Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1893)

Heft: 1305-1334

Artikel: Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals

Autor: Eggenberger, J.

Kapitel: VIII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319064

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bei der Bestimmung der Grenzen findet man*)

$$x^x\, e^{-x} \sqrt{2\pi x} < x\,! < x^x\, e^{-x+\frac{1}{12}} \sqrt{2\pi x} \qquad \text{und}$$

weil die Quantität $\frac{1}{12x}$ schon in der Gleichung 3) als Grenze aufgetreten, hegte ich die Vermuthung, dass sie sich ebenfalls durch die *obige Entwicklung als Grenze finden liesse.* Der Nachweis ist mir aber bis jetzt nicht gelungen.

VIII.

27. Dieser Abschnitt gibt einen *neuen vereinfachten Ausdruck für das Bernoullische Theorem.*

Es wurde im historischen Theil dieser Arbeit gezeigt, wie *Moivre* zuerst für den *Bernoullischen Summenausdruck*

$$W = \sum_{m=\mu p - l}^{m=\mu p + l} \frac{\mu\,!}{m!\; n!}\, p^m q^n,$$

worin $m + n = \mu$, $p + q = 1$ und $l = \gamma \sqrt{2pqm}$ ist, einen Integralausdruck gegeben hat, welchen alsdann *Laplace* wie in Note 1 im Anhang ersichtlich, mit vollkommeneren Methoden genauer gab durch

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Dieser Ausdruck ist seit Laplace unverändert geblieben, man findet ihn heute noch in den besten Handbüchern für Wahrscheinlichkeitsrechnung, so in denen von *Meyer* und *Czuber*, von *Bertrand* u. a. m.

Bei Operationen mit demselben erweist sich jedoch die *Restfunktion* $\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$ als sehr *unbequem.* Um so mehr muss es auffallen, dass seit Laplace noch niemand es versucht hat, dieselbe durch Vereinigung mit dem Integral ihrer isolirten Stellung zu entheben.

Dass dies möglich ist, soll im Folgenden gezeigt werden.

Es sei $y = \frac{\mu}{m!\; n!}\, p^m q^n$ das allgemeine Glied des Binoms $(p + q)^\mu$, worin p und q die bekannte Bedeutung haben. Alsdann wird, wie es schon Laplace gezeigt hat, mit Hülfe der Formel

*) Serret gibt diese Grenzenbestimmung auf hübsche Weise in seinen Cours d'algèbre supérieure (5. éd., Paris 1885) tome II, art. 393, p. 218.

von Stirling und unter Berücksichtigung des Satzes, dass diejenige Combination der Zahlen des Eintreffens und Nichteintreffens des Ereignisses ein Maximum von Wahrscheinlichkeit besitzt, die unter der Relation steht $p : q = m : n$, die Wahrscheinlichkeit, dass bei μ Versuchen das Ereigniss (dessen einfache und konstante Wahrscheinlichkeit gleich p, dessen entgegengesetzte gleich q ist) eine Anzahl Male eintreffe, die zwischen $\mu p \pm l$ liegt, ausgedrückt durch

$$W = \sum_{m=\mu p - l}^{m=\mu p + l} \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n = y_{\nu-l} + y_{\nu-l+1} + \ldots$$

$$+ y_{\nu-1} + y_\nu + y_{\nu+1} + \ldots\ldots y_{\nu+l-1} + y_{\nu+l},$$

worin also in allen Gliedern m durch μp und n durch μq ersetzt ist und y_ν das Maximalglied bedeutet.

Dann kann man setzen:

$$W = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} [y_{\nu-\lambda} + y_{\nu+\lambda}] - y_\nu, \text{ oder}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} \varphi(\lambda) - \frac{1}{2}\varphi(0), \text{ wenn}$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2\mu pq}}, \text{ also } \varphi(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \text{ ist.}$$

28. So viel mir bekannt ist, wurde der Uebergang von der zuletzt gegebenen Summe zum Integral seit Laplace immer mit Hülfe der Summationsformel von Maclaurin und Euler gemacht. Eine eigene Methode für diesen Uebergang, auf mechanischer Quadratur beruhend, gab mein verehrter Lehrer, Herr Privatdozent *Dr. Ch. Moser* in Bern, der sich bei versicherungstechnischen Arbeiten oft mit dieser Materie beschäftigte, in seiner Vorlesung über das Bernoullische Theorem (im Sommer-S. 1892) und zwar in folgender Weise:

$$\text{Sei } f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}} \text{ und}$$

$$W = \sum_{x=0,\,1,\,2,\,\ldots\,l} f(x) - \frac{1}{2} f(0)$$

Die Funktion f(x) liefert, weil μpq positiv ist, für $x = 0$ ein Maximum und nimmt mit wachsendem x stetig ab. Die rechte Seite

der Gleichung für W kann, da x nur die ganzzahligen Werthe 0, 1, 2, ... l betritt, geschrieben werden:

$$W = \frac{1}{2} f(0) + 1 \,.\, f(1) + 1 \,.\, f(2) + \ldots\ldots\ldots 1 \,.\, f(x).$$

Die einzelnen Summanden seien als Rechtecke dargestellt und zwar f (0) mit der Basis $\frac{1}{2}$ und die übrigen Werthe je mit der Basis 1. Werden diese Rechtecke über einer gemeinsamen Grundlinie aneinandergereiht und wird über dieser Grundlinie als Axe der x die Curve f(x) construirt, so schneidet diese die der Basis gegenüberliegenden Seiten der für f(1), f(2) . . . . f(l) erstellten Rechtecke je in der Mitte. Die Fläche, welche von der Grundlinie, den Ordinaten f(0) und $f\left(l + \frac{1}{2}\right)$ und der Curve f(x) eingeschlossen ist, hat zum Ausdrucke: $\int_0^{l+\frac{1}{2}} f(x)\, dx$. Substituirt man diese Fläche für die Summe der Rechtecke, so kommt bei einem einzelnen Rechteck ungefähr ein so grosses Dreieck hinzu, wie die Curve von dem Rechteck abschneidet, — absolut genau, sobald die Curve für ihren über der Basis eines Rechtecks gelegenen Theil als geradlinig betrachtet werden kann. Nur beim ersten Rechteck, $\frac{1}{2}$ f (0), hebt sich das kleine Fehlerdreieck nicht auf. Dieses wird jedoch, da f(x) für x = 0 ein Maximum aufweist, sehr klein. In Näherung muss daher gelten:

$$W = \sum_{x = 0,\, 1,\, 2, \ldots l} f(x) - \frac{1}{2} f(0) = \int_0^{l+\frac{1}{2}} f(x)\, dx.$$

Das Resultat, das diese geometrische Ueberlegung liefert, leuchtete mir ein und regte mich an, eine Untersuchung auf analytischem Wege vorzunehmen.

29. Sei also

$$1)\quad W = \sum_{x=0}^{x=l} \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi(0) \text{ oder auch}$$

$$2)\quad W = \sum_{x=0}^{x=l-1} \varphi(x) + \varphi(l) - \frac{1}{2} \varphi(0),$$

$$\text{worin } \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}} \text{ ist.}$$

Nach Euler's Summationsformel*):

$$\sum_{x=0}^{x=x} \varphi(x) = \int_0^{x+1} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\Big[\varphi(x)\Big]_0^{x+1} + \Big[\frac{B(_1)\varphi'(x)}{2!}\Big]_0^{x+1}$$
$$- \Big[\frac{B(_2)\varphi'''(x)}{4!}\Big]_0^{x+1} \pm \ldots\ldots$$

wird

$$3)\quad \sum_{x=0}^{x=l} \varphi(x) = \int_0^{l+1} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{1}{2}\varphi(0)$$

und

$$4)\quad \sum_{x=0}^{x=l-1} \varphi(x) = \int_0^{l} \varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(l) + \frac{1}{2}\varphi(0),$$

bei Vernachlässigung der mit $\varphi'(x)$, $\varphi'''(x)$ . . . . . behafteten Glieder, weil $\varphi'(x) = -\frac{4}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \cdot \frac{1}{2\mu pq} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}$, also von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ ist (wo μ sehr gross vorausgesetzt wird).

Die Werthe 3) und 4) in die Gleichungen 1) und 2) substituirt, ergibt:

$$5)\ W = \int_0^{l+1} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varphi(l+1) \text{ oder}$$

$$6)\ W = \int_0^{l} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\varphi(l).$$

Also liegt

W zwischen $\int_0^{l} \varphi(x)\,dx$ und $\int_0^{l+1} \varphi(x)\,dx$, und es sei daher

*) Dr. Bruno Borchardt benutzt in seiner «Einführung in die Wahrscheinlichkeitslehre» (Berlin 1889, Jul. Springer) diese Summationsformel unrichtig, indem er die Grenzen auf beiden Seiten der Gleichung gleich nimmt, während die obere Grenze rechts um eine Einheit höher genommen werden muss. Borchardt erhält auch ein unrichtiges Resultat (p. 31 und 32 seines Buches). Auch in Meyer und Czuber «Vorlesungen über Wahrscheinlichkeit» (Leipzig 1879, Teubner) finden sich Unrichtigkeiten (oder sind es bloss unkorrigirte Druckfehler?) im Gebrauche der Grenzen (p. 101 und 102).

$$W = \int_0^{1+\varepsilon} \varphi(x)\, dx,$$ wo ε eine kleine Grösse, zwischen 0 und 1 gelegen, ist, die bestimmt werden soll. Zu diesem Zwecke suche ich zu entwickeln

$$\int_1^{1+\varepsilon} \varphi(x)\, dx.$$

7) Man setze $\int \varphi(l) = f(l)$, dann wird

8) $$\int_1^{1+\varepsilon} \varphi(x)\, dx = f(l+\varepsilon) - f(l) \text{ oder nach Taylor}$$

$$= f(l) + \varepsilon f'(l) + \frac{\varepsilon^2 f''(l)}{2!} + \frac{\varepsilon^3 f'''(l)}{3!} + \ldots \text{ in inf.} - f(l)$$

$$= \varepsilon f'(l) + \frac{\varepsilon^2 f''(l)}{2!} + \frac{\varepsilon^3 f'''(l)}{3!} + \ldots \text{ in inf.}$$

Es ist aber nach 7):

$f'(l) = \varphi(l)$, $f''(l) = \varphi'(l)$, $f'''(l) = \varphi''(l)$, ... ,

somit folgt durch Substitution dieser Werthe in 8):

9) $$\int_1^{1+\varepsilon} \varphi(x) dx = \varepsilon\varphi(l) + \frac{\varepsilon^2\varphi'(l)}{2!} + \frac{\varepsilon^3\varphi''(l)}{3!} + \ldots \text{ in inf.}$$

Weil $\varepsilon < 1$ ist, so ist die Reihe q) convergent und man erhält unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ in erster Näherung:

$$\int_1^{1+\varepsilon} \varphi(x)\, dx = \varepsilon\, \varphi(l).$$

Es war aber nach 6):

$$\int_1^{1+\varepsilon} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2}\, \varphi(l) \quad \text{, also}$$

$$\varepsilon\, \varphi(l) = \frac{1}{2}\, \varphi(l) \quad \text{oder}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad .$$

Daher wird:

$$W = \int_0^1 \varphi(x)\, dx + \int_1^{1+\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx = \int_0^{1+\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx.$$

Analog folgt aus Gleichung 5):

$$\int_{l+1}^{l+1-\Theta} \varphi(x)\, dx = -\frac{1}{2}\, \varphi\,(l+1)$$, und durch Entwicklung des Integrals links, nach Taylor, wie oben, ergibt sich wieder:

$$-\Theta\, \varphi(l+1) = -\frac{1}{2}\, \varphi(l+1) \qquad \text{oder}$$

$$\Theta = \frac{1}{2}$$

und

$$W = \int_0^{l+1} \varphi(x)\, dx - \int_{l+1-\frac{1}{2}}^{l+1} \varphi(x)\, dx = \int_0^{l+\frac{1}{2}} \varphi(x)\, dx.$$

30. Es war aber $\varphi\,(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}$, also wird

$$W = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^{l+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\, dx.$$

Oder setzt man $\xi^2 = \varrho\, x^2$, wo $\varrho = \frac{1}{2\mu pq}$,

so wird

$$\xi = x\sqrt{\varrho}\,, \quad d\xi = dx\sqrt{\varrho} \quad \text{und} \quad dx = \frac{d\xi}{\sqrt{\varrho}}\,.$$

Für die Grenzen gilt dann:

$$x = 0 \qquad , \quad \xi = 0$$

$$x = l + \frac{1}{2} \qquad , \quad \xi = \left(l + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\varrho} = \gamma$$

und nach einfacher Substitution geht hervor:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Die dem *Laplace'schen Integralausdrucke anhaftende, bei Anwendungen desselben lästig werdende Restfunktion ist hier mit dem Integral vereinigt.* Dabei hat eine Veränderung der oberen Grenze stattgefunden: im Laplace'schen Integral war $\gamma = l\sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}$, hier ist $\gamma = \left(l + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}$.

Dieser neue Ausdruck erleichtert nicht nur die sehr zahlreichen theoretischen und praktischen Anwendungen des Bernoulli'schen Theorems, sondern ermöglicht auch genauere Resultate, und ich behalte mir vor, gelegentlich einige dieser Consequenzen zu ziehen.

Anhang.

Note 1. Laplace gibt folgende Darstellung des Bernoulli'schen Theorems*): Seien p und q resp. die einfachen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und E', dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass in $m + n = \mu$ Versuchen das Ereigniss E m mal, E, n mal eintreffe, gleich dem $(m + 1)^{ten}$ Terme in der Entwicklung von $(p + q)^{\mu}$, nämlich gleich

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots . \mu}{1 . 2 . 3 \ldots . m \; 1 . 2 . 3 \ldots . n} p^m q^n .$$

Bezeichnen wir den grössten Term in dieser Entwicklung mit M, so wird sein ihm vorangehender gleich $\frac{Mp}{q} \cdot \frac{n}{m+1}$, sein nachfolgender gleich $\frac{Mq}{p} \cdot \frac{m}{n+1}$ sein. Damit aber M der grösste Term ist, muss gelten

$$\frac{m}{n+1} < \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$$

und hieraus folgt, dass

$$(\mu+1)\, p - 1 < m < (\mu+1)\, p$$

oder

$$m = (\mu+1)\, p - \sigma, \text{ wo } \sigma < 1, \text{ ist.}$$

Nun wird

$$p = \frac{m+\sigma}{\mu+1}, \; q = 1-p = \frac{n+1-\sigma}{\mu+1}, \; \frac{p}{q} = \frac{m+\sigma}{n+1-\sigma},$$

und sind m und n sehr grosse Zahlen, so gilt die Relation

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n},$$

d. h. das *Eintreffen derjenigen Combination der Ereignisse E und E' hat ein Maximum von Wahrscheinlichkeit,* die *unter der Relation* $p : q = m : n$ *steht.*

---

*) Théorie analytique des probabilités (3. éd. Paris 1820) Liv. II, Chap. II, p. 280 e. l. s.