

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1893)

Heft: 1305-1334

Artikel: Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals

Autor: Eggenberger, J.

Kapitel: III

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319064>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III.

8. Abraham de Moivre*) war der erste, der dem Theorem Bernoulli's gebührende Aufmerksamkeit schenkte und dasselbe in geschickter Weise zu fördern verstand.

Indem aber Moivre dasselbe nicht wie Bernoulli vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeit a posteriori aus anfasste, sondern als Untersuchungsobjekt für sich, trachtete er darnach, für den Fall, in welchem die einfache Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E als bekannt und constant gleich p, diejenige des entgegengesetzten E' gleich q vorausgesetzt wird, einen bestimmten Werth zu suchen für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer grossen Anzahl von μ Versuchen das Ereigniss E in einer solchen Anzahl m von Malen eintreffe, die zwischen den Grenzen $\mu p - 1$ liegt, d. h. einen bestimmten Werth zu geben für den Bernoulli'schen Summenausdruck

$$\begin{aligned}m &= \mu p + 1 \\ \sum \frac{\mu!}{m! n!} p^m q^n \\ m &= \mu p - 1\end{aligned}$$

Zwei Schwierigkeiten mussten ihm dabei entgegentreten, die Auffindung eines allgemeinen, numerisch leicht zu berechnenden Ausdrucks für den Binomialcoefficienten resp. für die Facultät und die Summation der Terme einer binomischen Entwicklung innerhalb gewisser Grenzen. Unsere weitere historische Untersuchung wird daher in der Folge eine Periode der Geschichte der Summationsformeln in sich einbeziehen müssen.

Moivre hat die Hauptresultate seiner Untersuchungen über das Bernoulli'sche Theorem niedergelegt in einem grössern Abschnitt seiner *Doctrine of chances***), betitelt: *A Method of approximating the Sum*

*) Abraham de Moivre (geb. 26. V. 1667 in Vitry, Champagne, gest. 27. XI. 1754 in London), protestantischer Refugié, durch den Widerruf des Edikts von Nantes durch Louis XIV. 1785 genöthigt, in London ein Asyl zu suchen, erwarb sich dort lange Zeit durch Privatstunden kümmerlich sein Brot. Später genoss er die Protektion Newtons und wurde 1697 Mitglied der Royal Society. Neben seinen Hauptwerken, die in der Arbeit citirt sind, schrieb er: *A new method for valuing of annuities upon lives*. Der nach ihm benannte Lehrsatz findet sich auf der ersten Seite seiner *Miscell. anal.* Der grosse Newton soll in den letzten Jahren seines Lebens zu denjenigen, welche ihm mathematische Fragen vorlegten, gesagt haben: «Go to Mr. Moivre, he knows these things better than I do.» Ein ehrenderes Zeugniss konnte Moivre wohl nicht gegeben werden.

**) P. 235 ff. Uns lag die 2. Auflage (London 1738) vor; zum ersten Male erschien das bedeutende Werk im Jahre 1718 unter dem Titel: *De mensura sortis*.

of the Terms of the Binomial $(a + b)^n$ expanded into a series from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to Experiments*). Die analytischen Erläuterungen zu den Resultaten dieser Untersuchung gibt Moivre zerstreut in seinem andern Buche *Miscellanea analytica de serieb. et quadrat.*, und es mag nicht ganz ohne Werth sein, hier eine zusammenhängende Darstellung derselben zu geben.

9. In die oben erwähnte Abhandlung einleitend, erwähnt Moivre die Schwierigkeit der Summation von Gliedern einer binomischen Entwicklung und er hat für seine Zeit vollkommen Recht. Selbst die grossen Mathematiker Jakob und Nikolaus Bernoulli hätten eigentlich nicht eine Summe von solchen Gliedern gegeben, sondern nur weite Grenzen gezeigt, in welchen sich eine gewisse Summe derselben bewegen könne. Moivre sagt dann weiter: Es sind mehr als 12 Jahre verflossen**) seit ich gefunden habe, dass wenn man das Binom $(1 + 1)^n$ entwickelt, der mittlere Term zur Summe aller Terme — zu 2^n — ein Verhältniss hat, das gleich ist

$$\frac{2 A (n - 1)^n}{n^n \sqrt{n-1}}, \text{ worin}$$

$$\text{Log } A = \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \pm \dots \dots$$

Für $n = \infty$, folgt

$$\text{Log } \frac{(n - 1)^n}{n^n} = \text{Log } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = -1 \text{ und}$$

setzt man

*) Die Abhandlung findet sich in lateinischer Uebersetzung auch als Anhang in der *Miscell. analyt.* Sie war schon vor der *Doctrine of chances* im Druck erschienen, jedoch nicht veröffentlicht worden. Es geht dies aus folgender interessanten Bemerkung hervor, die Moivre im Zusatz von Problem 87, wo er über die Schwierigkeiten des Problems sich ausspricht, macht: «I take the liberty to say, that this is the hardest Problem, that can be proposed on the subject of chance, for which reason I have reserved it for the last, but I hope to be forgiven if my solution is not fitted to the capacity of all Readers; however I shall derive from it some Conclusions that may be of use to everybody: in order thereto here translate a Paper of mine, which was printed Nov. 12. 1733, and communicated to some Friends, but never yet made public, reserving to myself the right of enlarging my own Thoughts, as occasion shall require.»

**) Es war also ums Jahr 1720.

$$\log B = -1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \pm \dots$$

so wird das obige Verhältniss für $n = \infty$ gleich $\frac{2B}{\sqrt{n}}$, oder wenn man die Gleichung von $\log B$ mit -1 multiplizirt, wird es gleich $\frac{2}{B\sqrt{n}}$.

Ueber den Werth von B äussert sich Moivre auf folgende Weise:
 « When I first began that inquiry, I contented myself to determine at large the Value of B , which was done by the addition of some Terms of the above-written Series; but as I perceiv'd that it converged but slowly*), and seeing at the same time that what I had done answered my purpose tolerably well, I desisted from proceeding farther, till my worthy and learned Friend Mr. James Stirling, who had applied himself after me to that inquiry, found that the Quantity B did denote the square-root of the Circumference of a Circle whose Radius is Unity, so that if that Circumference be called c the Ratio of the middle Term to the sum of all the Terms will be expressed by $\frac{2}{\sqrt{nc}}$. »

10. Ueber diesen eleganten Ausdruck für sein gesuchtes Verhältniss war Moivre hocherfreut. Wie er aber zum Ausdruck

$$\frac{2A(n-1)^n}{n^n \sqrt{n-1}}$$

gekommen ist, darüber finden wir Auskunft in *Miscellanea analytica de serieb. et quadrat.* Lib. VI. Cap. II.: De regressu et Serie data ad Summam. Hier führt Moivre aus: Der Coefficient c des mittleren Gliedes im Binom $(1+1)^n$ ist, wenn man $\frac{n}{2} = m$ setzt

$$c = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\dots\dots\dots 2m}{(m-1)(m-2)(m-3)\dots\dots\dots 2 \cdot 1 \cdot m},$$

und es wird

*) Moivre war in dieser Convergenzfrage im Irrthum. Denn die Reihe $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} \pm \dots \dots \dots$ ist gleich der divergenten Reihe $1 - \frac{B(1)}{1 \cdot 2} + \frac{B(2)}{3 \cdot 4} - \frac{B(3)}{5 \cdot 6} \pm \dots \dots \dots$, wenn $B(1), B(2), \dots \dots \dots$ die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten.

$$\begin{aligned}
 \log c &= 2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{5m^5} + \frac{1}{7m^7} + \dots \text{in inf.} \right) \\
 &+ 2 \left(\frac{2}{m} + \frac{8}{3m^3} + \frac{32}{5m^5} + \frac{128}{7m^7} + \dots \text{in inf.} \right) \\
 &+ 2 \left(\frac{3}{m} + \frac{27}{3m^3} + \frac{243}{5m^5} + \frac{2187}{7m^7} + \dots \text{in inf.} \right) \\
 &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\vdots \\
 &+ 2 \left(\frac{m-1}{m} + \frac{(m-1)^3}{3m^3} + \frac{(m-1)^5}{5m^5} + \frac{(m-1)^7}{7m^7} + \dots \text{in inf.} \right)^*) \\
 &+ \log 2.
 \end{aligned}$$

Nimmt man aus diesen $m - 1$ Logarithmenreihen die Colonnen zusammen, so wird

$$\begin{aligned}
 \log c &= \frac{2}{m} \left(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + m - 1 \right) \\
 &+ \frac{2}{3m^3} \left(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (m-1)^3 \right) \\
 &+ \frac{2}{5m^5} \left(1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + (m-1)^5 \right) \\
 &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\vdots \\
 &\text{in inf.} \quad + \log 2.
 \end{aligned}$$

Bezeichne ich nun die Reihen nach einander mit I, II, III, ... und setze $m - 1 = s$, so wird nach den Tafeln Jakob Bernoulli's:

$$\begin{aligned}
 \text{I} &= \frac{s^2 + s}{m} \\
 \text{II} &= \frac{\frac{s^4}{2} + s^3 + \frac{s^2}{2}}{3m^3} \\
 \text{III} &= \frac{\frac{s^6}{3} + s^5 + \frac{5s^4}{6} + \frac{s^2}{6}}{5m^5} \\
 \text{IV} &= \frac{\frac{s^8}{4} + s^7 + \frac{7s^6}{6} - \frac{7s^4}{12} + \frac{s^2}{6}}{7m^7} \\
 \text{V} &= \frac{\frac{s^{10}}{5} + s^9 + \frac{3s^8}{2} - \frac{7s^6}{2} + s^4 - \frac{3s^2}{10}}{9m^9} \\
 &\text{in inf.}
 \end{aligned}$$

*) Die Convergenz der letzten Reihen ist allerdings sehr gering.

Die Colonnen dieser Summen wieder in Reihen zusammengefasst ergibt als erste, wenn $\frac{s}{m} = x$ gesetzt wird:

$$= s \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{4 \cdot 7} + \dots \text{in inf.} \right)$$

$$= s \left(\frac{2x}{1 \cdot 2} + \frac{2x^3}{3 \cdot 4} + \frac{2x^5}{5 \cdot 6} + \frac{2x^7}{7 \cdot 8} + \dots \text{in inf.} \right).$$

Entwickle ich $\log \frac{1+x}{1-x} = v$ in die logarithmische Reihe und multiplizire beiderseits mit x^*), so kommt

$$\frac{2x \dot{x}}{1} + \frac{2x^3 \dot{x}}{3} + \frac{2x^5 \dot{x}}{5} + \dots \text{in inf.} = vx,$$

und nimmt man auf beiden Seiten die Fluenten (d. h. integriert man), so hat man

$$\frac{2x^2}{1 \cdot 2} + \frac{2x^4}{3 \cdot 4} + \frac{2x^6}{5 \cdot 6} + \dots \text{in inf.}$$

$$= x \log \frac{1+x}{1-x} - \log \frac{1}{1-x^2}.$$

Auf beiden Seiten mit $\frac{s}{x}$ multiplizirt, erhält, weil $\frac{s}{m} = x$, die Gleichung die Form

$$\frac{s^2}{m} + \frac{s^4}{2 \cdot 3 m^3} + \frac{s^6}{3 \cdot 5 m^5} + \dots \text{in inf.}$$

$$= mx \log \frac{1+x}{1-x} - m \log \frac{1}{1-x^2},$$

oder weil $s = m - 1$, und $x = \frac{s}{m} = \frac{m-1}{m}$, so erhält man leicht für die Summe der

1. Colonne $= (2m-1) \log (2m-1) - 2m \log m$.

Die 2. Colonne besteht aus folgender Reihe

$$\frac{s}{m} + \frac{s^3}{3m^3} + \frac{s^5}{5m^5} + \dots \text{in inf.} = \frac{1}{2} \log \frac{m+s}{m-s}$$

$$= \frac{1}{2} \log (2m-1).$$

Die Summe beider Colonnen wird daher gleich

$$(2m - \frac{1}{2}) \log (2m-1) - 2m \log m.$$

*) Moivre bezeichnetet, wie es bei den englischen Mathematikern im vorigen Jahrhundert nach dem Vorgange Newtons üblich war, das Differential dx mit x .

Nimmt man dazu noch den beiseite gesetzten Log 2, so wird das Summenaggregat für Log c in erster Näherung

$$(2m - \frac{1}{2}) \log(2m - 1) - 2m \log m + \log 2.$$

Subtrahirt man hievon den $\log 2^{2m} = 2m \log 2$, so bleibt

$$(2m - \frac{1}{2}) \log(2m - 1) - 2m \log 2m + \log 2,$$

und dieser Ausdruck wird, weil $2m = n$, wenn man zugleich zur Exponentialfunktion übergeht, zu

$$\frac{2(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$$

und dies ist der angenäherte Wert des Verhältnisses des mittleren Coeffizienten des mittleren Gliedes in der Entwicklung von $(1+1)^n$ zur Summe aller Glieder.

Im gegebenen Ausdruck sind aber nur die beiden ersten Colonnen des logarithmischen Summenaggregates für Log c berücksichtigt, während es deren unendlich viele gibt. Die 3. Colonne konstituiert die geometrische Progression:

$$\frac{s^2}{6m^3} + \frac{s^4}{6m^5} + \frac{s^6}{6m^7} + \dots \text{ in inf.} = \frac{1}{6m} \cdot \frac{(m-1)^2}{2m-1}.$$

Die 4. Colonne gibt die recurrente Reihe:

$$\frac{s^2}{180m^5} \left\{ 6 + \frac{15s^2}{m^2} + \frac{28s^4}{m^4} + \frac{45s^6}{m^6} + \frac{66s^8}{m^8} + \dots \text{ in inf.} \right\}.$$

deren Beziehungsscala 3, -3, +1, ist und deren Summe gefunden wird, als

$$- \frac{(4m^4 + 2m^3 + 3m^2 - 4m + 1)(m-1)^2}{180m^3(2m-1)^3}$$

Indem ich bemerkte — fährt Moivre fort — dass diese Reihen obwohl durchaus summirbar, doch sehr verwickelt werden, brachte ich sie auf den Fall des Unendlichen. Wird $m = \infty$, so ist der Werth der 3. Colonne gleich $\frac{1}{12}$, von der 4. gleich $-\frac{1}{360}$, wie man aus obigen Formeln leicht finden kann. Für die 5. und 6. Colonne habe ich die Werthe $+\frac{1}{1260}$, resp. $-\frac{1}{1680}$ gefunden.

Wird der Numerus der Logarithmenreihe Moivre's

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \pm \dots \text{ in inf.}$$

mit A bezeichnet, so wird das Verhältniss des mittleren Gliedes im entwickelten Binom $(1 + 1)^n$ — wenn n = sehr gross vorausgesetzt wird — zur Summe aller Glieder ausgedrückt durch $\frac{2 A (n - 1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^n}$, wie ihn Moivre in der Doctrine of chances gegeben hat.

11. Als Resultat eines Versuches, die Constante $2A$ durch Addition der 4 ersten Terme seiner logarithmischen Reihe zu bestimmen, fand Moivre die Zahl 2,168. Dieser Versuch darf hier aber um so eher übergegangen werden, weil Moivre durch Bemerkungen*) von Seiten Stirlings selber zur Einsicht von der Unzulänglichkeit seiner Methode gelangte und in dem *Miscellaneis Analyticis Supplementum* die Untersuchung neu begann. Er bemerkt dort einleitend :

«Attamen post receptam Stirlingii Epistolam, cum mihi aliquid
vacui temporis suppeteret, constitueram totum illud denuo excutere,
atque initium sumere ab isto Problemate de inveniendis Summis Lo-
garithmorum ab unitate incipientium; ecce autem gradus quibus ad
meam solutionem adductus sum, quam ideo trado quod modus solutionis
quo utor sit longe diversus ab eo quem Stirlingius adhibuit, quo fiet
ut suspicio a me aberit me voluisse actum agere».

Moivre sucht also hier direct wie Stirling — auf den wir noch zurückkommen werden — die Summe der Logarithmen der natürlichen Zahlen und nicht mehr wie früher das Verhältniss des Coeffzienten vom mittleren Gliede zur Summe aller Glieder. Er geht aus vom Product:

$$\frac{m}{m-1} \cdot \frac{m}{m-2} \cdot \frac{m}{m-3} \cdots \cdots \frac{m}{m-m+2} \cdot \frac{m}{m-m+1},$$

und entwickelt die Logarithmen der einzelnen Factoren in folgender Darstellung:

$$\log \frac{m}{m-1} = -\frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \dots \text{ in inf.}$$

$$\text{Log } \frac{m}{m-2} = -\frac{2}{m} + \frac{4}{2m^2} + \frac{8}{3m^3} + \dots \text{ in inf.}$$

$$\text{Log } \frac{m}{m-3} = \frac{3}{m} + \frac{9}{2m^2} + \frac{27}{3m^3} + \dots \dots \dots \text{ in inf.}$$

$$\text{Log } \frac{m}{m-m+1} = \frac{m-1}{m} + \frac{(m-1)^2}{2 m^2} + \frac{(m-1)^3}{3 m^3} \dots \text{ in inf.}$$

*) In einem Briefe an Moivre vom 17. Juni 1729. Vergl. Misc. analyt. Lib. VII.

Analog wie beim Coeffizientenproblem stellt nun Moivre die Colonnen als Zeilen zusammen, deren er unendlich viele erhält. Die Zähler jeder dieser Zeilen stellen eine Reihe dar von der Form:

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + (m-1)^n.$$

Moivre summirt diese Potenzreihen, dividirt jede Summe durch den zugehörigen Nenner und erhält so, indem er $m-1=1$ setzt, folgende neue Reihen als Summen der obigen Colonnen:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} l^2}{m} + \frac{\frac{1}{2} l}{m} \\ & \frac{\frac{1}{3} l^3}{2 m^2} + \frac{\frac{1}{2} l^2}{2 m^2} + \frac{\frac{1}{6} l}{2 m^2} \\ & \frac{\frac{1}{4} l^4}{3 m^3} + \frac{\frac{1}{2} l^3}{3 m^3} + \frac{\frac{1}{4} l^2}{3 m^3} \\ & \frac{\frac{1}{5} l^5}{4 m^4} + \frac{\frac{1}{2} l^4}{4 m^4} + \frac{\frac{1}{3} l^3}{4 m^4} - \frac{\frac{1}{30} l}{4 m^4} \\ & \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \quad \text{in inf.} \end{aligned}$$

Moivre nimmt wieder die Colonnen als Reihen zusammen, dividirt die erste durch m , die dritte durch $\frac{A}{2 m}$, die vierte durch $\frac{B}{3 \cdot 4 m^3}$, die fünfte durch $\frac{C}{5 \cdot 6 m^5}$, ..., worin

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{4}{2} A = - \frac{1}{30}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{6}{2} A - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} B = \frac{1}{42}$$

$$D = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{8}{2} A - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} B - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} C = - \frac{1}{30}$$

..., also die Bernoullischen Zahlen bedeuten, und erhält die folgenden neuen Reihen:

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{2m} + \frac{l^3}{6m^3} + \frac{l^4}{12m^4} + \frac{l^5}{20m^5} + \dots & \text{ in inf.} \\ \frac{1}{2m} + \frac{l^2}{4m^2} + \frac{l^3}{6m^3} + \frac{l^4}{8m^4} + \dots & \text{ in inf.} \\ \frac{1}{m} + \frac{l^2}{m^2} + \frac{l^3}{m^3} + \frac{l^4}{m^4} + \dots & \text{ in inf.} \\ \frac{3l}{m} + \frac{6l^2}{m^2} + \frac{10l^3}{m^3} + \frac{15l^4}{m^4} + \dots & \text{ in inf.} \\ \frac{5l}{m} + \frac{15l^2}{m^2} + \frac{35l^3}{m^3} + \frac{70l^4}{m^4} + \dots & \text{ in inf.} \\ \frac{7l}{m} + \frac{28l^2}{m^2} + \frac{84l^3}{m^3} + \frac{210l^4}{m^4} + \dots & \text{ in inf.} \\ \dots & \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Die ersten beiden dieser Reihen sind logarithmische. Die Summe der ersten findet man auf folgende Weise:

Sei $v = \log \frac{1}{1-x}$, so ist, wenn man entwickelt,

$$x dx + \frac{1}{2} x^2 dx + \frac{1}{3} x^3 dx + \frac{1}{4} x^4 dx + \dots \text{ in inf.} = v dx.$$

Integrit man, so wird

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{20} x^5 + \dots \text{ in inf.} = v x + x - v \\ = x \operatorname{Log} \frac{1}{1-x} + x - \operatorname{Log} \frac{1}{1-x}.$$

Oder für $x = \frac{1}{m}$ gesetzt, so erhält man weil $l = m - 1$ als
Summe der ersten Reihe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(m-1)^2}{m^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(m-1)^3}{m^3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{(m-1)^4}{m^4} + \dots \text{in inf.} = \frac{m-1 - \log m}{m}.$$

Multiplizirt man noch mit m (wodurch man früher dividirt hat), so wird der gesuchte Werth der Reihe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(m-1)^2}{m} + \frac{1}{6} \cdot \frac{(m-1)^3}{m^2} + \dots \text{in inf.} = m - 1 - \log m.$$

Die zweite Reihe hat folgende Summe, wie unmittelbar folgt:

$$\frac{1}{2} \frac{m-1}{m} + \frac{1}{4} \frac{(m-1)^2}{m^2} + \frac{1}{6} \frac{(m-1)^3}{m^3} + \dots \text{in inf.} = \frac{1}{2} \log m.$$

Die beiden ersten Reihen konstituiren also die Summe

$$m - 1 - \frac{1}{2} \log m.$$

Die Summen der übrigen Reihen lassen sich rational und zwar auf folgende Weise ausdrücken (indem man zugleich wieder mit jenen Factoren, mit welchen die Reihen multiplizirt wurden, dividirt):

$$\text{Summe der 3. Reihe} = \frac{A}{2m}(m-1) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12m}.$$

$$\text{“ “ “ 4. “} = \frac{B}{3 \cdot 4 m^3}(m^3 - 1) = -\frac{1}{360} + \frac{1}{360m^3}.*).$$

Analog wird:

$$\text{“ “ “ 5. “} = \frac{1}{1260} - \frac{1}{1260m^5}.$$

$$\text{“ “ “ 6. “} = -\frac{1}{1680} + \frac{1}{1680m^7}.$$

.....

Es wird somit:

$$\begin{aligned} \log \left[\frac{m}{m-1} \cdot \frac{m}{m-2} \cdot \frac{m}{m-3} \cdots \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{1} \right] &= m - 1 - \frac{1}{2} \log m \\ &- \frac{1}{12m} + \frac{1}{360m^3} - \frac{1}{1260m^5} + \frac{1}{1680m^7} \mp \dots \text{in inf.} \\ &+ \frac{1}{12} - \frac{1}{360} + \frac{1}{1260} - \frac{1}{1680} \pm \dots \text{in inf.}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \log \left[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \right] &= \left(m - \frac{1}{2} \right) \log m \\ &- m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} - \frac{1}{1680m^7} \pm \dots \text{in inf.} \\ &+ 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \mp \dots \text{in inf.} \end{aligned}$$

Dies ist die *Moiré'sche Reihe für Log I(m)*. Fügt man derselben noch $\log m$ bei, bezeichnet man die Summe der Constanten mit C und führt in der Reihe

$$\frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} \mp \dots \text{in inf.}$$

*) Es ist $3x + 6x^2 + 15x^3 + 21x^4 + \dots \text{in inf.} = \frac{1}{1-x^3} - 1$
also

$$3 \frac{m-1}{m} + 6 \frac{(m-1)^2}{m^2} + 15 \frac{(m-1)^3}{m^3} + \dots \text{in inf.} = m^3 - 1.$$

die Bernoulli'schen Zahlen ein, so geht dieselbe über in die folgende Summationsformel:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \log m = c + \left(m + \frac{1}{2} \right) \log m - m + \frac{B(1)}{1 \cdot 2 \cdot m} - \frac{B(2)}{3 \cdot 4 m^3} + \frac{B(3)}{5 \cdot 6 m^5} - \frac{B(4)}{7 \cdot 8 m^7} \pm \dots,$$

welche sich auch leicht aus der allgemeinen Summationsformel, die Euler, wie später gezeigt werden soll, in den Inst. Calc. Diff. Part. II, C. V. aufgestellt hat, ergibt, nämlich aus der Formel:

$$\sum z = \int z dx + \frac{1}{2} z + \frac{B(1)}{2!} \frac{dz}{dx} - \frac{B(2)}{4!} \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{B(3)}{6!} \frac{d^5z}{dx^5} \pm \dots \dots \dots,$$

wenn man für $z = \log m$ setzt.

Es verdient daher hier hervorgehoben zu werden, dass Moivre zuerst, wenn auch empirisch, diese Summationsformel angewendet hat.

12. Im Weitern gibt Moivre in den Supplementa auch eine besser convergirende Reihe für die Constante, d. h. für die Reihe

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \mp \dots \dots \dots \text{ in inf.},$$

welche nach seiner Ansicht «satis commode convergit in principio «post terminos quinque primos convergentiam amittit, quam tamen «postea recuperat». Indem er $m - 1 = 9$ setzt, erhält er nach seiner Formel:

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1280} + \frac{1}{1680} \mp \dots \text{ in inf.} = \log 5040.72 \\ - 9\frac{1}{2} \log 10 + 10 - \frac{1}{12 \cdot 10} + \frac{1}{360 \cdot 10^3} - \frac{1}{1260 \cdot 10^5} \pm \dots \text{ in inf.}$$

Den cyklometrischen Charakter der Constanten hat aber Moivre nicht von sich aus erkannt; denn er war sehr erstaunt darüber, als ihm Stirling in einem Schreiben) vom 19. Juni 1729 mittheilte, dass der Werth der Constanten $\sqrt{2\pi}$ betrage. «Nemo est profecto «qui post visam hanc superioris problematis solutionem fateri recuset «eam esse usquequaque mirabilem: sed nihil in ea fortasse mirabilius «videbitur quam qua arte Quadratura Circuli potuerit in eam induci», sagt Moivre über Stirlings Lösung. Er spricht dort auch die Vermuthung aus, Stirling habe sein Resultat mit Hülfe der Formel von*

*) Veröffentlicht in Miscellanea analyt. Cap. VII.

Wallis gefunden. Er selbst habe die Sache *deshalb* nicht weiter verfolgt, weil ihm die Lösung nur ein *Mittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten* sei. «*Adde quod cum non ideo susceptum fuisset ut propter se solveretur, sed ut juvaret solutionem alterius cuiusdam problematis quod pulcherrimum judicaveram, mihi videbar in iis quae feceram aliquo jure posse acquiescere.*»*)

IV.

13. Es erscheint hier geboten, Moivre und seine *Doctrine of chances* für einen Augenblick zu verlassen, um in Stirlings mathematischem Werke: *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum***) nach der Bestimmung der Constanten $\frac{1}{2} \log 2\pi$ zu sehen.

Stirling findet dieselbe zuerst bei der Berechnung des Verhältnisses, welches der Coeffizient des mittleren Gliedes einer binomischen Entwicklung zur Summe aller Coeffizienten hat. Die Priorität der Lösung dieses Problems erkennt er aber ausdrücklich Moivre zu, wenn er am Schlusse der Vorrede zu seinem Buche sagt: «*Problema de invenienda Uncia media in permagna dignitate binomii solutam erat a Moivraeo ante aliquot annos quam ego idem attingeram: Nec probabile est quod in hunc usque diem de eodem cogitassem, in suggestisset Spectatissimus Vir, D. Alex. Cuming***) se plurunum suspicari an idem solvi posset per Methodum Differentialem Newtoni.*»

Stirling gibt zwei verschiedene Methoden zur Lösung des Coeffizientenproblems, wovon die eine, die auf Interpolation mit Hülfe der Differenzenrechnung beruht†), hier nicht berücksichtigt werden soll, weil dort die Bestimmung der Constanten auf numerischer Berechnung††) beruht.

Die andere Methode†††) ist nach ihm folgende:

Sei gegeben die Reihe:

$$1, 2, \frac{8}{3}, \frac{16}{5}, \frac{128}{35}, \frac{256}{63}, \dots$$

*) *Miscellaneis analyticis Supplementum p. 3.*

**) London 1730.

***) Alex. Cuming darf in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht unerwähnt bleiben. Aus Bemerkungen, die Moivre in *Miscell. analyt. Cap. V* macht, geht hervor, dass derselbe auch ihm manche Anregungen gegeben hat. Ueber das Leben Cumings habe ich nichts in Erfahrung gebracht.

†) Dargestellt im Propos. XXII, Ex. I p. 116 ff.

††) Vergl. Note 2 im Anhang.

†††) *Method. diff. Propos. XXIII.*