachrichten» eine vorläufige Notiz gegeben und später in seiner Abhandlung «Entwickelung des Produktes einer Potenz des Radius vector», welche im Jahre 1853 erschien, eine ausführliche Erörterung des Gegenstandes veröffentlicht. Näher hierauf einzugehen, halte ich nicht für angebracht, zumal ich später doch noch einmal auf diese Materie zurückkommen muss.

A n g e r, Direktor der naturforschenden Gesellschaft in Danzig, hat in den «Neuesten Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig» vom Jahre 1855 eine Arbeit veröffentlicht, welche den Titel führt: «Untersuchungen über die Funktion $\overset{h}{J}(k)$ mit Anwendungen auf das Kepler'sche Problem», worin er zeigt, dass die einfachen Gesetze, denen diese Funktion unterworfen ist, wenn für h eine ganze Zahl genommen wird, sich sehr einfach und im Zusammenhange aus ihrer Erklärung in Verbindung mit dem zuerst von Euler aufgestellten allgemeinen Theorem, nach welchem eine Funktion in eine nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen des Argumentes fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, ableiten lassen. Ferner gibt er auf höchst scharfsinnige und elegante Weise die Entwicklung der Funktion für den Fall, dass h eine gebrochene Zahl ist, und teilt für die Entwicklung von $\overset{h}{J}(k)$ in eine nach den absteigenden Potenzen von k fortschreitende Doppelreihe zwei neue Methoden mit, von denen namentlich die zweite grösseres Interesse verdient.

Die bekannten Ausdrücke für $\sin^{2i+1}\varepsilon$ und für $\sin^{2i}\varepsilon$ als lineare Funktionen der Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel*), wo i jede ganze Zahl bedeutet, geben leicht die Gleichungen:

$$56)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sin 2i'\varepsilon \,.\, \sin^{2i+1}\varepsilon \, d\varepsilon = 0, \\ &\int_0^{2\pi} \cos (2i'+1)\varepsilon \,.\, \sin^{2i}\varepsilon \, d\varepsilon = 0, \end{aligned}\right.$$

wo i' ebenfalls jede ganze Zahl bedeutet.

Da nun keine geraden Potenzen von $\sin\varepsilon$ in der Entwicklung von $\sin(k\sin\varepsilon)$, und keine ungeraden in der Entwicklung von $\cos(k\sin\varepsilon)$ vorkommen, so wird nach Gleichung 56), wenn h eine gerade Zahl bedeutet:

---

*) Es ist nämlich für jedes ganzzahlige i:

$$(-1)^i . 2^{2i} \sin^{2i+1}\varepsilon = \sin(2i+1)\varepsilon - \frac{2i+1}{1}\sin(2i-1)\varepsilon$$
$$+ \frac{(2i+1)\,2i}{1\,.\,2}\sin(2i-3)\varepsilon \ldots \pm \frac{(2i+1)\,2i\,(2i-1)\ldots(i+2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i}\sin\varepsilon$$

und

$$(-1)^i\, 2^{2i-1} \sin^{2i}\varepsilon = \cos 2i\varepsilon - \frac{2i}{1}\cos 2(i-1)\varepsilon + \frac{2i\,(2i-1)}{1\,.\,2}\cos 2(i-2)\varepsilon \ldots$$
$$\pm \frac{1}{2}\,\frac{2i\,(2i-1)\,(2i-2)\ldots(i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i}.$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\sin 2i'\varepsilon$, die zweite mit $\cos(2i'+1)\varepsilon$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und 2π, so entstehen die Gleichungen 56).

$$\int \sin h\,\varepsilon \,.\, \sin (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = 0,$$

und für ein ungerades h:

$$\int \cos h\,\varepsilon \,.\, \cos (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = 0.$$

Ist schliesslich h eine ganze Zahl, gleichviel ob gerade oder ungerade, so ist:

$$\int_0^{2\pi} \sin h\,\varepsilon \,.\, \cos (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = 0,$$

$$\int^{\pi} \cos h\,\varepsilon \,.\, \sin (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = 0;$$

demnach auch:
$$\int_0^{2\pi} \sin (h\,\varepsilon - k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = 0.$$

Bezeichnet man nun mit Bessel $\int_0^{2\pi} \cos (h\,\varepsilon - k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon$ durch $2\pi \overset{h}{J}(k)$, so folgt durch Auflösung des Cosinus:

$$\overset{h}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos h\,\varepsilon \,.\, \cos (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin h\,\varepsilon \,.\, \sin (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon,$$

mithin:

$$\overset{-h}{J}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos h\,\varepsilon \,.\, \cos (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin h\,\varepsilon \,.\, \sin (k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Es wird demnach, wenn h eine gerade Zahl bedeutet:

$$\overset{h}{J}(k) = \overset{-h}{J}(k) = -\overset{-h}{J}(k),$$

oder allgemein:

$$\overset{-h}{J}(k) = (-1)\ \overset{h}{J}(k).$$

Für ein negatives k gelten ebenso die Gleichungen:

$$\overset{h}{J}(-k) = \overset{-h}{J}(k) = (-1)^h \,.\, \overset{h}{J}(k);$$

und schliesslich:

$$\overset{-h}{J}(-k) = \overset{h}{J}(k).$$

Anger leitet weiterhin einige Reihen ab, so für cos (k sin ε), sin (k sin ε), sin (k cos ε) u. s. w., welche nach Bessel'schen Funktionen fortschreiten, und welche ich hier der Übersicht wegen nochmals zusammenstellen will; zu bemerken ist hierbei, dass die Reihen für sin (k cos ε) und cos (k cos ε) schon von Jacobi als direkte Folgerung aus Gleichung 44) aufgestellt worden sind, und dass auch Bessel schon einige derselben gefunden hat. Es ist:

$$\alpha)\left\{\begin{array}{l} \cos(k \sin\varepsilon) = \overset{0}{J}(k) + 2\,\overset{2}{J}(k)\cos 2\,\varepsilon + 2\,\overset{4}{J}(k)\cos 4\,\varepsilon + \cdots \\ \sin(k \sin\varepsilon) = 2\,\overset{1}{J}(k)\sin\varepsilon + 2\,\overset{3}{J}(k)\sin 3\,\varepsilon + 2\,\overset{5}{J}(k)\sin 5\,\varepsilon + \cdots \end{array}\right.$$

Setzt man hierin $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ statt ε, so ergeben sich daraus die folgenden Reihen:

$$\beta)\left\{\begin{array}{l} \cos(k \cos\varepsilon) = \overset{0}{J}(k) - 2\,\overset{2}{J}(k)\cos 2\,\varepsilon + 2\,\overset{4}{J}(k)\cos 4\,\varepsilon \mp \cdots \\ \sin(k \cos\varepsilon) = 2\,\overset{1}{J}(k)\cos\varepsilon - 2\,\overset{3}{J}(k)\cos 3\,\varepsilon + 2\,\overset{5}{J}(k)\cos 5\,\varepsilon \mp \cdots \end{array}\right.$$

Differenziert man diese Gleichungen nach ε, so findet man:

$$\gamma)\left\{\begin{array}{l} k\,.\,\sin(k \cos\varepsilon)\sin\varepsilon = 2\,.\,2\,.\,\overset{2}{J}(k)\sin 2\,\varepsilon - 2\,.\,4\,\overset{4}{J}(k)\sin 4\,\varepsilon \pm \cdots \\ k\,.\,\cos(k \cos\varepsilon)\sin\varepsilon = 2\,.\,1\,.\,\overset{1}{J}(k)\sin\varepsilon - 2\,.\,3\,\overset{3}{J}(k)\sin 3\,\varepsilon \pm \cdots \end{array}\right.$$

Statt zu differenzieren, kann man auch obige Gleichungen mit k sin ε multiplizieren, darauf nach den Sinus der Vielfachen ordnen und erhält alsdann:

$$\delta)\left\{\begin{array}{l} k\sin(k \cos\varepsilon)\sin\varepsilon = k\,[\overset{1}{J}(k) + \overset{3}{J}(k)]\sin 2\varepsilon - k\,[\overset{3}{J}(k) + \overset{5}{J}(k)]\sin 4\,\varepsilon \pm \cdots \\ k\cos(k \cos\varepsilon)\sin\varepsilon = k\,[\overset{0}{J}(k) + \overset{2}{J}(k)]\sin\varepsilon - k\,[\overset{2}{J}(k) + \overset{4}{J}(k)]\sin 3\,\varepsilon \pm \cdots \end{array}\right.$$

Durch Vergleichung ergibt sich demnach:

$$k\,(\overset{0}{J}(k) + \overset{2}{J}(k)) = 2\,.\,1\,\overset{1}{J}(k);\quad k\,(\overset{1}{J}(k) + \overset{3}{J}(k)) = 2\,.\,2\,.\,\overset{2}{J}(k);$$
$$k\,(\overset{2}{J}(k) + \overset{4}{J}(k)) = 2\,.\,3\,\overset{3}{J}(k);\quad k\,(\overset{3}{J}(k) + \overset{5}{J}(k)) = 2\,.\,4\,.\,\overset{4}{J}(k);\ \text{u. s. w.}$$

d. h. allgemein:

$$57)\quad k\,[\overset{h-1}{J}(k) + \overset{h+1}{J}(k)] = 2\,h\,.\,\overset{h}{J}(k).$$

Durch Differentiation der Gleichungen β) nach k erhält man:

$$
\varepsilon)\left\{\begin{aligned}
\sin(k\cos\varepsilon)\cos\varepsilon &= -\frac{d\overset{0}{J}(k)}{dk} + 2\frac{d\overset{2}{J}(k)}{dk}\cos 2\varepsilon \\
&\qquad - 2\frac{d\overset{4}{J}(k)}{dk}\cos 4\varepsilon \pm \cdots \\
\cos(k\cos\varepsilon)\cos\varepsilon &= 2\frac{d\overset{1}{J}(k)}{dk}\cos\varepsilon - 2\frac{d\overset{3}{J}(k)}{dk}\cos 3\varepsilon \\
&\qquad + 2\frac{d\overset{5}{J}(k)}{dk}\cos 5\varepsilon \mp \cdots
\end{aligned}\right.
$$

Es ist aber auch durch Multiplikation der Gleichungen β) mit $\cos\varepsilon$, wenn man nach den Cosinus des Vielfachen von ε ordnet:

$$
\eta)\left\{\begin{aligned}
\sin(k\cos\varepsilon)\cos\varepsilon &= \overset{1}{J}(k) + [\overset{1}{J}(k) - \overset{3}{J}(k)]\cos 2\varepsilon \\
&\qquad - [\overset{3}{J}(k) - \overset{5}{J}(k)]\cos 4\varepsilon \pm \cdots \\
\cos(k\cos\varepsilon)\cos\varepsilon &= [\overset{0}{J}(k) - \overset{2}{J}(k)]\cos\varepsilon - [\overset{2}{J}(k) - \overset{4}{J}(k)]\cos 3\varepsilon \pm \cdots
\end{aligned}\right.
$$

also:

$$\overset{1}{J}(k) = -\frac{d\overset{0}{J}(k)}{dk};\quad \overset{1}{J}(k) - \overset{3}{J}(k) = 2\frac{d\overset{2}{J}(k)}{dk};$$

$$\overset{3}{J}(k) - \overset{5}{J}(k) = 2\frac{d\overset{4}{J}(k)}{dk} \text{ u. s. w.}$$

$$\overset{0}{J}(k) - \overset{2}{J}(k) = 2\frac{d\overset{1}{J}(k)}{dk};\quad \overset{2}{J}(k) - \overset{4}{J}(k) = 2\frac{d\overset{3}{J}(k)}{dk} \text{ u. s. w.}$$

In Verbindung mit Gleichung 57) ergibt sich aus diesen Gleichungen:

$$\overset{2}{J}(k) = \overset{0}{J}(k) - \frac{2\,d\overset{1}{J}(k)}{dk} = \frac{2}{k}\overset{1}{J}(k) - \overset{2}{J}(k) - \frac{2\,d\overset{1}{J}(k)}{dk}$$

$$\overset{3}{J}(k) = \overset{1}{J}(k) - 2\frac{d\overset{2}{J}(k)}{dk} = \frac{2\,.\,2}{k}\overset{2}{J}(k) - \overset{3}{J}(k) - 2\frac{d\overset{2}{J}(k)}{dk} \text{ u. s. w.;}$$

hieraus:

$$\overset{2}{J}(k) = \frac{1}{k}\,\overset{1}{J}(k) - \frac{d\,\overset{1}{J}(k)}{dk}$$

$$\overset{2}{J}(k) = \frac{2}{k}\,\overset{2}{J}(k) - \frac{d\,\overset{2}{J}(k)}{dk} \text{ u. s. w.;}$$

allgemein:

$$\overset{h+1}{J}(k) = \frac{h}{k}\,\overset{h}{J}(k) - \frac{d\,\overset{h}{J}(k)}{dk}.$$

Als Differentialgleichung für die J-Funktion findet Anger auf bekannte Weise die folgende:

$$58)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{h^2}{x^2}\right) y = 0,$$

wobei $x = k$, $y = \overset{h}{J}\,(k)$ ist. Für $h = 0$ wird dieselbe:

$$59)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} + y = 0;$$

d. h. die Differentialgleichung für die Funktion $\overset{0}{J}\,(k)$.

Setzt man nun:

$$y = 1 - a_2\,x^2 + a_4\,x^4 - a_6\,x^6 \pm \cdots$$

so ergeben sich zur Bestimmung der Koeffizienten der Glieder auf bekannte Weise die folgenden Gleichungen:

$$a_2 = \frac{1}{2^2};\; a_4 = \frac{1}{(1\,.\,2)^2\,.\,2^4};\; a_6 = \frac{1}{(1\,.\,2\,.\,3)^2\,.\,2^6};\; \cdots$$

und man erhält:

$$60)\qquad \overset{0}{J}(k) = 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^4}{(1\,.\,2)^2} - \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^6}{(1\,.\,2\,.\,3)^2} \pm \cdots$$

Die Integration der Differentialgleichung 58) liefert, wenn man setzt

$$y = a_1\,x^h - a_2\,x^{h+2} + a_4\,x^{h+4} \mp \cdots$$

in bekannter Weise:

$$a_1 = a_1\,;\ a_2 = \frac{a_1}{2^2\,(h+1)};\ a_3 = \frac{a_1}{1\,.\,2\,.\,2^4.\,(h+1)\,(h+2)};$$

$$a_4 = \frac{a_1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,2^6\,(h+1)\,(h+2)\,(h+3)}, \ldots$$

wo der Koeffizient von x^h aus der Gleichung 57) bestimmt werden kann. Setzt man nämlich den Koeffizienten von k^{h-1} in der Entwicklung von $\overset{h-1}{J}(k)$ gleich α_1, den von k^{h+1} in der Entwicklung von $\overset{h+1}{J}(k)$ gleich A_1, dann muss sein:

$$\alpha\, k^h + \cdots = \frac{\alpha_1}{2h}\, k^h + \cdots + \frac{A_1}{2h}\, k^{h+2} + \cdots$$

Es wird also für

$$h = 1:\quad \alpha_1 = 2\, a_1; \qquad a_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_1.$$

$$h = 2:\quad \alpha_1 = 2\,.\,2\,.\,a_1; \qquad a_1 = \frac{1}{2\,.\,2}\,\alpha_1.$$

$$h = 3:\quad \alpha_1 = 2\,.\,3\,.\,a_1; \qquad a_1 = \frac{1}{2\,.\,3}\,\alpha_1.$$

Da aber in der Reihenentwicklung für $\overset{0}{J}(k)$ der Wert von α_1 gleich 1 ist, so wird

$$\text{für } h = 1,\ a_1 = \frac{1}{2};\ \text{für } h = 2,\ a_1 = \frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{2^2};\ \ldots$$

oder allgemein, für ein beliebiges ganzes h, der Koeffizient von k^h in der Reihe für $\overset{h}{J}(k)$

$$\alpha_1 = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots h}\cdot\frac{1}{2^h}.$$

und man erhält:

$$61)\quad \overset{h}{J}(k) = \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^h}{\Pi(h)}\left\{1 - \frac{1}{h+1}\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2(h+1)(h+2)}\left(\frac{k}{2}\right)^4 \mp \cdots\right\},$$

welches die Reihenentwicklung für die J-Funktion ist, wenn h eine ganze Zahl bedeutet, und welche mit der von Bessel gegebenen (Gleichung 21) genau übereinstimmt.

Von den Integralen, welche Anger durch die Funktion $\overset{h}{J}(k)$ darstellt, wollen wir hier nur dasjenige betrachten, welches schon früher von Bessel, wenn auch auf anderem Wege, auf die J-Funktion zurückgeführt wurde, nämlich:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2h}\varepsilon\cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,(2h-1)}{k^h}\overset{h}{J}(k).$$

Da ist:

$$2^{2h-1}.\cos^{2h}\varepsilon = \cos 2h\varepsilon + \frac{2h}{1}\cos(2h-2)\varepsilon$$
$$+\frac{2h\,.\,(2h-1)}{1\,.\,2}\cos(2h-4)\varepsilon + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{2}\,\frac{2h(2h-1)\ldots(h+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots h},$$

so wird, wenn man auf beiden Seiten mit cos (k sin ε) multipliziert, von 0 bis 2π integriert und berücksichtigt, dass

$$\int_0^{2\pi}\cos(2h\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\cos(2h\varepsilon + k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon$$

ist,

$$2^{2h-1}.\int_0^{2\pi}\cos^{2h}\varepsilon\,(\cos k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\pi\left\{\overset{2h}{J}(k) + \frac{2h}{1}\overset{2h-2}{J}(k) + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{2h(2h-1)\ldots(h+1)}{1\,.\,2\ldots h}\overset{0}{J}(k)\right\}$$

Da aber, wie durch wiederholte Anwendung der allgemeinen Gleichung

$$k\overset{h-1}{J}(k) + k\overset{h+1}{J}(k) = 2h\overset{h}{J}(k)$$

leicht gefunden wird,

$$\overset{2h}{J}(k) + \frac{2h}{1}\overset{2h-2}{J}(k) + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{2h(2h-1)\ldots(h+1)}{1\,.\,2\ldots h}\overset{0}{J}(k)$$
$$= 2^{2h-1}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,(2h-1)}{k^h}\overset{h}{J}(k),$$

wo h irgend eine ganze Zahl bedeutet, so entsteht:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2h}\varepsilon\,.\cos(k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2h-1)}{k^h}\overset{h}{J}(k),$$

womit die Zurückführung beendet ist.

Hebt man die Voraussetzung, dass h eine ganze Zahl bedeute, auf und setzt statt h die Grösse $h\sqrt{-1} = i\,h$, wo h eine beliebige, gleichviel ob ganze oder gebrochene Zahl ist, so erhält man allgemeinere Gleichungen, welche Anger ebenfalls schon aufgestellt hat. Es ist:

$$62)\quad \int_0^{2\pi} \cos(i\,h\,\varepsilon - k \sin \varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \cos i\,h\,\varepsilon \,.\, \cos(k \sin \varepsilon)\,d\varepsilon + \int_0^{2\pi} \sin i\,h\,\varepsilon \,.\, \sin(k \sin \varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Da nun nach teilweiser Integration:

$$\int e^{h\varepsilon} \sin^n \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{e^{h\varepsilon} \sin^{n-1} \varepsilon\,(h \sin \varepsilon - n \cos \varepsilon)}{h^2 + n^2} + \frac{n\,(n-1)}{(h^2 + n^2)} \int e^{h\varepsilon} \sin^{n-2} \varepsilon \, d\varepsilon$$

und:

$$\int e^{h\varepsilon} \cos^n \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{e^{h\varepsilon} \cos^{n-1} \varepsilon\,(h \cos \varepsilon + n \sin \varepsilon)}{h^2 + n^2} + \frac{n\,(n-1)}{h^2 + n^2} \int e^{h\varepsilon} \cos^{n-2} \varepsilon \, d\varepsilon \text{ ist,}$$

so folgt für $n = 0$:

$$\int e^{h\varepsilon} \, d\varepsilon = \frac{1}{h} e^{h\varepsilon}.$$

Dieses Integral geht für $\varepsilon = 0$ in $\frac{1}{h}$, für $\varepsilon = 2\pi$ in $\frac{1}{h} e^{2h\pi}$ über.

Ferner ist

$$\int e^{-h\varepsilon} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h} e^{-h\varepsilon},$$

welches für $\varepsilon = 0$ in $-\frac{1}{h}$,

für $\varepsilon = 2\pi$ in $-\frac{1}{h} e^{-2\pi h}$ übergeht. Demnach wird:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{h\varepsilon} + e^{-h\varepsilon}}{2} \, d\varepsilon = \frac{1}{2h} \left(e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}\right).$$

Fährt man in gleicher Weise fort, d. h. betrachtet man die einzelnen auftretenden Glieder in Bezug auf die Grenzen 0 und 2π, so ergibt sich schliesslich aus Gleichung 62), wenn man darin die bekannten Exponentialgrössen für $\cos i h \varepsilon$ und $\sin i h \varepsilon$ einführt und sie demnach schreibt:

$$62^a)\quad \int_0^{2\pi} \cos(i h \varepsilon - k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \frac{e^{h\varepsilon} + e^{-h\varepsilon}}{2} \cos(k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon + i \int_0^{2\pi} \frac{e^{h\varepsilon} - e^{-h\varepsilon}}{2} \sin(k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon,$$

folgender Wert:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{h\varepsilon} + e^{-h\varepsilon}}{2} \cos(k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}}{2h} \times \left\{1 - \frac{k^2}{(h^2 + 2^2)} + \frac{k^4}{(h^2 + 2^2)(h^2 + 4^2)} \mp \cdots\right\}.$$

Für den imaginären Teil der Gleichung 62^a) erhält man folgendes:

Es ist für $\varepsilon = 0$ resp. $\varepsilon = 2\pi$

$$\int e^{h\varepsilon} k \sin \varepsilon\, d\varepsilon = -\frac{k}{h^2 + 1} \text{ resp. } -\frac{e^{2h\pi} k}{h^2 + 1}$$

$$-\int e^{-h\varepsilon} k \sin \varepsilon\, d\varepsilon = +\frac{k}{h^2 + 1} \text{ resp. } +\frac{e^{-2h\pi} k}{h^2 + 1}.$$

Durch Addition entsteht folglich ein Glied von der Form:

$$-(e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}) \frac{k}{h^2 + 1}.$$

Fährt man in derselben Weise wie vorher fort, indem man auf die Integrationsgrenzen Rücksicht nimmt, so wird schliesslich:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{h\varepsilon} - e^{-h\varepsilon}}{2} \sin(k \sin \varepsilon)\, d\varepsilon = -\frac{e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}}{2} \times \left\{\frac{k}{h^2 + 1} - \frac{k^3}{(h^2 + 1)(h^2 + 3^2)} \pm \cdots\right\}$$

Durch Zusammenfassen beider Teile entsteht die Gleichung:

$$62^b)\quad \int_0^{2\pi} \cos(i\,h\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}}{2h}$$

$$\times\left\{1 - \frac{k^2}{h^2+2^2} + \frac{k^4}{(h^2+2^2)(h^2+4^2)} \mp \cdots\right\}$$

$$- i\,\frac{e^{2h\pi} - e^{-2h\pi}}{2}\left\{\frac{k}{h^2+1} - \frac{k^3}{(h^2+1)(h^2+3^2)}\right.$$

$$\left. + \frac{k^5}{(h^2+1)(h^2+3^2)(h^2+5^2)} \mp \cdots\right\}.$$

Geht man wieder von den imaginären Grössen zurück, indem man in diese Gleichung für h den Wert — h i einsetzt, so ergibt sich:

$$63)\quad \frac{h}{\sin 2h\pi}\int_0^{2\pi} \cos(h\,\varepsilon - k\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = 1 + \frac{k^2}{h^2-2^2}$$

$$+ \frac{k^4}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)} + \frac{k^6}{(h^2-2^2)(h^2-4^2)(h^2-6^2)} + \cdots$$

$$+ h\left\{\frac{k}{h^2-1} + \frac{k^3}{(h^2-1)(h^2-3^2)} + \frac{k^5}{(h^2-1)(h^2-3^2)(h^2-5^2)} + \cdots\right\}$$

Diese neue Entwicklung für die J-Funktion, welche für alle Werte von h, mögen sie ganze oder gebrochene Zahlen sein, giltig ist, enthält als Specialfall die von Bessel gegebene Reihenentwicklung, was leicht zu beweisen ist, wenn man die Werte der die Form $\frac{0}{0}$ annehmenden Glieder bestimmt.

Versteht man also unter h irgend eine ganze oder gebrochene Zahl, so gibt die ebengefundene neue Entwickelung folgende allgemeinere Differentialgleichung für $\overset{h}{J}(k)$:

$$0 = \frac{d^2\overset{h}{J}(k)}{dk^2} + \frac{1}{k}\,\frac{d\overset{h}{J}(k)}{dk} + \left(1 - \frac{h^2}{k^2}\right)\overset{h}{J}(k) + \frac{h+k}{k^2}\sin 2h\pi;$$

für ein ganzes h geht dieselbe in die von Bessel gegebene über, da für diesen Fall $\sin 2h\,\pi = 0$ ist.

Setzt man in der Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y\left(1 - \frac{i^2}{x^2}\right)$$

$y = x^i z$ ein, so wird:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = i\,(i-1)\,x^i z + 2i\,x^{i+1}\frac{dz}{dx} + x^{i+2}\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$x\,\frac{dy}{dx} = i\,x^i\,z + x^{i+1}\frac{dz}{dx},$$

$$(x^2 - i^2)\,y = x^{i+2}\,z - i^2 . x^i z,$$

also:

$$0 = i\left\{(i-1)\,z\,x^i + z\,x^i - i\,x^i\,z\right\} + x^{i+2}\,z$$

$$+ \left\{2i\,x^{i+1} + x^{i+1}\right\}\frac{dz}{dx} + x^{i+2}\frac{d^2z}{dx^2},$$

oder, da das erste Klammerglied verschwindet:

$$0 = x^{i+2}\,z + (2i+1)\,x^{i+1}\frac{dz}{dx} + x^{i+2}\frac{d^2z}{dx^2},$$

d. h. $$0 = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2i+1}{x}\cdot\frac{dz}{dx} + z.$$

Die Differentialgleichung hat die einfachste Form, wenn die Funktion $\overset{h}{J}(k)$ für den Fall, dass h eine ganze Zahl bedeutet, untersucht werden soll. Setzt man nämlich

$$\overset{h}{J}(k) = k^h\,z,$$

so wird:

$$64)\quad 0 = \frac{d^2z}{dk^2} + \frac{2h+1}{k}\,\frac{dz}{dk} + z,$$

und es bleibt nun die Untersuchung der Funktion z übrig.

Anger gibt im weiteren die Entwicklung der Funktion $\overset{h}{J}(k)$ in eine Reihe, welche nach fallenden Potenzen von k fortschreitet, und zwar teilt er dafür zwei Methoden mit, von denen die eine die Benutzung der Differentialgleichung fordert, die andere durch Anwendung der Γ-Funktion leicht zu erhalten ist.

Die erste Darstellungsmethode ist folgende: Setzt man in der Differentialgleichung 64) statt $2h+1$ die Grösse $-2i$, so geht sie über in:

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} + \xi^{-\frac{4i}{2i+1}} z = 0,$$

wo $k = (2i+1)\,\xi^{\frac{1}{2i+1}}$ ist.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist nach Euler:

$$z = k^i \left\{1 - \frac{i(i^2-1)(i+2)}{1.2.4\,k^2} + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i+4)}{1.2.3.16\,k^2} \mp \cdots\right\}.$$
$$(\alpha \cos k + \beta \sin k)$$

$$+ k^i \left\{\frac{i(i+1)}{2k} - \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i+3)}{1.2.3.8\,k^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{i(i^2-1)(i^2-4)(i^2-9)(i^2-16)(i+5)}{1.2.3.4.5.32\,k^5} \mp \cdots\right\}(\beta \cos k - \alpha \sin k),$$

woraus folgt, da

$$i = -\frac{2h+1}{2},\ k^{i+h} = \frac{1}{\sqrt{k}}\ \text{ist},$$

$$65)\quad \overset{h}{J}(k) = \frac{\alpha \cos k + \beta \sin k}{\sqrt{k}} \left\{1 - \frac{(1-4h^2)(9-4h^2)}{\Pi(2)(8k)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(1-4h^2)(9-4h^2)(25-4h^2)(49-4h^2)}{\Pi(4)(8k)^4} \pm \cdots\right\} +$$
$$+ \frac{\alpha \sin k - \beta \cos k}{\sqrt{k}} \left\{\frac{1-4h^2}{8k} - \frac{(1-4h^2)(9-4h^2)(25-4h^2}{\Pi(3)(8k)^3} \pm \cdots\right\},$$

wo α und β die beiden Integrationskonstanten sind, und zwar, wie früher gezeigt:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Für $h = 0$ entsteht:

$$66)\ \overset{0}{J}(k) = \frac{\cos k + \sin k}{\sqrt{k\pi}} \left\{1 - \frac{3^2}{\Pi(2)(8k)^2} + \frac{3^2.5^2.7^2}{\Pi(4)(8k)^4} \mp \cdots\right\}$$

$$+ \frac{\sin k - \cos k}{\sqrt{k\pi}} \left\{\frac{1}{8k} - \frac{3^2.5^2}{\Pi(3)(8k)^3} + \frac{3^2.5^2.7^2.9^2}{\Pi(5)(8k)^5} \mp \cdots\right\}.$$

Die Entwickelung von $\overset{0}{J}(k)$ in vorstehender Gleichung kann aber auch ohne Benutzung der Differentialgleichung zugleich mit der Bestimmung der Konstanten leicht direkt gefunden werden.

Da nämlich:

$$\pi\,.\,\overset{0}{J}(k)=\frac{\cos k}{\sqrt{2k}}\int_0^{2k}\left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{\omega}}+\frac{\cos\omega}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{2k}+\frac{\cos\omega}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{\omega^2}{4k^2}+\cdots\right)d\omega.$$

$$+\frac{\sin k}{\sqrt{2k}}\int_0^{2k}\left(\frac{\sin\omega}{\sqrt{\omega}}+\frac{\sin\omega}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{2k}+\frac{\sin\omega}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{\omega^2}{4\,k^2}+\cdots\right)\omega,$$ [*]

so ist, wenn k eine grosse Zahl bedeutet, näherungsweise, und für $k=\infty$ genau

$$67)\quad \pi\,.\,\overset{0}{J}(k)=\frac{2\cos k}{\sqrt{2k}}\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{\omega}}+\frac{\omega^{1/2}}{4\,k}\cos\omega+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4k^2}\,\omega^{3/2}\cos\omega+\cdots\right)d\omega$$

$$+\frac{2\,\sin k}{\sqrt{2k}}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\sqrt{\omega}}+\frac{\omega^{1/2}}{4\,k}\sin\omega+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{4\,k^2}\,\omega^{3/2}\sin\omega+\cdots\right)d\omega.$$

Nach der gewöhnlichen Beziehung aber ist:

$$\Gamma(\mu)=\int_0^{\infty}e^{-x}\,x^{\mu-1}\,dx,$$

und es gelten die bekannten Beziehungen

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi};$$

---

*) Diese Gleichung folgt aus der Beziehung:

$$\overset{0}{J}(k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\,(k\,\cos\,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

oder:

$$\pi\,.\,\overset{0}{J}(k)=\int_0^{\pi}\left[\cos k\,\cos\left(2k\,\sin^2\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)+\sin k\,.\,\sin\left(2k\,\sin^2\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\right]d\varepsilon;$$

oder für

$$2k\,.\,\sin^2\frac{1}{2}\,\varepsilon=\mu,$$

$$\pi\,.\,\overset{0}{J}(k)=\cos k\int_0^{2k}\cos\mu\,\frac{d\mu}{\sqrt{2k\,\mu-\mu^2}}+\sin k\int_0^{2k}\sin\mu\,\frac{d\mu}{\sqrt{2k\,\mu-\mu^2}},$$

wenn man in Reihen entwickelt.

und $$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2m}\sqrt{\pi};$$

sowie:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\cos b\,x\,dx=\frac{\cos\frac{a\,\pi}{2}}{b^a}\,\Gamma(a),$$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\sin b\,x\,dx=\frac{\sin\frac{a\,\pi}{2}}{b^a}\,\Gamma(a);$$

also auch:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\omega}{\sqrt{\omega}}d\omega=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{ (nach Laplace)},$$

$$\int_0^\infty\omega^{1/2}\cos\omega\,d\omega=\cos\frac{3\pi}{4}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^\infty\omega^{3/2}\cos\omega\,d\omega=\cos\frac{5\pi}{4}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1\,.\,3}{2^2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^\infty\omega^{5/2}\cos\omega\,d\omega=\cos\frac{7\pi}{4}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3}\sqrt{\pi},$$

u. s. w.

$$\int_0^\infty\sin\omega\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{ (nach Laplace)},$$

$$\int_0^\infty\omega^{1/2}\sin\omega\,d\omega=\sin\frac{3\pi}{4}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^\infty\omega^{3/2}\sin\omega\,d\omega=\sin\frac{5\pi}{4}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1\,.\,3}{2^2}\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^\infty\omega^{5/2}\sin\omega\,d\omega=\sin\frac{7\pi}{4}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2^3}\cdot\sqrt{\pi},$$

u. s. w.

Durch Substitution dieser Werte in Gleichung 67) ergibt sich:

$$68)\quad \overset{0}{J}(k) = \frac{\cos k}{\sqrt{k\pi}} \left\{1 - \frac{3^2}{\Pi(2)\,(8k)^2} - \frac{3^2 \,.\, 5^2}{\Pi(3)\,(8\,k)^3} \pm \pm \cdots\right\}$$

$$+ \frac{\sin k}{\sqrt{k\pi}} \left\{1 + \frac{1}{8k} - \frac{3^2}{\Pi(2)\,(8\,k)^2} - \frac{3^2 \,.\, 5^2}{\Pi(3)\,(8\,k)^3} \pm \pm \cdots\right\},$$

oder (in Übereinstimmung mit Gleichung 66))

$$\overset{0}{J}(k) = \frac{\cos k + \sin k}{\sqrt{k\pi}} \left\{1 - \frac{3^2}{\Pi(2)\,(8\,k)^2} + \frac{3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7^2}{\Pi(4)\,(8\,k)^4} \pm \cdots\right\}$$

$$+ \frac{\sin k - \cos k}{\sqrt{k\pi}} \left\{\frac{1}{8\,k} - \frac{3^2 \,.\, 5^2}{\Pi(3)\,(8\,k)^3} + \frac{3^2 \,.\, 5^2 \,.\, 7^2 \,.\, 9^2}{\Pi(5)\,(8\,k)^5} \mp \cdots\right\}.$$

Um die von Bessel gegebene Auflösung der Kepler'schen Aufgabe resp. die Entwickelung der Mittelpunktsgleichung in noch einfachere Formen zu bringen, transformiert Anger im Verlaufe seiner Arbeit die von Bessel bereits gegebene Gleichung 35), welche lautet:

$$\frac{i}{2}\, A_{(i)} = \overset{i}{J}(i\,e) + \lambda\, [\overset{i+1}{J}(i\,e) + \overset{i-1}{J}(i\,e)] + \lambda^2\, [\overset{i+2}{J}(i\,e) + \overset{i-2}{J}(i\,e)] + \cdots$$

Setzt man hierin:

$$e = \sin \varphi,$$

so wird:

$$\lambda = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},\quad ie = \frac{2i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = 2i \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, \varphi \,.\, \cos^2 \frac{1}{2}\, \varphi,$$

und man erhält, wenn man der Kürze wegen einführt:

$$\nu = i \cos^2 \frac{1}{2}\, \varphi,$$

woraus folgt:

$$\frac{ie}{2} = \lambda \nu,$$

aus der Reihenentwickelung von $\overset{h}{J}(k)$ nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ k:

$$\overset{i}{J}(ie) = \frac{\nu^{i}\ \lambda^{i}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i} - \frac{\nu^{i+2}\ \lambda^{i+2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+1)} + \frac{\nu^{i+4}\ \lambda^{i+4}}{1.2.1.2.3\ldots(i+2)}$$

$$- \frac{\nu^{i+6}\ \lambda^{i+6}}{1.2.3.1.2.3\ldots(i+3)} + \frac{\nu^{i+8}\ \lambda^{i+8}}{1.2.3.4.1.2.3\ldots(i+4)} \mp \cdots$$

$$\lambda\,\overset{i+1}{J}(ie) = + \frac{\nu^{i+1}\ \lambda^{i+2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+1)} - \frac{\nu^{i+3}\ \lambda^{i+4}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+2)}$$

$$+ \frac{\nu^{i+5}\ \lambda^{i+6}}{1.2.1.2.3\ldots(i+3)} - \frac{\nu^{i+7}\ \lambda^{i+8}}{1.2.3.1.2.3\ldots(i+4)} \pm \cdots$$

$$\lambda\,\overset{i-1}{J}(ie) = \frac{\nu^{i-1}\ \lambda^{i}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i-1)} - \frac{\nu^{i+1}\ \lambda^{i+2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i} + \frac{\nu^{i+3}\ \lambda^{i+4}}{1.2.1.2.3\ldots(i+1)}$$

$$- \frac{\nu^{i+5}\ \lambda^{i+6}}{1.2.3.1.2.3\ldots(i+2)} + \frac{\nu^{i+7}\ \lambda^{i+8}}{1.2.3.4.1.2.3\ldots(i+3)} \mp \cdots$$

$$\lambda^2\,\overset{i+2}{J}(ie) = \qquad + \frac{\nu^{i+2}\ \lambda^{i+4}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+2)}$$

$$- \frac{\nu^{i+4}\ \lambda^{i+6}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+3)} + \frac{\nu^{i+6}\ \lambda^{i+8}}{1.2.1.2.3\ldots(i+4)} \mp \cdots$$

$$\lambda^2\,\overset{i-2}{J}(ie) = \frac{\nu^{i-2}\ \lambda^{i}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i-2)} - \frac{\nu^{i}\ \lambda^{i+2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i-1)} + \frac{\nu^{i+2}\ \lambda^{i+4}}{1.2.1.2.3\ldots i}$$

$$- \frac{\nu^{i+4}\ \lambda^{i+6}}{1.2.3.1.2.3\ldots(i+1)} + \frac{\nu^{i+6}\ \lambda^{i+8}}{1.2.3.4.1.2.3\ldots(i+2)} \mp \cdots$$

u. s. w.

Durch Summation aller entsprechenden Glieder ergibt sich, wenn man mit Hansen setzt:

$$P_i = 1 + \nu + \frac{\nu^2}{1\,.\,2} + \frac{\nu^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots + \frac{\nu^i}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i},$$

$$P_{i+1} = P_i + \frac{\nu^{i+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i\,(i+1)},$$

$$P_{i+2} = P_{i+1} + \frac{\nu^{i+2}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(i+2)}$$

u. s. w.

$$Q_1 = 1 - \nu,\ Q_2 = Q_1 + \frac{\nu^2}{2},$$

$$Q_3 = Q_2 - \frac{\nu^3}{2 \,.\, 3}$$

u. s. w.

als Wert für $\frac{i}{2} A_{(i)}$ folgender:

$$\frac{i}{2} A_{(i)} = P_i \lambda^i - \left\{\nu P_{i+1} - \frac{\nu^{i+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+1)}\right\} \lambda^{i+2} +$$

$$+ \left\{\frac{\nu^2}{1 \,.\, 2} P_{i+2} - \frac{\nu^{i+3}}{1 \,.\, 2 \ldots (i+2)} + \frac{\nu^{i+2}}{1 \,.\, 2 \ldots (i+2)}\right\} \lambda^{i+4}$$

$$- \left\{\frac{\nu^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} P_{i+3} - \frac{\nu^{i+5}}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu^{i+4}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+3)} - \frac{\nu^{i+3}}{1 \,.\, 2 \ldots (i+3)}\right\} \lambda^{i+6}$$

$$+ \left\{\frac{\nu^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} P_{i+4} - \frac{\nu^{i+7}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+4)} \right.$$

$$+ \frac{\nu^{i+6}}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+4)} - \frac{\nu^{i+5}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+4)}$$

$$\left. + \frac{\nu^{i+4}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (i+4)}\right\} \lambda^{i+8}$$

$$- \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Diese Koeffizienten der Potenzen von λ lassen sich aber auch der Reihe nach in folgender Weise darstellen:

$$P_i = P_i,$$

$$\nu P_{i+1} - (P_{i+1} - P_i) = (\nu - 1) P_{i+1} + P_i,$$

$$\frac{\nu^2}{1 \,.\, 2} P_{i+2} - \nu (P_{i+2} - P_{i+1}) + (P_{i+2} - P_{i+1}) = \left(\frac{\nu^2}{1 \,.\, 2} - \nu + 1\right) P_{i+2} + \nu P_{i+1} - P_{i+1},$$

$$\frac{\nu^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} P_{i+3} - \frac{\nu^2}{1 \,.\, 2} (P_{i+3} - P_{i+2}) + \nu (P_{i+3} - P_{i+2}) - (P_{i+3} - P_{i+2}) =$$

$$= \left(\frac{\nu^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - \frac{\nu^2}{1 \,.\, 2} + \nu - 1\right) P_{i+3} + \left(\frac{\nu^2}{1 \,.\, 2} - \nu + 1\right) P_{i+2} \text{ u. s. w.}$$

Mithin:

$$\frac{i}{2} A_{(i)} = P_i \lambda^i + (Q_1 P_{i+1} - P_i) \lambda^{i+2} + (Q_2 P_{i+2} - Q_1 P_{i+1}) \lambda^{i+4}$$
$$+ (Q_3 P_{i+3} - Q_2 P_{i+2}) \lambda^{i+6} + (Q_4 P_{i+4} - Q_3 P_{i+3}) \lambda^{i+8} + \cdots$$

oder:

$$\frac{i}{2} A^{(i)} = P_i \lambda^i (1 - \lambda^2) + Q_1 P_{i+1} \lambda^{i+2} (1 - \lambda^2) + Q_2 P_{i+2} \lambda^{i+4} (1 - \lambda^2)$$
$$+ \cdots,$$

also auch:

$$69) \quad \nu - \mu = (1 - \lambda^2) \sum_1^{\infty} \frac{2}{i} \left\{ P_i \lambda^i + P_{i+1} Q_1 \lambda^{i+2} + P_{i+2} Q_2 \lambda^{i+4} + \cdots \right\} \sin i\mu,$$

weil war:

$$\nu - \mu = A_1 \sin \mu + A_2 \sin 2\mu + A_3 \sin 3\mu + \cdots .^{*)}$$

Die Gleichung 69) stellt in dieser Form die von Hansen für die Mittelpunktsgleichung gegebene Entwickelung dar.

Was die Entwickelung des Radius-vector betrifft, so ist, wenn man denselben durch r und die halbe Axe durch a bezeichnet, und setzt:

$$r = A_0 + B_1 \cos \mu + B_2 \cos 2\mu + B_3 \cos 3\mu + \cdots$$

$$B_{(i)} = - \frac{ae}{i\pi} \int_0^{2\pi} \sin (i\varepsilon - ie \sin \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\varepsilon.$$

Man hat aber:

$$\sin (i\varepsilon - ie \sin \varepsilon) \sin \varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ \cos ((i-1)\varepsilon - ie \sin \varepsilon) - \cos ((i+1)\varepsilon - ie \sin \varepsilon \right\} \cdot$$

Demnach:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin (i\varepsilon - ie \sin \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\varepsilon = \overset{i-1}{J}(ie) - \overset{i+1}{J}(ie)$$

also:

$$i \,.\, B_{(i)} = a e \left\{ \overset{i+1}{J}(ie) - \overset{i-1}{J}(ie) \right\}.$$

Der Fall i = o macht eine Ausnahme. Nach bekannten Sätzen ist nämlich das erste Glied der Reihenentwickelung, d. h. der Koeffizient von cos $o . \mu$:

---

*) Seite 224.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\, d\,\mu = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - e\cos\varepsilon)^2\, d\varepsilon = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right).$$

Man hat demnach:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\sum_1^{\infty}\frac{1}{i}\left\{\overset{i+1}{J}(ie) - \overset{i-1}{J}(ie)\right\}$$

und die Entwicklung ergibt

$$70)\qquad B_{(i)} = -\frac{2}{i}\,\frac{\left(\frac{ie}{2}\right)}{\Pi(i)}\left\{i - \frac{i+2}{1\,.\,(i+1)}\cdot\left(\frac{ie}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{i+4}{1\,.\,2\,(i+1)\,(i+2)}\left(\frac{ie}{2}\right)^4 \mp \cdots\right\}$$

V.

Schlömilch gibt im II. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik vom Jahre 1857 einen Abriss der Bessel'schen Funktion, worin er ausser den bereits früher abgeleiteten Formeln und Beziehungen neue aufstellt, namentlich andere Integrationswerte für die Funktion. Er bedient sich stets der Hansen'schen Bezeichnungsweise, von welcher man ja, wie früher gezeigt, leicht zu der Bessel'schen übergehen kann.

Nachdem er die bekannten Formeln:

$$\overset{-n}{J}(\lambda) = (-1)^n\,\overset{n}{J}(\lambda),$$
$$\overset{n}{J}(-\lambda) = (-1)^n\,\overset{n}{J}(\lambda),$$
$$n\,\overset{n}{J}(\lambda) = \lambda\,(\overset{n-1}{J}(\lambda) + \overset{n+1}{J}(\lambda)),$$

in sehr einfacher, der Hansen'schen Ableitungsart ähnlicher Weise hergeleitet hat, gibt er zuerst eine Entwicklung für $\overset{n}{J}(\lambda)$. Er multipliziert die beiden Reihen

$$c^{\lambda x} = 1 + \frac{\lambda}{1}\,x + \frac{\lambda^2}{1\,.\,2}\,x^2 + \frac{\lambda^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \cdots$$

$$c^{-\frac{\lambda}{x}} = 1 - \frac{\lambda}{1}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\lambda^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{\lambda^3}{1\,.\,2\,.\,3}\cdot\frac{1}{x^3} \pm \cdots$$

miteinander und vergleicht dieses Produkt mit der bereits von Hansen abgeleiteten Gleichung (48.1) Das Resultat stellt sich in folgender Form dar:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{1!\,1!} + \frac{\lambda^4}{2!\,2!} - \frac{\lambda^6}{3!\,3!} \pm \cdots$$

$$\overset{1}{J}(\lambda) = \frac{\lambda}{1!} - \frac{\lambda^3}{1!\,2!} + \frac{\lambda^5}{2!\,3!} - + \cdots$$

$$\overset{2}{J}(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{1!\,3!} + \frac{\lambda^6}{2!\,4!} - \frac{\lambda^8}{3!\,5!} \pm \cdots \text{ u. s. w.}$$

allgemein:

$$71)\quad \overset{n}{J}(\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} - \frac{\lambda^{n+2}}{1!\,(n+1)!} + \frac{\lambda^{n+4}}{2!\,(n+2)!} \mp \cdots = $$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{\lambda^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}.$$

Von der Richtigkeit dieser auf dem Wege der Induktion gefundenen Formel überzeugt man sich leicht vermittelst des Schlusses von n auf n + 1, wenn man die nach Gleichung 71) gebildeten Werte von $\overset{n}{J}(\lambda)$ und $\overset{n-1}{J}(\lambda)$ in die bekannte Formel substituiert, welche lautet:

$$n\,\overset{n}{J}(\lambda) = \lambda\,[\overset{n-1}{J}(\lambda) + \overset{n+1}{J}(\lambda)].$$

Eine weitere Eigenschaft erhält Schlömilch durch die Multiplikation der beiden von Hansen gegebenen Gleichungen 48). Links ergibt sich die Einheit und rechts eine nach Potenzen von x und $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe, deren konstantes Glied der Einheit gleich sein muss, während die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x und $\frac{1}{x}$ verschwinden müssen. Die erste Bemerkung führt zu der Relation

$$72)\quad 1 = [\overset{0}{J}(\lambda)]^2 + 2\,[\overset{1}{J}(\lambda)]^2 + 2\,[\overset{2}{J}(\lambda)]^2 + 2\,[\overset{3}{J}(\lambda)]^2 + \ldots,$$

woraus hervorgeht, dass die Funktion $\overset{0}{J}(\lambda)$ die Einheit nicht übersteigen kann, und dass die übrigen Transcendenten nie grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ werden können.

Das allgemeine Glied der Gleichung 71) war, vom Vorzeichen abgesehen

$$\frac{\lambda^{n+2p}}{p!\,(p+n)!};$$

durch Differentiation dieser Gleichung 71) erhält man eine neue Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$\frac{(n+2\,p)\,\lambda^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!} = \frac{\lambda^{n+2p-1}}{p!\,(n+p-1)!} + \frac{\lambda^{n+2p-1}}{(p-1)!\,(n+p)!},$$

und man hat daher:

$$\frac{d\,\overset{n}{J}(\lambda)}{d\,\lambda} = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\lambda^{n+1}}{1!\,n!} + \frac{\lambda^{n+3}}{2!\,(n+1)!} \mp \dots$$

$$- \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\lambda^{n+3}}{1!\,(n+2)!} \mp \dots$$

d. h.

$$73) \quad \frac{d\,\overset{n}{J}(\lambda)}{d\,\lambda} = \overset{n-1}{J}(\lambda) - \overset{n+1}{J}(\lambda).$$

Aus dieser Formel lässt sich in Verbindung mit der bekannten Relation

$$n\,\overset{n}{J}(\lambda) = \lambda\,(\overset{n-1}{J}(\lambda) + \overset{n+1}{J}(\lambda))$$

eine neue Gleichung zwischen zwei aufeinander folgenden Transcendenten herleiten; die Elimination von $\overset{n-1}{J}(\lambda)$ ergibt nämlich:

$$74) \quad \overset{n+1}{J}(\lambda) = \frac{n}{2\,\lambda}\,\overset{n}{J}(\lambda) - \frac{1}{2}\,\frac{d\,\overset{n}{J}(\lambda)}{d\,\lambda},$$

oder

$$74^{a}) \quad \frac{d\,\overset{n}{J}(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda}\,\overset{n}{J}(\lambda) - 2\,\overset{n+1}{J}(\lambda);$$

durch Differentiation folgt (wenn man vorstehende Gleichung als Reduktionsgleichung benutzt):

$$\frac{d^2\overset{n}{J}(\lambda)}{d\,\lambda^2} = \frac{n\,(n-1)}{\lambda^2}\,\overset{n}{J}(\lambda) - \frac{4\,n+2}{\lambda}\,\overset{n+1}{J}(\lambda) + 4\,\overset{n+2}{J}(\lambda)$$

und wenn man noch (wie früher ausgeführt wurde) $\overset{n+2}{J}(\lambda)$ durch $\overset{n}{J}(\lambda)$ und $\overset{n+1}{J}(\lambda)$ darstellt:

$$75)\quad \frac{d^2 \overset{n}{J}(\lambda)}{d\lambda^2} = \left\{\frac{n\,(n-1)}{\lambda^2} - 4\right\} \overset{n}{J}(\lambda) + \frac{2}{\lambda} \overset{n+1}{J}(\lambda).$$

In dieser Weise kann man alle Differentialquotienten von $\overset{n}{J}(\lambda)$ successive durch $\overset{n}{J}(\lambda)$ und $\overset{n+1}{J}(\lambda)$ ausdrücken.

Multipliziert man die Gleichung 74[a]) mit $\frac{1}{\lambda}$ und addiert sie zu Gleichung 75), so hebt sich $\overset{n+1}{J}(\lambda)$, und es bleibt:

$$76)\quad \frac{d^2 \overset{n}{J}(\lambda)}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d \overset{n}{J}(\lambda)}{d\lambda} - \left[\frac{n^2}{\lambda^2} - 4\right] \overset{n}{J}(\lambda) = 0,$$

welches die allgemeinere Form der Differentialgleichung für $\overset{n}{J}(\lambda)$ ist; ein Specialfall für $n = 0$ wurde bereits früher von Hansen behandelt (Gleichung 53).

Die Darstellung der $\overset{n}{J}$-funktion durch ein bestimmtes Integral macht sich nach Schlömilch nun folgendermassen:

Aus der von Hansen gegebenen etwas anders geschriebenen Gleichung 48.1)

$$c^{\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \overset{0}{J}(\lambda) + \overset{2}{J}(\lambda)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \overset{4}{J}(\lambda)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + \cdots$$
$$+ \overset{1}{J}(\lambda)\left(x - \frac{1}{x}\right) + \overset{3}{J}(\lambda)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \cdots$$

ergibt sich mit Hülfe der Substitution

$$x = \omega\sqrt{-1} = i\omega,$$

und bei Vergleichung der reellen und imaginären Teile:

$$\cos(2\lambda \sin\omega) = \overset{0}{J}(\lambda) + 2\overset{2}{J}(\lambda)\cos 2\omega + 2\overset{4}{J}(\lambda)\cos 4\omega + \cdots$$
$$\sin(2\lambda \sin\omega) = 2\overset{1}{J}(\lambda)\sin\omega + 2\overset{3}{J}(\lambda)\sin 3\omega + \cdots$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$77)\quad \int_0^{\pi} \cos(2\lambda\sin\omega)\cos n\omega\, d\omega = \pi . \overset{n}{J}(\lambda) \text{ für gerades } n$$
$$= 0 \quad \text{» ungerades } n;$$

aus der zweiten:

78) $$\int_0^{\pi} \sin(2\lambda \sin\omega) \sin n\omega \, d\omega = \pi \,.\, \overset{n}{J}(\lambda) \text{ für ungerades } n$$
$$= 0 \quad \text{» gerades } n;$$

oder allgemeiner für jedes n:

79) $$\int_0^{\pi} \cos(n\omega - 2\lambda \sin\omega) \, d\omega = \pi \,.\, \overset{n}{J}(\lambda),$$

was leicht durch Auflösen von $\cos(n\omega - 2\lambda\sin\omega)$ und Integrieren der einzelnen Glieder als Zusammenfassung der Gleichungen 77) und 78) zu erkennen ist.

Eine andere Zusammenziehung der Gleichungen 77) und 78) zu einer für jedes n gültigen Formel lässt sich durch folgende Umwandlungen erreichen: Man setzt in 77)

$$\omega = \frac{1}{2}\pi + z;$$

es wird alsdann für ein gerades n:

$$\pi \,.\, \overset{n}{J}(\lambda) = \cos\frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos(2\lambda\cos z) \cos nz \, dz.$$

Die Funktion $\cos(2\lambda\cos z)\cos nz$ hat für negative Werte von z denselben Wert wie für positive z, daher

$$\pi \,.\, \overset{n}{J}(\lambda) = 2\cos\frac{n\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\lambda\cos z) \cos nz \, dz$$
$$= \cos\frac{n\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos(2\lambda\cos z) \cos nz \, dz.$$

Auf dieses letzte Integral wendet nun Schlömilch die bekannte Jacobi'sche Reduktionsformel

$$\int_0^{\pi} f(\cos z) \cos nz \, dz = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^{\pi} f^{(n)}(\cos z) \sin^{2n} z \, dz.$$

an und erhält für gerade n, wenn ist:

$$f(x) = \cos 2\lambda x$$

$$\int_0^{\pi} \cos(2\lambda\cos z)\cos n z\, dz = \frac{(2\lambda)^n \cos\frac{n\pi}{2}}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^{\pi} \cos(2\lambda\cos z)\sin^{2n} z\, dz,$$

mithin:

$$\pi\,.\,\overset{n}{J}(\lambda) = \frac{(2\lambda)^n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)} \int_0^{\pi} \cos(2\lambda\cos z)\sin^{2n} z\, dz.$$

Transformiert man auf gleiche Weise die Gleichung 78), so erhält man für ungerade n ganz denselben Ausdruck wie eben für $\pi\,\overset{n}{J}(\lambda)$, letzterer gilt daher für alle n.

Da die Funktion $\cos(2\lambda\cos z)\sin^{2n} z$ von $z = \frac{1}{2}\pi$ bis $z = \pi$ die nämlichen Werte besitzt, wie von $z = o$ bis $z = \frac{1}{2}\pi$, so kann man auch schreiben:

$$\overset{n}{J}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\,\frac{(2\lambda)^n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\lambda\cos z)\sin^{2n} z\, dz.$$

Setzt man hierin:

$$\cos z = x$$

so wird:

$$80)\quad \overset{n}{J}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(2\lambda)^n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)} \int_0^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos(2\lambda x)\, dx$$

oder:

$$81)\quad \overset{n}{J}(\lambda) = \frac{2\lambda^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos(2\lambda x)\, dx.$$

Im weiteren Verlaufe seiner Abhandlung gibt Schlömilch den Weg, wie man den für die J-funktion vorkommenden Integralausdruck in eine zur numerischen Berechnung der Funktion dienende Reihe entwickeln kann. Er beschränkt sich dabei auf den Fall $n = o$, weil ja $\overset{1}{J}(\lambda)$ exc . . . leicht aus $\overset{0}{J}(\lambda)$ hergeleitet werden kann.

Gleichung 80) ergibt für n = o den Wert:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos 2\lambda x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,;$$

setzt man hierin:

$$x = 1 - y \text{ und } 2\lambda = \mu,$$

so wird:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(1-y)\mu}{\sqrt{y(2-y)}}\, dy.$$

Die Auflösung des Cosinus ergibt:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos\mu \int_0^1 \frac{\cos\mu y}{\sqrt{y}} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\mu \int_0^1 \frac{\sin\mu y}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}},$$

und durch Entwickelung von $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}y}}$ erhält man:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}.\cos\mu}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos\mu y}{\sqrt{y}}\left\{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \cdots\right\} dy$$

$$+ \frac{\sqrt{2}.\sin\mu}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin\mu y}{\sqrt{y}}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \cdots\right\} dy.$$

Die Werte der einzelnen hierin vorkommenden Integrale sind aus den ersten beiden

$$\int_0^1 \frac{\cos\mu y}{\sqrt{y}}\, dy \text{ und } \int_0^1 \frac{\sin\mu y}{\sqrt{2}}\, dy$$

durch Differentiation nach μ leicht herzuleiten. Bezeichnet man ihre Werte nämlich einstweilen mit P und Q, so hat man folgende Gleichungen:

$$\int_0^1 \frac{\cos \mu y}{\sqrt{y}} dy = P, \qquad \int_0^1 \frac{\sin \mu y}{\sqrt{y}} dy = Q,$$

$$\int_0^1 \frac{y \cos \mu y}{\sqrt{y}} dy = Q' \qquad \int_0^1 \frac{y \sin \mu y}{\sqrt{y}} dy = -P'$$

$$\int_0^1 \frac{y^2 \cos \mu y}{\sqrt{y}} dy = -P'' \qquad \int_0^1 \frac{y^2 \sin \mu y}{\sqrt{y}} dy = -Q''$$

$$\int_0^1 \frac{y^3 \cos \mu y}{\sqrt{y}} dy = -Q''' \qquad \int_0^1 \frac{y^3 \sin \mu y}{\sqrt{y}} dy = +P'''$$

u. s. w.,

wobei die Zeichenwechsel dieselben sind wie bei den Cosinus und Sinus der vier Quadranten. Demnach ist also:

$$\overset{0}{J}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\Big\{P \cos \mu + Q \sin \mu - \frac{1 \,.\, 3}{4 \,.\, 8}(P'' \cos \mu + Q'' \sin \mu) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{4}(Q' \cos \mu - P' \sin \mu) - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{4 \,.\, 8 \,.\, 12}(Q''' \cos \mu - P''' \sin \mu) + \cdots\Big\}$$

Nach einer bekannten Formel aber ist:

$$\int_0^1 \frac{\cos \mu y}{\sqrt{y}} dy = \int_0^\infty \frac{\cos \mu y}{\sqrt{y}} dy - \int_1^\infty \frac{\cos \mu y}{\sqrt{y}} dy$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} - \int_1^\infty \frac{\cos \mu y}{\sqrt{y}} dy.$$

Das noch übrige Integral kann nun durch fortgesetzte partielle Integration leicht in eine halb konvergente Reihe verwandelt werden und man erhält:

$$P = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} - \sin \mu \left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1 \,.\, 3}{2^2 \mu^3} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2^4 \mu^5} - \cdots\right\}$$

$$+ \cos \mu \left\{\frac{1}{2 \mu^2} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^3 \mu^4} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9}{2^5 \mu^6} - \cdots\right\};$$

ebenso in ähnlicher Weise

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} + \cos \mu \left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1 \,.\, 3}{2^2 \,.\, \mu^3} + \cdots\right\}$$

$$+ \sin \mu \left\{\frac{1}{2 \mu^2} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2^3 \mu^4} + \cdots\right\}.$$

Hieraus sind P′, P″ . . . sowie Q′, Q″ . . . leicht herzuleiten, und durch Substitution dieser Werte ergibt sicht nach einigen Umformungen endlich:

$$82)\quad \overset{0}{J}(\lambda) = \frac{\cos\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\lambda\pi}}\left\{1 - \frac{1^2 . 3^2}{4 . 8}\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2}{4 . 8 . 12 . 16} \cdot \left(\frac{1}{4\lambda}\right)^4 \mp \cdots\right\}$$
$$+ \frac{\sin\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\lambda\pi}}\left\{\frac{1^2}{4}\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{4 . 8 . 12}\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^3 \pm \cdots\right\},$$

oder in anderer Form

$$83)\quad \overset{0}{J}(\lambda) = \frac{\cos\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{9}{512\,(\sqrt{\lambda})^5} + \frac{3675}{524288\,(\sqrt{\lambda})^9} \mp \cdots\right\}$$
$$+ \frac{\sin\left(2\lambda - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{16\,(\sqrt{\lambda})^3} - \frac{75}{8192\,(\sqrt{\lambda})^7} + \frac{297675}{41943040\,(\sqrt{\lambda})^{11}} \mp \cdots\right\}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der von Hansen gegebenen (Gleichung 54) vollständig überein; derselbe leitete sie jedoch auf anderem Wege (mit Hilfe der Differentialgleichung) ab.

Am Schlusse des angeführten Werkes stellt Schlömilch ein Theorem auf, welches von der Entwicklung einer beliebigen Funktion in eine nach Bessel'schen Funktionen fortschreitende Reihe handelt. Dasselbe ist nahe mit dem Fourier'schen Satze verwandt und unter dem Namen Schlömilch'scher Satz allgemein bekannt. Seinen Beweis gibt auch Lommel in seinem oben citierten Werkchen: «Studien über die Bessel'schen Funktionen». (§ 20. Seite 73.)

Geht man von der bekannten für $h \geqq z \geqq o$ geltenden Entwicklung aus

$$F(z) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos\frac{\pi z}{h} + A_2 \cos\frac{2\pi z}{h} + \cdots,$$

wo

$$A_n = \frac{2}{h}\int_0^h F(u) \cos\frac{n\pi u}{h}\, du$$

ist,

und setzt darin

$$h = \frac{1}{2}\pi, \; z = \lambda x,$$

so erhält man die Gleichungen:

$$F(\lambda x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos 2\lambda x + A_2 \cos 4\lambda x + \cdots$$

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(u) \cos 2 n u \, du,$$

welche gültig sind für $\frac{1}{2}\pi \geqq \lambda x \geqq o.$

Multipliziert man ferner obige Gleichung für $F(\lambda x)$ mit

$$\frac{2}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

und integriert zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = 1$, so entsteht:

$$84) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(\lambda x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \overset{0}{J}(\lambda) + A_2 \overset{0}{J}(2\lambda) + A_3 \overset{0}{J}(3\lambda) + \cdots,$$

und es gilt diese Gleichung von $\lambda = o$ bis $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, weil x die Einheit nicht überschritten hat. Nimmt man weiter:

$$85) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{F(\lambda x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = f(\lambda),$$

so ergibt sich durch Differentiation nach λ:

$$f'(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x \, F'(x\lambda)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

In dieser Gleichung schreibt man mit Schlömilch s statt x, μ t statt λ, multipliziert beiderseits mit

$$\mu \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

und integriert nach t zwischen den Grenzen $t = o$ und $t = 1$. Man erhält durch diese Operation:

$$\frac{2\mu}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^1 \frac{s\,F'(\mu\,s\,t)}{\sqrt{1-s^2}}\,d\,s = \mu\int_0^1 \frac{f'(\mu\,t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = F(\mu) - F(o)$$

nach einem von Abel herrührenden Satze. Den Beweis für dessen Richtigkeit gibt Schlömilch ebenfalls in seiner Abhandlung (siehe Seite 156 und 157).

Für $\lambda = o$ gibt Gleichung 85)

$$F(o) = f(o),$$

mithin:

$$86)\quad F(\mu) = f(o) + \mu\int_0^1 \frac{f'(\mu\,t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Wir schreiben nun in Gleichung 84) $f(\lambda)$ für die linke Seite, drücken rechts $F(u)$, welches in A_n enthalten ist, vermittelst der vorstehenden Gleichung 86) durch (u) aus, und gelangen somit zu dem Satze, dass die beliebige Funktion $f(\lambda)$ unter der Bedingung

$$\frac{1}{2}\pi \geqq \lambda \geqq 0$$

in die Reihe

$$87)\quad f(\lambda) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \overset{0}{J}(\lambda) + A_2 \overset{0}{J}(2\,\lambda) + \cdots$$

entwickelt werden kann, wenn die Koeffizienten A nach der Formel

$$88)\quad A_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u \cos 2\,n\,u\,du \int_0^1 \frac{f'(u\,t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

bestimmt werden.

Durch Differentiation nach λ, wobei die Formel

$$\frac{d\,\overset{0}{J}(\lambda)}{d\lambda} = -\overset{1}{J}(\lambda)$$

anzuwenden ist, und $f'(\lambda) = F(\lambda)$, sowie $-2n\,A_n = C_n$ sein möge, erhält man ein zweites Theorem

$$89)\quad F(\lambda) = C_1 \overset{1}{J}(\lambda) + C_2 \overset{1}{J}(2\lambda) + C_3 \overset{1}{J}(3\lambda) + \cdots$$

wobei die Koeffizienten C nach der Formel:

$$90)\qquad C_n = -\frac{8n}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u \cos 2nu\, du \int_0^1 \frac{F(ut)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

zu bestimmen sind.

Lommel zeigte, dass allgemein auch die Entwicklung

$$91)\qquad f(\lambda) = B_1 \overset{m}{J}(\lambda) + B_2 \overset{m}{J}(2\lambda) + B_3 \overset{m}{J}(3\lambda) + \cdots$$

wobei ist:

$$92)\qquad B_n = 2 \,.\, (-1)^m \,.\, n^m \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u \cos 2nu\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

unter der Bedingung $\frac{\pi}{2} \geqq \lambda \geqq o$ gültig ist.

Die vorher angeführte Reihe ist ein Specialfall der Entwicklung 91); nämlich für $m = 1$ wird aus Gleichung 91) die Gleichung 89) und Gleichung 92) geht unter Berücksichtigung der gemachten Voraussetzungen in Gleichung 90) über.

Damit möge vorliegender Aufsatz abgeschlossen sein. Wie sich die Bessel'sche Funktion erster Art durch die Untersuchungen von Lommel, C. Neumann, Lipschitz und anderen weiter entwickelte, werde ich in einer zweiten Arbeit zu schildern versuchen. Dabei werde ich auf ihr Verhältnis zu den Kugelfunktionen näher eingehen, die Funktion mit negativ-gebrochenem Index untersuchen und ihre Darstellung als Summenformel nach Hankel geben. Ferner sind die Bessel'sche Funktion II. Art, ihre Differentialgleichung und ihre Beziehungen zu derjenigen I. Art zu betrachten, und schliesslich sind die von Schläfli eingeführten Hülfsfunktionen

$$\overset{n}{K}(x),\ \overset{n}{S}(x),\ \overset{n}{T}(x)\ \text{u. s. w.}$$

zu berücksichtigen, und darauf die neuesten Arbeiten von Heine, Gegenbauer, Graf, Hurwitz und anderen einer Betrachtung zu unterziehen.

Benutzte Quellen und Werke.

Fourier: Théorie analytique de la chaleur. Seite 369. ff. Paris 1822.

Poisson: Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides Journal de l'école polyt. Cahier 19. Seite 349. Paris 1823.

Bessel: Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe. Abh. der Berl. Akademie der Wiss. aus dem Jahr 1817.

Bessel: Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. aus dem Jahr 1824.

Jacobi: Formula transformationis integralium definitorum. Crelles Journal. Band 15. 1836.

Hansen: Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. 1. Teil. Schriften der Sternwarte Seeberg. Gotha 1843.

Anger: Untersuchungen über die Funktion $\overset{h}{J}(k)$, mit Anwendungen auf das Kepler'sche Problem. Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Danzig 1855.

Schlömilch: Über die Bessel'sche Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik. II. Jahrgang. Leipzig 1857.

C. Neumann: Theorie der Bessel'schen Funktionen; ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig 1867.

Lommel: Studien über die Bessel'schen Funktionen. Leipzig 1868.

Errata.

Seite 208: Gleichung 9): ist als untere Grenze des ersten Integrals 0 zu setzen.

Seite 209: Zeile 23 und 24: soll es statt a richtig a_p heissen.

Seite 216: Zeile 14 soll es richtig heissen $\Pi(0) = 1$.

Seite 221: In Gleichung 30: ist auf der rechten Seite $= 0$ zu setzen.