Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1894)
Heft: 1335-1372

Artikel: Die Cylinderfokalen
Autor: Srähli, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319069

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

F. Stähli.

Die Cylinderfokalen.

Eingereicht im Januar 1894.

I. Fokalen des elliptischen Cylinders.

Durch eine Gerade im Raume, deren Richtung normal ist zu derjenigen Hauptebene eines elliptischen Cylinders von den Halbaxen a und b, welche durch die Längsaxe und durch die grosse Axe desselben geht, legen wir ein Ebenenbüschel. Sämtliche Ebenen desselben schneiden dann die Cylinderfläche in Ellipsen, von konstanter kleiner und variabler grosser Axe. Die Brennpunkte aller dieser Schnittellipsen liegen in jener Hauptebene; ihr Ort ist daher eine *ebene Kurve,* welche Cylinderfokale heissen möge. Dieselbe zu untersuchen, ist Aufgabe der vorliegenden Arbeit. —

Aufstellung der Gleichung.

Zum Zwecke der Ermittlung der Kurvengleichung legen wir ein 3 rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde. Die Cylinderaxe sei vertikal stehend. Als (xy) Ebene wählen wir diejenige Hauptebene des Cylinders, in der die Fokale liegt; die (yz) Ebene legen wir parallel zu den Erzeugenden des Cylinders durch die Axe des Ebenenbüschels; durch diese Axe gehe auch die 3. Ebene des Systems senkrecht zur Cylinderaxe. In dem Fall liegt der Koordinatenursprung O auf der Büschelkante und diese letztere ist die Axe z.

Eine beliebige Ebene E (Fig. 1) des Büschels bilde mit der (xz) Ebene den Winkel φ. Dieselbe schneidet die Cylinderfläche in einer Ellipse mit den Brennpunkten F und F'. Bezeichnen wir ihre Abstände vom Koordinatenursprung mit ϱ und ϱ', setzen ferner OC = d, so ergeben sich für ϱ und ϱ' die Gleichungen:

$$\varrho = \frac{d}{\cos\varphi} - e, \quad \varrho' = \frac{d}{\cos\varphi} + e,$$

wo e die Excentricität der Schnittellipse bedeutet.

Blatt 1.

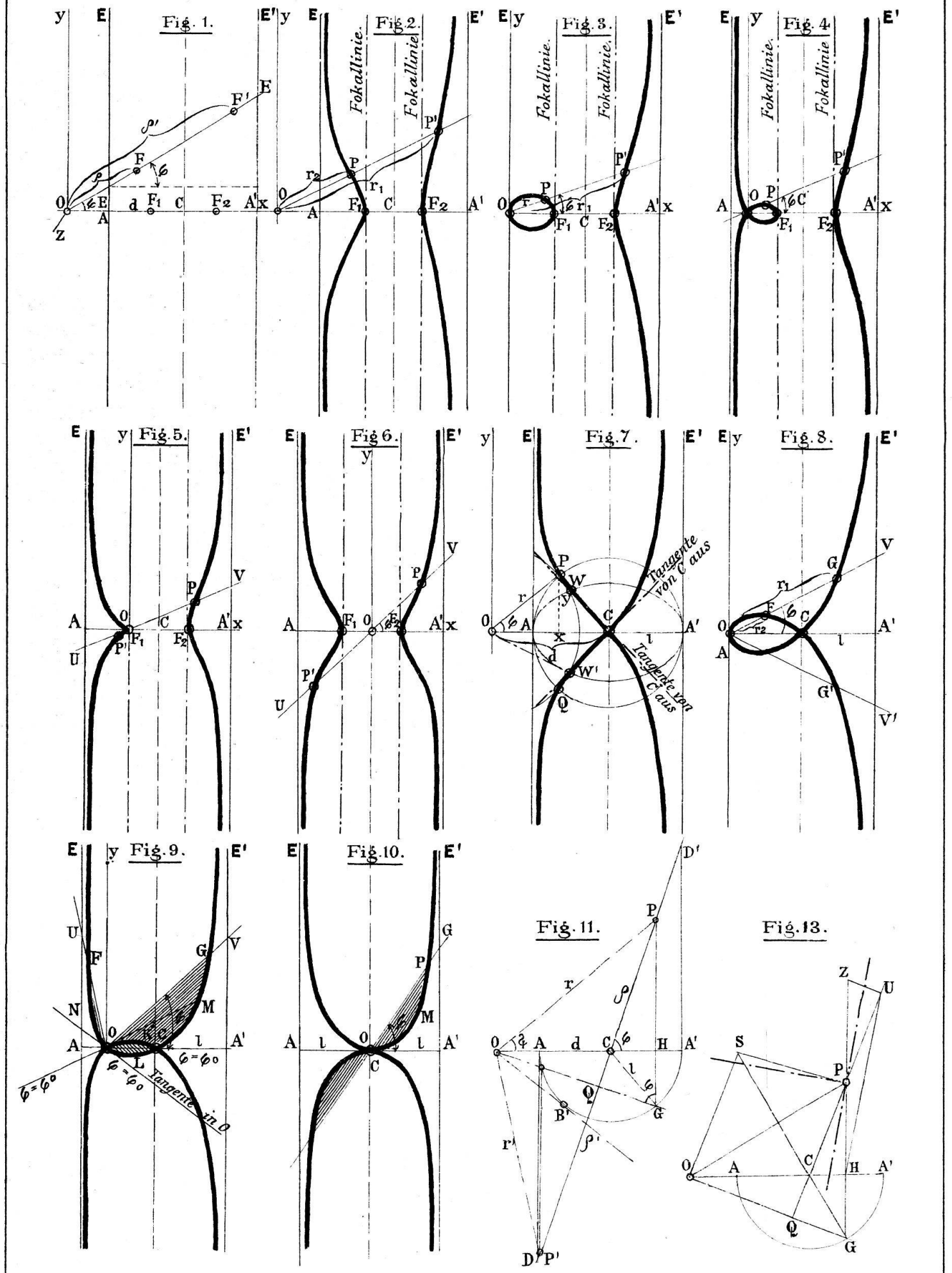
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fokallinie.
Tangente von C aus
Tangente in O
φ = φ₀

Es ist nun aber, da a und b die Halbaxen des Cylinders sind:

die halbe grosse Axe der Schnittellipse: $a' = \frac{a}{\cos\varphi}$;

» » kleine » » » : $b' = b$;

$$\text{somit: } e^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} - b^2,$$

$$\text{oder: } e = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\varphi} - b^2}.$$

Diesen Wert für e in den obigen Gleichungen für ϱ und ϱ' eingesetzt, ergibt:

$$\varrho = \frac{d}{\cos\varphi} - \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\varphi} - b^2}; \quad \text{(a)}$$

$$\varrho' = \frac{d}{\cos\varphi} + \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\varphi} - b^2}. \quad \text{(b)}$$

Wir bezeichnen nun die rechtwinkligen Koordinaten des veränderlichen Brennpunktes F mit x und y; dann ergeben sich zwischen ihnen und den Polarkoordinaten ϱ und φ die Beziehungen:

$$x = \varrho . \cos\varphi; \quad y = \varrho . \sin\varphi. \qquad \text{(c)}$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen und Gleichung (a) lassen sich ϱ und φ eliminieren, und wir erhalten dann eine Gleichung in den rechtwinkligen Koordinaten x und y, die uns den Ort des Brennpunktes F darstellt.

Aus den Gleichungen (c) ergibt sich:

$$\varrho = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} = \frac{y}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$$

$$\text{oder: } (x^2 + y^2) . \cos^2\varphi = x^2;$$

$$\text{somit: } \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Setzen wir diesen Wert für $\cos\varphi$ in Gleichung (a) ein, nachdem wir noch zuvor ϱ durch $\frac{x}{\cos\varphi}$ ersetzt haben, so lautet dieselbe dann:

$$\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{d}{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{\frac{\frac{a^2}{x^2}}{x^2 + y^2} - b^2}$$

und vereinfacht:

$$(x - d)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2 - b^2) . x^2 - a^2 y^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Benützen wir statt des Brennpunktes F den Brennpunkt F', welcher in der Ebene E von O den Abstand ϱ' hat, so erhalten wir

unter Anwendung des obigen Ganges genau dieselbe Gleichung; sie stellt uns also den Ort der Brennpunkte aller Schnittellipsen dar. *Gleichung (1)* ist daher die Gleichung der Cylinderfokalen, und diese ist mithin eine Kurve 4. Ordnung. (Fig. 2)

Lässt man d, den Abstand der Büschelkante von der Cylinderaxe, positiv von 0 bis ∞ variieren, so erhält man ein System von unendlich vielen Fokalen. Das ganz gleiche System, nur in symmetrischer Lage zur Cylinderaxe, ergibt sich für sämtliche Werte von d von 0 bis $-\infty$. Wir betrachten deshalb in der Folge nur positive Werte von d.

Lösen wir die Kurvengleichung (1) nach y auf, so wird:

$$y = \pm \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\, x^2 - (x - d)^2 . x^2}{(x - d)^2 - a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a).$$

Zu jedem Werte von x gehören also 2 gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte Werte von y; die Kurve liegt also symmetrisch zur x-Axe.

Um die Natur der unendlich fernen Kurvenpunkte zu untersuchen, machen wir die Gleichung (1) mit $x = \frac{x}{z}$ und $y = \frac{y}{z}$ homogen und setzen dann $z = 0$; dadurch erhalten wir die Gleichung:

$$x^2 . (x^2 + y^2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

welche uns die Richtungen, die vom Nullpunkt aus nach den Schnittpunkten der Kurve mit der unendlich fernen Geraden ($z = 0$) gehen, gibt. — Der 2. Faktor dieser Gleichung: $x^2 + y^2 = 0$ zeigt an, dass die Cylinderfokale durch die imaginären Kreispunkte im Unendlichen geht. Der 1. Faktor: $x^2 = 0$ sagt uns, dass die Kurve die unendlich ferne Gerade in der Richtung der y-Axe in 2 zusammenfallenden Punkten schneidet. Um die Art dieses Punktes zu ermitteln, substituieren wir in der allgemeinen Gleichung der Kurve für die Variablen x und y die Werte:

$$y = \frac{1}{y'}, \quad x = \frac{x'}{y'};$$

dann werden für $y' = 0$ x und y unendlich gross; es wird der unendlich ferne Punkt der y-Axe in den Nullpunkt projiciert und umgekehrt.

Dies ausgeführt, gibt:

$$\left(\frac{x'}{y'} - d\right)^2 . \left(\frac{x'^2}{y'^2} + \frac{1}{y'^2}\right) - (a^2 - b^2) . \frac{x'^2}{y'^2} - a^2 . \frac{1}{y'^2} = 0$$

oder $(x' - dy')^2 . (x'^2 + 1) - (a^2 - b^2)\, x'^2 y'^2 - a^2 y'^2 = 0 \ldots . \quad (3).$

In dieser transformierten Gleichung haben wir nun den Nullpunkt ($x' = 0$, $y' = 0$) zu untersuchen, welcher dem unendlich fernen Punkte der ursprünglichen Fokalen entspricht.

Für $y' = 0$ wird: $x'^2 . (x'^2 + 1) = 0$,

also: 1. $x'^2 = 0$,

2. $x'^2 = -1$ oder $x' = \pm i$.

Für $x' = 0$ wird: $d^2 y'^2 - a^2 y'^2 = 0$;

also: 3. $y'^2 = 0$.

Aus der 1. und 3. dieser Gleichungen geht hervor, dass der Nullpunkt ($x' = 0$, $y' = 0$), also auch der unendlich ferne Punkt Doppelpunkt für sämtliche Fokalen ist.

Um die Gleichungen der Tangenten in ihm zu erhalten, setzen wir in der transformierten Gleichung (3) die Glieder 2. Grades gleich 0; also:

$$(x' - dy')^2 - a^2 y'^2 = 0;$$

und es stellen uns dann also die Gleichungen:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - d^2 + a^2}}{d^2 - a^2} = \frac{d \pm a}{d^2 - a^2} \quad \ldots . (4)$$

das Tangentenpaar im Nullpunkt der transformierten Kurve dar.

Um die beiden Tangenten im unendlich fernen Punkt selbst zu erhalten, transformieren wir rückwärts ins alte System. Wir haben dann in obigen Gleichungen

$$\text{für } y' = \frac{1}{y} \quad \text{und für } x' = xy' = \frac{x'}{y}$$

zu setzen, wodurch dieselben die Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Tangente: } \dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{d-a}, & \text{also: } x = d - a \\[2ex] \text{2. Tangente: } \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{d+a}, & \text{somit: } x = d + a \end{array}\right\} (5).$$

Es sind dies die beiden in der Kurvenebene liegenden Erzeugenden E und E' der Cylinderfläche, welche Tangenten sind im unendlich fernen Doppelpunkt.

Hieraus folgt:

Die beiden in der Kurvenebene liegenden parallelen Erzeugenden des Cylinders sind Asymptoten an sämtliche Fokalen, die man bei

variablem d erhält. Sie berühren die Kurve im unendlich fernen Doppelpunkt. In der That wird in Gleichung (1a) für $x = d \pm a$, die Ordinate y unendlich gross.

Aus der Form der Kurvengleichung (1) ist ersichtlich, dass der Nullpunkt O, d. h. der Schnittpunkt der x-Axe mit der Büschelaxe ein Doppelpunkt der Kurve ist. Die Tangenten in demselben erhalten wir, wenn wir die quadratischen Glieder der Kurvengleichung (1) gleich 0 setzen; also aus:

$$(d^2 - a^2)(x^2 + y^2) + b^2x^2 = 0 \quad \text{und hieraus:}$$

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{d^2 - a^2 + b^2}{a^2 - d^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Tangenten im Ursprung O nur reell ausfallen für $d < a$ und $> \sqrt{a^2 - b^2}$, d. h., wenn die Büschelaxe den Cylinder zwischen dem Berührungspunkt A und dem Brennpunkt F_1 der Grundellipse schneidet; O ist in diesem Falle Knotenpunkt der Kurve.

Für specielle Lagen der Büschelkante und damit des auf ihr liegenden Doppelpunktes O ergeben sich folgende Fälle:

1. Liegt die Büschelkante im Unendlichen, also $d = \infty$, so werden sämtliche Ebenen des Büschels unter sich parallel und schneiden die Cylinderfläche normal zu deren Axe; die Schnittkurven sind in diesem Fall kongruente Ellipsen und der Ort ihrer Brennpunkte besteht aus zwei zur Cylinderaxe und den Asymptoten parallelen Geraden im Abstand $\pm \sqrt{a^2 - b^2}$ von derselben; sie gehen durch die Brennpunkte F_1 und F_2 der Grundellipse.

2. Die Büschelkante berührt die Cylinderfläche im Punkte A, mit welchem nun der Nullpunkt O zusammenfällt; es wird $d = a$, und die allgemeine Gleichung (1) nimmt die Form an:

$$(x - a)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2 - b^2) . x^2 - a^2y^2 = 0$$

oder $$x^4 - 2ax^3 + x^2y^2 - 2axy^2 + b^2x^2 = 0.$$

Dieses Polynom zerfällt in 2 Faktoren, nämlich:

$$\left\{x\right\} \cdot \left\{x^3 - 2ax^2 + xy^2 - 2ay^2 + b^2x\right\} = 0.$$

Es ist daher: $$x = 0,$$

und $$x(x^2 - 2ax + b^2) + y^2 . (x - 2a) = 0 \quad \ldots\ldots (7).$$

Die 1. Gleichung ($x = 0$) stellt die y-Axe dar, die Cylindererzeugende E; der 2. Faktor aber repräsentiert eine Kurve 3. Ordnung. Es zerfällt also in diesem Specialfall die Cylinderfokale in eine Gerade und eine Kurve

3. Ordnung. Diese letztere besteht aus zwei getrennten Teilen, einem Oval, das in O die Erzeugende E berührt und durch F_1 geht, in der Weise, dass die x-Axe dasselbe halbirt, und einem nach beiden Seiten ins Unendliche gehenden Kurvenast durch F_2 mit der Erzeugenden E' als Asymptote. (Fig. 3.) — Die Tangenten im Punkte O fallen nach Gleichung (6) für $d = a$ zusammen in die Gerade: $\frac{y}{x} = \infty$, d. h. in die von der Fokalen 4. Ordnung sich absondernde Cylindererzeugende E, welche das Oval der Kurve 3. Ordnung berührt. Der Punkt O ist ein einfacher Punkt der Kurve 3. Ordnung. (Fig. 3.)

3. Denken wir uns die Büschelkante parallel nach dem Brennpunkt F_1 verschoben, wodurch $d = \sqrt{a^2 - b^2} = e$ wird, so fallen die beiden Tangenten im Doppelpunkt O von den Gleichungen (6) zusammen mit der Geraden: $y = 0$, d. h. mit der x-Axe. Die Gleichung der Kurve nimmt in diesem Fall die Form an:

$$(x - e)^2 . (x^2 + y^2) - e^2 x^2 - a^2 y^2 = 0$$

oder

$$x^3 . (x - 2e) + y^2 ((x - e)^2 - a^2) = 0 \quad . . . . . (8)$$

Für $y = 0$, wird: $x^3 = 0$,
» $x = 0$, » $y^2 = 0$, d. h.

der Nullpunkt O im Abstand $d = e$ von der Cylinderaxe ist ein Rückkehrpunkt mit der x-Axe als Rückkehrtangente (nach Gl. 6). (Fig. 5).

4. Schneidet die Büschelkante die Cylinderaxe, so liegt O auf dieser letzteren; es ist daher $d = 0$, und die Gleichung der Fokalen wird:

$$x^2 . (x^2 + y^2) - (a^2 - b^2) . x^2 - a^2 y^2 = 0 \quad . . . . (9)$$

sie enthält nur gerade Potenzen von x und y; die Kurve ist deshalb symmetrisch in Bezug auf beide Koordinatenaxen. Die Tangenten (6) im Doppelpunkt O werden:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{-(a^2 - b^2)}{a^2}} \quad . . . . . (10)$$

sie sind imaginär; der Punkt ist also ein isolirter Doppelpunkt.

Das obige Polynom ist sowohl nach x als auch nach y auflösbar, und zwar entsprechen jedem Werte der einen Variablen zwei gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte Werte der andern.

Nach y aufgelöst lautet die Gleichung:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x^2 - a^2 + b^2}{a^2 - x^2}} .$$

Für x erhalten wir:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-(y^2 - a^2 + b^2) \pm \sqrt{(y^2 - a^2 + b^2) + 4a^2 y^2}}{2}}.$$

Diese Gleichung gibt zu jedem y 4 Werte von x, von denen aber stets zwei imginär sind. Die Kurve besteht aus 2 congruenten unendlichen Ästen, bezüglich durch die Brennpunkte F_1 und F_2, die symmetrisch liegen zur Cylinderaxe und welche die Erzeugenden E und E′ ebenfalls zu Asymptoten haben.

Fassen wir die oben gefundenen Resultate zusammen, so haben wir folgendes:

Jedem Werte von d entspricht eine eigene Kurvenform, welche im allgemeinen aus zwei sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckenden Ästen besteht. Für $d = \infty$ werden diese Äste zu parallelen Geraden zur Cylinderaxe; mit kleiner werdendem d schnürt sich derjenige Ast, der gebildet ist von den Brennpunkten F_1, von oben und unten gegen die x-Axe zusammen, während der andere Zweig sich in seiner Form nicht wesentlich ändert. Ist die Büschelkante zur Cylindertangente geworden, oder fällt O mit A zusammen, so löst sich von dem Kurvenast durch F_1 die Erzeugende E ab; der übrig bleibende Teil bildet ein Oval, welches zwischen O und F_1 symmetrisch zur x-Axe liegt; die Ordnung der Kurve ist in diesem Specialfalle um 1 gesunken (Fig. 3). Mit noch kleiner werdendem d erhalten wir wiederum eine Kurve 4. Ordnung, deren Ast durch F_1 eine Schleife (Fig. 4) bildet; für $d = \sqrt{a^2 - b^2}$ degeneriert diese Schleife in eine Spitze; (Fig. 5) nimmt d Werte an $< \sqrt{a^2 - b^2}$, so entstehen wiederum 2 einfache, unendliche Kurvenäste, (Fig. 6) und wenn $d = 0$ ist, so besteht die Fokale aus zwei zu den Koordinatenaxen symmetrischen, nach beiden Seiten ins Unendliche gehenden Ästen. Für negative Werte von d gehen diese beschriebenen Kurvenformen mit grösser werdendem d in umgekehrter Reihenfolge ineinander über; sie haben also symmetrische Lage zu denjenigen für positive d.

Die Fokale des elliptischen Cylinders besitzt 2 Doppelpunkte, den Schnittpunkt der x-Axe mit der Büschelkante und den unendlich fernen Kurvenpunkt. Der erstere ist nur dann ein Knotenpunkt, wenn $d < a$ und $> \sqrt{a^2 - b^2}$ ist; in allen andern Fällen ist er isolierter Doppelpunkt; denn die Tangenten in ihm sind imaginär, während sie im ersten Falle reell ausfallen. Ist $d = e$, so liegt das Tangentenpaar in O vereinigt in der x-Axe;

wächst d, so wächst auch die trigonometrische Tangente des Richtungswinkels der beiden Tangenten, den wir mit α bezeichnen wollen; es wird also auch α selbst grösser und für:

$$\pm\sqrt{\frac{d^2 - a^2 + b^2}{a^2 - d^2}} = 1,$$

also

$$d = \sqrt{\frac{a^2 + e^2}{2}}$$

wird $\alpha = \pm 45^0$, die Tangenten stehen aufeinander senkrecht. Bei noch grösser werdendem d wächst auch α stetsfort und erreicht für $d = \pm a$ mit 90^0 sein Maximum; das Tangentenpaar fällt zusammen mit der Erzeugenden E, bezüglich E'. (y-Axe).

Die Tangenten im unendlich fernen Doppelpunkte sind für alle Fokalen die in der Kurvenebene liegenden Erzeugenden des Cylinders.

Tangenten der Kurve parallel zur y-Axe.

Zum Aufsuchen derselben transformieren wir zuerst die allgemeine Kurvengleichung (1) nach C, dem Schnittpunkt der x-Axe mit der Cylinderaxe, als Ursprung.

Wir setzen zu dem Zweck: $x = x' + d$;

und $y = y'$.

Dann wird:

$$y' = \pm (x' + d) . \sqrt{\frac{e^2 - x'^2}{x'^2 - a^2}} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Die Gerade: $x' = p$ schneidet die Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten: 1. für $p = x' = -d$, $(y' = 0)$ Doppelpunkt O,

und 2. » $p = x' = \pm e$,

für welche Werte von x' beide Werte von $y' = 0$ werden.

Diese beiden Parallelen zur Cylinderaxe: $x' = \pm e$ sind Tangenten an die Fokale in den Punkten F_1 und F_2; weil sie von d unabhängig sind, so sind sie Tangenten an alle Fokalen, die man für ein veränderliches d erhält. Diese beiden Parallelen sind die Fokallinien des Cylinders, und daraus folgt:

Alle Fokalen, die einem veränderlichen d entsprechen, berühren die Fokallinien des Cylinders in den Brennpunkten F_1 und F_2 der Grundellipse. Diese Fokallinien sind identisch mit der Cylinderfokalen: $d = \infty$.

Wird in Gleichung (11) $x = \pm a$, so wird $y = \pm \infty$.

Dies sind die Koordinaten des unendlich fernen Punktes, der, wie aus der Gleichung hervorgeht, für alle Werte für d, also für sämtliche Fokalen, ein Doppelpunkt ist. —

Gleichungen der Kurve in elliptischen Funktionen.

Die Gleichung der Cylinderfokalen, wie sie uns in der allgemeinen Form entgegentritt, ist eine solche 4. Grades. Dieselbe weist zwei Doppelpunkte auf, den Koordinatenursprung O und den unendlich fernen Punkt der Kurve; die zugehörige Kurve ist deshalb eine solche vom Geschlecht 1, und es lassen sich demnach die Koordinaten x und y rational durch elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken.

Wir substituieren zu dem Zweck in Gleichung (1), welche lautet:

$$(x - d)^2 . (x^2 + y^2) - (a^2 - b^2) x^2 - a^2 y^2 = 0$$

für y den Wert λx und erhalten:

$$(x - d)^2 . (x^2 + \lambda^2 x^2) - (a^2 - b^2) x^2 - a^2 \lambda^2 x^2 = 0 \quad (12).$$

Dieses Polynom zerfällt in die beiden Faktoren:

a) $x^2 = 0$;

b) $x^2 - 2dx + d^2 - \lambda^2 x^2 - 2d\lambda^2 x + d^2\lambda^2 - (a^2 - b^2) - a^2\lambda^2 = 0$.

Die Gleichung (a) repräsentiert den Koordinatenursprung ($x^2 = 0$, $y^2 = 0$); seine Koordinaten spalten sich von der allgemeinen Kurvengleichung ab, weil derselbe, wie schon früher gesehen, ein Doppelpunkt der Kurve ist.

Gleichung (b), nach x aufgelöst, gibt:

$$x = \frac{d(1+\lambda^2) \pm \sqrt{d^2 + 2d^2\lambda^2 + d^2\lambda^4 - (1+\lambda^2)(d^2 + d^2\lambda^2 - a^2 + b^2 - a^2\lambda^2)}}{1 + \lambda^2}$$

Dabei zerfällt der Ausdruck unter der Wurzel in die beiden Faktoren:

$$\left\{ a^2 - b^2 + a^2\lambda^2 \right\} \cdot \left\{ 1 + \lambda^2 \right\} = \left\{ e^2 + a^2\lambda^2 \right\} \cdot \left\{ 1 + \lambda^2 \right\}$$
$$= a^2 \left\{ \lambda^2 + \frac{e^2}{a^2} \right\} \cdot \left\{ \lambda^2 + 1 \right\},$$

wo wieder $e^2 = a^2 - b^2$ bedeutet.

Es ist dann also:

$$x = \frac{d(1 + \lambda^2) \pm \sqrt{a^2 \left(\lambda^2 + \frac{e^2}{a^2} \right) (\lambda^2 + 1)}}{1 + \lambda^2} \quad . . (13).$$

Hierin setzen wir: $\lambda = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$, dann geht x über in:

$$x = \frac{d \cdot \frac{1}{z^2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{z^4}(1 - k^2 z^2)}}{\frac{1}{z^2}}$$

oder $$x = d \pm a\sqrt{1 - k^2 z^2}.$$

Wir können nun elliptische Funktionen einführen, indem wir nach Jakoby setzen:

$$z = \sin \operatorname{am} u = \operatorname{sn} u.$$

Dann wird: $$\sqrt{1 - k^2 z^2} = \Delta \operatorname{am} u = \operatorname{dn} u.$$

Also ist:

$$\left.\begin{aligned} x &= d \pm a \operatorname{dn} u \\ \text{und} \quad y &= \lambda x = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}(d \pm a \operatorname{dn} u) \\ &= \operatorname{ctg} \operatorname{am} u\,(d \pm a \operatorname{dn} u) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (14).$$

Dividieren wir die untere der obigen Gleichungen durch die obere, so wird:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{ctg} \operatorname{am} u; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Dies ist die Gleichung eines Leitstrahls durch O. Jedem Werte des Parameters u entspricht ein solcher Leitstrahl, auf welchem zwei Punkte P_1 und P_2 der Kurve liegen, deren Koordinaten sich dem doppelten Vorzeichen entsprechend aus den vorigen Gleichungen ergeben. Bezeichnen wir zwei solche Punkte als zugeordnete Punkte, so folgt aus ihren Koordinaten oder auch nach ihrer geometrischen Erzeugungsweise, dass die Mitten der Verbindungslinien von je zweien derselben auf der Cylinderaxe liegen.

Ist u der Parameter eines Punktes, der auf dem rechts von der Cylinderaxe liegenden Kurvenast sich befindet, so ist der Parameter seines zugeordneten Punktes, welcher auf dem andern Kurvenaste liegt: $2iK' - u$. Es ist mithin die Summe der Parameter zweier zugeordneter Punkte immer gleich $2iK'$, wobei $4iK'$ die imaginäre Periode der elliptischen Funktionen ist; denn nach den Periodicitätsgesetzen der letztern ist:

$$\operatorname{dn}(2iK' - u) = -\operatorname{dn} u;$$
$$\operatorname{cn}(2iK' - u) = -\operatorname{cn} u;$$
$$\operatorname{sn}(2iK' - u) = -\operatorname{sn} u;$$

Setzen wir also in den für x und y gefundenen Gleichungen (14) für den Parameter u den Parameter $2iK' - u$, so ändert die Deferente ihr Vorzeichen, während die Cotgamplitude gleich bleibt. Man hat daher in diesen Kurvengleichungen für die Deferente nur das einfache Zeichen zu setzen; dieselben lauten dann also:

$$\left.\begin{aligned} x &= d + a\,\mathrm{dn}\,u \\ y &= (d + a\,\mathrm{dn}\,u)\,.\,\mathrm{ctg}\,\mathrm{am}\,u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

Die rechtwinkligen Coordinaten x und y sämtlicher Kurvenpunkte sind daher eindeutig durch elliptische Functionen ausgedrückt; jedem Werte des Parameters u entspricht nur ein ganz bestimmter Punkt der Kurve.

Für $u = 0$ und $= 2iK'$ erhalten wir:

$$x = d \pm a,$$
$$y = \pm \infty,$$

die Coordinaten des unendlich fernen Doppelpunktes der Kurve; in diesem Punkte fallen also zwei zugeordnete Punkte zusammen.

Wird $u = K$ und $= 2iK' - K$, so nimmt die Deferente die Werte an:

$$\mathrm{dn}\,u = \pm\sqrt{1 - k^2} = \pm k' = \pm\frac{e}{a}.$$

Es wird also: $x = d \pm e,$
$y = 0.$

Dies sind die Coordinaten der Brennpunkte F_2 und F_1 der Grundellipse: ihre Parameter sind also **K** bezügl. **2 i K' — K;** sie sind mithin zugeordnete Punkte.

Es entspricht, wie bereits erwähnt, jedem Werte von u ein bestimmter Punkt der Kurve. Umgekehrt aber entspricht nicht jedem Punkte der Fokalen nur ein Wert von u, sondern unendlich viele; denn bekanntlich haben die elliptischen Functionen 2 Perioden, eine reelle, bezeichnet mit 4 K und eine imaginäre: 4 i K'. Wir erhalten deshalb unendlich viele Werte von u, welche einem und demselben Kurvenpunkte entsprechen; dieselben sind enthalten in der Form:

$$u \pm 4\,m\,K \pm 4\,n\,i\,K',$$

wo m und n positive ganze Zahlen bedeuten. K und K', die Periodicitätsmoduln werden dargestellt durch die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}\cdot \sin^2\varphi}} \\ \text{und} \quad K' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{e^2}{a^2}\cdot \sin^2\varphi}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (17)$$

wobei $k^2 + k'^2 = 1$ ist.

Aus den in Parameterform erhaltenen Kurvengleichungen lassen sich zwei Eigenschaften der Radien vectoren zweier zugeordneter Punkte ableiten für den Fall der Fokalen 3. Ordnung, $d = a$. Bezeichnen wir nämlich die Längen dieser Radien vectoren mit r_1 bezw. r_2, so ist:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = (a + a\,\mathrm{dn}\,u)^2 + (a + a\,\mathrm{dn}\,u)^2 \,.\, \mathrm{ctg}\,\mathrm{am}^2\,u$$
$$= a^2\,\frac{(1+\mathrm{dn}\,u)^2}{\mathrm{sn}^2\,u};$$
$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 = (a - a\,\mathrm{dn}\,u)^2 \,.\, (1 + \mathrm{ctg}\,\mathrm{am}^2\,u)$$
$$= a^2 \,.\, \frac{(1-\mathrm{dn}\,u)^2}{\mathrm{sn}^2\,u};$$

somit ist:

$$r_1^2 \,.\, r_2^2 = a^4 \,.\, (1-\mathrm{dn}^2\,u)^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^4\,u} = a^4 \,.\, \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot \mathrm{sn}^2\,u\right)^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^4\,u} = b^4;$$

also: $$r_1 \,.\, r_2 = b^2 = \text{constant} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

d. h.: das Produkt der Abstände je zweier zugeordneter Punkte vom Coordinatenursprung auf dem Oval ist eine Constante gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe b des Cylinders.

Da ferner:

$$x_1 \,.\, x_1 = a^2\,(1 - \mathrm{dn}^2\,u) = a^2\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u$$

und $$y_1 \,.\, y_2 = a^2\,k^2 \,.\, \mathrm{sn}^2\,u \cdot \frac{\mathrm{cn}^2\,u}{\mathrm{sn}^2\,u} = a^2\,k^2\,\mathrm{cn}^2\,u,$$

so ist: $$x_1 \,.\, x_2 + y_1 \,.\, y_2 = a^2\,k^2 \,.\, (\mathrm{sn}^2\,u + \mathrm{cn}^2\,u)$$
$$= b^2 = r_1 \,.\, r_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

d. h., es ist die Summe der Producte der Abscissen und Ordinaten zweier zugeordneter Punkte constant gleich dem Quadrat über der halben kleinen Axe des Cylinders und gleich dem Product ihrer Radien vectoren.

Krümmung der Kurve.

Wir erhalten die Grösse des Krümmungsradius ϱ eines beliebigen Kurvenpunktes mit den Coordinaten x und y aus der in der Parameterform gegebenen Kurvengleichung durch Anwendung der Formel:

$$\varrho = \frac{\pm\left\{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{du} - \frac{d^2x}{du^2}\cdot\frac{dy}{du}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

wo: $x = d + a\,.\,dn\,u$ und $y = (d + a\,.\,dn\,u)\,.\,ctg\,.\,am\,u$.

Durch Ausführung der obigen Differentiationen ergibt sich:

$$\varrho = \frac{\{a^2k^4 sn^6 u\, cn^2 u + d^2 dn^2 u + 2ad\,.\,dn^3 u + 2adk^2\,.\,sn^2 u\,.\,cn^2 u\,.\,dn\,u + a^2 dn^4 u + 2ak^2 sn^2 u\,.\,cn^2 u\,.\,dn^2 u + a^2\,.\,k^4 sn^4 u\,.\,cn^4 u\}^{3/2}}{sn^4 u\,\{d\,(3sn^2 u\,.\,dn^2 u - 2dn^2 u - cn^2 u) + adn\,u\,(sn^2 u\,.\,dn^2 u - 3cn^2 u)\}}$$

Indem wir den Zähler etwas vereinfachen und im Nenner alles durch dn u ausdrücken, erhalten wir für ϱ den Wert:

$$\varrho = \frac{\{a(1 - k^2 sn^4 u)\,.\,(a + 2d\,.\,dn\,u) - a^2k^2 sn^4 u\,.\,dn^2 u + d^2\,.\,dn^2 u\}^{3/2}}{sn^4 u\,\{a\,.\,dn^5 u + 3d\,dn^4 u + 2a\,dn^3 u - 2dk'^2\,.\,dn^2 u - 3ak'^2\,.\,dn\,u - dk'^2\}} \quad (21)$$

k' bedeutet hierin den complementären Modul: $\sqrt{1 - k^2}$.

Die Argumente der beiden Brennpunkte der Grundellipse fanden wir: $u = K$ und $= 2iK' - K$; diese Werte in Gleichung (21) eingesetzt, gibt für die Krümmungsradien in denselben:

Krümmungsradius von F_1:

$$\varrho_1 = \frac{\left\{a^2(1 - k^2) - a^2k^2k'^2 + d^2k'^2 - 2adk'(1 \quad k^2)\right\}^{3/2}}{-ak'^5 + 3dk'^4 - 2ak'^3 - 2dk'^4 + 3ak'^3 - dk'^2}$$

$$= \frac{k'\,(a^2\,.\,k'^2 + d^2 - 2adk')^{3/2}}{-ak'^3 + dk'^2 + ak' - d} = \underline{\frac{k'}{k^2}\,(ak' - d)^2;}$$

Krümmungsradius von F_2:

$$\varrho_2 = \frac{\left\{a^2(1 - k^2) - a^2k^2k'^2 + d^2k'^2 + 2adk'(1 - k^2)\right\}^{3/2}}{ak'^5 + 3dk'^4 + 2ak'^3 - 2dk'^4 - 3ak'^3 - dk'^2}$$

$$= \frac{k'^3\,.\,(a^2k'^2 + d^2 + 2adk')^{3/2}}{k'^2(-ak'k^2 - dk^2)} = \underline{\frac{k'}{k^2}\,(ak' + d)^2;} \quad (22)$$

Bei den verschiedenen Specialfällen ergeben sich für die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 der Brennpunkte der Grundellipse folgende Werte:

1. $d = a$. In dem Falle geht die Gleichung (21) des Krümmungsradius über in:

$$\varrho = \frac{a^2.(1 - k^2 sn^4 u)^{3/2}.(1 + dn\,u)^2}{sn^4 u\,(dn^4 u + 2\,dn^3 u - 2k'^2 dn\,u - k'^2)} \quad \ldots \quad (23)$$

und hieraus erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Für den Krümmungsradius in } F_1: & \varrho_1 = \dfrac{a^2.(1-k^2)^{3/2}.(1-k')^2}{k'^4 - 2k'^3 + 2k'^3 - k'^2} \\ & = \dfrac{a^2.k^1(1-k')}{1+k'}; \\ \text{Für den Krümmungsradius in } F_2: & \varrho_2 = \dfrac{a^2.(1-k^2)^{3/2}.(1+k')^2}{k'^4 + 2k'^3 - 2k'^3 - k'^2} \\ & = \dfrac{a^2 k'.(1+k')}{1-k'}; \end{array}\right\} \quad (24)$$

Nach Multiplication der beiden Gleichungen (24) ergibt sich:

$$\varrho_1 . \varrho_2 = a^4 k'^2 = a^2 e^2;$$

d. h.: Für den Fall, dass $d = a$ ist, ist das Product der Krümmungsradien der beiden Brennpunkte der Grundellipse gleich dem Product der Quadrate aus halber grosser Axe und Excentricität.

2. $d = \sqrt{a^2 - b^2} = e$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Krümmungsradius in } F_1: \\ \varrho_1 = \dfrac{k'}{k^2}\left(a.\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \sqrt{a^2-b^2}\right) = 0; \\ \text{Krümmungsradius in } F_2: \\ \varrho_2 = -\dfrac{a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\cdot\left(a\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} + \sqrt{a^2-b^2}\right)^2 = -4a^2.\dfrac{k'^3}{k^2} \end{array}\right\} \quad (25)$$

Da F_1, derjenige Brennpunkt, in welchem der Coordinatenursprung liegt, in diesem Specialfall zum Rückkehrpunkt wird, wie wir früher gefunden haben, so ist die Richtigkeit des obigen Resultates $\varrho_1 = 0$ damit bestätigt. —

3. $d = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Krümmungsradius in } F_1: \ \varrho_1 = -\dfrac{k'}{k^2}.a^2.k'^2 = a^2.\dfrac{k'^3}{k^2} \\ \text{Krümmungsradius in } F_2: \ \varrho_2 = -\dfrac{a^2.k'^3}{k^2} \end{array}\right\} \quad (26)$$

Die Krümmungsradien von F_1 und F_2 sind in diesem Falle einander gleich, weil eben die Fokale symmetrisch liegt zu den Axen. —

Bestimmung der Wendepunkte.

Da unsere Kurve eine solche 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten ist, so besitzt sie nach Massgabe der diesbezüglichen Plücker'schen Formel 12 Wendepunkte. Zur Auffindung derselben benützen wir die Gleichung (20), welche die Länge des Krümmungsradius eines beliebigen Kurvenpunktes durch elliptische Functionen des Argumentes u ausdrückt. In einem Wendepunkt wird aber der Krümmungsradius ϱ unendlich gross; damit das in der obigen Gleichung eintritt, muss der Nenner der rechten Seite gleich 0 werden; also:

$$\mathrm{sn}^4 u \left\{ a.\mathrm{dn}^5 u + 3d.\mathrm{dn}^4 u + 2a.\mathrm{dn}^3 u - 2dk'^2.\mathrm{dn}^2 u - 3ak'^2.\mathrm{dn}\, u - dk'^2 \right\} = 0 \quad (27)$$

Diese Gleichung zerfällt in die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sn}^4 u = 0 \\ \text{und} \\ a.\mathrm{dn}^5 u + 3d.\mathrm{dn}^4 u + 2a.\mathrm{dn}^3 u - 2dk'^2.\mathrm{dn}^2 u - 3ak'^2 \mathrm{dn}\, u - dk'^2 = 0 \end{array}\right\} \quad (28)$$

Die erste dieser Gleichungen (28) ist erfüllt für $u = 0$

und » $u = \pm 2iK'$.

Dem Argument $u = 0$ entspricht der Punkt mit den Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} x = d + a; \\ \text{und } y = \infty. \end{array}\right\}$$

Dies ist der unendlich ferne Punkt der Asymptote A_2.

Dem Argument $u = \pm 2iK'$ entspricht der Punkt mit den Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{l} x = d - a; \\ \text{und } y = \infty. \end{array}\right\}$$

Dies sind die Coordinaten des unendlich fernen Punktes der Asymptote A_1.

Es liegen also zwei Wendepunkte im unendlich fernen Doppelpunkt der Kurve; derselbe ist mithin ein doppelter Inflexionsknoten für alle Fokalen.

Die übrigen 10 Wendepunkte liefert uns die zweite der Gleichungen (28). Dieselbe ist vom 5. Grade in dn u; sie liefert uns also 5 verschiedene Werte für dn u. Die Deferente ist aber eine gerade Funktion; jedem Werte derselben entsprechen deshalb zwei Argumente u, die dem absoluten Werte nach gleich, dem Vorzeichen nach aber verschieden sind. Wir erhalten also 10 verschiedene Werte u, von denen sich die einen 5 nur durch das Vorzeichen von den andern 5 unterscheiden. Jedem dieser Werte von u entsprechen nun die Coordinaten eines Wendepunktes, welche mit Hülfe der Gleichungen

(16) bestimmt werden können; alle 10 Wendepunkte liegen paarweise symmetrisch zur x-Axe. —

Wendepunkte der Specialkurve: $d = a$.

Für den Fall, dass $d = a$ wird, nimmt die Wendepunktsgleichung (27) die Form an:

$$sn^4u \left\{dn^5u + 3dn^4u + 2dn^3u - 2k'^2dn^2u - 3k'^2 . dn\,u - k'^2\right\} = 0 \quad (29)$$

Der 1. Faktor liefert 2 Wendepunkte; der eine derselben ist der unendlich ferne Punkt der Kurve 3. Ordnung, der andere fällt auf die sich von der allgemeinen Kurve absondernde Erzeugende E.

Vom 2. Faktor der Wendepunktgleichung (29) spaltet sich die Grösse: $dn\,u + 1$ ab; derselbe ist nämlich

$$= (dn\,u + 1) . (dn^4\,u + 2\,dn^3\,u - 2\,k'^2\,dn\,u - k'^2) = 0$$

und hieraus: a. $dn\,u + 1 = 0$

b. $dn^4\,u + 2\,dn^3\,u - 2\,k'^2\,dn\,u - k'^2 = 0$

Aus (a) erhalten wir also: $dn\,u = -1$, somit $u = \pm 2\,i\,K'$ und es werden die Coordinaten von 2 Wendepunkten: $x = 0$, $y = 0$, d. h., zwei Wendepunkte fallen in den Berührungspunkt der sich absondernden Asymptote A_1 mit dem Oval der Kurve 3. Grades.

Die Gleichung (b) liefert uns die übrigen 8 Wendepunkte; sie ist eine solche 4. Grades in $dn\,u$. Jedem Werte von $dn\,u$ entsprechen zwei gleiche aber entgegengesetzte Argumente u, welche je zwei zur x-Axe symmetrische Wendepunkte liefern

Wendepunkte der Specialkurve: $d = \sqrt{a^2 - b^2} = e$:

Für diese Kurve lautet die Wendepunktsgleichung:

$$sn^4\,u . \{dn^5u + 3\,k'\,dn^4u + 2\,dn^3\,u - 2\,k'^3\,dn^2\,u - 3\,k'^2\,dn\,u - k'^3\} = 0 \quad (30)$$

$sn^4\,u = 0$, liefert uns wiederum die zwei in den unendlich fernen Punkt fallenden Wendepunkte.

Der 2. Teil der Gleichung (30) lässt sich in 2 Faktoren zerlegen und lautet also:

$$(dn\,u + k') . \{dn^4\,u + 2\,k^1 . dn^2\,u(dn\,u - k') + 2\,dn\,u\,(dn\,u - k') - k'^2\} = 0 \quad (31)$$

Hieraus ergibt sich:

a. $dn\,u + k' = 0$, also: $dn\,u = -k'$

somit: $u = \pm (2\,i\,K' - K)$.

Ferner ist: $sn\,(2\,i\,K' - K) = \pm 1$;

und $cn\,(2\,i\,K' - K) = 0$.

Die Coordinaten der diesem Argument entsprechenden Wendepunkte sind dann:

$$x = d - a\,k' = e - a \cdot \frac{e}{a} = 0;$$

$$y = (d - a\,k') \cdot \frac{0}{\pm 1} = 0.$$

Es fallen also zwei Wendepunkte, den Argumenten $\pm\,(-K + 2\,i\,K')$ entsprechend in den Coordinatenursprung, welcher Punkt, wie früher gesehen, in diesem Fall eine Spitze ist.

Die noch fehlenden 8 Wendepunkte liefert uns der 2. Faktor der Gleichung (31):

$$dn^4\,u + 2\,k' \,.\, dn^2\,u\,(dn\,u - k') + 2\,dn\,u\,(dn\,u - k') - k'^2 = 0. \quad (32)$$

Als eine Gleichung 4. Grades in dn u liefert sie uns 4 Werte für dn u, und diesen entsprechen 8 Argumente, die 8 paarweise symmetrisch zur x-Axe gelegene Wendepunkte ergeben. —

Wendepunkte der Specialkurve: $d = 0$.

Wir erhalten dieselben wiederum aus der allgemeinen Wendepunktsgleichung (27), indem wir dort $d = 0$ setzen; dann wird:

$$sn^4\,u\,\{a \,.\, dn^5\,u + 2\,a \,.\, dn^3\,u - 3\,a\,k'^2\,dn\,u\} = 0 \quad . \; . \; . \quad (33)$$

Der 1. Faktor enthält wie bei den vorigen Fällen die beiden ins Unendliche fallenden Wendepunkte. Vom 2. Faktor dieser Gleichung (33) spaltet sich die Grösse: dn u ab. Es ist aber $dn\,u = 0$ für $u = \pm\,(K + i\,K')$.

Die beiden Wendepunkte, welche diesem Argument entsprechen, sind imaginär, da $cn\,(K \pm i\,K') = \mp\,\frac{i\,k'}{k} =$ imaginär.

Der übrig bleibende Teil der Gleichung (33):

$$a \,.\, dn^4\,u + 2\,a\,dn^2\,u - 3\,a\,k'^2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

liefert uns die weitern 8 Wendepunkte. Da diese Gleichung nur gerade Potenzen von dn u enthält, so kann sie ohne weiteres aufgelöst werden.

Es folgt nämlich:

$$dn\,u = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{1 + 3\,k'^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Dem positiven Zeichen der 2. Wurzel entsprechen 2 reelle Werte für dn u
» negativen » » » » » 2 imginäre » » dn u

Diese Gleichung liefert uns also 4 reelle und 4 imaginäre Wendepunkte, die paarweise symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen liegen.

Zur Bestimmung ihrer rechtwinkligen Coordinaten benützen wir die Gleichungen dieser Fokalen, welche sich aus (16) für $d = 0$ ergeben als:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \,.\, \mathrm{dn}\, u \\ y &= a \,.\, \mathrm{dn}\, u \,.\, \mathrm{ctg}\, \mathrm{am}\, u \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Da $\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sn}\, u &= \pm \frac{1}{k} \sqrt{2 \mp \sqrt{4 - 3k^2}} \\ \text{und} \qquad \mathrm{cn}\, u &= \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \cdot (2 \mp \sqrt{4 - 3k^2})} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (37)$$

Setzen wir die Werte von sn u, cn u und dn u in den Gleichungen (36) ein, so erhalten wir als Coordinaten der reellen 4 Wendepunkte:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm a \sqrt{-1 + \sqrt{4 - 3k^2}}; \\ y &= \pm a \,.\, \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{4 - 3k^2} - 3k^2}{3}} \end{aligned}\right\}$$

Es liegen somit die 4 reellen Wendepunkte zu je zweien centralsymmetrisch auf einer durch O gehenden Geraden.

Die Gleichung dieser Wendepunktsgeraden lautet:

$$\frac{y}{x} = \mathrm{ctg}\, \mathrm{am}\, u$$

wo für cn u und sn u die Werte aus Gleichungen (37) einzusetzen sind. Dies ausgeführt, gibt:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{4 - 3k^2} - 1}{3}}$$

Setzen wir endlich für k noch seinen Wert $\frac{b}{a}$ ein, so erhalten wir die Gleichung der Wendepunktsgeraden in der Form:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{4a^2 - 3b^2} - a}{3a}} \quad \ldots\ldots (38).$$

Dieselben schliessen, da die rechte Seite absolut < 1 ist, mit der x-Axe einen Winkel $< 45^0$ ein.

Die 4 reellen Wendepunkte liegen auf einem Kreis um den Coordinatenursprung vom Radius:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= a \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4 - 3k^2} - k^2.}{3}} \end{aligned}$$

II. Fokalen des Kreiscylinders.

Modificieren wir die zu Anfang unserer Betrachtungen gemachte Annahme in der Weise, dass wir den elliptischen Cylinder in einen Kreiscylinder übergehen lassen, indem wir $b = a$ setzen, so nehmen die unter den sonst gleichen Bedingungen entstehenden Fokalen wesentlich andere Eigenschaften an.

Wir haben auch hier wieder die verschiedenen Fälle zu unterscheiden, wo die Büschelkante ausserhalb der Cylinderfläche liegt, dieselbe tangirt oder schneidet, und jeder dieser speciellen Annahmen entspricht eine besondere Form der Kurve.

Befindet sich die Büschelaxe ausserhalb dem Cylinder, so erhalten wir die Gleichung der so entstehenden Fokalen aus Gleichung (1) des 1. Abschnittes, indem wir dort einfach $b = a = l$ setzen, wodurch der elliptische Cylinder in einen Kreiscylinder übergeht vom Radius l.

Die Gleichung der allgemeinen Kreiscylinderfokalen lautet also:

$$(x - d)^2 . (x^2 + y^2) - l^2 y^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (39).$$

Diese Gleichung stellt uns ebenfalls eine Kurve 4. Ordnung dar; einem veränderlichen d entspricht auch hier eine Schar von Fokalen und negative Werte von d liefern Kurven, die identisch sind mit denjenigen, welche sich für gleich grosse positive d ergeben und symmetrisch liegen zur Cylinderaxe. (Fig. 7.)

Nach y aufgelöst, lautet die obige Gleichung (39):

$$y = \pm \frac{(x - d)\, x}{\sqrt{l^2 - (x - d)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39^a)$$

und hieraus geht hervor, dass die Kurve symmetrisch zur x-Axe liegt.

Der Coordinatenursprung ist, wie aus der Kurvengleichung ersichtlich, ein Doppelpunkt der Fokalen. Die Tangenten in ihm erhalten wir aus der Gleichung:

$$d^2 . (x^2 + y^2) - l^2 y^2 = 0.$$

Sie sind also enthalten in der Form:

$$\frac{y}{x} = \frac{\pm d}{\sqrt{l^2 - d^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40).$$

Ist $d > l$, d. h. liegt die Büschelkante ausserhalb dem Cylinder, so werden die Tangenten im Doppelpunkt O imaginär; dieser ist isolirter Doppelpunkt; für alle Werte von $d < l$ dagegen ist das Tangentenpaar in O reell.

Ein 2. Doppelpunkt der Fokalen ist, wie sowohl aus der Kurvengleichung als auch aus der geometrischen Erzeugungsweise erfolgt: $x = d$, $y = 0$; dies ist der Schnittpunkt C der Cylinderaxe mit der Axe der x. — Um die Tangenten in ihm zu erhalten, machen wir ihn zum Ursprung des Coordinatensystems, indem wir Gleichung (39) linear transformieren. Wir setzen nämlich: $x = x' + d$;

und $y = y'$;

dann erhalten wir als transformierte Gleichung der Kurve:

$$x'^2((x' + d)^2 + y'^2) - l^2 y'^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (41).$$

Aus derselben ergibt sich als Gleichung des Tangentenpaares in C:

$$\frac{y'}{x'} = \pm \frac{d}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42).$$

Die Tangenten werden also für alle Werte von d, von 0 bis ∞, reell; der Punkt C ist mithin für alle Fokalen Doppelpunkt.

Der 3. Doppelpunkt der Kreiscylinderfokalen ist der unendlich ferne Punkt. Die Natur desselben wird, indem wir $b = a$ annehmen, nicht geändert. Die Tangenten in ihm sind deshalb auch hier die in der Kurvenebene liegenden Erzeugenden E und E' des Cylinders; dieselben sind also Asymptoten für sämtliche Kreiscylinderfokalen.

Wir haben bereits eingangs erwähnt, dass verschiedenen speciellen Lagen der Büschelaxe in Bezug auf den Cylinder auch hier verschiedene Cylinderfokalen entsprechen.

1. Ist $d = \infty$, so sind sämtliche Schnittebenen des Büschels unter sich parallel und schneiden die Cylinderfläche normal zu deren Axe. Die Schnittfiguren werden in diesem Fall zu congruenten Kreisen; ihre Brennpunkte fallen zusammen im Mittelpunkt und der Ort derselben ist, wie dies geometrisch hieraus hervorgeht, die Cylinderaxe.

2. Für $d = l$ wird die Büschelaxe zur Tangente an die Cylinderfläche, und die allgemeine Kurvengleichung zerfällt in 2 Faktoren:

$$(x) \,.\, (x^3 - 2\,lx^2 + (l^2 + y^2)\,x - 2\,ly^2) = 0$$

Der 1. Faktor: $x = 0$ ist die y-Axe, (Erzeugende E)

» 2. » $(x - l)^2 \,.\, x + y^2 \,.\, (x - 2\,l) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (43)$

ist eine Gleichung 3. Grades; dieselbe repräsentiert also eine Kurve 3. Ordnung. Sie besteht aus einer Schleife, deren Zweige

sich im Punkte C durchsetzen und nach beiden Seiten asymptotisch zu E′ ins Unendliche gehen. Der Coordinatenursprung O ist in diesem Specialfall ein gewöhnlicher Punkt; denn die Tangenten in ihm fallen zusammen in die Gerade: $\frac{y}{x} = \infty$, welch' letztere die Cylindererzeugende E ist. Für das Tangentenpaar im Doppelpunkt C lauten die Gleichungen (48):

$$\frac{y}{x} = \pm 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

d. h. die Kurve durchsetzt sich im Doppelpunkt C rechtwinklig, und es liegen die beiden Tangenten in ihm symmetrisch zur x- und zur y-Axe. Der unendlich ferne Punkt ist Wendepunkt (Fig. 8) und die Cylindererzeugende E′ ist Wendetangente in demselben. Dieser Specialfall der Kreiscylinderfokalen ist bekannt unter dem Namen der «Logocyclischen Kurve» der «Logocycloide» oder der Strophoide; dieselbe besitzt eine grosse Anzahl interessanter Eigenschaften, welche Gegenstand verschiedener mathematischer Arbeiten geworden sind.*) Ihre geometrische Erzeugungsweise ist eine sehr mannigfaltige; einige Constructionen finden sich erwähnt bei S. Günther in der unten genannten Abhandlung und in Ed. Bartl, «Übungsaufgaben aus der Trigonometrie und analytischen Geometrie der Ebene.»

3. Für Werte von $d < l$ aber > 0 besteht die Kurve aus zwei Ästen, die sich in den Punkten F und C durchsetzen; diese beiden Punkte sind Knotenpunkte; denn die Tangentenpaare in ihnen sind reell. (Fig. 9).

4. Verschieben wir endlich die Büschelaxe parallel zu sich selbst nach dem Schnittpunkt C der x-Axe und der Axe der Cylinderfläche, so wird $d = 0$, und wir erhalten als Gleichung dieser Specialkurve:

$$x^2 \,.\, (x^2 + y^2) - l^2 y^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Die durch dieses Polynom dargestellte Kurve ist wiederum eine solche 4. Ordnung. Sie besitzt die gleichen symmetrischen Eigenschaften wie die ihr entsprechende Fokale des elliptischen Cylinders, d. h. sie liegt symmetrisch zu beiden Coordinatenaxen. Bei ihr

*) Darunter sind vorzugsweise die 2 folgenden Schriften zu nennen:

J. Booth, A treatise on some new geometrical methods containing essays on tangential coordinates, pedal coordinates, reciprocal polars, the trigonometry of the parabola, the geometric origin of logarithms, the geometrical properties of elliptic integrals and other kindred subjects. London 1873.

S. Günther, Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Leipzig 1882.

fallen die beiden endlichen Doppelpunkte zusammen in C, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } y = 0 \text{ wird } x^4 = 0 \\ \text{und für } x = 0 \quad » \quad y^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Der Nullpunkt C ist mithin Selbstberührungspunkt oder Selbstberührungsknoten; die x-Axe ist Tangente an beide Zweige der Kurve, die sich in ihm berühren. (Fig. 10.)

Construktion der Kreiscylinderfokalen.

Die auf C als Ursprung bezogene Kurvengleichung lautet:

$$x^2 . (x^2 + y^2) + 2\, dx^3 + d^2 x^2 - l^2 y^2 = 0$$

oder

$$(x^2 + y^2) + 2\, dx + d^2 = l^2 . \frac{y^2}{x^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Es ist nun P ein beliebiger Punkt der Kurve, ϱ sein Radius vector CP und φ der Winkel, welchen ϱ mit der x-Axe einschliesst; dann erhalten wir aus (46):

$$\varrho^2 + 2\, d\varrho . \cos\varphi + d^2 . (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = l^2 . \operatorname{tg}^2\varphi \quad . \quad (47)$$

und hieraus:

$$\varrho = - d . \cos\varphi \pm \sqrt{l^2 - d^2 \cos^2\varphi} . \operatorname{tg}\varphi; \quad \ldots\ldots \quad (47^a)$$

Ist $d > l$, so erhalten wir auf den durch C gehenden Strahlen nur dann reelle Kurvenpunkte, wenn $\cos\varphi < \frac{l}{d}$.

Die obige Gleichung (47^a) führt nun dazu, Punkte der Cylinderfokalen zu construieren. Sie liefert uns nämlich folgenden Satz:

Schlägt man um C als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius l, zieht durch O einen variablen Strahl, der diesen Kreis in 2 reellen Punkten G und G' schneidet, und fällt von diesen Punkten Senkrechte auf OC, so treffen diese das aus C auf den Strahl OG gefällte Lot CQ in 2 Punkten P und P' unserer Fokalen.

Der Beweis ist der folgende: (Fig. 11.)

Es ist: $CQ = d . \cos\varphi$.

Ferner ist: $OGP = \varphi$; denn die Schenkel stehen senkrecht zu denen von A'CP; somit:

$$QP = QG . \operatorname{tg}\varphi$$

und

$$QG = \sqrt{l^2 - d^2 . \cos^2\varphi},$$

also

$$\left.\begin{matrix} QP \\ QP' \end{matrix}\right\} = \pm \sqrt{l^2 - d^2 \,.\, \cos^2\varphi} \,.\, \mathrm{tg}\varphi.$$

Die Radien vectoren genügen also der Relation (47).

Da der Punkt Q in der Mitte des Strahles PP′ liegt, so folgt daraus:

Der Ort der Mitten der durch den Doppelpunkt C gehenden Sehnen unserer Kurve ist der um OC als Durchmesser beschriebene Kreis.

Jeder Lage der Geraden OG entsprechen 2 Punkte der Kurve, die auf einem Strahl durch den Ursprung C gehen. Bewegt sich daher der Strahl OG von der x-Axe aus bis zur Tangentenlage OB′, so bewegt sich der Kurvenpunkt P vom unendlich fernen Punkte auf der positiven Seite der y-Axe bis zum Punkte B′ und der Punkt P′ vom unendlich fernen Kurvenpunkte auf der negativen Seite der Coordinate y bis zum nämlichen Punkte B′. — Die Berührungspunkte der von O an den Kreis um C gezogenen Tangenten, die Punkte B′ und B sind also Punkte der Fokalen; in denselben wird dieser Kreis von der Kurve orthogonal geschnitten.

Bezeichnen wir ferner den Abstand des Punktes P der Kurve von der Büschelkante mit r, so haben wir folgende Beziehung:

Es ist:

$$\varrho^2 + 2d\,\varrho \,.\, \cos\varphi + d^2 = r^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber identisch derjenigen von (47); somit ist:

$$r^2 = l^2 \,.\, \mathrm{tg}^2\varphi = r'^2$$

also

$$r = r' = l \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

oder auch $l \,.\, \mathrm{tg}\varphi = A'D = AD'$; d. h.:

Die Entfernung zweier auf einem Strahl durch den Ursprung C gelegener Kurvenpunkte P und P′ vom Doppelpunkt O ist dieselbe und gleich den Abschnitten, welche dieser Leitstrahl auf den Cylindererzeugenden E und E′ bildet, gemessen von der x-Axe aus.

Construktion der Normalen in einem beliebigen Kurvenpunkte P.

Diese Aufgabe kann gelöst werden mit Hülfe der auf pag. 123 erhaltenen Construktion eines beliebigen Punktes der Fokalen und wird durch sie zurückgeführt auf die folgende:

Es ist ein variables Dreieck PGQ gegeben, dessen eine Seite PQ durch den festen Punkt

Blatt 2.

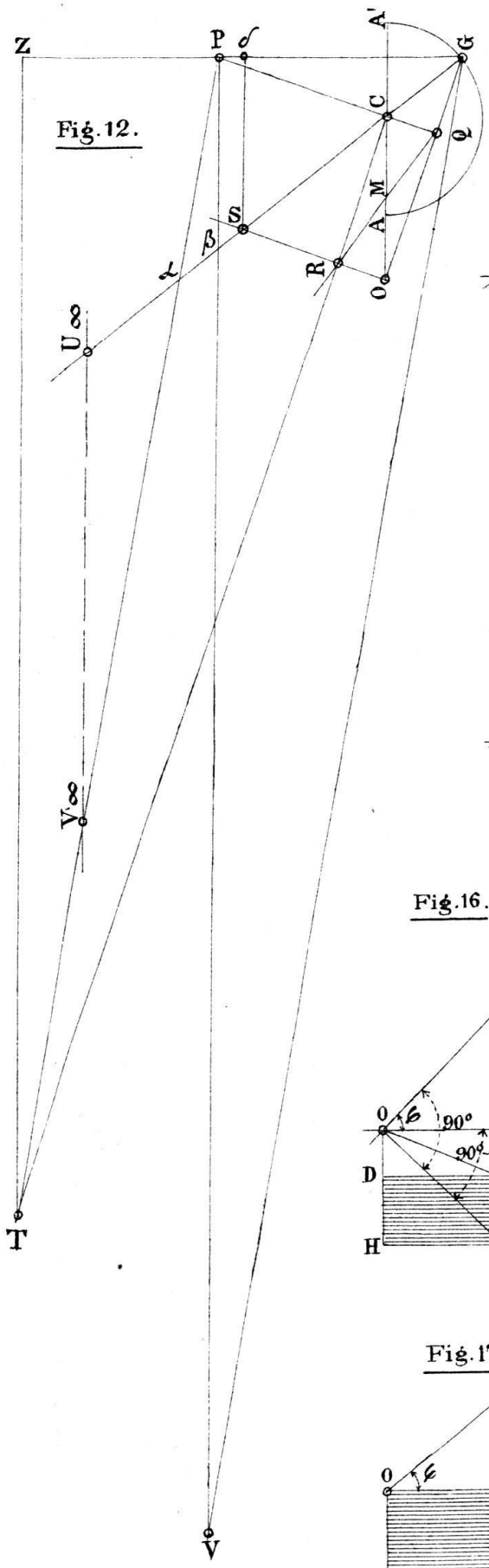

Fig. 12.

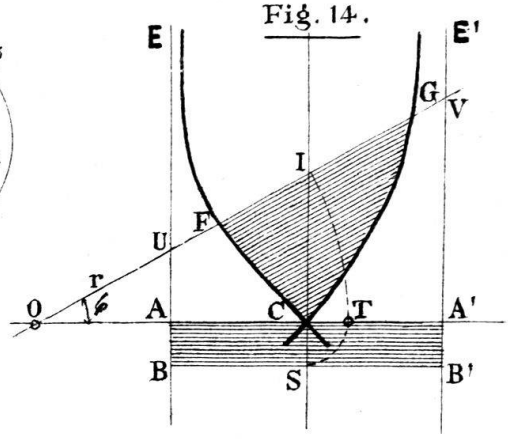

Fig. 14.

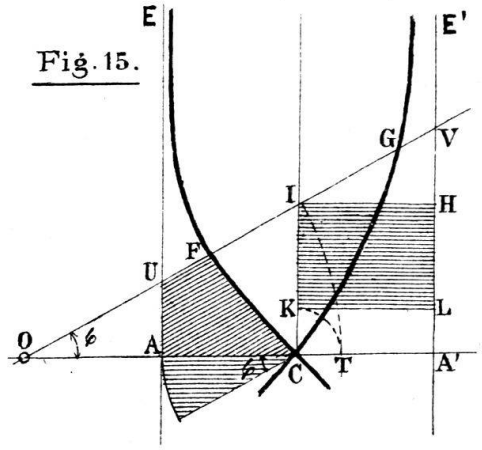

Fig. 15.

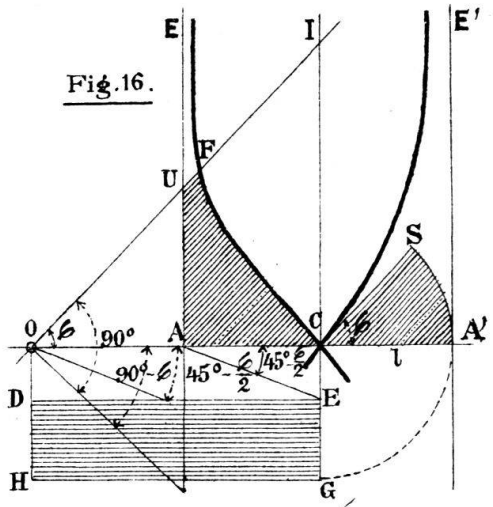

Fig. 16.

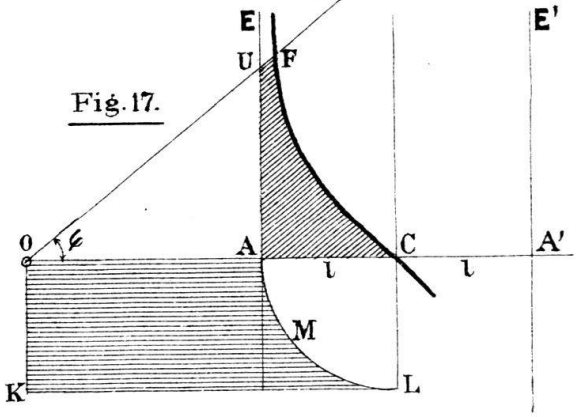

Fig. 17.

C, dessen 2. Seite QG durch einen andern festen Punkt O geht und dessen 3. Seite sich selbst parallel bleibt; dabei bewegt sich die Ecke G auf einem Kreise um C und die Ecke Q auf einem Kreise um C und die Ecke Q auf einem solchen vom Durchmesser CO. Man construiere die Normale der Ortskurve der 3. Ecke P.

Wir bezeichnen (Fig. 12) die Mitte von OC mit M; M ist dann also der Mittelpunkt des Kreises, auf dem Q liegt, und CG und MQ sind die Normalen der Ecken G und Q. Eine in O errichtete Senkrechte zu OQG schneide diese Normalen in den Punkten R resp. S; dann ist QORC ein Rechteck, somit der Punkt R auch Schnittpunkt der Normalen von Q mit der in C auf QP errichteten Senkrechten. PT sei nun die gesuchte Normale von P; sie treffe die in C auf PQ errichtete Senkrechte im Punkte T. Eine im unendlich fernen Punkte von GP errichtete Senkrechte treffe endlich die Normalen GS und PT in den Punkten $U\infty$ resp. $V\infty$. Wenn nun dG, dQ und dP die Kurvenelemente sind, welche in unendlich kleinen Zeiten von diesen Punkten beschrieben werden, so ergibt sich nach einem bekannten Satz aus der kinematischen Geometrie:

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{dQ} &= \frac{GS}{QR} \\ \frac{dQ}{dP} &= \frac{QR}{PT} \\ \frac{dP}{dG} &= \frac{PV\infty}{GU\infty} \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Durch Multiplikation dieser 3 Gleichungen erhalten wir:

$$1 = \frac{GS \,.\, PV\infty}{PT \,.\, GU\infty} \quad \text{(b)}$$

Wenn wir ferner den Schnittpunkt der Geraden GS und PT mit α bezeichnen, so ist:

$$\frac{PV\infty}{GU\infty} = \frac{\alpha V\infty}{\alpha U\infty} \quad \text{(c)}$$

Eine in P errichtete Senkrechte auf PG schneide $G\alpha$ im Punkte β und die durch $G_{\parallel}$ zu PT gezogene Gerade in γ; dann ist:

$$\frac{\alpha V\infty}{\alpha U\infty} = \frac{\alpha P}{\alpha\beta} = \frac{G\gamma}{G\beta} \quad \text{(d)}$$

Dann wird die Gleichung (b):

$$1 = \frac{GS}{PT} \cdot \frac{G\gamma}{G\beta} \quad \text{oder} \quad \frac{PT}{G\gamma} = \frac{GS}{G\beta} \quad \text{(e)}$$

Indem wir von T aus eine Senkrechte GP ziehen, erhalten wir 2 ähnliche Dreiecke PTz und GPγ; in ihnen ist:

$$\frac{PT}{G\gamma} = \frac{Pz}{GP} \quad \text{(f)}$$

und wir erhalten daher:

$$\frac{Pz}{GP} = \frac{GS}{G\beta} \quad \text{(g)}$$

Fällen wir endlich das Lot Sδ, so wird:

$$\frac{GS}{G\beta} = \frac{G\delta}{GP} \quad \text{(h)}$$

also

$$\frac{Pz}{GP} = \frac{G\delta}{GP} \quad \text{(i)}$$

oder es ist:

$$Pz = G\delta \quad \text{(k)}$$

oder

$$\delta z = GP \quad \text{(l)}$$

Der Schnittpunkt T von zT mit der in C errichteten Senkrechten auf QP ist zugleich ein Punkt der gesuchten Normalen PT. Da das Viereck CPzT ein Viereck im Kreise ist mit PT als Durchmesser, so gilt der Satz:

Der Umkreis des Dreiecks CPz berührt im Punkte P unsere Kurve.

Indem wir nun die oben gefundenen Resultate anwenden und zugleich diejenigen Elemente, die nur zur Ableitung der vorigen Construktion gedient haben, unterdrücken, so ergibt sich folgende Construction der Normalen und der Tangente unserer Kreiscylinderfokalen: (Fig. 13)

Die Fokale ist der Ort des Schnittpunktes P der Geraden GH und QC (oder auch der Geraden OP).

Es sei ferner S der Schnittpunkt des Lotes in O mit der Geraden CG und δ der Fusspunkt des Perpendikels von S auf GP, endlich machen wir noch $\delta z = GP$.

Es berührt dann der um CPz beschriebene Kreis in P die Fokale, und die Gerade, welche P mit dem Schnittpunkt der Perpendikel in z und C verbindet, ist die gesuchte Normale der Kurve im Punkte P, oder nehmen wir im Dreieck QPz zu dem durch P gehenden Höhenperpendikel die Winkelgegenlinie, so ist letztere die Normale der Kreiscylinderfokalen im Punkte P.

Die zugehörige Tangente ist die durch P Parallele zu HU, der Verbindungslinie der Fusspunkte der beiden Höhenperpendikel in C und z.

Darstellung der Coordinaten eines Punktes der Kreiscylinderfokalen als rationale Functionen eines Parameters.*)

Die Fokale des Kreiscylinders besitzt 3 Doppelpunkte; sie ist also eine Kurve vom Geschlecht Null, und es lassen sich somit ihre rechtwinkligen Coordinaten (x, y) darstellen als algebraische Funktionen eines variablen Parameters.

Zu dieser Darstellung gelangen wir vermittelst der Gleichungen (17) und (18) pag. 113, welche die Coordinaten der Fokalen des elliptischen Cylinders in elliptischen Funktionen eines Parameters u ausdrücken. Für den Fall nämlich, dass der elliptische Cylinder in einen Kreiscylinder übergeht, wird der Modulus $k = \frac{a}{a} = 1$, und es gehen die elliptischen Funktionen über in hyperbolische; denn für $k = 1$ wird:

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Lg}\, \frac{1 + z}{1 - z};$$

hieraus ist:

$$z = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \mathrm{tg.\,hyp.}\, u = \mathfrak{tang}\, u;$$

Es ist aber auch: $z = \mathrm{sn}\,(u, 1)$,

somit:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sn}\,(u, 1) &= \mathfrak{tang}\, u \\ \text{ferner} \qquad \mathrm{cn}\,(u, 1) &= \frac{1}{\mathfrak{cos}\, u} \\ \mathrm{dn}\,(u, 1) &= \frac{1}{\mathfrak{cos}\, u} \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Indem wir diese Werte für sn, cn, dn in den Gleichungen (17) und (18) einsetzen, gehen diese über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= d + a \cdot \frac{1}{\mathfrak{cos}\, u}, \\ y &= \left(d + a \cdot \frac{1}{\mathfrak{cos}\, u}\right) \cdot \frac{1}{\mathfrak{sin}\, u}; \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

---

*) Siehe Prof. Dr. G. Huber, Die Kegelfokalen, Bern, 1893.

oder da wir den Radius des Kreiscylinders mit l bezeichnet haben:

$$\left.\begin{aligned} x &= d + l \,.\, \mathfrak{sekans}\, u \\ y &= d \,.\, \mathfrak{cosekans}\, u + 2\, l \,.\, \mathfrak{cosekans}\, 2\, u \end{aligned}\right\} \quad (50^a)$$

Diese Gleichungen drücken also die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Kreiscylinderfokalen in hyperbolischen Functionen eines Argumentes u aus. Jedem Werte von u entspricht ein und nur ein Kurvenpunkt; die Fokale ist mithin durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt.

Durch Division der Gleichungen (50) folgt:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\mathfrak{sin}\, u} \quad \ldots \quad (51)$$

Dies ist die Gleichung eines Strahls durch den Coordinatenursprung O, der die Fokale in 2 zugeordneten Punkten schneidet von den Argumenten u und $(i\pi - u)$.

$\frac{1}{\mathfrak{sin}\, u}$ stellt in obiger Gleichung (51) den Richtungscoëffizienten des Leitstrahls durch O dar. Setzen wir denselben gleich der trigonometrischen Tangente eines variablen Winkels α, also: $\frac{1}{\mathfrak{sin}\, u} = \operatorname{tg} \alpha$, so erhalten wir die Coordinaten (x, y) eines Punktes der Kreiscylinderfokalen ausgedrückt in rationalen Functionen von trigonometrischen Functionen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= d + l \sin \alpha \\ y &= (d + l \,.\, \sin \alpha) \,.\, \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Lassen wir hierin α variieren von 0^0 bis 360^0, so erhalten wir sämtliche Kurvenpunkte.

Die Gleichungen (52) gehen für den Fall, dass $d = l$ wird über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= l\,(1 + \sin \alpha) \\ y &= l\,(1 + \sin \alpha) \,.\, \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}\right\} \quad (52^a)$$

Rückt O nach C oder wird $d = 0$, so werden obige Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= l \,.\, \sin \alpha \\ y &= l \,.\, \sin \alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}\right\} \quad (52^b)$$

und hieraus ergibt sich auf einfache Weise die Polargleichung der Kreiscylinderfokalen $d = 0$, bezogen auf den Selbstberührungspunkt als Nullpunkt; nämlich:

$$x^2 + y^2 = r^2 = l^2 \,.\, \sin^2 \alpha + l^2 \,.\, \sin^2 \alpha \,.\, \operatorname{tg}^2 \alpha$$

oder

$$r = l \,.\, \operatorname{tg} \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Mit Hülfe dieser Polargleichung lassen sich nun Punkte der Fokalen construieren; denn aus ihr geht hervor, dass der Radius

vector eines Kurvenpunktes direkt proportional ist der trigonometrischen Tangente des Winkels, den derselbe mit der x-Axe bildet.

Tragen wir also auf einen beliebigen Leitstrahl durch O seinen Abschnitt auf der Cylindererzeugenden E resp. E' ab, so ist dieser Punkt ein Punkt der Fokalen.

Die Gleichungen (52) geben uns die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Kreiscylinderfokalen bezogen auf O als Ursprung in trigonometrischen Functionen eines variablen Winkels α.

Setzen wir nun in denselben $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$, wo t einen variablen Parameter bedeutet, so gehen sie über in:

$$\left.\begin{aligned} x &= d + l\frac{2t}{1+t^2}; \\ y &= \frac{2(d + 2lt + dt^2) \cdot t}{1 - t^4} \end{aligned}\right\}$$

oder alles auf gleichen Nenner gebracht:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(d + 2lt + dt^2) \cdot (1 - t^2)}{1 - t^4} \\ y &= \frac{2(d + 2lt + dt^2) \cdot t}{1 - t^4} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

Es lassen sich also die Coordinaten sämtlicher Punkte der Kreiscylinderfokalen darstellen mit Hülfe eines variablen Parameters als rationale algebraische Functionen.

Für den Doppelpunkt O ergeben sich die Parameterwerte aus der Gleichung: $d + 2lt + dt^2 = 0$; nämlich:

$$\left.\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - d^2}}{d}.$$

Dieselben sind nur reell für $l \geqq d$. Für $l = d$, d. h. für den Fall, dass die Büschelaxe den Cylinder tangiert, erhalten wir aus obiger Gleichung nur einen Parameterwert; O ist, was wir schon früher auf andere Weise gefunden haben, unter dieser Voraussetzung ein einfacher Punkt der Fokalen 3. Ordnung.

Für die Parameterwerte $t_1 = 0$ und $t_2 = \infty$ ergeben sich aus Gleichung (54) die Coordinaten des Doppelpunktes C, und $t = \pm 1$ entsprechen die unendlich fernen Kurvenpunkte.

Durch Division der Gleichungen (54) ergibt sich:

$$\frac{y}{x} = \frac{2\,t}{1-t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Dies ist die Gleichung eines Leitstrahls durch O. Derselbe schneidet die Fokale in 2 reellen Punkten, die wir zugeordnete Punkte genannt haben. Jedem dieser Schnittpunkte entspricht ein bestimmter Parameterwert t.

Fassen wir in Gleichung (55) den Ausdruck $\frac{2\,t}{1-t^2}$ als Richtungscoëfficient des Leitstrahls auf und setzen wir denselben $= m$, so ergeben sich aus dieser Gleichung: $\frac{2\,t}{1-t^2} = m$ die Parameterwerte zweier zugeordneter Punkte t_1 und t_2 durch:

$$\left.\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m}.$$

Ihr Produkt: $t_1 \,.\, t_2 = -1 =$ constant, stellt eine elliptische Punkt- oder Strahlinvolution dar von der Potenz — 1. Der Mittelpunkt derselben ist der Parameterwert 0 des Doppelpunktes C; ihm entspricht der Parameterwert ∞ desselben Punktes.

Für $m = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ fallen die sonst verschiedenen Parameterwerte zweier zugeordneter Punkte zusammen in $+i$ resp. $-i$; $y = \pm i\,x$ ist aber die Gleichung der Leitstrahlen durch O nach den imaginären Kreispunkten im Unendlichen; es ist die Gleichung der Strahlen absoluter Richtung; dieselben sind mithin Tangenten der Fokalen in diesen Punkten.

Die hier gefundenen Resultate lassen sich kurz in folgendem Satz ausdrücken:

Je zwei zugeordnete Punkte einer Kreiscylinderfokalen besitzen Parameterwerte, welche einer elliptischen Involution angehören von der Potenz — 1; der Mittelpunkt derselben ist der Parameterwert 0 des Doppelpunktes C. Die imaginären Doppelpunkte dieser Involution sind die Parameterwerte der imaginären Kreispunkte der Ebene.

Wählen wir statt des Doppelpunktes O, den Punkt C als Ursprung des Coordinatensystems, so gehen die Gleichungen (54) über in:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2\,lt\,.\,(1-t^2)}{1-t^4} \\ y' &= \frac{2\,(d+2\,lt+dt^2)\,.\,t}{1-t^4} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (56)$$

Es stellt uns dann die Gleichung:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{d+2\,lt+dt^2}{l\,(1-t^2)} \quad . \; . \; . \; (57)$$

einen Strahl durch C dar. Jeder solche Strahl schneidet die Kreiscylinderfokale in 2 Punkten; ihre Parameterwerte ergeben sich aus:

$$d+2\,lt+dt^2 = l\,.\,m\,(1-t^2);$$

sie sind:

$$\left.\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2-(d^2-l^2\,m^2)}}{d+lm};$$

wo m der Richtungscoëfficient des betreffenden Strahles bedeutet. Diese Schnittpunkte sind jedoch nur reell für $l^2\,(1+m^2) > d^2$, also für $m > \frac{1}{l}\sqrt{d^2-l^2}$, für den Fall, dass $d > l$.

Wird der Radikant:

$$l^2+l^2\,m^2-d^2 = 0,$$

so wird $t_1 = t_2$, und der Leitstrahl ist Tangente vom Doppelpunkt C aus an die Fokale. Dies tritt also ein für

$$m = \pm\frac{1}{l}\sqrt{d^2-l^2}.$$

Es können also vom Doppelpunkt C aus zwei Tangenten an die Kreiscylinderfokale gezogen werden, die symmetrisch liegen zur x-Axe. Diese Tangenten sind jedoch nur reell für $d > l$, also für den Fall, dass die Büschelkante ausserhalb des Cylinders liegt.

Der Ort der Berührungspunkte dieser Tangenten für ein System von Kreiscylinderfokalen, das wir erhalten, indem wir bei constantem Cylinderradius d variieren lassen, ergibt sich aus der auf C als Ursprung bezogenen Kurvengleichung in rechtwinkligen Coordinaten unter Zuhülfenahme des oben für den Richtungscoëfficienten der Tangenten gefundenen Ausdrucks.

Es war diese Gleichung der Fokalen in rechtwinkligen Coordinaten (pag. 121):

$$x'^2\,.\,((x'+d)^2+y'^2)-l^2\,y'^2 = 0.$$

Es sei ferner: $y' = m\,x'$ die Gleichung einer im Coordinatenursprung an die Kurve gezogenen Tangente, deren Richtungscoëfficient gegeben ist durch:

$$m = \pm \frac{1}{l} \sqrt{d^2 - l^2};$$

dann erhalten wir aus obigen Gleichungen die Coordinaten des Berührungspunktes der Tangente als:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{-d}{1+m^2} \\ y' &= \frac{-md}{1+m^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (58)$$

Führen wir hierin für m die obige Bedingungsgleichung ein und eliminieren den constanten Abstand d, so erhalten wir als Ort der Berührungspunkte sämtlicher durch C gehender Tangenten eines Fokalsystems den Kreis:

$$x^2 + y^2 = l^2 \; . \; . \; . \; (59)$$

Dies ist ein Kreis um den Doppelpunkt C mit Radius $= l =$ dem Radius des Cylinders; derselbe berührt also die Cylindererzeugenden E und E′ in den Punkten A und A′.

Da die beiden von C aus an die Fokale gehenden Tangenten symmetrisch sind zur x-Axe, so liegen ihre Berührungspunkte auch auf einem Kreis um O, welcher die Kurve in denselben berührt; denn: Ein Kreis mit Radius r um O und unsere Kreiscylinderfokale bezogen auf O als Ursprung haben die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2; \\ (x^2 + y^2) \,.\, (x - d)^2 - l^2 y^2 &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen y^2, so erhalten wir eine Gleichung in x^2, welche nach x aufgelöst die Abscissen der Schnittpunkte von Kreis und Fokale liefert.

Die Gleichung in x^2 lautet:

$$(r^2 + l^2) \,.\, x^2 - 2\,d \,.\, r^2 \,.\, x + (d^2 - l^2) \,.\, r^2 = 0. \quad (b)$$

Soll nun obiger Kreis die Kurve berrühren, so müssen die beiden Wurzeln dieser Gleichung (b) zusammenfallen, und hiefür ist die Bedingung:

$$(r^2 + l^2) \,.\, (d^2 - l^2) \,.\, r^2 - d^2 r^4 = 0.$$

Dieses Polynom zerfällt in 2 Faktoren:

$$\left.\begin{aligned} &1.\; r^2 = 0 \\ \text{und} \quad &2.\; (r^2 + l^2) \,.\, (d^2 - l^2) - d^2 r^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Die Lösung $r^2 = 0$ bezieht sich auf den isolierten Doppelpunkt 0 und kommt hier nicht in Betracht.

Aus dem 2. Faktor ergibt sich:

$$r^2 = d^2 - l^2; \qquad \text{(d)}$$

Aus Gleichung (b) wird die Abcisse der Berührungspunkte:

$$x = \frac{d r^2}{r^2 + l^2};$$

da aber nach (d): $r^2 + l^2 = d^2$, so ist:

$$d \,.\, x = r^2 \;\ldots\ldots\; (60)$$ Fig. 7; Bl. II; d. h.

Der um O beschriebene Kreis, welcher durch die Berührungspunkte der von C an die Fokale $d > l$ gelegten Tangenten geht, schneidet in diesen Punkten den Kreis um den Doppelpunkt C mit Radius l orthogonal; dabei berührt er auch die Kurve in diesen Punkten.

Für die Specialkurven $\mathbf{d = l}$ (Strophoïde) und $\mathbf{d = 0}$ gehen die Gleichungen (54) über in die folgenden:

$$d = l: \qquad \left.\begin{aligned} x &= l\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) \\ y &= \frac{2lt \,.\, (1+t)^2}{1 - t^4} \end{aligned}\right\} (61)$$

$$d = 0: \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{2lt}{1+t^2} \\ y &= \frac{4lt^2}{1 - t^4} \end{aligned}\right\} (62)$$

Bezeichnen wir auch hier die zwei auf einem Leitstrahl durch den Coordinatenursprung O liegenden Kurvenpunkte als zugeordnet, so gelten im Specialfall $d = l$, nach Gleichung (61), für ihre Radien vectoren und für ihre rechtwinkligen Coordinaten dieselben Gesetze wie bei der entsprechenden Fokalen des elliptischen Cylinders (pag. 113).

Transformieren wir die Gleichungen (54), (61) und (62) auf den Doppelpunkt C als Coordinatenursprung, so lauten dieselben:

$$\text{a.}\quad d > l: \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{2\,lt}{1+t^2} \\ y &= \frac{2\,(dt^2 + 2\,lt + d)\,.\,t}{1 - t^4} \end{aligned}\right\} (63^a)$$

$$\text{b. } d = l: \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{2\,lt}{1+t^2} \\ y &= \frac{2\,l\,(1+t)\,.\,t}{(1+t^2)\,.\,(1-t)} \end{aligned}\right\} \quad (63^b)$$

$$\text{c. } d = 0: \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{2\,lt}{1+t^2} \\ y &= \frac{4\,lt^2}{1-t^4} \end{aligned}\right\} \quad (63^c)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Abcisse x für sämtliche Fokalen eines Systems mit variablem d, aber constantem Parameter t dieselbe ist.

Es entsprechen aber jedem Werte von x zwei Werte von t, die sich aus obigen Gleichungen für die Abcisse ergeben als:

$$\left.\begin{matrix} t_1 \\ t_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - x^2}}{x};$$

Diese Parameterwerte sind nur reell für $l > x$, d. h. für den Fall, dass die zugehörigen Punkte der Fokalen sich innerhalb den Erzeugenden E und E′ befinden, mithin selber reell sind.

Das Produkt der Parameterwerte aus obiger Gleichung ist:

$$t_1 \,.\, t_2 = 1 = \text{constant}, \qquad \text{d. h.:}$$

Jede Ordinate zwischen den Cylindererzeugenden E und E′ schneidet sämtliche Fokalen eines Kreiscylinders in Punktepaaren, deren Parameterwerte bezogen auf den Doppelpunkt C dieselben sind, und es bilden diese Parameterwerte aller Ordinaten ein hyperbolisches Punktsystem von der Potenz $= +1$. Der Mittelpunkt dieser Involution wird repräsentiert durch den Parameterwert $t_1 = 0$ des Punktes C; diesem entspricht als unendlich fernes Element der andere Parameterwert $t_2 = \infty$ desselben Punktes; die Doppelelemente sind die Parameter der unendlich fernen Kurvenpunkte.

Wendepunkte der Kreiscylinderfokalen.

Lassen wir in der Wendepunktsgleichung (27) pag. 116 den Modulus k in 1 übergehen, so erhalten wir eine Gleichung in hyperbolischen Functionen, die uns die 6 Wendepunkte der Kreiscylinderfokalen liefert.

Es wird also (27) für $k = 1$:

$$\tang^4 u \,.\left\{ l \,.\, \frac{1}{\cos^5 u} + 3\,d\,\frac{1}{\cos^4 u} + 2\,l\,\frac{1}{\cos^3 u} \right\} = 0$$

oder $\tang^4 u \,.\, \{2\,l \,.\, \cos^2 u + 3\,d \,.\, \cos u + l\} = 0$; . . . . (64)

Diese Gleichung zerfällt also in die beiden:

$$\left.\begin{array}{ll} & 1.\ \ \tang^4 u = 0 \\ \text{und} & 2.\ \ 2\,l \,.\, \cos^2 u = 3\,d \cos u + l = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (65)$$

Der 1. Faktor liefert die zwei im unendlich fernen Doppelpunkt der Kurve liegenden Wendepunkte; denn diese Gleichung ist erfüllt für $u = 0$ und $u = i\,\pi$, für welche Werte sich aus Gleichung (50) die rechtwinkligen Coordinaten:

$\left.\begin{array}{l} x = d + l \\ y = \infty \end{array}\right\}$ und $\left.\begin{array}{l} x = d - l \\ y = \infty \end{array}\right\}$ ergeben; der unendlich ferne Doppelpunkt ist mithin auch für die Kreiscylinderfokalen doppelter Inflexionsknoten.

Die übrigen 4 Wendepunkte der Kreiscylinderfokalen sind gegeben durch den 2. Faktor der Wendepunktsgleichung (64):

$$2\,l \cos^2 u + 3\,d \cos u + l = 0;$$

Nach $\cos u$ aufgelöst, erhalten wir:

$$\cos u = \frac{-3\,d \pm \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}{4\,l}.$$

Jedem Werte für d entsprechen aus dieser Gleichung im allgemeinen zwei Werte für $\cos u$ und jeder dieser Werte $\cos u$ liefert nach Gleichung (50) die rechtwinkligen Coordinaten zweier Wendepunkte, die symmetrisch liegen zur x-Axe, also gleiche Abscisse und entgegengesetzt gleiche Ordinaten besitzen. Nur für den Fall $d = \pm \frac{2}{3}\,l \,.\sqrt{2}$ fallen die beiden Werte von $\cos u$ aus obiger Gleichung zusammen in $\mp \frac{1}{2}\sqrt{2}$, und wir erhalten nur 2 symmetrisch zur x-Axe gelegene Wendepunkte, deren Coordinaten aber imaginär sind.

Die rechtwinkligen Coordinaten der 4 Wendepunkte ergeben sich aus Gleichungen (50) als:

$$\left.\begin{array}{l} x = d + \dfrac{4\,l^2}{-3\,d \pm \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}} \\ y = \left(d + \dfrac{4\,l^2}{-3\,d \pm \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}\right) \cdot \dfrac{4\,l}{\pm\sqrt{18\,d^2 - 24\,l^2 \mp 3\,d \,.\, \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}} \end{array}\right\} (66)$$

Ist $\mathbf{d} < \mathbf{l}$, d. h., schneidet die Büschelkante den Cylinder, so erhalten wir aus obigen Gleichungen 4 imaginäre Wendepunkte, und zwar werden für $l > d > \frac{2}{3} l . \sqrt{2}$ die Ordinaten und für $d < \frac{2}{3} l \sqrt{2}$ die Abscissen derselben imaginär. Hat d den speciellen Wert: $\frac{2}{3} l \sqrt{2}$, so fallen, wie schon oben gefunden, die beiden imaginären Wendepunktspaare in eines zusammen mit den Coordinaten:

$$x = -\frac{1}{3} l . \sqrt{2}; \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{2}{3} l i \\ y_2 = -\frac{2}{3} l i \end{array} \right\}.$$

Für $d = 0$ sind die Coordinaten der Wendepunkte:

$$x_1 = -l i \sqrt{2}; \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -\frac{2}{3} l \sqrt{3} \\ y_2 = +\frac{2}{3} l \sqrt{3} \end{array} \right\}$$

und

$$x_2 = +l i \sqrt{2}; \left\{ \begin{array}{l} y'_1 = \frac{2}{3} l \sqrt{3} \\ y'_2 = -\frac{2}{3} l \sqrt{3} \end{array} \right\};$$

sie liegen also central-symmetrisch zum Ursprung $O = C$.

Tangiert die Büschelaxe den Cylinder oder wird $d = l$, so liegen 2 Wendepunkte im Punkte $O = A$ vereinigt, und dieser ist ein gewöhnlicher Punkt der Fokale 3. Ordnung. Die beiden andern Wendepunkte sind wieder imaginär und haben die Coordinaten:

$$x = -l; \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{4}{3} l i \\ y_2 = -\frac{4}{3} l i \end{array} \right\}.$$

Lassen wir endlich $\mathbf{d} > \mathbf{l}$ werden, so wird in der nach $\cos u$ aufgelösten Gleichung auf voriger Seite nur für das negative Zeichen der Wurzel $\cos u$ absolut > 1; dies ist aber die Bedingung dafür, dass die aus den Gleichungen (50) sich ergebenden Coordinaten (x, y) eines Punktes der Fokalen $d > l$ reell ausfallen.

Es besitzt also die Kreiscylinderfokale $d > l$ zwei reelle, symmetrisch zur x-Axe gelegene Wendepunkte, deren Coordinaten wir erhalten, indem wir in den Gleichungen (66) nur das negative Zeichen der Wurzel berücksichtigen; also:

$$(67)\begin{cases} x = d + \dfrac{4\,l^2}{-3\,d - \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}} = \dfrac{-d + \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}{2} \\ y = \dfrac{-d + \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}{2} \cdot \dfrac{4\,l}{\pm\sqrt{18\,d^2 - 24\,l^2 + 3\,d\sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}} \\ \qquad = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}\left(2\,l^2 - 3\,d^2 + d\sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}\right)} \end{cases}$$

Die beiden andern Wendepunkte sind imaginär; ihre Coordinaten ergeben sich aus den Gleichungen (66) für das positive Wurzelvorzeichen des Ausdrucks für $\cos u$.

Beziehen wir in obigen Gleichungen (67) die Coordinaten der reellen Wendepunkte statt auf O auf C als Ursprung, so gehen dieselben über in:

$$\left.\begin{aligned} x' = x - d &= \frac{-3\,d + \sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}}{2}, \\ y' = \quad y &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}\left(2\,l^2 - 3\,d^2 + d\sqrt{9\,d^2 - 8\,l^2}\right.}; \end{aligned}\right\} (68)$$

Betrachten wir hierin d, den Abstand der Büschelaxe vom Doppelpunkt C, als variabel und eliminieren denselben aus diesen Ausdrücken für x' und y', so erhalten wir eine Gleichung, welche uns den Ort der im Endlichen liegenden, reellen Wendepunkte eines Systems von Fokalen, für die $d > l$ ist, darstellt.

Wir erhalten als Ortskurve dieser reellen Wendepunkte eine Ellipse von der Gleichung:

$$(69)\quad \frac{x'^2}{l^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{2\,l}{3}\right)^2} = 1; \qquad \text{(Blatt II; Fig. 7;)}$$

Um einen Wert für den Krümmungsradius der Kreiscylinderfokalen zu bekommen, können wir die auf pag. 114, Gl. 20 citierte Formel für ϱ anwenden auf unsere in Parameterform gegebene Kurvengleichung (54). Die in dieser Weise sich ergebenden Ausdrücke werden aber sehr complicierte, und es ist daher vorzuziehen,

mit Hülfe der Polargleichung unserer Kurve deren Krümmung zu bestimmen.*)

Dies ausgeführt, ergibt:

$$\varrho = \frac{\left\{ l^2 + d^2 + 2\,dl \sin\varphi\,(1 + \cos^2\varphi) + l^2 \,.\, \sin^2\varphi \,.\, \cos^2\varphi \right\}^{3/2}}{l \,.\, \cos^4\varphi \,.\, (2\,l + 3\,d \,.\, \sin\varphi + l \sin^2\varphi)}; \quad (70)$$

Erteilen wir hierin φ die Werte 0 und π, so erhalten wir die Krümmungsradien der beiden im Doppelpunkt C sich schneidenden Kurvenäste und zwar wird in beiden Fällen:

$\varrho_{(c)} = \frac{(l^2 + d^2)^{3/2}}{2\,l^2}$, was aussagt, dass beide im Doppelpunkt C sich schneidenden Äste in diesem Punkte dieselbe Krümmung haben. Für die Specialkurven $d = l$ und $d = 0$ nimmt $\varrho_{(c)}$ die Werte an:

1. $d = l$: $\varrho_{(c)} = l \,.\, \sqrt{2}$; 2. $d = 0$: $\varrho_{(c)} = \frac{l}{2}$. —

Quadratur von Segmenten der Kreiscylinderfokalen.

Ein durch den Doppelpunkt 0 gehender Strahl (Fig. 14) treffe die Cylindererzeugenden E und E′ in den Punkten U und V und die Fokale in F und G.

Dann ist:

$$\text{Sector OCG} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 \,.\, d\varphi;$$

Da aber: $$r = \frac{d \pm l \sin\varphi}{\cos\varphi} \text{ (Polargleichung),}$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \text{Sector OCG} &= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} (d + l \sin\varphi)^2 \,.\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \\ \text{und} \quad \text{Sector OCF} &= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} (d - l \sin\varphi)^2 \,.\, \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Hieraus wird durch Subtraktion:

$$\text{Segment FCG} = 2\,d \,.\, l \int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi \,.\, d\varphi}{\cos^2\varphi} = 2\,d \,.\, l \,.\, \left\{ \frac{1}{\cos\varphi} \right\}_0^{\varphi}.$$

*) Siehe Prof. G. Huber, die Kegelfokalen, S. 49.

Indem wir die Grenzen einsetzen, bekommen wir:

$$\text{Segment FCG} = 2\,d\,.\,l\left\{\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right\} \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Bezeichnen wir den Schnittpunkt des Leitstrahls OUG mit der Cylinderaxe mit J, so ist: $OJ = \frac{d}{\cos\varphi} = OT$

und $CT = \frac{d}{\cos\varphi} - d;$

Da aber nach Gleichung (72): Fläche FCG $= 2\,l\left\{\frac{d}{\cos\varphi} - d\right\}$, so können wir den Inhalt derselben angeben durch ein Rechteck, dessen eine Seite $= 2\,l =$ dem Durchmesser des Cylinders ist und dessen andere Seite uns durch die Strecke $CT = \frac{d}{\cos\varphi} - d$ dargestellt wird. Tragen wir daher diese letztere Entfernung nach unten oder oben von C aus auf die Cylinderaxe ab und ziehen durch den Endpunkt S eine Parallele zur x-Axe, so ist:

Fläche FCG = AA'B'B, d. h., gleich dem Inhalt des Rechtecks gebildet von den Cylindererzeugenden E und E' einerseits und der x-Axe und der zu ihr im Abstand $\frac{d}{\cos\varphi} - d$ Parallelen andrerseits.

Für den Fall, dass d den speciellen Wert 0 annimmt, lautet die Polargleichung der Fokalen, wie früher gefunden:

$$r = l\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

r bedeutet dabei die Länge eines Halbstrahls von $O = C$ aus, welcher mit der x-Axe einen Winkel φ bildet.

Es ergibt sich dann als Inhalt des von diesem Halbstrahl r und der Kurve ($d = 0$) eingeschlossenen Flächenstücks:

Fläche OMP

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\,.\,d\varphi = \frac{l^2}{2}\int_0^{\varphi} \mathrm{tg}^2\varphi\,.\,d\varphi = \frac{l^2}{2}\left\{\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - \int_0^{\varphi} d\varphi\right\}$$

$$= \frac{l^2}{2}\cdot\left\{\mathrm{tg}\,\varphi - \varphi\right\}^{\varphi} = \frac{l^2}{2}\left\{\mathrm{tg}\,\varphi - \varphi\right\}; \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

Da diese Fokale central-symmetrisch ist, so schliesst der nach der negativen Seite verlängerte Strahl r mit der Kurve ein gleich grosses Flächenstück ein, und wir haben daher, wenn wir mit J die Summe der Inhalte der beiden Kurvensegmente bezeichnen:

$$J = l^2 \,.\, (\operatorname{tg}\varphi - \varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

Ferner ist:

Segment OMPGA' = ΔOA'G — Sektor OMP;

da aber: $\Delta OA'G = \frac{l^2 \,.\, \operatorname{tg}\varphi}{2}$, so wird:

Flächenstück OMPGA' $= \frac{l^2 \,.\, \operatorname{tg}\varphi}{2} - \frac{l^2}{2}(\operatorname{tg}\varphi - \varphi) = \frac{l^2}{2} \,.\, \varphi$;

und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir, indem wir den Inhalt des unendlich langen Flächenstreifens zwischen der Kurve, der Asymptote A' und der x-Axe mit S bezeichnen:

$$S = l^2 \,.\, \frac{\pi}{4};$$

Die Kurve (d = 0) schliesst aber mit den beiden Erzeugenden E und E', welche zugleich Asymtoten sind, 4 solcher unendlich langer Flächenstreifen ein, deren Inhalte einander gleich sind. Es beträgt also die Summe aller 4:

$$4\,S = l^2 \,.\, \pi \ldots\ldots\ldots (75) \text{ d. h.,}$$

Die von der Kreiscylinderfokalen (d = 0) und den Asymptoten eingeschlossenen unendlich langen Flächenstreifen haben einen endlichen Inhalt; ihre Summe ist gleich dem Inhalt des Kreises mit Radius l des Cylinders.

Aus der Figur 14 geht weiter hervor:

Es ist: Fläche ACFU $= \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\left\{r^2 - \frac{(d-l)^2}{\cos^2\varphi}\right\} \,.\, d\varphi$;

Da aber: $r = \frac{d - l\sin\varphi}{\cos\varphi}$, so wird:

$$r^2 - \frac{(d-l)^2}{\cos^2\varphi} = \frac{(d - l\sin\varphi)^2 - (d-l)^2}{\cos^2\varphi} = \frac{2d\,.\,l\,.\,(1 - \sin\varphi) - l^2\,.\,\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{2dl}{1 + \sin\varphi} - l^2 = \frac{dl}{\cos^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)} - l^2;$$

Setzen wir diesen Wert unter dem Integral ein, so ist:

$$\text{Inhalt von Fläche: ACFU} = -\,dl\,.\int_0^{\varphi} \frac{d\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$-\frac{l^2}{2}\int_0^{\varphi} d\varphi = dl\,.\left\{1 - \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)\right\} - \frac{1}{2}\,l^2\,.\,\varphi;\ \ldots\ (76)$$

Nun ist:

$$(1 - \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = 1 - \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi\big|_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi\big|_2} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi\big|_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi\big|_2} = \frac{2\sin\varphi\big|_2}{\sin\varphi\big|_2 + \cos\varphi\big|_2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,.\,\sin\varphi\big|_2}{\sin\left(45^0 + \varphi\big|_2\right)};$$

Also wird dann:

$$\text{Fläche ACFU} = \frac{d\,.\,l\sqrt{2}\sin\varphi\big|_2}{\sin\left(45^0 + \varphi\big|_2\right)} - \frac{1}{2}\,l^2\,\varphi\ \ldots\ldots\ (76^a)$$

Setzen wir endlich in Gleichung (76) eine trigonometrische Funktion des ganzen Winkels ein, also:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \varphi\big|_2\right) = \frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi},$$

so geht sie über in:

$$\text{Fläche ACFU} = dl\,.\operatorname{tg}\varphi - dl\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) - \frac{1}{2}\,l^2\,.\,\varphi\ \ (76^b)$$

Diese Formel gibt mit Berücksichtigung der Ausdrücke (71) folgende Construktion des Inhalts des Flächenstückes ACFU. (Fig. 15.)

Es ist also:

Fläche ACFU = Rechteck HIKL — Kreissector ACS;

Vorteilhafter als diese Gleichung ist die Formel für den Inhalt des Flächenstückes ACFU, welche uns gegeben wird durch Construktion vom Ausdruck (76). (Fig. 16.)

Derselbe war:

$$\text{Fläche ACFU} = dl\left\{1 - \operatorname{tg}\left(45^0 - \varphi\big|_2\right)\right\} - \frac{1}{2}\,.\,l^2\,.\,\alpha.$$

Dies construiert, ergibt die Gleichung:

Inhalt von Fläche ACFU = Rechteck DEGH — Kreissectors A′CS;

Die letztere Construction, sowie auch die Gleichungen (76) oder (76^a) lassen sich auf den Grenzfall ausdehnen, wo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird, und es rückt für diesen Wert von φ der Kurvenpunkt F ins Unendliche.

Aus den Gleichungen (76) oder (76^a) ergibt sich für $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

Fläche $F = dl - \frac{\pi l^2}{4}$ als unendlich langer Flächenstreifen zwischen der Kurve, der Erzeugenden E und der x-Axe, und hieraus folgt durch Construction: (Fig. 17.)

Unendl. langer Flächenstreifen F = Fläche AOKLM, d. h.

Es besitzt auch bei der Fokalen ($d > l$) der unendlich lange Flächenstreifen, begrenzt von der Erzeugenden E, der x-Axe und der Kurve einen endlichen Inhalt gleich dem Flächenstück AOKLM, gleich dem Rechteck OKLC vermindert um den Kreissector CAL.

Betrachten wir in Fig. 14 den Flächenstreifen CA′VG in analoger Weise, so ergibt sich für ihren Inhalt der Ausdruck:

$$\text{Inhalt von CA'VG} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\left\{\frac{(d+l)^2}{\cos^2\varphi} - r'^2\right\} . d\varphi;$$

Da nun aber

$$\frac{(d+l)^2}{\cos^2\varphi} - r'^2 = \frac{(d+l)^2 - (d+l\,.\,\sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi} = \frac{2\,d\,l\,(1-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi} + l^2,$$

so sehen wir, dass sich dieser Integrant von demjenigen, den wir bei der Quadratur der Fläche ACFU erhielten, nur durch das Vorzeichen des Gliedes l^2 unterscheidet.

Es ergibt sich also:

$$\text{Inhalt v. Fläche CA'VG} - \text{Inhalt v. Fläche ACFU} = l^2\varphi \tag{77}$$

und ferner:

$$\text{Fläche (CA'VG)} = d\,.\,l\left\{1 - \operatorname{tg}\left(45^0 - \varphi\big|_2\right)\right\} + \frac{1}{2}\,l^2\,.\,\varphi$$

Gehen wir zur Grenze über und setzen $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so wird:

$$F' = d.l + \frac{\pi l^2}{4}, \text{ d. h.:}$$

Der von der Erzeugenden E', der x-Axe und dem Kurvenast CG∞ eingeschlossene, unendlich lange Flächenstreifen hat ebenfalls einen endlichen Inhalt, und zwar ist derselbe gleich dem auf voriger Seite gezeichneten Rechteck OCLK vermehrt um den Kreissector CLA'.

Addieren wir die Inhalte aller 4 von den Erzeugenden und der Fokalen eingeschlossenen Flächenstücke, so ergibt sich, es ist:

$$S = 2F' + 2F = 4\,d.l; \ldots\ldots \quad (78) \text{ d. h.:}$$

Die Kreiscylinderfokale ($d > l$) schliesst mit ihren Asymptoten zwei unendlich lange Flächenstreifen ein, deren Summe gleich ist dem Inhalt eines Rechtecks von den Seiten 2d und 2l.

Subtrahieren wir diese beiden zwischen der Fokalen ($d > l$) und den beiden Cylinderzeugenden E und E' liegenden unendlich langen Flächenstreifen 2 F' und 2 F, so wird ihre Differenz:

$$D = 2F' - 2F = \pi . l^2; \ldots\ldots\ldots \quad (78^a)$$

da diese Differenz von d unabhängig ist, so folgt der Satz:

Die Differenz der Flächeninhalte der beiden unendlich langen Streifen zwischen der Fokalen und den zugehörigen Asymptoten ist constant für alle Fokalen $d > l$ gleich dem Inhalt eines Kreises vom Radius des Cylinders und gleich dem Inhalt der entsprechenden unendlich langen Flächenstreifen der Fokalen $d = 0$.

Ist $d < l$, also O ein Knotenpunkt, so lautet die Polargleichung der Fokalen ebenfalls:

$$r = \frac{d \pm l . \sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Die Tangenten im Doppelpunkt O haben die Richtungswinkel:

$$\sin\varphi = \mp \frac{d}{l},$$

$$\varphi = \mp \text{ arc sin } \frac{d}{l} = \mp \varphi_0$$

Für Werte von φ zwischen $-\varphi_0$ und $\frac{\pi}{2}$ stellt die Gleichung: $r = \frac{d + l \sin\varphi}{\cos\varphi}$ den rechts von O liegenden Teil des obern Astes (Fig. 9) dar, der Gleichung $r = \frac{d - l \sin\varphi}{\cos\varphi}$ aber entspricht der links von O gelegene Teil des obern Astes für φ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi - \varphi_0$.

Es ist nun der Inhalt des Segmentes OLC, welches begrenzt wird von dem Kurvenbogen OLC und der x-Axe und welches gleich ist der Hälfte des Segmentes OLCKO, eingeschlossen von den beiden zwischen den Doppelpunkten O und C liegenden Kurvenbogen:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\varphi_0}^{0} r^2 \,.\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\varphi_0}^{0} \frac{(d + l \sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi} \,.\, d\varphi$$

$$= \frac{d^2}{2}\int_{-\varphi_0}^{0} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + d.l\int_{-\varphi_0}^{0} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \,.\, d\varphi + \frac{l^2}{2}\int_{-\varphi_0}^{0} \operatorname{tg}^2\varphi_0 \,.\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{2}(d^2 + l^2) \,.\, \operatorname{tg}\varphi + \frac{d.l}{\cos\varphi} - \frac{l^2}{2}\varphi\right]_{-\varphi_0}^{0}.$$

Setzt man die Grenzen 0 und $-\varphi_0 = -\text{arc sin } \frac{d}{l}$, $\sin\varphi_0 = \frac{-d}{l}$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{S}{2} = d.l - \frac{1}{2}(d^2 + l^2) \,.\, \frac{-d}{\sqrt{l^2 - d^2}} - \frac{d.l^2}{\sqrt{l^2 - d^2}} - \frac{l^2}{2} \,.\, \text{arc sin } \frac{d}{l}$$

$$= d.l - \frac{1}{2} \,.\, d\sqrt{l^2 - d^2} - \frac{l^2}{2} \,.\, \text{arc sin } \frac{d}{l}; \text{ also:}$$

$$S = 2\,d.l - d\sqrt{l^2 - d^2} - l^2 \,.\, \text{arc sin } \frac{d}{l} \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

als Inhalt jenes doppelten Segmentes OLCKO;

Für $d = l$ geht dieses Doppelsegment in die Schleife der Strophoïde über, und es wird der Inhalt derselben aus obiger Formel, wie schon gefunden:

$$S_r = 2\,l^2 - l^2 \,.\, \frac{\pi}{2} = l^2 \,.\left(2 - \frac{\pi}{2}\right);$$

Für **d = 0** verschwindet das Doppelsegment, da sich die beiden Kurvenäste in O = C berühren, und damit übereinstimmend gibt Gleichung (79) den Wert: S = 0.

Der Inhalt des oberhalb der x-Axe liegenden und von dem Kurvenast M und dem Leitstrahl OG begrenzten Sectors OCMG wird:

$$\text{Fläche (OCMG)} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{(d + l \sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi} \cdot d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{2}(d^2 + l^2) \cdot \operatorname{tg}\varphi + \frac{d \cdot l}{\cos\varphi} - \frac{l^2}{2} \cdot \varphi\right]_0^{\varphi}$$

Die Grenzen eingesetzt, gibt:

$$\text{Fläche OCMG} = \frac{1}{2}(d^2 + l^2) \cdot \operatorname{tg}\varphi + \frac{d \cdot l}{\cos\varphi} - \frac{l^2}{2}\varphi - d \cdot l \ldots (80)$$

Nun wird das zwischen der Kurve, der Erzeugenden E', der x-Axe und dem Leitstrahl GV liegende Flächenstück:

$$\text{Fläche CA'VGMC} = \text{Dreieck OA'V} - \text{Fläche OCMG}$$

$$= \frac{1}{2}(d + l)^2 \cdot \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2}(d^2 + l^2)\operatorname{tg}\varphi - \frac{d \cdot l}{\cos\varphi} + \frac{l^2}{2}\varphi + d \cdot l$$

$$= d \cdot l \cdot \operatorname{tg}\varphi - \frac{d \cdot l}{\cos\varphi} + \frac{l^2}{2}\varphi + d \cdot l$$

$$= -d \cdot l\left(\frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}\right) + \frac{l^2}{2}\varphi + d \cdot l$$

$$= -d \cdot l \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + d \cdot l + l^2 \cdot \frac{\varphi}{2},$$

oder endlich:

$$\text{Fläche CA'VGM} = d \cdot l + l^2 \cdot \frac{\varphi}{2} - d \cdot l \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \ldots (81)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man den unendlich langen Flächenstreifen oberhalb der x-Axe zwischen Kurve und Cylindererzeugenden E'; nämlich:

$$F = d \cdot l + l^2 \cdot \frac{\pi}{4},$$

somit wird der Inhalt des ganzen Streifens, der sich nach beiden Seiten der Asymptote A' ins Unendliche erstreckt:

$$2\,F = 2\,d \cdot l + l^2 \cdot \frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots (82)$$

Dieselbe Formel haben wir früher auch erhalten für den entsprechenden unendlich langen Flächenstreifen der Fokalen $d > l$; es wächst also der Inhalt desselben proportional mit d, d. h., mit der Entfernung der Büschelkante vom Doppelpunkt C.

Für $\mathbf{d = l}$ (Strophoïde) wird: $2\,F = 2\,l^2 + l^2\,\frac{\pi}{2} = l^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)$

Für $\mathbf{d = 0}$ wird: $2\,F = l^2 \,.\, \frac{\pi}{2}$ welch letztere Gleichung übereinstimmt mit der früher gefundenen Gleichung 75.

Der Inhalt des links der y-Axe oberhalb der x-Axe gelegenen Sectors ONFO der Kurve wird:

$$\text{Sector (ONF)} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 \,.\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{(d - l\sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi} \,.\, d\varphi$$

$$= \left[\frac{1}{2}\,(d^2 + l^2)\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{d\,.\,l}{\cos\varphi} - \frac{l^2}{2}\,\varphi\right]_{\varphi_0}^{\varphi};$$

Die Grenzen eingesetzt, erhalten wir:

$$\text{Sector (ONF)} = \frac{1}{2}\,(d^2 + l^2)\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{d\,.\,l}{\cos\varphi} - \frac{l^2}{2}\,\varphi + \frac{d}{2}\sqrt{l^2 - d^2}$$

$$+ \frac{l^2}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{d}{l} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

Ferner wird der Inhalt des Flächenstreifens OAUF oberhalb der x-Axe zwischen der Kurve und der Erzeugenden E:

$$\text{Fläche (OAUF)} = \text{Dreieck OAU} - \text{Sector ONF}$$

$$= \frac{1}{2}\,(l - d)^2\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{1}{2}\,(l^2 + d^2)\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{d\,.\,l}{\cos\varphi} + \frac{l^2}{2}\,\varphi$$

$$- \frac{d}{2}\cdot\sqrt{l^2 - d^2} - \frac{l^2}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{d}{l}$$

$$= -l\,d\,.\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{d\,.\,l}{\cos\varphi} + \frac{l^2}{2}\cdot\varphi - \frac{d}{2}\cdot\sqrt{l^2 - d^2} - \frac{l^2}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{d}{l}$$

oder

$$\text{Fläche OAUF} = l\,d\,.\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{l^2}{2}\cdot\varphi - \frac{d}{2}\sqrt{l^2 - d^2} - \frac{l^2}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{d}{l} \quad (84)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man den unendlich langen Flächenstreifen oberhalb der x-Axe zwischen Kurve und Asymptote A; es wird also:

$$F' = \frac{l^2 . \pi}{4} - \frac{d}{2}\sqrt{l^2 - d^2} - \frac{l^2}{2} \text{ arc sin } \frac{d}{l},$$

somit der Inhalt des ganzen Streifens, der sich nach beiden Seiten der Asymptote A zwischen dieser und der Kurve ins Unendliche erstreckt:

$$2\,F' = l^2 . \frac{\pi}{2} - d . \sqrt{l^2 - d^2} - l^2 . \text{arc sin} \frac{d}{l}, \quad . \; . \; (85)$$

welcher Ausdruck sich leicht geometrisch darstellen lässt.

Für $\mathbf{d = l}$ wird $2\,F' = 0$ und

Für $\mathbf{d = 0}$ » $2\,F' = l^2 . \frac{\pi}{2}$, wie schon gefunden.

Aus den Gleichungen (79), (82) und (85) folgt ferner:

$$S + 2\,F - 2\,F' = 4\,d.l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (86)$$

d. h.: Das zwischen den Doppelpunkten O und C liegende Doppelsegment vermehrt um den unendlich langen Flächenstreifen längs der Erzeugenden E und vermindert um den unendlich langen Flächenstreifen längs der Erzeugenden E' hat gleichen Inhalt mit einem Rechteck von den Seiten 2l und 2d und ist gleich der Summe der beiden unendlich langen Flächenstreifen 2F' und 2F der Fokalen $d > l$ (Gleichung 78).

Ferner folgt aus den auf voriger Seite citirten Gleichungen:

$$2\,F + 2\,F' - S = l^2 \pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (87)$$

d. h.: Die Summe der beiden zwischen den Asymptoten und den entsprechenden Kurvenästen liegenden unendlich langen Flächenstreifen vermindert um das zwischen den Doppelpunkten O und C gelegene Doppelsegment der Fokalen $d < l$ ist constant für alle Fokalen des Systems $(d < l)$ gleich dem Inhalt des Kreises mit Radius l und gleich der Summe der beiden unendlich langen Flächenstreifen, welche die Fokale $d = 0$ mit den Asymptoten einschliesst.

Statt von der Fokalen $d < l$ auf die Quadratur der Strophoïde $(d = l)$ überzugehen (pag. 146), können wir auch die früher gefundenen Flächengleichungen der Kurve $d > l$ anwenden auf diesen

Specialfall. Es gibt uns dann dieses so gefundene Resultat eine Kontrolle für die Richtigkeit obiger Sätze.

Wenden wir also die früher gefundenen Flächengleichungen (76) an auf den Specialfall (d = l); (Strophoïde), so wird: (Fig. 8.)

$$\text{Sector: } ACF = l^2 \cdot \left\{1 - \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{1}{2}\varphi\right)\right\} - \frac{1}{2} l^2 \varphi$$

$$\text{Fläche: } CA'VG = l^2 \cdot \left\{1 - \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)\right\} + \frac{1}{2} l^2 \varphi$$

und diese Resultate lassen sich analog den frühern konstruiren. (Fig. 8.)

Für $\varphi = 90^0$, wird:

$$\text{Halbe Schleifenfläche: } ACFA = l^2 - \frac{\pi l^2}{4},$$

$$\text{Streifen } F = l^2 + \frac{\pi l^2}{4},$$

daher:

$$\text{Ganze Schleife} + \text{Streifen } F = 4\, l^2; \quad \ldots\ldots \quad (88)$$

d. h.: Die Summe der Inhalte von Schleife und unendlich langem Flächenstreifen, der von der Strophoïde und der Cylindererzeugenden E (Asymptote) eingeschlossen wird, ist gleich dem Quadrat über dem Durchmesser des Cylinders.*)

Mit Ausnahme der Strophoïde führt die Rektifikation unserer Kurven auf elliptische Integrale, und wir erhalten deshalb hier keine einfachen Beziehungen.

Schlussbemerkung.

Über die Fokalen des elliptischen Cylinders, sowie über den allgemeinen Fall $d \gtrless l$ und die Specialkurve $d = 0$ des Kreiscylinders habe ich mit Ausnahme einer jüngst erschienenen Arbeit von Herrn Prof. Huber über «Die Kegelfokalen» in der vorhandenen Litteratur nichts finden können. Dagegen die Strophoïde (specielle Kreiscylinderfokale d = l) ist in zahlreichen Arbeiten behandelt worden, und es dürfte daher der Umstand, dass diese letztere ein Specialfall einer Klasse von Kurven ist, welche in vielen Eigenschaften mit ihr über-

*) S. Günther hat in seiner schon früher erwähnten Schrift über «Die logocyklische Kurve» diese Beziehung mit Hülfe von hyperbolischen Funktionen gefunden.

einstimmen, einiges Interesse bieten. Ob vielleicht die hier behandelten Cylinderfokalen für die Weiterentwicklung der Bessel'schen Funktionen von Wert sind, das muss die Untersuchung lehren. Eigentümlich ist immerhin, dass bei einigen Integralformen dieser Funktionen Wege in Betracht kommen, welche Ähnlichkeit haben mit den hier behandelten Fokalen des Cylinders.

Von der über die Strophoïde vorhandenen Litteratur sind neben der bereits in der Arbeit angeführten Schriften noch folgende zu nennen:

1. H. Durège. Über die Kurve 3. Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet. Clebsch Annal. V 83—95.
2. St. Gervais. Etude géometrique sur la unoïde et de la strophoïde. Mathesis X 9—14.
3. W. W. Johnson. The strophoïds, Sylv. Ann. J. III. 320—355.
4. E. Barnes. A note on the strophoïds; J. Hopkins circ. II. 145,
5. P. Mansion. Longueur de la boucle de la logocyclique ou strophoïde. Mathesis, VI. 108—110.
6. C. Moser. Über Gebilde, welche durch Fixation einer sphärischen Kurve und Fortbewegung des Projektionscentrums entstehen; Inaugural-Dissertation, vorgelegt der phil. Fakultät Bern, 1887.

Weitere Litteraturangabe siehe: S. Günther, Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie, Seite 58.

Bern, 20. Juni 1893.

Mit Vergnügen benutze ich die hier sich bietende Gelegenheit, um dem Direktor des physikalischen Instituts, Herrn Prof. Dr. Forster, ebenso wie den Herren Prof. Dr. Huber, Prof. Dr. Graf, Prof. Dr. Sidler und Privatdocent Dr. Moser meinen herzlichsten Dank für das mir während meiner Studienzeit stets entgegengebrachte Wohlwollen auszusprechen.