

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1889)  
**Heft:** 1215-1243

**Artikel:** Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung  
**Autor:** Leuch, Albert  
**Kapitel:** Anhang  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319023>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## A n h a n g.

---

Legt man Liniencoordinaten  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  zu Grunde und ersetzt dieselben durch ihre reciproken Werthe, d. h. wendet die durch die Relationen  $\xi_1' = \lambda \xi_2 \xi_3$ ,  $\xi_2' = \lambda \xi_1 \xi_3$ ,  $\xi_3' = \lambda \xi_1 \xi_2$  ausgedrückte birationale quadratische Transformation (Methode der Inversion) an, wobei einer Geraden  $\xi_i$  eine einzige, bestimmte Gerade  $\xi_i' = \frac{1}{\xi_i}$  und umgekehrt entspricht, so entsprechen sich oder sind zu einander invers:

Punkt und Curve zweiter Klasse (welche dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist).

Gerade und Gerade,

Curve zweiter Klasse und Curve vierter Klasse (mit drei Doppeltangenten in den Coordinatenaxen; für dieselbe ist im Allgemeinen  $\nu = 4$ ,  $\tau = 3$ ,  $\iota = 0$ ,  $\mu = 6$ ,  $\alpha = 6$ ,  $\delta = 4$ ).

Curve n. Klasse und Curve von der Klasse  $2n$  (letztere hat die Fundamentallinien zu  $n$ -fachen Tangenten).

Zu dem behandelten Problem, als dessen Lösung sich die Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten und keinen Spitzen ergab, gibt es nun das folgende dualistisch entsprechende:

Ein Punkt S bewege sich auf einem festen Kegelschnitt, man bestimme die Enveloppe der durch S gehenden Tangenten der Curve zweiter Klasse, welche als Inverse dem Punkte S entspricht.

Die Untersuchung, von welcher ich an dieser Stelle nur die Resultate mittheilen will, ergibt als gesuchte Enveloppe im allgemeinsten Falle eine Curve sechster Klasse mit sieben Doppeltangenten und keinen stationären Tangenten. Die Doppeltangenten sind die drei Fundamentallinien ( $x_1 = 0$  oder  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = 0$ ;  $x_2 = 0$  oder  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_3 = 0$ ;  $x_3 = 0$  oder  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ) und die vier sich selbst entsprechenden Geraden  $e$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , deren Liniencoordinaten sind:  $(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1)$ ,  $(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1)$ ,  $(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 1)$ ,  $(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1)$  oder deren Punktcoordinatengleichungen lauten:

$$\begin{aligned} (e) \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (e_1) \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (e_2) \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ (e_3) \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$

Da  $\nu = 6$ ,  $\iota = 7$ ,  $\iota = 0$ , so sind die übrigen Plücker'schen Charaktere der Curve

$$\mu = 16, \quad \alpha = 30, \quad \delta = 72,$$

d. h. sie hat 30 Spitzen, 72 Doppelpunkte und ist von der 16. Ordnung.

Schneidet der feste Kegelschnitt  $p$  die Fundamentallinie  $A_2A_3$  in zwei Punkten  $B_1, B_1^*$ , so sind die Schnittpunkte  $B_1', B_1^{*'}$  der resp. Inversen von  $A_1B_1, A_1B_1^*$  ( $A_1B_1$  und  $A_1B_1^*$  sind Tangenten der  $C^6$ ) mit  $A_2A_3$  die Berührungspunkte der Doppeltangente  $A_2A_3$  (letztere sind imaginär, wenn  $A_2A_3$  den Kegelschnitt  $p$  nicht schneidet). Fallen  $B_1$  und  $B_1^*$  zusammen, d. h. wird  $A_2A_3$  von  $p$  berührt, dann vereinigen sich  $B_1'$  und  $B_1^{*'}$ , d. h. die Doppeltangente  $A_2A_3$  geht in eine Inflexionstangente über. Es fallen auch die beiden Tangenten  $A_1B_1$  und  $A_1B_1^*$  zusammen, und die  $C^6$  geht daher durch  $A_1$  hindurch ( $A_1$  wird Berührungspunkt der Curventangente  $A_1B_1$ ).

Analoges gilt für die übrigen Fundamentallinien. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten  $e, e_1, e_2, e_3$  sind die resp. Schnittpunkte dieser Linien mit dem festen Kegelschnitt  $p$ . Berührt  $p$  eine der Linien  $e_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), dann sind im Berührungspunkt  $\mathcal{E}_i$  die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente  $e_i$  vereinigt, von  $\mathcal{E}_i$  aus gehen an die  $C^6$  sechs Tangenten, von denen vier mit  $e_i$  zusammenfallen; es sind daher in  $e_i$  vier Curventangenten vereinigt oder die Tangente  $e_i$  zählt als Doppeltangente zweifach, ist also keine Inflexionstangente.

Die sechs Ecken des vollständigen Vierseits  $e e_1 e_2 e_3$  sind Punkte, die sich selbst entsprechen; geht demnach der feste Kegelschnitt  $p$  durch einen derselben, so sondert sich dieser (resp. das Strahlenbüschel, dessen Scheitel er ist) als ein Theil der Enveloppe ab, und der Rest derselben ist eine Curve fünfter Klasse. Enthält  $p$  vier (die höchste Zahl) sich selbst entsprechende Punkte, so reduziert sich die  $C^6$  auf eine  $C^2$ , welche in ein Punktepaar zerfällt.

Die  $C_{16}^6$  ist zu sich selbst invers (in Bezug auf die Tangenten) und zwar in der Weise, dass je zwei entsprechende Tangenten der Curve sich in einem Punkte des festen Kegelschnittes schneiden. Von jeder einem Punkte  $S$  entsprechenden Curve zweiter Klasse kennt man drei Tangenten (die Fundamentallinien) und die Berührungs-

punkte derselben (der Berührungspunkt auf der Fundamentallinie  $A_k A_1$  ist der Schnittpunkt von  $A_i S'$  mit  $A_k A_1$ , wobei  $A_i S'$  den zu  $A_i S$  inversen Strahl bedeutet). Es können daher sämtliche Tangenten der  $C_{16}$ <sup>6</sup> leicht construirt werden.

### **Spezialfall.**

Bewegt sich der Punkt  $S$  auf einer geraden Linie  $g$ , dann resultirt als Enveloppe der Tangenten, die von  $S$  aus an seine inverse Curve zweiter Klasse möglich sind, eine Curve dritter Klasse, welche keine Doppeltangenten und Inflexionstangenten hat, demnach neun Spitzen und keine Doppelpunkte besitzt und von der sechsten Ordnung ist. Diese Curve ist die dualistisch entsprechende zu der ausführlich behandelten  $C_3$ <sup>6</sup> und repräsentirt das Erzeugniss der auf  $g$  befindlichen Punktreihe mit der zu letzterer projektivischen Kegelschnittschaar, deren Grundtangente die Fundamentallinien und die zu  $g$  inverse Gerade  $g'$  sind.

