Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1893)

Heft: 1305-1334

Artikel: Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals

Autor: Eggenberger, J.

Kapitel: IV

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319064

Wallis gefunden. Er selbst habe die Sache *desshalb* nicht weiter verfolgt, weil ihm die Lösung nur ein *Mittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten* sei. «Adde quod cum non ideo susceptum fuisset ut «propter se solveretur, sed ut juvaret solutionem alterius cujusdam «problematis quod pulcherrimum judicaveram, mihi videbar in iis «quae feceram aliquo jure posse acquiescere.»*)

IV.

13. Es erscheint hier geboten, Moivre und seine Doctrine of chances für einen Augenblick zu verlassen, um in Stirlings mathematischem Werke: Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum**) nach der Bestimmung der Constanten $\frac{1}{2}$ Log 2π zu sehen.

Stirling findet dieselbe zuerst bei der Berechnung des Verhältnisses, welches der Coeffizient des mittleren Gliedes einer binomischen Entwicklung zur Summe aller Coeffizienten hat. Die Priorität der Lösung dieses Problems erkennt er aber ausdrücklich Moivre zu, wenn er am Schlusse der Vorrede zu seinem Buche sagt: «Problema de «invenienda Uncia media in permagna dignitate binomii solutam erat «a Moivraeo ante aliquot annos quam ego idem attingeram: Nec pro«babile est quod in hunc usque diem de eodem cogitassem, in sugges«sisset Spectatissimus Vir, D. Alex. Cuming***) se plurunum suspicari «an idem solvi posset per Methodum Differentialem Newtoni.»

Stirling gibt zwei verschiedene Methoden zur Lösung des Coeffizientenproblems, wovon die eine, die auf Interpolation mit Hülfe der Differenzenrechnung beruht†), hier nicht berücksichtigt werden soll, weil dort die Bestimmung der Constanten auf numerischer Berechnung††) beruht.

Die andere Methode†††) ist nach ihm folgende:

Sei gegeben die Reihe:

$$1,\ 2,\ \frac{8}{3},\ \frac{16}{5},\ \frac{128}{35},\ \frac{256}{63},\ \ldots\ldots$$

---

*) Miscellaneis analyticis Supplementum p. 3.

**) London 1730.

***) Alex. Cuming darf in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht unerwähnt bleiben. Aus Bemerkungen, die Moivre in Miscell. analyt. Cap. V macht, geht hervor, dass derselbe auch ihm manche Anregungen gegeben hat. Ueber das Leben Cumings habe ich nichts in Erfahrung gebracht.

†) Dargestellt im Propos. XXII, Ex. I p. 116 ff.

††) Vergl. Note 2 im Anhang.

†††) Method. diff. Propos. XXIII.

deren Glieder das gesuchte Verhältniss für resp. die 0., 1., 2., 3., ... Potenz reciprok darstellen, so handelt es sich um die Interpolation des allgemeinen Gliedes der Reihe:

$$1, \frac{2A}{1}, \frac{4B}{3}, \frac{6C}{5}, \frac{8D}{7} \ldots\ldots\ldots,$$

wenn mit A, B, C, D, ... allgemein unsere Reihe ausgedrückt wird.

Sei nun T irgend ein Glied dieser Reihe, so wird das folgende Glied, wenn wir einer Variablen n die Werthe 0, 2, 4, 6, ... geben, gleich sein

$$T_1 = \frac{n+2}{n+1}\, T, \text{ oder}$$

$$T_1^2 = \frac{n^2+4n+4}{n^2+2n+1}\, T^2 \text{ und}$$

$$2T_1^2 + (n+2)(T^2 - T_1^2) - \frac{T_1^2}{n+2} = 0 \;. \qquad \alpha)$$

Man setze nun

$$T^2 = an + \frac{bn}{n+2} + \frac{cn}{(n+2)(n+4)} + \frac{dn}{(n+2)(n+4)(n+6)} + \cdots, \beta)$$

worin a, b, c, d, ..., noch zu bestimmende Constante bedeuten; diese Reihe in andere Form gebracht, wird zu

$$T^2 = an + b + \frac{c-2b}{n+2} + \frac{d-4c}{(n+2)(n+4)} + \cdots\cdots\cdots$$

Analog:

$$T_1^2 = a(n+2) + b + \frac{c-2b}{(n+4)} + \frac{d-4c}{(n+4)(n+6)} + \cdots,$$

hieraus

$$(n+2)\left\{T^2 - T_1^1\right\} = -2a(n+2) + \frac{2c-4b}{n+4} + \frac{4d-16c}{(n+4)(n+6)} + \cdots.$$

Substituirt man neben diesem Werthe noch diejenigen für $2T_1^2$ und für $-\frac{T_1^2}{n+2}$ in die Gleichung α, so kommt:

$$2b - a + \frac{4c-9b}{n+4} + \frac{6d-25c}{(n+4)(n+6)} + \frac{8e-49d}{(n+4)(n+6)(n+8)} + \cdots = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich für die Coeffizienten die folgenden Bedingungsgleichungen:

$2b - a = 0$	also: $b = \frac{a}{2}$
$4c - 9b = 0$	$c = \frac{9b}{4} = \frac{9a}{2.4}$
$6d - 25c = 0$	$d = \frac{25c}{6} = \frac{9.25a}{2.4.6}$
$8e - 49d = 0$	$e = \frac{49d}{8} = \frac{9.25.49a}{2.4.6.8}.$

Werden diese Werthe in die Gleichung β substituirt, so ergibt sich:

$$T^2 = a(n + \frac{n}{2(n+2)} + \frac{9n}{2.4(n+2)(n+4)} + \frac{9.25n}{2.4.6(n+2)(n+4)(n+6)} + \ldots)$$

$$= an(1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{9}{2.4(n+2)(n+4)} + \frac{9.25}{2.4.6(n+2)(n+4)(n+6)} + \ldots)$$

Den Coeffizienten a bestimmt nun Stirling durch folgende Ueberlegung: Je grösser n, desto wahrer wird die Gleichung

$$T^2 = an.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung für n der Reihe nach seine Werthe 0, 2, 4, ... und die entsprechenden für T^2, so erhält man eine Reihe von Näherungsgleichungen für a, nämlich:

$$a = 2, = 2 \cdot \frac{8}{9}, = 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25}, = 2 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49}, = \cdots$$

Daher ist der Werth von a gleich dem ins Unendliche fortgesetzten Produkt

$$2 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{120}{121} \cdot \ldots,$$

dessen Werth aber nach der Formel von Wallis gleich $\frac{\pi}{2}$ ist.

Es resultirt somit für T folgender Werth:

$$T = \sqrt{\frac{\pi n}{2}\left[1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{9}{2.4(n+2)(n+4)} + \frac{9.25}{2.4.6(n+2)(n+4)(n+6)} + \cdots\right]}.$$

Oder es ist nach Annahme, wenn man mit M den Coeffizienten des mittleren Termes der binomischen Entwicklung bezeichnet, mit S die Summe aller Coeffizienten:

$$M:S=1:\sqrt{\frac{n\pi}{2}\left[1+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{9}{2.4(n+2)(n+4)}+\ldots\ldots\right]}.$$

Stirling gelangt daher zu folgendem Satze:

Der Exponent des Binoms, wenn gerade, sei n, wenn ungerade n — 1; dann wird sich der mittlere Coeffizient zur Summe aller Coeffizienten verhalten, wie die Einheit zur mittleren Proportionale zwischen dem halben Kreisumfang und der einen oder anderen von folgenden Reihen:

$$n+\frac{A}{2(n+2)}+\frac{9B}{4(n+4)}+\frac{25C}{6(n+6)}+\ldots\ldots,$$

$$n+1-\frac{A}{2(n-3)}-\frac{9B}{4(n-5)}-\frac{25C}{6(n-7)}-\ldots\ldots,$$

wenn man allgemein die Reihen nach Newton'scher Bezeichnung mit

$A \pm B \pm C \pm D \pm \ldots\ldots\ldots$ darstellt.

Ueber den Gebrauch der Formel spricht sich Stirling dahin aus, es genüge, wenn n = sehr gross werde, zu setzen

$$T^2=\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \text{ oder}$$

$$T=\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Es ist also

$$M:S=1:\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \text{ (für lim n = sehr gross).}$$

Das Stirling'sche Resultat beim Coeffizientenproblem ist somit demjenigen Moivre's genau gleich; denn Moivre hat für das Verhältniss des mittleren Gliedes zur Summe aller im entwickelten Binom $(1+1)^n$, *für n = gerade, den nämlichen Ausdruck, jedoch ohne cyklometrische Darstellung der Constanten, gefunden.*

14. Wie Moivre, so musste auch Stirling durch das Coeffizientenproblem darauf kommen, einen numerisch leicht zu berechnenden Summenausdruck für Log $\Gamma(x)$ resp. für $\Gamma(x)$ zu suchen. Er behandelt dazu folgende Aufgabe*): *Es sei die Summe beliebig vieler Logarithmen zu finden, deren Numeri in arithmetischer Progression fortschreiten.*

*) Loc. cit. Propos. XXVIII. p. 135.

Es mögen $x + n$, $x + 3n$, $x + 5n$, $x + 7n$, ... $z - 3n$, $z - n$, beliebig viele Zahlen in arithmetischer Progression bezeichnen, die letzte sei $z - n$. Es seien ferner $\log z$ und $\log x$ die Tafellogarithmen der Zahlen z und x, und a sei gleich dem Modul, d. h. gleich dem reciproken Werth des Log. nat. von 10. Dann wird die Summe der Logarithmen der vorliegenden Reihe gleich sein der Differenz zwischen den beiden folgenden Reihen:

$$\frac{z\log z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^2} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} + \cdot\cdot$$
$$\mp \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

$$\frac{x\log x}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12x} + \frac{7an^3}{360x^2} - \frac{31an^5}{1260x^5} + \frac{127an^7}{1680z^7}$$
$$\mp \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Diese Reihen setzen sich so ins Unendliche fort:
Man setze

$$-\frac{1}{3.4} = A, \quad -\frac{1}{5.8} = A + 3B,$$
$$-\frac{1}{7.12} = A + 10B + 5C,$$
$$=\frac{1}{9.16} = A + 21B + 35C + 7D,$$

. . . .

Die Zahlen, die in den verschiedenen Werthen von A, B, C, D . . . . multiplizirt werden, sind die ersten, dritten, fünften, ... Coeffizienten der ungeraden Potenzen des Binoms. Dann wird der Coeffizient des dritten Terms $-\frac{1}{12} = A$, der des vierten $B = \frac{7}{360}$, der des fünften $C = -\frac{31}{1260}$ und so fort.

B e w e i s. Es werde die Variable z um ihre Abnahme (constante Differenz) $2n$ vermindert, d. h. man substituire $z - 2n$ für z in die Reihe

$$\frac{z\log z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} \pm \ldots \text{ in inf.}$$

Man subtrahire die neue Reihe von der vorigen, so wird sich, nachdem man durch Division die Terme auf die nämliche Form gebracht, als Rest ergeben:

$$\log z - \frac{an}{z} - \frac{an^2}{2z^2} - \frac{an^3}{3z^3} \mp \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

d. h. der Logarithmus der Zahl $z - n$.

So ist allgemein die Abnahme zweier successiven Werthe der Reihe gleich dem Logarithmus von $z - n$, der allgemein jeden beliebigen der Logarithmen bedeuten kann, welche zu summiren sind. Die Reihe wird also die Summe der vorgegebenen Logarithmen sein, wenn von ihr die andere Reihe subtrahirt wird. Denn die Summen der Reihen sind wie diejenigen der Flächen zuweilen zu corrigiren, damit sie richtig werden (Constante).

In Exemp. II, al. 2 geht Stirling alsdann so weiter: *Will man die Summen von beliebig vielen Logarithmen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ... $z - n$ haben,* so ist $n = \frac{1}{2}$, und es werden 3 oder 4 Glieder der Reihe

$$z\log z - az - \frac{a}{24z} + \frac{7a}{2880z^3} \mp \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

zu denen man den halben Logarithmus des Kreisumfanges, dessen Radius die Einheit ist, d. h. 0.39908 zu addiren hat, die gewünschte Summe geben und zwar mit um so weniger Mühe, je mehr Logarithmen zu summiren sind (Convergenz).

15. Dies die Stirling'sche Darstellung seiner nach ihm benannten Reihe. Stirling findet also zunächst*), zwar ohne ein Verfahren anzugeben, für

$$\text{Log}(x + n) + \text{Log}(x + 3n) + \text{Log}(x + 5n) + \ldots\ldots\ldots + \text{Log}(z - 3n) + \text{Log}(z - n) =$$

die Differenz der beiden Reihen von natürlichen Logarithmen:

$$\frac{z\text{Log}z}{2n} - \frac{z}{2n} - \frac{n}{12z} + \frac{7n^3}{360z^3} - \frac{31n^5}{1260z^7} \pm \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

$$\frac{x\text{Log}x}{2n} - \frac{x}{2n} - \frac{n}{12x} + \frac{7n^3}{360x^3} - \frac{31n^5}{1260x^7} \pm \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Um die Richtigkeit seines Satzes zu beweisen, erhärtet dann Stirling denselben für den Spezialfall $x = z - 2n$. Handelt es sich aber um den Logarithmus des Produktes 1. 2. 3 . . . ., so wird, da $n = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{2}$ ist,

*) Jedenfalls durch Entwicklung der einzelnen Logarithmen.

$$\text{Log}\left(1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots(z-\tfrac{1}{2})\right) = z\,\text{Log}\,z - z - \frac{1}{24z} + \frac{7}{2880\,z^3} \mp \ldots\ldots$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{7}{360} - \frac{31}{1260} \pm \ldots\ldots \text{ in inf.}\right\}.$$

Stirling gibt als Resultat nur die erste dieser Reihen mit der Bemerkung, man habe dazu noch $\frac{1}{2}$ Log2π zu addiren.

Wie oft in seinem Buche, gibt Stirling auch hier nur das Resultat, ohne zugleich den Weg zu weisen, auf welchem er dazu gelangt ist, was das Studium desselben sehr erschwert. *Es entzieht sich daher einer sicheren Beurtheilung, wie Stirling die Constante bestimmt hat.* Eine *numerische* Berechnung scheint mir ausgeschlossen zu sein, gerechtfertigter aber erscheint die Vermuthung, *dass er auch hier wie beim Coeffizientenproblem die Formel von Wallis angewendet hat* und *am meisten Wahrscheinlichkeit besitzt wohl die Annahme, derselbe habe in diesem Falle die Constante durch Vergleichung mit dem Resultate des Coeffizientenproblems gefunden.**)

16. Stirling gab**) schon, was hier Erwähnung verdient, das Euler'sche Integral 1. Art., nämlich:

$$B\,(r+z,\ p-r) = \int_0^1 x^{r+z-1}\,(1-x)^{p-r-1}\,dx$$

und benutzte dasselbe zur Interpolation z. B. der Reihe

$$a,\ \frac{ra}{p},\ \frac{(r+1)b}{p+1},\ \frac{(r+2)c}{p+2},\ \ldots\ldots,$$

indem er für das allgemeine Glied T der Reihe fand:

---

*) Wenn n = gerade, so gilt nach Stirling und Moivre in der Entwicklung von $(1+1)^n$

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!\,2^n} = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}}$$

woraus man, wenn für die Fakultäten der Stirling'sche Näherungswerth substituirt wird, die Constante bestimmen kann.

**) L. c. Propos. XXIV, p. 126.

$$\frac{T}{a} = \frac{\int_0^1 x^{r+z-1} (1-x)^{p-r-1} dx}{\int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{p-r-1} dx},$$

$$\text{also } T = \frac{a\Gamma(r+z)\,\Gamma(p)}{\Gamma(r)\,\Gamma(p+z)}.$$

Ebenso fand er als intermediäres Glied T zwischen dem ersten und zweiten der folgenden Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.4}, \frac{1.3.5}{2.4.6}, \ldots\ldots\ldots,$$

$$T = \frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx} = \frac{2}{\pi}$$

und *gewiss ist nicht daran zu zweifeln, Stirling war nahe daran, die Näherungswerthe für den Binomialcoeffizienten und die Fakultät auf analogem Wege zu suchen, wie es Laplace später gethan*), nämlich mit Hülfe der sogenannten Euler'schen Integrale.*

17. Es scheint, dass Stirling über sein Verfahren, die Constante zu bestimmen, auch in keiner andern Publikation**) Auskunft gegeben hat, denn Moivre schrieb noch 1738:

«But altho it be not necessary to know what relation the number «B may have to the Circumference of the Circle, provided its value «be attained, either by pursuing the Logarithmic Series before men«tioned, or any other way; yet J own with pleasure that this discovery, «besides that it has saved trouble, has spread a singular Elegancy on «the Solution.»

Bezeichnet man in der Stirling'schen Reihe $z - \frac{1}{2}$ mit m und führt die Bernoullischen Zahlen ein, so ergibt sich folgende Summationsformel:

---

*) Vergl. Note 4 im Anhang.

**) Doctrine of chances, p. 236.

$$\text{Log}\,(1.2.3\ldots\ldots m) = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,2\pi + (m+\frac{1}{2})\,\text{Log}\,(m+\frac{1}{2})$$
$$-\ (m+\frac{1}{2}) - \frac{(2-1)\,B(1)}{1.2.2(m+\frac{1}{2})} + \frac{(2^3-1)\,B(2)}{3.4.2^3(m+\frac{1}{2})^3} \mp \ldots\ldots,$$

welche eine von der Moivre'schen etwas abweichende Form hat. Aus beiden Formeln aber ergibt sich für lim m $= \infty$, wenn man zur Exponentialfunktion übergeht:

$$\lim_{m=\infty} m! = m^m\, e^{-m}\, \sqrt{2\pi m}\ ,$$

welche Formel auch die *Stirling'sche* genannt wird.

Es ist unstreitig das Verdienst des mit mathematischem Scharfsinn ausserordentlich begabten Stirling), die Constante $\sqrt{2\pi}$ bestimmt zu haben. Berücksichtigt man aber, dass Moivre zuerst das Coeffizientenproblem gestellt und gelöst hat und dass derselbe auch die andere Aufgabe, die sich aus jenem ergeben musste, die Summe der Logarithmen der natürlichen Zahlen zu suchen, unabhängig und fast gleichzeitig mit Stirling ebenfalls gelöst hat, vergisst man nicht, dass Moivre diese Formel zuerst in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, für welche ihr grosse Bedeutung zukommt, praktisch verwendet hat, so muss man sagen, dass dessen Name mit der Formel in ebenso verdienstvollem Sinne verbunden ist, wie derjenige Stirlings.*

Die Ursprungsgeschichte der Stirling'schen Formel aber ist ganz besonders geeignet, zu zeigen, wie befruchtend eine angewandte mathematische Disziplin auf die reine Mathematik wirken kann.

V.

18. Nachdem hiemit die Untersuchungen Moivres und Stirlings über das *Coeffizientenproblem* und über *die Summe von Log $\Gamma(x)$* sowohl unter sich wie auch in ihrem gegenseitigen Verhältniss gewürdigt sind, kehren wir wieder zu Moivres Abhandlung über das *Bernoullische Theorem* in dessen «Doctrine of chances» zurück.

---

*) James Stirling, geb. 1696 in St. Ninians, Grafschaft Stirling, Schottland, gest. 5. Dez. 1770 in Leadhiks, studirte in Oxford Mathematik, bewarb sich als Agent einer schottischen Bergbaugesellschaft erfolglos um eine Professur. Er wurde schon 1729 Mitglied der Royal Society. Sein Hauptwerk, *Methodus differentialis*, erlebte 3 Auflagen (1730, 1753, 1764), war aber schon 1718 unvollständig in den Philos. Transact. erschienen.