Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1893)

Heft: 1305-1334

Artikel: Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals

Autor: Eggenberger, J.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319064

«carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression «qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre «fut-il singulièrement frappé de ce résultat que Stirling avait déduit de «l'expression de la circonférence en produits infinis, expression à laquelle «Wallis était parvenu par une singulière analyse qui contient le germe «de la théorie si curieuse et si utile des intégrales définies.»

Den Laplace'schen Bemerkungen zur Geschichte des Bernoulli'schen Theorems lasse ich noch die Uebersicht folgen, die J. Todhunter*) über die nämliche Materie gibt: «With respect to the history of the «result obtained in art. 994 (Laplace'sche Darstellung des Bernoulli'«schen Theorems), we have to remark that James Bernoulli began «the investigation; then Stirling and De Moivre carried it on by the «aid of the theorem known by Stirling's name; and lastly, the theo«rem known by Euler's name gave the mode of expressing the finite «summation by means of an integral. But it will be seen that prac«tically we use only the first term of the series given in Euler's «theorem, in fact no more than amounts to evaluating an integral by «a rough approximate quadrature. Thus the result given by Laplace «was within the power of mathematiciens as soon as Stirling's Theo«rem had been published.»

Das vortreffliche Werk Todhunters über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt die Notizen über das Bernoulli'sche Theorem zerstreut bei der Besprechung der Arbeiten von Bernoulli, Moivre und Laplace über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dagegen konnte in seiner Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Darstellung der analytischen Hilfsmittel desselben gar nicht eingegangen werden. Eine zusammenhängende, eingehende Darlegung dieser Verhältnisse, besonders wenn sie wesentlich neue Resultate zu Tage zu fördern vermag, schien mir daher ebenso interessant wie werthvoll zu sein.

II.

3. In einem Begleitschreiben zu seiner Schrift: De rationiis in ludo aleae**), schrieb der gelehrte Huygens an seinen Lehrer der Mathematik Franziskus von Schooten u. a. Folgendes:

*) J. Todhunter, History of the mathematical theory of probability, art. 995 pag. 553.

**) Diese Arbeit erschien als Anhang zu Schootens Exercitationes mathematicae, 1657. Huygens hat darin zum ersten Mal die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslehre systematisch und analytisch formulirt, so dass Jacob Bernoulli diese Huygen'sche Schrift dann in sein erstes Buch der Ars conjectandi aufgenommen und commentirt hat.

«Quanquam, si quis penitus ea quae tradimus examinare caeperit, «non dubito quin continuò reperturus sit, rem non, ut videtur, ludicram «agi, sed pulchrae subtilissimaeque contemplationis fundamenta explicari. «Et problemata quidem, quae in hoc genere proponuntur, nihilo minus «profundae indaginis visum iri confido, quam quæ Diophanti libris conti- «nentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, sicut illa, «in nuda numerorum consideratione terminentur.»

Bekundet damit Huygens eine hohe Meinung von der Wichtigkeit des neuen Calcüls und verheisst er demselben eine grosse Zukunft, so gelang es ihm aber doch noch nicht, sich über das Niveau der üblichen Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sich bis zu jener Zeit auf das Gebiet der Spielprobleme beschränkt hatte, zu erheben.

Wenige Jahre später machte zwar der berühmte Grosspensionär von Holland, Jean de Witt, der treffliche Kenner und Förderer der Cartesianischen Geometrie, die ersten nützlichen Anwendungen auf die Rentenrechnung*); aber es blieb dem genialen Kopfe Jakob Bernoulli's I. vorbehalten, der neuen mathematischen Disciplin ihr weites Arbeitsfeld zu eröffnen.

In einer Zeit grosser wissenschaftlicher Entdeckungen hatte sich Bernoulli's schöpferische Kraft entfaltet. Längst schon hatten Baco von Verulam, Giordano Bruno u. a. m. der wissenschaftlichen Forschung den Weg der Beobachtung gewiesen und eine Reihe von grossen Forschern hatte bereits die neue Methode der Induction durch glänzende Erfolge gerechtfertigt. Kopernikus hatte die richtige Vorstellung von unserem Planetensystem gegeben, Kepler seine Gesetze der Planetenbewegung berechnet, Galilei die Fallgesetze erkannt und Newton der letzteren Gültigkeit im Universum als Gravitationsgesetz nachgewiesen. Vieles, was früher als zufällig erscheinen mochte, war durch Causalgesetze erklärt und die Domäne des Zufalls und des Aberglaubens hatte schon bedeutend an Terrain verloren. Und dennoch waren es kühne Fragen, die Bernoulli's weiter Blick in den Thatsachen zu lesen vermochte. Gibt es in den gesammten Erscheinungen überhaupt einen Zufall? Erscheint uns vielleicht das *anscheinend Zufälligste* nur *desshalb zufällig*, weil wir *seine Ursachen nicht zu ergründen vermögen?* Ist es möglich, durch fortgesetzte Beobachtungen auch das Zufälligste

*) Jean de Witt, De vardye van de lifrenten na proportie van de losrenten, ou la valeur des rentes viagères en raison des rentes libres et remboursables. La Haye 1671.

als von Gesetzen abhängig zu erkennen? Ist es überhaupt möglich, durch Beobachtungen ein genügend sicheres Resultat zu erhalten? Und in welcher Beziehung steht die Zahl der Beobachtungen zur Genauigkeit des Resultates?

4. Jakob Bernoulli I. hat seine diesbezüglichen Gedanken in dem hochinteressanten vierten Buche seiner Ars conjectandi*), betitelt: Ad Usum et applicationem praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis, niedergelegt. Das nach ihm benannte Theorem**) findet sich dort im 4. und 5. Kapitel. Die Hauptgedanken sollen ihrer grundlegenden Bedeutung wegen hier ihre Stelle finden. Cap. IV. betitelt: De duplici Modo investigandi numeros casuum. Qui sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta. Problema singulare eam in rem propositum, hat zusammengefasst folgenden Inhalt:

Es wurde im letzten Cap. (III) gezeigt, wie die Beweiskraft von Argumenten für gewisse Dinge nach der Zahl von günstigen und ungünstigen Fällen durch Rechnung zu schätzen ist. Hier aber liegt die Schwierigkeit; denn nur für die wenigsten Erscheinungen ist die Zahl der günstigen oder ungünstigen Fälle und das Gewicht jedes Einzelnen bekannt. Beim Würfelspiel ist es allerdings nicht schwer, die Zahl der günstigen Fälle für das Eintreffen eines bestimmten Ereignisses zu berechnen und ebenso leicht ist es, die Fälle für das Ziehen eines weissen oder schwarzen Steinchens aus einer Urne, wenn das Verhältniss der verschiedenartigen Steinchen gegeben ist, zu bestimmen. Wer könnte aber jemals die Anzahl von Krankheiten, die den menschlichen Körper an allen Theilen und zu jedem Alter befallen und den Tod herbeiführen können, bestimmen und herausfinden, um wie viel leichter diese oder jene Krankheit den Tod herbeiführen können, so dass dann eine Vermuthung über das Leben eines Menschen oder dasjenige zukünftiger Generationen ausgesprochen werden könnte? Oder wer könnte die zahllosen Fälle von Veränderungen ergründen, denen die Luft tagtäglich ausgesetzt ist, um heute schon Vermuthungen über deren Zustand nach einem Monat oder nach einem Jahr aufzustellen? Oder wer kennt die Natur des menschlichen Geistes und den wunderbaren Bau unseres Körpers so genau, dass er bei einem Spiele, das grösstentheils von der Schnelligkeit und dem Verstande des Spielers abhängt, die Fälle vorauszusagen sich unterstünde, in welchen dieser oder jener Spieler gewinnt oder verliert?

---

*) Von der Liagre in seinem Calcul des probabilités sagt: «Cette ouvrage contient en germe toute la philosophie de la probabilité».

**) «The memorable theorem in the fourth part, which justly bears its authors name, will ensure him a permanent place in the history of the Theory of Probability.» J. Todhunter, History of the Theory of Probability p. 77.

Wegen der Beschränktheit unseres Geistes wäre es also ein eitles Bemühen *die verschiedenen Fälle a priori auffinden zu wollen; doch steht uns hier der Weg der Beobachtung offen: wir können die Wahrscheinlichkeit auch a posteriori, durch Beobachtung finden. Voraussetzung ist dabei, dass für bestimmte Ereignisse eine gewisse Konstanz der Ursachen angenommen werde.* Denn, wenn z. B. einmal 300 Menschen untersucht worden sind vom Alter und der Konstitution des Titius und man gefunden hätte, dass 200 davon vor Verfluss von 10 Jahren gestorben sind, so kann man den Schluss ziehen, dass es 2 Mal mehr Fälle gibt dafür, dass auch Titius innerhalb von 10 Jahren sterben, als dass er diesen Zeitraum überleben werde. Ebenso wenn einer mehrere Jahre das Wetter beobachtet, wenn er oft bei 2 Spielenden gestanden und deren Spiel verfolgt hat, so kann er mit ziemlicher Sicherheit die Wahrscheinlichkeit bestimmen dafür, dass ein diesbezügliches Ereigniss unter denselben Umständen eintritt oder nicht eintritt.

Und diese empirische Art der Bestimmung der Zahl von Fällen durch Beobachtungen ist weder neu noch ungewohnt und wird in der Praxis von jedermann angewendet. Auch ist jedem klar, *dass um einen richtigen Schluss ziehen zu können, nur wenige Beobachtungen nicht genügen, sondern dass eine grosse Anzahl derselben nöthig sind.* Obgleich diess nun aber aus der Natur der Sache von jedermann eingesehen wird, so liegt doch der auf wissenschaftlichen Prinzipien gegründete Beweis durchaus nicht auf der Oberfläche. *Es muss vielmehr untersucht werden, was vielleicht noch niemand eingefallen ist, ob durch Vermehrung der Beobachtungen auch die Wahrscheinlichkeit vermehrt werde dafür, dass die Zahl der günstigen zu den ungünstigen Beobachtungen ein wahres Verhältniss erreiche und dass diese Wahrscheinlichkeit zuletzt jeden beliebigen Grad von Gewissheit erreichen könne, oder ob das Problem vielmehr, um so zu sagen, seine Asymptoten hat, d. h. ob ein bestimmter Grad der Gewissheit gegeben sei, der auch bei beliebiger Vermehrung der Beobachtungen niemals überschritten werden könne, z. B.* $^1/_2$ *oder* $^2/_3$ *oder* $^3/_4$ *der Gewissheit.* Seien z. B. in einer Urne ohne dein Wissen 3000 weisse und 2000 schwarze Steinchen verborgen und du nehmest, um das Verhältniss derselben zu bestimmen, ein Steinchen nach dem andern heraus (so jedoch, dass du das gezogene, bevor du ein neues ziehst, wieder hineinlegst), und du beobachtest nun, wie oft ein weisses, wie oft ein schwarzes herauskommt. Die Frage ist nun, wie oft du dies thun könnest, damit es 10-, 100-, 1000-fach wahrscheinlicher (d. h. am Ende intellectuell gewiss) werde, dass die Zahl der Male, in denen du ein weisses, zu denen, in welchen du ein schwarzes bekommst, das Verhältniss $1^1/_2$ bilde, als dass dieses Verhältniss ein anderes davon verschiedenes sei. Ist dies nicht der Fall, so ist unser Unternehmen, die Zahl der Fälle durch Versuche zu bestimmen, werthlos. Wenn es aber der Fall ist (was wir im folgenden Cap. [V] zeigen werden), so können wir die Zahl der Fälle a posteriori erforschen, wie wenn sie uns a priori bekannt wären und das ist im praktischen Leben, wo das der Vernunft Gewisse als absolut gewiss angesehen wird, genügend, um unsere Vermuthungen in einem beliebigen Zufallsgebiet nicht weniger wissenschaftlich zu leiten als bei den Würfelspielen. Denn stellen wir uns vor, dass die Luft oder der menschliche Körper den Herd vieler Veränderungen und Krankheiten in sich schliessen, gerade so wie die Urne die Steinchen, so werden wir ebenfalls auf diesem Gebiet bestimmen können, wie viel leichter dieses oder jenes Ereigniss eintreten kann als ein anderes.

Es ist noch zu bemerken, dass ich das Verhältniss der durch die Beobachtung zu bestimmenden Fälle nicht ganz genau angeben, sondern in gewisse Grenzen einschliessen will. Im oben gegebenen Beispiel würden wir vielleicht das Verhältniss $1^1/_2$ einschliessen zwischen $\frac{301}{200}$ und $\frac{299}{200}$ oder zwischen $\frac{3001}{2000}$ und $\frac{2999}{2000}$. Es zeigt sich dann, dass es durch fortgesetzte Beobachtungen immer wahrscheinlicher wird, dass das durch Beobachtung gefundene Verhältniss der Fälle innerhalb, als dass es ausserhalb dieser Grenzen liegt.

Jakob Bernoulli schliesst den Kommentar zu seinem Theorem wörtlich so: «Hoc igitur est illud Problema, quod evulgandum hoc «loco proposui, postquam jam per vicennium pressi, et cujus per novi-«tas, tum summa utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reli-«quis hujus doctrinae capitibus pondus et pretium superaddere potest.»

Schliesslich wendet sich Jakob Bernoulli noch polemisirend an gewisse Gelehrte*), welche gegen seine Theorie Einwände zu machen versucht hatten.

1) Werfen sie vor, das Verhältniss zwischen den Steinchen sei anders beschaffen als dasjenige zwischen den Krankheiten oder den Luftveränderungen; die Zahl jener sei bestimmt, die Zahl dieser dagegen unsicher und unbestimmt. Antwort: Beides ist nach unserer Erkenntniss gleich unsicher und gleich unbestimmt; aber das was an sich oder von Natur aus so ist, dass es von uns nicht allseitig erkannt werden kann, dasselbe ist ebenfalls von Gott erschaffen, und was Gott erschaffen, das bestimmte er auch, ehe er es schuf.

2) Bemerken sie: die Zahl der Steinchen sei endlich, die der Krankheiten aber nicht. Antwort: Sie ist eher erstaunlich gross als unendlich; aber zugegeben, sie sei unendlich, so ist bekannt, dass auch zwischen zwei unendlichen Grössen ein bestimmtes Verhältniss bestehen kann und dass dasselbe auch durch endliche Grössen genau oder wenigstens an-

*) Es ist damit wohl Leibnitz gemeint, der über diesen Gegenstand in Briefen an Bernoulli polemisirte.

nähernd bestimmt werden kann. Ich erinnere z. B. an die Ludolf'sche Zahl. *Es hindert daher nichts, dass ein Verhältniss zwischen unendlichen Grössen doch durch eine endliche Zahl annäherungsweise ausgedrückt und durch eine endliche Zahl von Beobachtungen bestimmt werden kann.*

3) Wenden sie ein: *die Zahl der Krankheiten sei nicht constant,* sondern täglich entstünden neue. Antwort: Dass sich im Laufe der Zeit die Krankheiten vermehren, kann man nicht läugnen, *und sicherlich wird der, welcher aus heutigen Beobachtungen auf antediluviale Zeiten schliessen wollte, sehr irren. Aber hieraus folgt nur, dass bisweilen neue Beobachtungen zu machen sind,* wie sie bei den Steinchen zu machen wären, wenn die Vermuthung nahe läge, dass sich ihre Zahl verändert hätte.

5. Im V. Kapitel: «Solutio Problematis praecedentis», gibt Jakob Bernoulli I. die analytische Darstellung seines Theorems wie folgt*):

Lemma I.

Sei gegeben die Reihe

$0, 1, 2, \ldots\ldots r - 1, r, r + 1, \ldots\ldots r + s - 1, r + s$ und es werde dieselbe fortgesetzt bis ihr letztes Glied $nr + ns$ heisst, so entsteht die neue Reihe

$0, 1, 2, \ldots\ldots nr - n \ldots\ldots nr \ldots\ldots nr + n \ldots\ldots nr + ns,$

in welcher die Zahl der Glieder zwischen $nr + n$ und $nr + ns$ die Gliederzahl zwischen nr und $nr + n$ nicht mehr (wie gross auch n werde) als $s - 1$ mal übertrifft und die Zahl der Glieder links von $nr - n$ die Zahl der Glieder zwischen $nr - n$ und nr nicht mehr als $r - 1$ mal.

Lemma II. Wenn das Binom $(r + s)$ in irgend eine Potenz erhoben wird, so hat die Entwicklung immer ein Glied mehr als der Exponent Einheiten.

Lemma III. In der Entwicklung von $(r + s)^n$ ist ein Term M dann der grösste, wenn die Zahl der vorausgehenden Glieder zur Zahl der nachfolgenden, mit r und s, in indirekter, oder wenn die Dimensionen von r und s in M mit r und s in direkter Proportion stehen.

Dieser Term M hat zum näheren einen kleineren Verhältnisswerth als — bei gleichem Intervall — der nähere zum entfernteren.

Demonstr. 1. Setzt man $nt = nr + ns$, so wird

$$(r + s)^{nt} = r^{nt} + \binom{nt}{1} r^{nt-1} . s + \ldots\ldots \binom{nt}{nt-1} r . s^{nt-1} + s^{nt}$$

und der grösste Term

*) In gedrängter Uebersicht.

$$M = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(nt-ns+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,ns}\, r^{nr}\,.\,s^{ns} \quad \text{oder}$$

$$M = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(nt-nr+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,nr}\, r^{nr}\,.\,s^{ns}$$

Bezeichnet man ferner mit R_1, R_2, R_3 .... die rechts von M aus aufeinanderfolgenden Terme, und mit L_1, L_2, L_3, ... die entsprechenden links, so ist

$$R_1 = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,.\,.\,.\,.\,(ns+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(nr-1)}\, r^{nr-1}\,.\,s^{ns+1}$$

$$L_1 = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(nr+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(ns-1)}\, r^{nr+1}\,.\,s^{ns-1}$$

$$R_2 = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(ns+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(nr-2)}\, r^{nr-2}\,.\,s^{ns+2}$$

$$L_2 = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(nr+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(ns-2)}\, r^{nr+2}\,.\,s^{ns+2},$$

woraus sich durch Division ergibt:

$$\frac{M}{L_1} = \frac{(nr+1)\,s}{n\,.\,r\,.\,s} \qquad \frac{L_1}{L_2} = \frac{(nr+2)\,s}{(ns-1)\,r}$$

$$\frac{M}{R_1} = \frac{(ns+1)\,r}{n\,.\,r\,.\,s} \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{(ns+2)\,r}{(nr-1)\,s}.$$

Es leuchtet aber ein, dass

$$nrs + s > nrs \qquad nrs + 2\,s > nrs - r$$

$$nrs + r > nrs \qquad nrs + 2\,r > nrs - s;$$

also ist auch

$$M > R_1,\ M > L_1,\ L_1 > L_2,\ R_1 > R_2.$$

Demonstr. 2. Weil

$$\frac{nr+1}{ns} < \frac{nr+2}{ns-1},\quad \frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1},$$

so folgt auch

$$\frac{(nr+1)s}{nrs} < \frac{(nr+2)s}{(ns-1)r},\quad \frac{(ns+1)r}{nrs} < \frac{(ns+2)r}{(nr-1)s}$$

oder

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_1}{L_2},\ \frac{M}{R_1} < \frac{R_1}{R_2}.\ \text{q. e. d.}$$

Lemma IV. *In der Potenz eines Binoms, dessen Exponent nt sei, kann n so gross genommen werden, dass der grösste Term M in Bezug auf 2 Terme L und R, welche um das Intervall von n Termen* *nach links und rechts von M abstehen, einen grösseren Verhältnisswerth hat, als irgend ein gegebenes Verhältniss.*

Demonstr. Es wurde gefunden

$$M = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\ldots\ldots(nr+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots ns}\,r^{nr}.\,s^{ns}$$

$$= \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\ldots\ldots(ns+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots nr}\,r^{nr}.\,s^{ns},$$

und weil

$$L_n = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\ldots\ldots(nr+n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots ns-n}\,r^{nr+n}.\,s^{ns-n},$$

$$R_n = \frac{nt\,(nt-1)\,(nt-2)\ldots\ldots(ns+n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots nr-n}\,r^{nr-n}.\,s^{ns+n},$$

so wird

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nr+n)\,(nr+n-1)\ldots\ldots(nr+1)}{(ns-n+1)\,(ns-n+2)\ldots\ldots ns}\,.\,\frac{s^n}{r^n},$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(ns+n)\,(ns+n-1)\ldots\ldots(ns+1)}{(nr-n+1)\,(nr-n+2)\ldots\ldots ns}\,.\,\frac{r^n}{s^n}.$$

Hieraus erhält man, wenn man die Potenzen r^n und s^n auf die einzelnen Faktoren vertheilt,

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nrs+ns)\,(nrs+ns-s)\ldots\ldots(nrs+s)}{(nrs-nr+r)\,(nrs-nr+2\,r)\ldots\ldots nrs},$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(nrs+nr)\,(nrs+nr-2)\ldots\ldots(nrs+r)}{(nrs-ns+s)\,(nrs-ns+2\,s)\ldots\ldots nrs}.$$

Dividirt*) man durch n, so folgt für $\lim n = \infty$

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(rs+s)\,(rs+s)\ldots\ldots(rs+s)\,rs}{(rs-r)\,(rs-r)\ldots\ldots(rs-s)\,rs}$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(rs+r)\,(rs+r)\ldots\ldots(rs+r)\,rs}{(rs-s)\,(rs-s)\ldots\ldots(rs-s)\,rs}.$$

Der Werth dieser Quotienten ist aber wegen der unendlichen Anzahl von Factoren, von denen jeder grösser als 1 ist, selber unendlich gross. Wenn aber sowohl $\frac{M}{L_n}$ wie auch $\frac{M}{R_n}$ unendlich gross

---

*) Bernoulli gebraucht hier bei der analytischen Erläuterung für das Zeichen $+$ das wohl bei keinem andern Mathematiker angewendete Zeichen γ. Sein Gleichheitszeichen ist übrigens immer $\propto$.

werden kann, so ist gezeigt, dass in der That der Werth des Verhältnisses vom grössten Term einer binomischen Entwicklung zu einem andern Term grösser ist, als bei irgend einem gegebenen Verhältniss.

Lemma V. *Es kann die Zahl n so gross genommen werden, dass die Summe aller Glieder in der binomischen Entwicklung, genommen vom grössten M nach beiden Seiten bis und mit L_n und R_n, zur Summe aller übrigen Glieder ein Verhältniss von grösserem Werth bildet als irgend ein gegebenes.*

Demonstr. Man bezeichne die Terme links von M wie früher mit L_1, L_2, L_3 .... links von L_n mit L_{n+1}, L_{n+2}, L_{n+3}, ..., dann ist noch Lem. III.:

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_n}{L_{n+1}}, \quad \frac{L_1}{L_2} < \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}, \quad \frac{L_2}{L_3} < \frac{L_{n+2}}{L_{n+3}}, \ldots\ldots$$

ebenso

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \frac{L_3}{L_{n+3}} < \ldots\ldots$$

Für $\lim n = \infty$ wird nach Lem. IV $\frac{M}{L_n} = \infty$, umsomehr $\frac{L_1}{L_{n+2}} = \infty$ und $\frac{L_2}{L_{n+2}} = \infty$, ... Daher schliesslich:

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots}{L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \ldots\ldots} = \infty,$$

d. h. die Summe aller Terme zwischen M und L_n genommen, ist unendlich mal grösser als die Summe von ebenso viel Termen ausserhalb von L_n. Nach Lemma I ist aber die Anzahl der Glieder ausserhalb von L_n s—1, also eine endliche Zahl mal grösser als die Anzahl der Glieder zwischen L_n und M; daher ist die Summe der Glieder zwischen L und M (auch mit Ausschluss von M) unendlich mal grösser als die Summe der Glieder ausserhalb L_n.

Das Nämliche kann gezeigt werden vom Verhältniss der Summe der Glieder zwischen M und R_n zu der Summe derjenigen ausserhalb R_n. Schliesslich wird somit die Summe aller Glieder zwischen L_n und R_n (inclus. L_n, R_n und M) das Unendlichvielfache aller übrigen Glieder.

Scol. Es soll noch gezeigt werden, *dass auch dann, wenn n endlich bleibt, die Summe der Terme zwischen L_n und R_n zur Summe der übrigen Terme ein Verhältniss ausmacht, das jedes gegebene Verhältniss C an Werth übertrifft.*

Es werde das Verhältniss $\frac{r+1}{r}$, welches kleiner ist als $\frac{rs+s}{rs-r}$, in die m[te] Potenz erhoben, so dass

$$\left(\frac{r+1}{r}\right)^m \gtreqless c\,(s-1).$$

Um m zu bestimmen, hat man

$$m \operatorname{Log}(r+1) - m \operatorname{Log} r \gtreqless \operatorname{Log} c\,(s-1), \text{ also}$$

$$m \gtreqless \frac{\operatorname{Log} c\,(s-1)}{\operatorname{Log}(r+1) - \operatorname{Log} r}.$$

In Lemma IV wurde das Verhältniss $\frac{M}{L_n}$ aus dem Produkt

$$\frac{nrs+ns}{nrs-ns+r} \cdot \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r} \cdot \cdots \cdot \frac{nrs+s}{nrs} \text{ gefunden.}$$

Wird nun n richtig gewählt, so muss einmal einer dieser Brüche gleich $\frac{r+1}{r}$ sein. Bezeichnen wir die Ordnung dieses Bruches in der Faktorenreihe mit m, so ist

$$\frac{r+1}{r} = \frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr} \text{ und}$$

$$n = m + \frac{ms-s}{r+1},$$

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}.$$

nt ist der Exponent, welcher dem Binom gegeben werden muss, damit der grösste Term M der Entwicklung die Grenze L_n um mehr als c (s—1) übertrifft. Der Beweis ergibt sich so: Der Bruch von der Ordnung m wird durch obige Annahme von n gleich $\frac{r+1}{r}$. Nun ist aber nach Voraussetzung $\left(\frac{r+1}{r}\right)^m \gtreqless c\,(s-1)$. Weil nun aber alle Brüche, die in obigem Product dem Factor von der Ordnung m vorausgehen, grösser sind als $\frac{r+1}{r}$, die nachfolgenden aber nach der Einheit convergiren, so muss das Product aller grösser sein als $\left(\frac{r+1}{r}\right)^m$ und also um so mehr grösser als c (s—1). Da nun aber jenes Product gleich dem Verhältniss von $\frac{M}{L}$ ist, so folgt

$$M > c\,(s-1)\,L.$$

Ferner ist

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \ldots\ldots < \frac{L_n}{L_{2n}},$$

also

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots\ldots}{L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \ldots\ldots} > c\,(s - 1).$$

Weil aber die Gliederzahl ausserhalb L_n $(s-1)$ mal grösser ist als diejenige zwischen L und M, so folgt, dass das Verhältniss der Summe der Glieder innerhalb von M und L_n zur Summe aller Glieder ausserhalb von L_n grösser als c ist.

Für die Terme rechts von M erhält man dasselbe Resultat. Ausgehend vom Verhältniss $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs}$ erhalte ich analog durch dieselbe Betrachtung

$$m \gtreqless \frac{\text{Log}\ c\,(r - 1)}{\text{Log}\,(s + 1) - \text{Log}\ s} \quad \text{und}$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}.$$

Die gestellte Aufgabe ist somit gelöst; es kann eine bestimmte Potenz berechnet werden, welche die verlangte Eigenschaft besitzt.

6. *Propos. Princip.* Es folgt endlich der Satz selbst, zu dessen analytischer Darstellung die vorausgegangenen Lemmata gegeben werden mussten.

Es seien einem Ereigniss r Fälle günstig, s Fälle ungünstig, so dass das Verhältniss der günstigen zu den ungünstigen Fällen genau oder annäherungsweise gleich $\frac{r}{s}$ ist; dann ist das Verhältniss der günstigen zu allen möglichen Fällen, — wenn $r + s = t$ — gegeben durch $\frac{r}{t}$, gelegen zwischen den Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$.

Es ist nun zu zeigen, dass so viele Beobachtungen gemacht werden können, dass es irgend eine beliebige Grösse (etwa c) mal wahrscheinlicher wird, es sei das Verhältniss der günstigen zu allen Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\frac{r+1}{t}$ *und* $\frac{r-1}{t}$, *als ausserhalb derselben gelegen.*

Demonstr. Angenommen nt sei die Zahl der gemachten Beobachtungen. Dann ist, da nach Voraussetzung jeder Beobachtung r Fälle günstig, s Fälle ungünstig sind, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Beobachtungen, oder alle mit Ausnahme von einer, von zweien von dreien etc. ein günstiges Resultat liefern, gegeben resp. durch (Part. I, Prop. XIII.)

$$\frac{r^{nt}}{t^{nt}},\ \binom{1}{nt}\cdot\frac{r^{nt-1}\cdot s}{t^{nt}},\ \binom{nt}{2}\frac{r^{nt-2}\cdot s^2}{t^{nt}},$$

$$\binom{nt}{3}\frac{r^{nt-3}\cdot s^3}{t^{nt}},\dots\dots\dots$$

Es sind dies die Glieder der binomischen Entwicklung von $\left(\frac{r+s}{t}\right)^{nt}$. Hieraus ist leicht zu schliessen, dass der Wahrscheinlichkeitsgrad*) dafür, dass das Ereigniss bei nt Versuchen nr mal eintreffe, ns mal nicht, gleich ist dem grössten Terme in der Entwicklung von $(r+s)^{nt}$; ebenso wird die Zahl der günstigen Fälle für das nr + n resp. nr — n malige Eintreffen des Ereignisses bei nt Versuchen gegeben durch die Glieder L_n resp. R_n jener binomischen Entwicklung. *Folglich wird der Wahrscheinlichkeitsgrad dafür, dass das Ereigniss bei einer Zahl von nt Versuchen höchstens nr + n und wenigstens nr — n mal eintreffe, ausgedrückt sein durch die Summation aller Terme innerhalb L_n und R_n.* Der Wahrscheinlichkeitsgrad aber dafür, dass das Ereigniss mehr oder weniger als nr ± n mal eintreffe, wird ausgedrückt sein durch die Summe aller übrigen Terme, die ausserhalb von L_n und R_n liegen. Da nun aber die Potenz des Binoms so gross genommen werden kann, dass die Summe der Glieder zwischen den Grenzen L_n und R_n mehr als c mal grösser ist als die Summe der übrigen Glieder, so folgt auch, *dass so viele Beobachtungen gemacht werden können, dass der Wahrscheinlichkeitsgrad dafür, dass das Verhältniss der Zahl der günstigen Beobachtungsresultate zur Zahl aller innerhalb der Grenzen* $\frac{nr+n}{nt}$ und $\frac{nr-n}{nt}$ oder $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ *liege, mehr als c mal*

*) Unter dem Wahrscheinlichkeitsgrad eines Ereignisses versteht Bernoulli immer die Zahl der dem betreffenden Ereigniss günstigen Fälle.

den Wahrscheinlichkeitsgrad dafür übertrifft, dass jenes Verhältniss ausserhalb der angegebenen Grenzen liege, mit andern Worten, dass es mehr als c mal wahrscheinlicher wird, es liege die Zahl der günstigen Beobachtungsresultate innerhalb der Grenzen $nr \pm n$ als ausserhalb.

Bei der speciellen Betrachtung erklärt es sich von selbst, dass je grösser r, s und t genommen werden, desto enger die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ zusammenrücken, so dass das Verhältniss $\frac{r}{t}$ um so bestimmter gegeben werden kann. Wenn daher das Verhältniss der günstigen zu den ungünstigen Fällen etwa gleich $\frac{3}{2}$ ist, so setze man für r und s nicht 3 und 2, sondern 30 und 20, also $t = 50$, so dass die Grenzen $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$ werden und wenn $c = 1000$ gesetzt wird, so ergibt sich (nach Scol.) als Versuchszahl

links von M

$$m > \frac{\operatorname{Log}(c(s-1))}{\operatorname{Log}(r+1) - \operatorname{Log} r} = \frac{4 . 2787536}{142405} < 301,$$

$$nt = mt + \frac{mst - st}{r+1} < 24728;$$

rechts von M

$$m > \frac{\operatorname{Log} c(r-1)}{\operatorname{Log}(s+1) - \operatorname{Log} s} = \frac{4 . 4623980}{211898} < 211,$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} < 25500.$$

Aus diesem Exempel geht hervor, dass es bei 25500 viel mehr als 1000 Mal wahrscheinlicher ist, dass das Verhältniss der günstigen Beobachtungen zu allen innerhalb die Grenzen $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$ fallen werde als ausserhalb. Und ebenso, wenn man $c = 10{,}000$ setzt, dass dies mehr als 10,000 mal wahrscheinlicher wird bei 31,258 Experimenten und mehr als 100,000 mal bei 36,966 Experimenten; auf diese Weise kann man in infinitum fortfahren, indem man fortwährend zu 25,500 ein Vielfaches von 5708 addirt. Dann sagt Bernoulli weiter: «Unde «tandem hoc singulare sequi videtur, quod si eventuum omnium obser- «vationes per totam æternitatem continuaretur, — probabilitate ultimo «in perfectam certitudinem abeunte — omnia in mundo certis rationibus «et constanti vicissitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut «etiam in maxime casualibus atque fortuitis quandam quasi necessitatem, «et, ut sic dicam, fatalitatem agnoscere teneamur; quam nescio annon «ipse jam Plato intendere voluerit, suo de universali rerum apocatastasi «dogmate, secundum quod omnia innumerabilium seculorum decursum «in pristinum reversura statum praedixit.»

Mit dieser weitausschauenden philosophischen Betrachtung schliesst Jakob Bernoulli I. seine Ars conjectandi, das Produkt zwanzigjähriger Geistesarbeit, sein bleibendes Denkmal in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

7. Die neuen genialen Ideen Bernoulli's konnten nicht verfehlen, die Polemik der einen, die Bewunderung der andern Gelehrten hervorzurufen, und es ist dafür nicht uninteressant, was Montmort schrieb:*) «On ne nous a point appris quels sont les Jeux dont cet Auteur — «Bernoulli — déterminoit les partis, ni quels sujets de politique et «de morale il avoit entrepris d'éclaircir, mais quelque surprenant que «soit ce projet, il y a lieu de croire que ce sçavant Auteur l'auroit «parfaitement exécuté. M. Bernoulli étoit trop supérieur aux autres «pour vouloir en imposer, il étoit de ce petit nombre d'hommes qui «sont propres à inventer et je me persuade qu'il auroit tenu tout ce «que promettoit le titre de son livre.»

Bernoulli hat nicht versucht, einen bestimmten mathematischen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der günstigen Beobachtungen innerhalb gewisser Grenzen liege, aufzustellen. Sein sehr allgemeiner aber klarer Beweis bezweckte nur, auf exaktem analytischem Wege festzulegen, dass in der That mit der Vermehrung der Beobachtungen auch die Wahrscheinlichkeit immer grösser und schliesslich zur Gewissheit wird, dass die Zahl der günstigen zu den ungünstigen Beobachtungen dem wahren Verhältniss der für das Ereigniss günstigen zu den ungünstigen Fällen gleich kommt (Gesetz der grossen Zahlen). Schon daraus geht hervor, was Bernoulli übrigens auch ausspricht, wenn er sagt:**) «Nisi enim hoc fiat, fateor actum fore de nostro conatu explorandi numeros casuum per experimenta», *dass er das bewiesene Theorem nur als Hülfssatz für die Erforschung der Wahrscheinlichkeit a posteriori betrachtet.* Und dies möchte ich

*) Montmort, Essai d'analyse sur les Jeux de hasard, 1. éd. (Paris 1708) Vorrede p. 6. Montmort kannte die Ideen Bernoulli's, dessen Werk noch nicht erschienen war, aus Fontenelle's Eloge de Mr. Bernoulli, Hist. de l'Académie de Paris 1705.

**) Ars conjectandi Lib. IV. Cap. IV. pag. 226.

ganz besonders betonen. Denn es scheint nicht berechtigt zu sein, wenn Laplace in seiner Notice historique sur le calcul des probabilités bei der Erwähnung der Verdienste Daniel Bernoulli's sagt:*) «On doit «surtout placer au nombre de ces idées originales la considération di- «recte des possibilités des événemens tirées des événemens observés. «Jacques Bernoulli et Moivre supposaient ces possibilités connues; et «ils cherchaient la probabilité que le résultat des expériences à faire «approchera de plus en plus de les représenter.»

Nicht Daniel, wie aus dem Citat hervorgehen möchte, sondern Jakob Bernoulli ist der Begründer der Theorie von der Erfahrungswahrscheinlichkeit. Er hat auch den ersten analytischen Ausdruck dafür gegeben.**) Wenn in einer Urne sich weisse und schwarze Kugeln befinden, deren Zahlenverhältniss aber unbekannt ist, so wird, wenn man in einer sehr grossen Anzahl von Versuchen a weisse und b schwarze herausgezogen hat, die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weissen ausgedrückt durch $\frac{a}{a+b}$. Auch über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen hat Jakob Bernoulli zuerst Untersuchungen angestellt.***) Gewiss hatte er noch tiefere analytische Studien über die Wahrscheinlichkeit a posteriori vorgesehen, wahrscheinlich auch praktische Versuche auf socialem Gebiete, aber leider wurde Bernoulli†) viel zu früh, schon mit 51 Jahren, der Wissenschaft durch den Tod entrissen und ein halbes Jahrhundert ging dahin, bis er richtig verstanden wurde, bis Daniel Bernoulli, sein Neffe, praktisch und Bayes theoretisch seine Untersuchungen über die Erfahrungswahrscheinlichkeit weiter führten.

---

*) Essai philosophique p. 214. Théorie analyt. des prob. introd. p. CXLVIII.

**) Ars conj. Lib. IV. Cap. IV.

***) id. Lib. IV. Cap. III.

†) Jakob Bernoulli I., in Basel als Sohn des Rathsherrn Nikolaus Bernoulli am 27. XII. 1654 geboren, studirte in seiner Vaterstadt Theologie und daneben fleissig Mathematik. Nach seinem theologischen Examen (1676) bereiste er die Schweiz, Holland, England und Frankreich, widmete sich dann nach seiner Rückkehr als Privatmann ganz der Mathematik und wurde im Jahre 1687 zum Professor der Mathematik an der Universität Basel ernannt, welche Stellung er bis zu seinem Tode am 16. VIII. 1695 innehatte. Mit seinem Bruder Johannes I. und seinem Neffen Daniel gehört Jakob Bernoulli I. zu den berühmtesten der Bernoulli.