Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Autor: Leuch, Albert

Kapitel: Spezialfälle

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

Spezialfälle.

a) Der dem Fundamentaldreieck umschriebene Kegelschnitt p gehe durch E_3; dieser Fall tritt ein, wenn $a_3 = a_1 + a_2$.

Der feste Kegelschnitt hat die Gleichung

5. p) . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + (a_1 + a_2)x_1x_2 = 0.$

Die ihm entsprechende Gerade

6. p') . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$

enthält E_3 ebenfalls und berührt p in E_3.

Die hier entstehende C_6

$$\mathrm{IV_a})\quad a_1^2x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_2^2x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + (a_1 + a_2)^2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$- 2a_1a_2x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$$
$$- 2a_1(a_1 + a_2)x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$$
$$- 2a_2(a_1 + a_2)x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

unterscheidet sich von der Curve IV wesentlich nur dadurch, dass E_3 ein Berührungsknoten ist, seine Tangente ist identisch mit der Geraden p'. Dieselbe ist eine dreifache Tangente, bei welcher zwei ihrer Berührungspunkte in E_3 zusammenfallen, und der dritte Berührungspunkt muss dann nothwendigerweise auch reell sein. Da E_3 zwei Doppelpunkte repräsentirt, so sind die Plücker'schen Charaktere der Curve:

$$\mu = 6,\quad \delta = 5,\quad \varkappa = 3$$
$$\nu = 11,\quad \iota = 18,\quad \tau = 25.$$

In dem speziellen Falle (siehe Tafel VII)

p') . . . . . . $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

p) . . . . . . $x_2x_3 + 2x_1x_3 + 3x_1x_2 = 0$

$$C_6)\quad x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + 4x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + 9x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$- 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$$
$$- 6x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2) - 12x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

ist E ein isolirter Punkt, E_3 ein Berührungsknoten und E_1, E_2 sind Knotenpunkte der C_6. Die Tangente in E_3 schneidet die Curve in sechs Punkten, für welche man hat:

$$(x_1 - x_2)^4 \,.\, (4x_1 + 5x_2)^2 = 0,$$

d. h. p' hat in E_3 mit der C_6 vier zusammenfallende Punkte gemein und berührt sie ausserdem im Punkte

$$\mathfrak{B}'\left(\frac{x_2}{x_3} = -4, \frac{x_1}{x_3} = 5\right).$$

Die beiden sich in E_3 berührenden Curvenzweige sind imaginär.

Berührt der Kegelschnitt p (Gleichung 5) eine der Seiten des Dreiecks $E_1E_2E_3$, z. B. E_1E_2 in A_3, *) dann sondert sich von der Curve IVa die Gerade $x_1 + x_2 = 0$ ab und es bleibt eine Curve fünfter Ordnung, welche zwei Spitzen (A_1, A_2), einen Doppelpunkt (der isolirte Punkt E) und einen Berührungsknoten (E_3) besitzt, welch' letzterer ein isolirter Punkt der C_5 ist, da die beiden sich in ihm berührenden Curvenzweige imaginär sind. Für die C_5 ist E_1E_2 die Tangente im einfachen Punkte A_3 und die Gerade p′ eine Doppeltangente, deren Berührungspunkte in E_3 zusammenfallen; der fünfte Schnittpunkt von p′ mit der C_5 ist der Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$). Die C_5 hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 5, \quad \delta = 3, \quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 8, \quad \iota = 11, \quad \tau = 9.$$

---

b) Es sei p die dem Fundamentaldreieck umschriebene Ellipse, welche die Linien E_2E_3, E_1E_3, E_1E_2 beziehungsweise in A_1, A_2, A_3 berührt.

In diesem Falle hat p die Gleichung

7. p) . . . . $x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = 0.$

Die dieser Ellipse entsprechende Gerade p′ ist

8. p′) . . . . . $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$

sie ist die auf allen Seiten und an allen Ecken des Fundamentaldreiecks vom Punkte E harmonisch getrennte Einheitgerade e des mit $A_1A_2A_3$ identisch gedachten Liniencoordinatensystems A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2. Dieselbe schneidet die Fundamentallinien in den respectiven Punkten

$$B_1\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0\end{pmatrix}, \quad B_2\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0\end{pmatrix}, \quad B_3\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0\end{pmatrix}.$$

Für die sich hier ergebende C_6 erhält man nach (IV) die Gleichung

$$x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$- 2x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) - 2x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$$
$$- 2x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

---

*) p ist die den Punkt E einschliessende Ellipse $x_2x_3 + x_1x_3 + 2x_1x_2 = 0$ und p′ die Gerade $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Diese C_6 muss zerfallen. Weil E_2E_3 eine Tangente von p ist, so müssen ihre sämmtlichen Punkte der C_6 angehören, die Gerade $x_2 + x_3 = 0$ ist daher ein Theil der C_6. Ebenso sondern sich von der C_6 die geradlinigen Theile $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ ab und es bleibt somit übrig eine C_3. In der That kann man auf der linken Seite obiger Curvengleichung die Faktoren $x_2 + x_3$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_2$ abtrennen und bekommt als Gleichung der C_6:

$$(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2).$$
$$\left[x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3\right] = 0.$$

Sieht man von den Geraden $x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ ab, so ist im vorliegenden Falle das Erzeugniss die Curve dritter Ordnung:

$$\mathrm{IV_b})\ \begin{cases} x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3 = 0 \\ \quad \text{oder} \\ x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_3 + x_1) + x_3^2(x_1 + x_2) - 6x_1x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Diese C_3 wird von den Fundamentallinien in je drei Punkten geschnitten und zwar

$$\text{von } x_1 = 0 \text{ in } A_2\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix},\ A_3\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},\ B_1\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{von } x_2 = 0 \text{ in } A_1\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix},\ A_3\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix},\ B_2\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{von } x_3 = 0 \text{ in } A_1\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},\ A_2\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix},\ B_3\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalpunkte sind also einfache Punkte der C_3 und die Tangenten in denselben stimmmen überein mit den Ellipsentangenten in A_1, A_2, A_3. *) Bezeichnet $u = 0$ die Gleichung ($\mathrm{IV_b}$) so ist

$$u_1 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2x_3$$
$$u_2 = x_1^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2 + x_3^2 - 6x_1x_3$$
$$u_3 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1x_2$$
$$u_{11} = 2x_2 + 2x_3,\ u_{12} = 2x_1 + 2x_2 - 6x_3,\ u_{13} = 2x_1 + 2x_3 - 6x_2$$
$$u_{22} = 2x_3 + 2x_1,\ u_{23} = 2x_2 + 2x_3 - 6x_1,\ u_{33} = 2x_1 + 2x_2.$$

---

*) Da die C_3 sich selbst entspricht, so entspricht dem Punkte B_1 ein mit A_1 zusammenfallender Punkt B_1 in der Richtung A_1E_2, d. h. es ist E_2E_3 die Tangente der Curve in A_1.

Es ergeben sich nun folgende Gleichungen:

für die Tangente in A_1: $x_2 + x_3 = 0$

« « « « A_2: $x_1 + x_3 = 0$

« « « « A_3: $x_1 + x_2 = 0$

« « « « B_1: $-8x_1 + x_2 + x_3 = 0$

« « « « B_2: $x_1 - 8x_2 + x_3 = 0$

« « « « B_3: $x_1 + x_2 - 8x_3 = 0.$

Von den Punkten E, E_1, E_2, E_3 gehört einzig E der C_3 an, derselbe ist ein Doppelpunkt mit imaginären Tangenten, also ein isolirter Punkt der Curve.

Das Tangentenpaar in E hat die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0.$$

Die einzelnen Tangenten sind die von E nach den imaginären Schnittpunkten von p' mit p gehenden Geraden, da $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (oder e) die Polare des Punktes E in Bezug auf die Ellipse p ist. Ihre Gleichungen lauten:

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)x_1 + \left(1 + i\sqrt{3}\right)x_2 - 2x_3 = 0$$
$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)x_1 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)x_2 - 2x_3 = 0.$$

Die Tangente

in B_1 enthält die Punkte $D_1\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ 8x_1 - x_3 = 0 \end{pmatrix}$, $F_1\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 = 0 \end{pmatrix}$

« B_2 « « « $D_2\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ 8x_2 - x_3 = 0 \end{pmatrix}$, $F_2\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 - 8x_3 = 0 \end{pmatrix}$

« B_3 « « « $D_3\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \end{pmatrix}$, $F_3\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 - 8x_3 = 0 \end{pmatrix}$.

A_1D_2 und A_1D_3 sind inverse Strahlen
A_2D_1 « A_2F_3 « « «
A_3F_1 « A_3F_2 « « « ; *)

wenn daher eine der drei Tangenten in B_1, B_2, B_3 bekannt ist, so lassen sich die übrigen durch einfache Construction finden. (Tafel VIII, Fig. 1). Für die Schnittpunkte der C_3 mit ihrer Tangente in B_1 ergibt sich, wenn man in der Gleichung der Curve $x_1 = \frac{x_2 + x_3}{8}$ setzt: $(x_2 + x_3)^3 = 0$, d. h. alle drei Schnittpunkte fallen im Berührungs-

*) A_1D_2, A_1D_3, A_1B_1, A_1E bilden ein harmonisches Büschel und D_2, D_3, B_1, ${}^1E_1$ sind vier harmonische Punkte. Ebenso bilden je eine harmonische Gruppe D_1, F_3, B_2, ${}^2E_2$ und F_2, F_1, B_3, ${}^3E_3$.

punkte B_1 zusammen. Die betrachtete Tangente hat also in $\dot{B}_1$ mit der C_3 drei vereinigte Punkte gemein, sie ist daher eine Inflexionstangente und B_1 ein Inflexionspunkt der C_3. Ebenso besitzt die Curve Inflexionen in B_2 und B_3.

Die Curve dritter Ordnung hat einen Doppelpunkt (isolirten Punkt), keine Spitzen, ist daher von der vierten Klasse und besitzt drei Inflexionstangenten und keine Doppeltangenten. Die drei Inflexionspunkte sind die Schnittpunkte der Geraden e (p') mit der C_3.

Der dem Fundamentaldreieck umschriebene Kreis K schneidet die C_3 in sechs Punkten, worunter A_1, A_2, A_3 sich befinden; ausser den letztern gibt es also noch drei Schnittpunkte X, Y, Z von K mit C_3, ihre Inversen X', Y', Z' sind die unendlich fernen Punkte der Curve, welche alle reell sein müssen. XX', YY', ZZ', welche die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten angeben, sind die resp. von X, Y, Z ausgehenden, zu den resp. Inversen von A_lX, A_lY, A_lZ *) parallel laufenden Ellipsentangenten.

Die C_3 zerfällt in drei unendliche Aeste, von denen der eine (eine einfache Hyperbel genannt) keinen Inflexionspunkt hat und seine Asymptoten nicht durchschneidet, während der zweite (eine einfach inflektirte Hyperbel genannt) einen Inflexionspunkt hat und somit eine Asymptote durchsetzt, und der dritte (eine zweifach inflektirte Hyperbel) zwei Inflexionen hat und daher beide Asymptoten durchsetzt. Alle drei Theile bilden eine continuirliche Curve; der Theil eines Astes, welcher die Asymptote an ihrem einen Ende berührt, hängt zusammen mit dem Theil des zweiten Astes, welcher dieselbe Asymptote an ihrem andern Ende berührt. (Tafel VIII, Fig. 1.)

Wenn das Fundamentaldreieck gleichseitig ist, dann wird e (p') zur unendlich fernen Geraden und die Ellipse p zum Kreise, welcher dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umschrieben ist. Die Punkte X, Y, Z der Curve dritter Ordnung fallen resp. mit A_1, A_2, A_3 und daher ihre entsprechenden $\underset{\infty}{X'}$, $\underset{\infty}{Y'}$, $\underset{\infty}{Z'}$ mit den unendlich fernen Punkten der Fundamentallinien, d. h. resp. mit $\underset{\infty}{B_1}$, $\underset{\infty}{B_2}$, $\underset{\infty}{B_3}$ zusammen. Die unendlich fernen Punkte der C_3 sind daher identisch mit den im Unendlichen (auf den Fundamentallinien) liegenden Inflexionspunkten derselben. Die zugehörigen Tangenten oder die Asymptoten der C_3 sind die drei zu den Seiten des Fundamentaldreiecks und gleich weit von denselben abstehenden Parallelen

---

*) A_l bedeutet A_1 oder A_2 oder A_3.

$- 8x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 - 8x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$; dieselben bilden ein zu $A_1A_2A_3$ ähnliches Dreieck mit dem nämlichen Mittelpunkt E.

Die Tangenten der C_3 im isolirten Punkt E sind die von E nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten gehenden Geraden.

Da die C_3 im Endlichen keine Inflexionen haben kann, so wird sie von ihren Asymptoten nirgends geschnitten und besteht daher aus drei sogenannten einfachen Hyperbeln. Die drei hyperbolischen Zweige sind symmetrisch in Bezug auf die Symmetrieaxen des gleichseitigen Fundamentaldreiecks und unter sich congruent. (Tafel VIII, Fig. 2.)

Wenn die Coordinatenaxen, wie gewöhnlich, ein beliebiges Dreieck bilden, so ergibt sich für die Ecken des von den Inflexionstangenten der C_3 gebildeten Dreiecks Folgendes:

Bezeichnet A_1^* den Schnittpunkt der beiden Inflexionstangenten B_2D_2, B_3D_3 (vergl. Fig. 1, Tafel VIII), so genügen seine Coordinaten den beiden Gleichungen:

$$A_1^* \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Durch Subtraktion folgt: $9x_2 - 9x_3 = 0$ oder $x_2 - x_3 = 0$, d. h. A_1^* liegt auf A_1E. Ferner hat man für A_2^*, dem Schnittpunkt von B_1D_1 und B_3D_3:

$$\left. \begin{array}{r} -8x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{array} \right\}, \text{ woraus folgt: } x_1 - x_3 = 0$$

und für die dritte Ecke A_3^*:

$$\left. \begin{array}{r} -8x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}, \text{ woraus folgt: } x_1 - x_2 = 0;$$

d. h. A_2^* liegt auf A_2E und A_3^* auf A_3E. Nun sind (vergl. die Note auf Seite 38) EA_2, EA_3, EB_1, E^1E_1 vier harmonische Strahlen, daher auch EA_2^*, EA_3^*, EB_1, EE_1^*, und die Punkte A_2^*, A_3^*, B_1, E_1^* bilden eine harmonische Gruppe. Analog sind

A_1^*, A_3^*, B_2, E_2^* vier harmonische Punkte,

ebenso A_1^*, A_2^*, B_3, E_3^*.

Die Gerade p' ist somit auch auf allen Seiten und an allen Ecken des Dreiecks $A_1^*A_2^*A_3^*$ vom Punkte E harmonisch getrennt, oder der isolirte Punkt der C_3 ist der Pol der Verbindungslinie der Inflexionspunkte in Bezug auf das von den Inflexionstangenten gebildete Dreieck. *)

---

*) Vergl. Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven. Art. 216, pag. 239.

c) Der feste Kegelschnitt p sei der dem Fundamentaldreieck umschriebene Kreis K.

Die Gleichung des Kreises K heisst:

$$\text{p)} \quad \dots \quad \sin A_1 \,.\, x_2x_3 + \sin A_2 \,.\, x_1x_3 + \sin A_3 \,.\, x_1x_2 = 0.$$

Die Inverse von K ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, ihre Gleichung lautet:

$$\text{p}') \quad \dots \quad \sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_2 \,.\, x_2 + \sin A_3 \,.\, x_3 = 0. \;{}^{*})$$

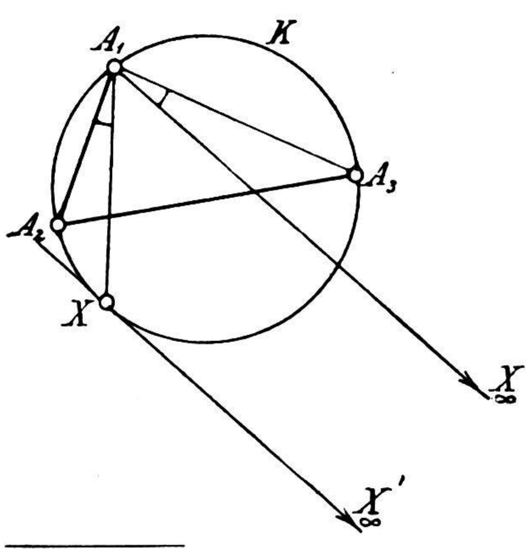
Im vorliegenden Falle geht Gleichung (IV) über in

$$\begin{aligned}\text{IV}_c) \quad & \sin^2 A_1 \,.\, x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + \sin^2 A_2 \,.\, x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 \\ & + \sin^2 A_3 \,.\, x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 2\sin A_1 \sin A_2 \,.\, x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) \\ & - 2\sin A_1 \sin A_3 \,.\, x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2) \\ & - 2\sin A_2 \sin A_3 \,.\, x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.\end{aligned}$$

Die durch diese Gleichung repräsentirte C_6 besitzt drei Spitzen in A_1, A_2, A_3, drei Knotenpunkte in E_1, E_2, E_3 und einen isolirten Punkt in E. Die Punkte B_1, B_2, B_3 sind unendlich fern, Q_1, Q_2, Q_3 die Schnittpunkte der resp. Kreistangenten in A_1, A_2, A_3 mit den gegenüberliegenden Fundamentallinien. Die Rückkehrtangenten sind die Geraden $A_1\underset{\infty}{B_1}$, $A_2\underset{\infty}{B_2}$, $A_3\underset{\infty}{B_3}$, deren Gleichungen lauten:

$$\sin A_2 \,.\, x_2 + \sin A_3 \,.\, x_3 = 0, \quad \sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_3 \,.\, x_3 = 0,$$
$$\sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_2 \,.\, x_2 = 0.$$

Die Tangenten der C_6 in Q_1, Q_2, Q_3 sind, wie im allgemeinen Falle IV, bezw. die Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.



Da den Kreistangenten lauter Parabeln entsprechen, mit Ausnahme der drei Paare paralleler Geraden $A_2A_3, A_1\underset{\infty}{B_1}$; $A_1A_3, A_2\underset{\infty}{B_2}$; $A_1A_2, A_3\underset{\infty}{B_3}$, so stellt die C_6 den Ort der Schnittpunkte der Kreistangenten mit ihren entsprechenden Parabeln vor. (T. IX.)

Die unendlich ferne Gerade ist eine dreifache Tangente der C_6, ihre Berührungspunkte sind reell und von einander verschieden, wie sich in der Folge zeigen wird. Ist $\underset{\infty}{X'}$ ein

---

*) Unter A_1, A_2, A_3 sind hier die Winkel des Fundamentaldreiecks zu verstehen.

Berührungspunkt, so liegt der Inverse X auf dem Kreise K (fällt mit keinem Fundamentalpunkt zusammen, so lange das Fundamentaldreieck ein beliebiges ist) und repräsentirt einen Berührungspunkt von C_6 und K. Die Gerade $X\underset{\infty}{X'}$ muss die Kreistangente in X sein und ihr entspricht die durch A_1, A_2, A_3, X, $\underset{\infty}{X'}$ gehende Parabel, deren Axe parallel $X\underset{\infty}{X'}$ ist und welche die unendlich ferne Gerade, also auch die C_6, in $\underset{\infty}{X'}$ berührt.

Wenn $x_2 + \lambda x_3 = 0$ die Gleichung des Strahles A_1X bedeutet, dann hat man für die Coordinaten von X:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda \sin A_1 : -\lambda(\sin A_2 - \lambda \sin A_3) : (\sin A_2 - \lambda \sin A_3),$$

für diejenigen von $\underset{\infty}{X'}$:

$$x_1' : x_2' : x_3' = (\sin A_2 - \lambda \sin A_3) : -\sin A_1 : \lambda \sin A_1$$

und die Gleichung der Kreistangente in X lautet:

$$(\sin A_2 - \lambda \sin A_3)^2 \,.\, x_1 + \sin A_1 \sin A_2 \,.\, x_2 + \lambda^2 \,.\, \sin A_1 \sin A_3 \,.\, x_3 = 0.$$

Diese Gleichung muss auch für die Coordinaten von $\underset{\infty}{X'}$ erfüllt sein, setzt man daher x_i' an Stelle von x_i, so erhält man zur Bestimmung von λ die cubische Gleichung:

$$\lambda^3 \sin(A_1 - A_3) + 3\lambda^2 \sin A_3 - 3\lambda \sin A_2 - \sin(A_1 - A_2) = 0.$$

Ihre Wurzeln sind reell und von einander verschieden, woraus folgt, dass es auf dem Kreise K drei Punkte X, Y, Z gibt, in denen die Tangenten der C_6 zugleich Kreistangenten sind. *) Die Tangenten XX', YY', ZZ' geben gleichzeitig die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten $\underset{\infty}{X'}$, $\underset{\infty}{Y'}$, $\underset{\infty}{Z'}$ der C_6 an. Von den im allgemeinen Falle IV auftretenden sechs unendlich fernen Punkten fallen also je zwei zusammen und bilden einen Berührungspunkt der C_6 mit der unendlich fernen Geraden. Die C_6 hat also keine im Endlichen liegenden Asymptoten und sie besteht aus drei Theilen, wovon der eine, mit zwei Spitzen und einem Knotenpunkt versehen, ganz im Endlichen liegt, — der zweite, eine Spitze und einen Knoten besitzend, ein unendlicher Ast ist, der, ähnlich wie die Parabel, die unendlich ferne Gerade berührt, und der dritte, einen Knoten enthaltend, die unendlich

---

*) X, Y, Z bilden ein gleichseitiges Dreieck, was planimetrisch leicht bewiesen werden kann; daher Kreistangente $X\underset{\infty}{X'} \parallel YZ$, $Y\underset{\infty}{Y'} \parallel XZ$ und $Z\underset{\infty}{Z'} \parallel XY$. Die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten $\underset{\infty}{X'}$, $\underset{\infty}{Y'}$, $\underset{\infty}{Z'}$ werden also angegeben durch die respectiven Dreiecksseiten YZ, XZ, XY.

ferne Gerade zwei Mal berührt. Jeder dieser Theile bildet einen zusammenhängenden Curvenzweig. *)

Ist im Fundamentaldreieck $\sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_3$, so geht die cubische Gleichung für λ über in

$$\lambda^3 + \frac{3\sin A_2}{\sin(A_1 - A_2)} \cdot \lambda^2 - \frac{3\sin A_2}{\sin(A_1 - A_2)} \cdot \lambda - 1 = 0.$$

Hiervon ist $\lambda = 1$ eine Wurzel, ein Berührungspunkt X fällt also in den Schnittpunkt von $x_2 + x_3 = 0$ mit K, d. h. fällt mit A_1 zusammen. Der entsprechende unendlich ferne Punkt X'_∞ ist dann der Schnittpunkt der Fundamentallinie $x_1 = 0$ mit der zu ihr parallelen Kreistangente in A_1 ($x_2 + x_3 = 0$). Die beiden andern Wurzeln ergeben sich aus

$$\lambda_2 + \left[\frac{\sin(A_1 - A_2) + 3\sin A_2}{\sin(A_1 - A_2)}\right] \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-[\sin(A_1 - A_2) + 3\sin A_2] \pm \sqrt{[\sin(A_1 - A_2) + 3\sin A_2]^2 - 4\sin^2(A_1 - A_2)}^{\dagger)}}{2\sin(A_1 - A_2)};$$

sie sind beide negativ oder beide positiv, je nachdem $A_1 \gtrless A_2$ ist, und die eine ist der reciproke Werth der andern. Denselben gehören die Punkte Y und Z zu, welche auf einer Parallelen zu A_2A_3 liegen und zwar beide unter oder über A_2A_3; die Tangenten in Y und Z sind symmetrisch zu A_1M. **) — Da $x_2 + x_3 = 0$ eine Tangente von K ist, so reducirt sich die C_6 auf eine C_5; ihre Gleichung lautet:

$$\sin^2 A_1 \,.\, x_1^2(x_2 + x_3)(x_2 - x_3)^2 + \sin^2 A_2 \,.\, (x_2 + x_3)(x_1^2 - x_2x_3)^2$$
$$+ 2\sin A_1 \sin A_2 \,.\, x_1(x_2 - x_3)^2 (x_1^2 + x_2x_3) = 0.$$

---

*) Die durch die Gleichung $\mathrm{IV_c}$ ausgedrückte C_6 ist der Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis K umhüllen.

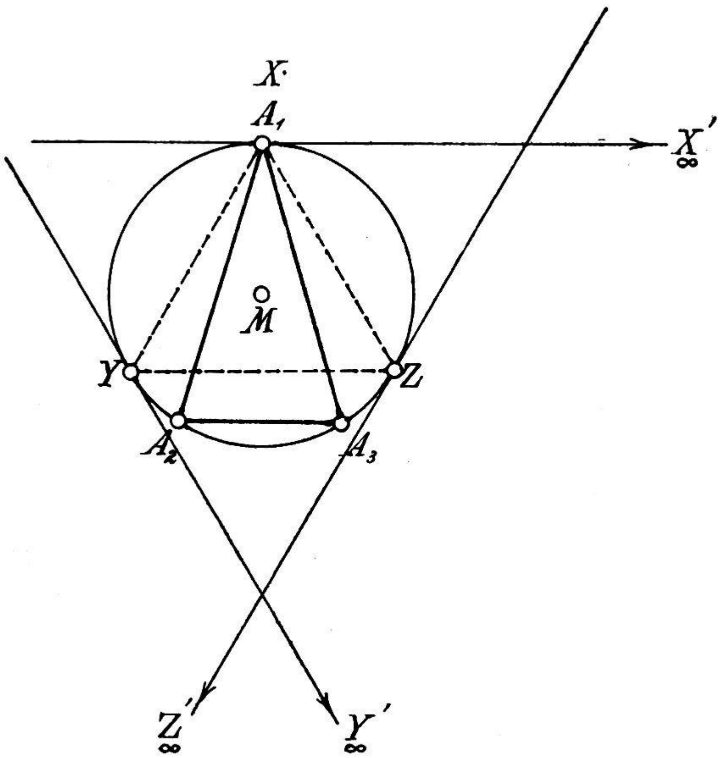
†) Berücksichtigt man, dass $\sin(A_1 - A_2) = \sin 3A_2$, so wird

$$\lambda = \frac{-(3 - 2\sin^2 A_2) \pm 2\sin A_2 \cos A_2 \,.\, \sqrt{3}}{3 - 4\sin^2 A_2} \quad \text{oder}$$

$$\lambda = \frac{-(3 - 2\sin^2 A_2) \pm \sqrt{3} \,.\, \sin 2A_2}{3 - 4\sin^2 A_2}.$$

**) X, Y, Z bilden ein gleichseitiges Dreieck, ebenso die Tangenten XX'_∞, YY'_∞, ZZ'_∞.

Diese C_5 besitzt zwei Spitzen (in A_2 und A_3), zwei Doppelpunkte (den isolirten Punkt E und den Knotenpunkt E_1), ist daher von der zehnten Klasse, hat 17 Inflexionstangenten und 17 Doppeltangenten.



(Tafel X.) Sie berührt die Gerade $x_2 + x_3 = 0$ in A_1 und die unendlich ferne Gerade in Y'_∞ und Z'_∞, den Inversen von Y_∞ und Z, welche Berührungspunkte von C_5 und K sind. Die unendlich ferne Gerade ist eine Doppeltangente der C_5 und schneidet die Curve in X'_∞. Die einzige im Endlichen liegende Asymptote der C_5 ist die Tangente in X'_∞, dieselbe ist eine zu A_2A_3 parallele Gerade, welche die Gleichung hat:

$$-8\sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_2 \,.\, x_2 + \sin A_2 x_3 = 0.$$

Die Asymptote hat mit der Curve in X'_∞ drei zusammenfallende Punkte gemein, ist daher Inflexionstangente und X'_∞ ein Inflexionspunkt der Curve; letztere wird im Endlichen von der Asymptote nicht geschnitten.

Die C_5 ist vollständig symmetrisch in Bezug auf die Halbirungslinie des Winkels A_1.

Wenn $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = \measuredangle A_3$ ist, so fällt X mit A_1, Y mit A_2, Z mit A_3 zusammen und es ergibt sich genau dieselbe Curve dritter Ordnung, die wir unter IV_b in dem speziellen Falle erhielten, in welchem ein gleichseitiges Fundamentaldreieck angenommen wurde. (Siehe pag. 40 und Tafel VIII, Fig. 2.)

Das behandelte Problem kann in der Weise verallgemeinert werden, dass der feste Kegelschnitt p ersetzt wird durch eine Curve m.) Ordnung n.) Klasse; ihre Inverse oder Transformirte ist eine Curve von der Ordnung 2m, für welche die Fundamentalpunkte mfache Punkte sind. Als Ort der Schnittpunkte aller Tangenten der festen Curve (C_m^n) mit ihren entsprechenden Kegelschnitten ergibt sich eine Curve von der Ordnung 3n, für welche sowohl die Fundamentalpunkte als die sich selbst entsprechenden Punkte E, E_1, E_2, E_3 nfache Punkte sind. Die Tangenten der C_{3n} im Fundamentalpunkt A_i sind die Inversen der von A_i aus an die feste Curve p gehenden n Tangenten, in A_i schneiden sich also (im Allgemeinen) n Curvenzweige, welche natürlich paarweise imaginär sein können. Gehört A_i als einfacher Punkt der Curve p an, dann vereinigen sich zwei von den n Curventangenten, und zwei der durch A_i gehenden Aeste der C_{3n} bilden daher eine Spitze. Im Schnittpunkt der zu A_i gehörigen Tangente von p mit der Fundamentallinie $x_i = 0$ berührt die letztere die Curve C_{3n} und schneidet sie ausser in den Fundamentalpunkten A_k und A_l noch in n — 2 einfachen Punkten.

Die Tangenten der C_{3n} in einem der nfachen Punkte E sind die von E aus an die feste Curve p gehenden Tangenten. Ist E ein einfacher Punkt der Curve p, so gehen durch denselben n Zweige der Curve C_{3n}, von denen sich zwei in ihm berühren.

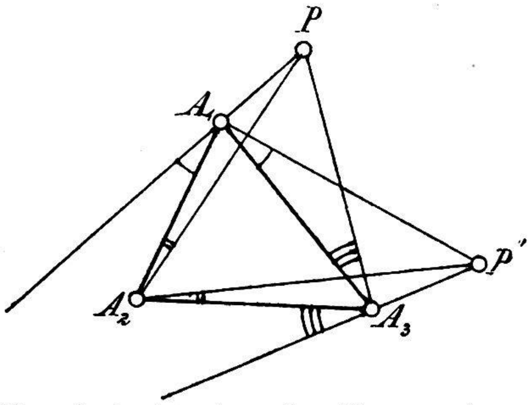
Wenn die feste Curve eine der Seiten des vollständigen Vierecks E E_1 E_2 E_3 β Mal berührt, so hat die erzeugte Curve die Ordnungszahl 3n — β. *)

Eine eingehende Untersuchung einzelner besonders interessanter Fälle, in welchen die feste Curve p von höherem als dem zweiten Grade ist, soll demnächst an anderer Stelle erfolgen.

---

*) Die C_{3n} ist der Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen eine feste Curve C_m^n umhüllen.

Zum Schlusse verdient noch besondere Beachtung der Spezialfall, in welchem der feste Kegelschnitt p zu einem Punkt P zusammenschrumpft. Die Gesammtheit der beweglichen Geraden d. h. der Tangenten von p geht über in das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P



und die den beweglichen Geraden entsprechenden Kegelschnitte bilden das zum Strahlenbüschel projektivische Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, P', wobei P' den entsprechenden (inversen) Punkt von P bedeutet. Der Ort der Schnittpunkte der beweglichen Geraden mit ihrem entsprechenden Kegelschnitt ist das Erzeugniss der beiden projektivischen Büschel.

Um das Strahlenbüschel durch eine Gleichung auszudrücken, müssen die Coordinaten seines Scheitels P oder aber die Gleichungen von zwei durch P gehenden (und P bestimmenden) Strahlen gegeben sein. Die einfachste Gleichungsform haben im Büschel P die Strahlen PA_1, PA_2 und PA_3. Wenn PA_1 und PA_2 durch die Gleichungen

1. PA_1) . . . . . . $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$
2. PA_2) . . . . . . $a_1x_1 + a_3x_3 = 0$ *)

repräsentirt werden, so ist für die Coordinaten von P:

$$\frac{x_1}{x_3} = - \frac{a_3}{a_1}, \quad \frac{x_2}{x_3} = - \frac{a_3}{a_2} \quad \text{oder}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_2a_3 : a_3a_1 : - a_1a_2$$

und für die Coordinaten des entsprechenden Punktes P':

$$x_1' : x_2' : x_3' = a_1 : a_2 : - a_3.$$

Der Strahl PA_3 hat die aus (1) und (2) durch Subtraktion sich ergebende Gleichung:

3. PA_3) . . . . . . $a_1x_1 - a_2x_2 = 0.$

Das Strahlenbüschel wird nun repräsentirt durch:

$$4. \quad . \; . \; . \; . \quad \left\{ \begin{array}{ll} (a_2x_2 + a_3x_3) + \lambda(a_1x_1 + a_3x_3) = 0 & \text{oder} \\ \lambda a_1x_1 + a_2x_2 + (1 + \lambda) \, . \, a_3x_3 = 0. & \end{array} \right.$$

Wenn der variable Parameter die Werthe 0, ∞, -1 annimmt, so gibt (4) respektive die Gleichungen der Strahlen PA_1, PA_2, PA_3. Das entsprechende Kegelschnittbüschel erhält alsdann die Gleichung:

*) a_1, a_2, a_3 bedeuten positive oder negative constante Zahlen.

$$5. \quad \begin{cases} a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 + \lambda(a_1x_2x_3 + a_3x_1x_2 = 0 \quad \text{oder} \\ \lambda a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + (1 + \lambda) \,.\, a_3x_1x_2 = 0. \end{cases}$$

In diesem Büschel gibt es stets drei in Linienpaare zerfallende Kegelschnitte, nämlich die Gegenseitenpaare des Vierecks $A_1A_2A_3P'$:

$$A_1P',\ A_2A_3\,;\quad A_2P',\ A_1A_3\,;\quad A_3P',\ A_1A_2\,;$$

dieselben entsprechen den resp. Strahlen

$$A_1P\,,\quad A_2P\,,\quad A_3P.$$

Da einer Geraden eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel entspricht, je nachdem sie den Kreis K nicht schneidet, berührt oder schneidet, so wird das Kegelschnittbüschel bei jeder beliebigen Lage des Punktes P Hyperbeln enthalten, darunter eine gleichseitige, die Inverse des Strahles PM. Dagegen können Ellipsen und zwei Parabeln nur dann vorkommen, wenn P ausserhalb des Kreises K liegt; die zwei Parabeln entsprechen den von P ausgehenden Kreistangenten. Befindet sich P auf dem Kreise, so existirt nur eine Parabel, sie ist die Inverse der zu P gehörigen Kreistangente; in diesem Falle liegt der vierte Grundpunkt P' im Unendlichen. Endlich kann das Kegelschnittbüschel einen Kreis und zwar K selbst enthalten, wenn P ein Punkt der unendlich fernen Geraden ist und demzufolge P' auf K liegt.

Das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P und das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, P' sind nun offenbar projektivisch und erzeugen demnach eine ebene Curve. Das Erzeugniss dieser beiden projektivischen Gebilde ist der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente; seine Gleichung ergibt sich durch Elimination von λ zwischen den Gleichungen (4) und (5).

Aus (4) folgt: $\lambda = -\dfrac{a_2x_2 + a_3x_3}{a_1x_1 + a_3x_3}$; diess in (5) eingesetzt gibt:

$$(a_2x_2 + a_3x_3)\,(a_1x_2x_3 + a_3x_1x_2) - (a_1x_1 + a_3x_3)(a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2) = 0$$

oder

$$6. \quad \begin{cases} a_1x_1{}^2(a_3x_2 + a_2x_3) - a_2x_2{}^2(a_3x_1 + a_1x_3) + a_3x_3{}^2(a_2x_1 - a_1x_2) = 0 \\ \qquad \text{oder} \\ a_1x_2x_3(a_2x_2 + a_3x_3) - a_2x_1x_3(a_1x_1 + a_3x_3) - a_3x_1x_2(a_1x_1 - a_2x_2 = 0 \\ \qquad \text{oder} \\ a_2a_3x_1(x_2{}^2 - x_3{}^2) + a_1a_3x_2(x_3{}^2 - x_1{}^2) - a_1a_2x_3(x_1{}^2 - x_2{}^2) = 0. \end{cases}$$

Das Erzeugniss ist daher eine Curve dritter Ordnung. Diese C_3 enthält sowohl die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels als den Scheitel des Strahlenbüschels, ferner die Punkte

$$E\begin{pmatrix}x_1=1\\x_2=1\\x_3=1\end{pmatrix},\quad E_1\begin{pmatrix}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=1\end{pmatrix},\quad E_2\begin{pmatrix}x_1=1\\x_2=-1\\x_3=1\end{pmatrix},\quad E_3\begin{pmatrix}x_1=1\\x_2=1\\x_3=-1\end{pmatrix}$$

und die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, in denen die Strahlen PA_1, PA_2, PA_3 die resp. Fundamentallinien A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 schneiden. (Tafel XI.) Diese zwölf ausgezeichneten Punkte der C_3

$$A_1 \text{ und } Q_1,\ A_2 \text{ und } Q_2,\ A_3 \text{ und } Q_3,\ E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ P \text{ und } P'$$

sind die Durchschnittspunkte der acht Strahlen

$$PA_1,\ PA_2,\ PA_3,\ PE,\ PE_1,\ PE_2,\ PE_3,\ PP'$$

mit ihren entsprechenden Kegelschnitten. (Dem Strahl PP' entspricht der durch A_1, A_2, A_3, P, P' bestimmte Kegelschnitt.) Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, welche zu den Schnittpunkten der C_3 mit den resp. Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehören, haben folgende Coordinaten:

$$\begin{array}{ll} Q_1) & x_1 : x_2 : x_3 = 0 : a_3 : -a_2 \\ Q_2) & x_1 : x_2 : x_3 = a_3 : 0 : -a_1 \\ Q_3) & x_1 : x_2 : x_3 = a_2 : a_1 : 0. \end{array}$$

Die C_3 entspricht sich selbst und zwar in der Weise, dass entsprechende Punkte auf Strahlen durch P liegen. *)

Jeder durch P gehende Strahl hat mit der C_3 ausser P noch zwei Punkte S_1 und S_2 gemein, die zu einander invers sind und welche reell und verschieden oder zusammenfallend oder imaginär sein können. **) Sie fallen zusammen für die vier Strahlen PE, PE_1, PE_2, PE_3. Bei dem Strahl PP' fällt einer der Punkte S_1, S_2 mit P, der andere mit P' zusammen.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, für einige der bereits bekannten Punkte der C_3 die Tangenten anzugeben. Die Tangente in A_1 ist die Gerade $P'A_1$, denn da die Curve sich selbst entspricht, so entspricht dem Punkte Q_1 ein dem Punkte A_1 unendlich naher Punkt in der Richtung von A_1P', demnach muss A_1P' die C_3 in A_1 berühren. Ebenso sind $P'A_2$, $P'A_3$ die resp. Tangenten der C_3

---

*) Diess ergibt sich ohne Weiteres aus der Erzeugungsweise der C_3 und wird direkt nachgewiesen, wenn man ihre Gleichung transformirt.

**) S_1 und S_2 sind die Brennpunkte eines Kegelschnittes, welcher dem Fundamentaldreiseit eingeschrieben ist; es liegen daher die Brennpunkte sämmtlicher die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P bilden, auf der C_3.

in A_2 und A_3. Dem Strahl PE entspricht ein ihn in E berührender Kegelschnitt, PE hat daher mit der C_3 in E zwei zusammenfallende Punkte gemein, d. h. ist die Tangente der Curve in E. Aus analogen Gründen wird die C_3 von den Strahlen PE_1, PE_2, PE_3 bezw. in E_1, E_2, E_3 berührt. Der Strahl PP′ hat mit der C_3 in P zwei vereinigte Punkte gemein, ist daher die zu P gehörige Tangente der Curve. In Folge dessen (und des Umstandes, dass dem Curvenelement bei P dasjenige bei P′ entspricht) muss der dem Strahle PP′ correspondirende Kegelschnitt die C_3 in P′ berühren; die Tangente des durch die fünf Punkte A_1, A_2, A_3, P, P′ bestimmten Kegelschnittes in P′ stellt somit die Curventangente in letzterem Punkte vor.

Vorstehendes wird analytisch am einfachsten bestätiget durch die Aufstellung der Gleichungen der Tangenten.

Wir schreiben die Gleichung der C_3 in der Form:

$$u \equiv a_1a_3x_1^2x_2 + a_1a_2x_1^2x_3 - a_1a_2x_2^2x_3 - a_2a_3x_1x_2^2 + a_2a_3x_1x_3^2 - a_1a_3x_2x_3^2 = 0$$

und bilden

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 2a_1a_3x_1x_2 + 2a_1a_2x_1x_3 - a_2a_3x_2^2 + a_2a_3x_3^2$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_1a_3x_1^2 - 2a_1a_2x_2x_3 - 2a_2a_3x_1x_2 - a_1a_3x_3^2$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_1a_2x_1^2 - a_1a_2x_2^2 + 2a_2a_3x_1x_3 - 2a_1a_3x_2x_3.$$

In diesen Ausdrücken sind nun an Stelle der x_i die Coordinaten der Berührungspunkte der betreffenden Tangenten zu setzen. Für $A_1(x_1 = h_1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ folgt:

$$u_1 = 0,\quad u_2 = a_1a_3h_1^2,\quad u_3 = a_1a_2h_1^2;$$

somit lautet die Gleichung der Tangente in A_1: $a_3x_2 + a_2x_3 = 0$. Diess ist aber die Gleichung des zu PA_1 inversen Strahles $P'A_1$.

Für $A_2(x_1 = 0,\ x_2 = h_2,\ x_3 = 0)$ ergibt sich:

$$u_1 = -a_2a_3h_2^2,\quad u_2 = 0,\quad u_3 = -a_1a_2h_2^2;$$

die Tangente der C_3 in A_2 hat daher die Gleichung

$$a_3x_1 + a_1x_3 = 0,$$

welche identisch ist mit der Gleichung von $P'A_2$.

$A_3(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = h_3)$ gibt:

$$u_1 = a_2a_3h_3^2,\quad u_2 = -a_1a_3h_3^2,\quad u_3 = 0;$$

die Tangente in A_3 wird also ausgedrückt durch $a_2x_1 - a_1x_2 = 0$, d. h. sie ist identisch mit dem Strahl $P'A_3$.

Bevor wir die Gleichungen der Tangenten der C_3 in den Punkten E, E_1, E_2, E_3, P, P' ermitteln, suchen wir die Gleichungen der Strahlen $PE, PE_1, PE_2, PE_3, PP'$ und der zu P' gehörigen Tangente des dem Strahl PP' entsprechenden Kegelschnittes.

Für die Coordinaten von $E(1, 1, 1)$ geht die Gleichung (4) über in $a_2 + a_3 + \lambda(a_1 + a_3) = 0$, woraus folgt:

$$\lambda = -\frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_3}.$$

Der Strahl PE erhält somit die Gleichung:

$$a_2x_2 + a_3x_3 - \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_3}(a_1x_1 + a_3x_3) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$PE) \; \ldots \; a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 + a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2) \,.\, x_3 = 0.$$

Analog ergeben sich für PE_1, PE_2, PE_3, PP' die Gleichungen:

$$PE_1) \quad a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 - a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$PE_2) \quad a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 + a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$PE_3) \quad a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 - a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)x_3 = 0$$

$$PP') \quad a_1(a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_2(a_3^2 - a_1^2)x_2 - a_3(a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.$$

Der dem Strahl PP' entsprechende Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_1(a_2^2 - a_3^2)x_2x_3 + a_2(a_3^2 - a_1^2)x_1x_3 - a_3(a_1^2 - a_2^2)x_1x_2 = 0$$

und seine Tangente in P' ist

$$a_2a_3(a_2^2 - a_3^2) \,.\, x_1 + a_1a_3(a_3^2 - a_1^2) \,.\, x_2 - a_1a_2(a_1^2 - a_2^2) \,.\, x_3 = 0.$$

Da nun u_1, u_2, u_3 für die Coordinaten von E, E_1, E_2, E_3, P, P' die Werthe annehmen:

$$(E)\left\{\begin{aligned} u_1 &= 2a_1(a_2 + a_3) \\ u_2 &= -2a_2(a_3 + a_1) \\ u_3 &= -2a_3(a_1 - a_2) \end{aligned}\right. \qquad (E_1)\left\{\begin{aligned} u_1 &= -2a_1(a_2 + a_3) \\ u_2 &= 2a_2(a_3 - a_1) \\ u_3 &= -2a_3(a_1 + a_2) \end{aligned}\right.$$

$$(E_2)\left\{\begin{aligned} u_1 &= 2a_1(a_2 - a_3) \\ u_2 &= 2a_2(a_3 + a_1) \\ u_3 &= 2a_3(a_1 + a_2) \end{aligned}\right. \qquad (E_3)\left\{\begin{aligned} u_1 &= -2a_1(a_2 - a_3) \\ u_2 &= -2a_2(a_3 - a_1) \\ u_3 &= 2a_3(a_1 - a_2) \end{aligned}\right.$$

$$(P)\left\{\begin{aligned} u_1 &= -a_1^2a_2a_3(a_2^2 - a_3^2) \\ u_2 &= -a_1a_2^2a_3(a_3^2 - a_1^2) \\ u_3 &= a_1a_2a_3^2(a_1^2 - a_2^2) \end{aligned}\right. \qquad (P')\left\{\begin{aligned} u_1 &= -a_2a_3(a_2^2 - a_3^2) \\ u_2 &= -a_1a_3(a_3^2 - a_1^2) \\ u_3 &= a_1a_2(a_1^2 - a_2^2) \; *) \end{aligned}\right.$$

*) Bei jeder dieser sechs Werthegruppen ist ein constanter Faktor weggelassen worden.

so lauten die Gleichungen der Tangenten der C_3 in E, E_1, E_2, E_3, P, P' folgendermassen:

$$t_E)\quad a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 + a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)x_3 = 0$$
$$t_{E_1})\quad a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 - a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0$$
$$t_{E_2})\quad a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 + a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0$$
$$t_{E_3})\quad a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 - a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)x_3 = 0$$
$$t_P)\quad a_1(a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_2(a_3^2 - a_1^2)x_2 - a_3(a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0$$
$$t_{P'})\quad a_2a_3(a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_1a_3(a_3^2 - a_1^2)x_2 - a_1a_2(a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.$$

Die Tangenten t_E, t_{E_1}, t_{E_2}, t_{E_3}, t_P stimmen also vollständig mit den resp. Strahlen PE, PE_1, PE_2, PE_3, PP' und $t_{P'}$ mit der Tangente des zu PP' inversen Kegelschnittes in P' überein.

Endlich erhält man für die Tangenten der C_3 in Q_1, Q_2, Q_3 folgende Gleichungen:

$$t_{Q_1})\quad \ldots\quad (a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_1a_2x_2 + a_1a_3x_3 = 0$$
$$t_{Q_2})\quad \ldots\quad a_1a_2x_1 - (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$$
$$t_{Q_3})\quad \ldots\quad a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 - (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.$$

Für diese Tangenten lassen sich auch sehr einfache Constructionen herleiten. Zu diesem Zwecke stellen wir die Gleichungen der Geraden Q_1P', Q_2P' und Q_3P' auf und vergleichen dieselben mit denjenigen von t_{Q_1}, t_{Q_2} und t_{Q_3}.

Die Verbindungslinie der Punkte

$$Q_1(0 : a_3 : - a_2),\quad P'(a_1 : a_2 : - a_3)$$

hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & a_3, & -a_2 \\ a_1, & a_2, & -a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder}$$

$$Q_1P')\quad \ldots\quad (a_2^2 - a_3^2)x_1 - a_1a_2x_2 - a_1a_3x_3 = 0.$$

Die vier Strahlen $Q_1A_1 (= A_1P)$, Q_1A_3, Q_1P', t_{Q_1} bilden, wie aus ihren Gleichungen ersichtlich ist, ein harmonisches Büschel und zwar ist t_{Q_1} der harmonisch conjugirte Strahl von Q_1P' in Bezug auf Q_1A_1 und Q_1A_3. Um daher die Tangente der C_3 in Q_1 zu erhalten, hat man im Büschel $Q_1 . A_1A_2P'$ den vierten harmonischen, zu Q_1P' conjugirten Strahl zu construiren.

Für Q_2P' und Q_3P' ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a_3, & 0, & -a_1 \\ a_1, & a_2, & -a_3 \end{vmatrix} = 0,\quad \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a_2, & a_1, & 0 \\ a_1, & a_2, & -a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder}$$

Q_2P') . . $a_1a_2x_1 + (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$

Q_3P') . . $a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 + (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.$

Die Gleichungen

$Q_2A_2 (= Q_2P)$ . . . $a_1x_1 + a_3x_3 = 0$

Q_2A_1) . . . . $x_2 = 0$

Q_2P') $a_1a_2x_1 + (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$

t_{Q_2}) $a_1a_2x_1 - (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$

zeigen, dass Q_2A_2, Q_2A_1, Q_2P', t_{Q_2} vier harmonische Strahlen sind, und zwar ist die Tangente t_{Q_2} der harmonisch conjugirte zu Q_2P' in Bezug auf Q_2A_2 und Q_2A_1.

Endlich bilden die durch die Gleichungen

Q_3A_3) . . . . . . $a_1x_1 - a_2x_2 = 0$

Q_3A_1) . . . . $x_3 = 0$

Q_3P') . . $a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 + (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0$

t_{Q_3}) . . $a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 - (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0$

repräsentirten Strahlen Q_3A_3, Q_3A_1, Q_3P', t_{Q_3} ein harmonisches Büschel, in welchem die Tangente t_{Q_3} der zu Q_3P' conjugirte Strahl ist.

Unsere Curve dritter Ordnung kann keine Doppelpunkte besitzen, weil auf jedem durch P gehenden Strahl neben P nur noch zwei Curvenpunkte liegen können; wäre nun ein Doppelpunkt D vorhanden, so hätte, da dem Punkte D im Allgemeinen wieder ein Doppelpunkt entsprechen müsste, PD mit der Curve fünf Punkte gemein. (A_1, A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3 können nicht Doppelpunkte sein, weil in jedem dieser Punkte eine einzige Curventangente existirt, wie nachgewiesen worden ist.) *) Aus dem gleichen Grunde enthält die C_3 keine Rückkehrpunkte. Auch die folgende Betrachtung zeigt deutlich, dass die C_3 weder Doppelpunkte noch Spitzen hat. Die erste Polare des Punktes P in Bezug auf die C_3 ist ein Kegelschnitt, welcher durch E, E_1, E_2, E_3, P geht und die Curve in P berührt und hat somit keine weitern als diese sechs Punkte mit der C_3 gemein. Wären nun Doppelpunkte und Spitzen vorhanden, so müssten dieselben auf der ersten Polaren liegen, und die letztere hätte alsdann mit der C_3 mehr als sechs Punkte gemein, was unmöglich ist. (Die erste Polare von P′ in Bezug auf die C_3 geht durch A_1, A_2, A_3, P, P′ und berührt die C_3 in P′, sie ist also gerade derjenige Kegelschnitt, welcher dem Strahl PP′ entspricht.)

*) Läge D in A_i oder E_i, so hätte PD vier Punkte mit der C_3 gemein (im Falle D in E_i könnten PD und die C_3 auch fünf gemeinsame Punkte haben, dann müsste aber E_i ein Berührungsknoten der C_3 sein).

Da die C_3 keine Doppel- und Rückkehrpunkte enthält, so ist ihre Klassenzahl $\nu = \mu(\mu - 1) = 6$, die Zahl der Wendetangenten $\iota = 3\mu(\mu - 2) = 9$ und die Zahl der Doppeltangenten

$$\tau = \frac{1}{2}\mu(\mu - 2)(\mu - 3)(\mu + 3) \quad \text{oder}$$
$$= \frac{1}{2}(\nu - \mu)(\nu + \mu - 9) = 0.$$

Die vorliegende C_3 ist daher die allgemeinste Curve dritter Ordnung.

Die C_3 hat im Allgemeinen drei unendlich ferne Punkte $U'_\infty, V'_\infty, W'_\infty$, die Coordinaten derselben ergeben sich durch Auflösung der Gleichungen der unendlich fernen Geraden und der C_3 nach $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$. Ihre Inversen sind die im Allgemeinen von A_1, A_2, A_3 verschiedenen Schnittpunkte U, V, W des Kreises K mit der C_3, und die Strahlen UU'_∞, VV'_∞, WW'_∞ gehen durch P. Um zu untersuchen, welche Strahlen des Büschels P die im Unendlichen liegenden Punkte der C_3 liefern, bestimmen wir den Schnittpunkt des Strahles

$$g_\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad \lambda a_1 x_1 + a_2 x_2 + (1 + \lambda) a_3 x_3 = 0$$

mit der unendlich fernen Geraden

$$g_\infty) \quad . \quad . \quad . \quad \sin A_1 x_1 + \sin A_2 x_2 + \sin A_3 x_3 = 0.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$U'_\infty)\ \frac{x_1}{x_3} = \frac{a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2}{\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1},\quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3}{\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1}.$$

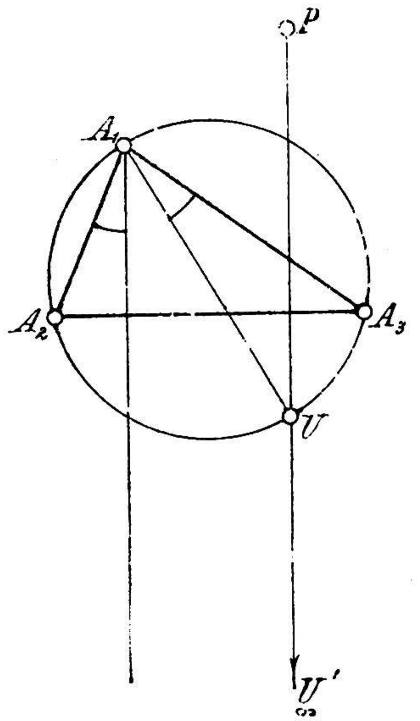
Soll nun U'_∞ der C_3 angehören, so muss sein entsprechender Punkt U, der die Coordinaten

$$U) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho\left[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\right]\left[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\right] \\ x_2 &= \varrho\left[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\right]\left[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\right] \\ x_3 &= \varrho\left[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\right]\left[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\right] \end{aligned} \right.$$

hat, auf g_λ, K und C_3 liegen. Setzt man seine Coordinaten in die Gleichung von g_λ ein (die Gleichung von K ist identisch erfüllt), so resultirt die cubische Gleichung:

$$\begin{aligned} &a_1 \lambda\left[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\right]\left[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\right] + \\ &+ a_2\left[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\right]\left[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\right] + \\ &+ a_3(1 + \lambda)\left[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\right]\left[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\right] = 0,\end{aligned}$$

deren Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 diejenigen Werthe von λ liefern, welche den die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten U'_∞, V'_∞, W'_∞ der C_3 angebenden Strahlen des Büschels zugehören. Die Gleichungen der Strahlen PU'_∞, PV'_∞, PW'_∞ gehen aus der Gleichung von g_λ hervor, wenn man in derselben λ successive durch λ_1, λ_2, λ_3 ersetzt. Von den drei unendlich fernen Punkten der C_3 ist stets mindestens einer reell. Bezeichnet U'_∞ den letztern, dann entspricht dem Strahl PU'_∞ eine Hyperbel, die durch A_1, A_2, A_3, U, U'_∞ geht und deren eine Asymptote also parallel zu PU sein muss. Zu PU parallel verläuft auch die Tangente der C_3 in U'_∞, d. h. eine Asymptote der letztern. Dieser Asymptote entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch A_1, A_2, A_3, U geht und die C_3 in U berührt. Derselbe könnte zur Construction der Asymptote benutzt werden, wenn man seine Tangente, mithin auch diejenige der C_3, in U kennen würde. Die beiden erwähnten Asymptoten (der Hyperbel und der C_3) können nur dann zusammenfallen, wenn P auf dem Kreise K liegt; in diesem Falle ist dann P mit U und P' mit U'_∞ identisch, und da die Hyperbel und die C_3 sich in U'_∞ berühren müssen, so ist PU'_∞ die Tangente der C_3 in U, und es kann daher die Asymptote der C_3 leicht construirt werden, entweder nach dem Pascal'schen Satze oder mit Hülfe des der Asymptote entsprechenden Kegelschnittes, der die C_3 (also auch PU') in U berührt. Fällt speziell P(U) mit einem der Punkte X, Y, Z (vergl. pag. 42) zusammen, so berührt PP' und in Folge dessen auch die C_3 den Kreis K in P, und die unendlich ferne Gerade ist die Tangente in P'_∞ sowohl für die dem Strahl PP' entsprechende Parabel als für die C_3 (die vorige Asymptote ist ins Unendliche gerückt). In P'_∞ sind zwei unendlich ferne Punkte U'_∞ und V'_∞ der C_3 vereinigt, und es existirt ausser diesen ein dritter W'_∞, welcher reell sein muss.



Die Tangenten der C_3 in U und U'_∞ können auch in dem Falle durch einfache Construction gefunden werden, in welchem P im Unendlichen liegt, also P und P' resp. mit U'_{∞} und U zusammenfallen. Alsdann ist PU die Asymptote der C_3, und daher müssen die C_3 und die zu PU inverse Hyperbel in U die nämliche Tangente haben.

Je nach der Lage von P hat die C_3 drei reelle und von einander verschiedene unendlich ferne Punkte, — oder zwei imaginäre und einen reellen, — oder drei reelle, wovon zwei zusammenfallen.

Im ersten Falle ist unsere Curve eine zweitheilige Curve dritter Ordnung, sie besteht aus einer sogen. Serpentine (welche in die conchoidale Form übergehen kann) *) und einem sogen. hyperbolischen Paar, d. h. zwei unendlichen (hyperbolischen) Aesten, die als eine stetig zusammenhängende Curve zu betrachten sind. Bei speziellerer Lage von P kann die Serpentine zur geraden Linie werden, und der übrige Theil geht in eine Hyperbel über (welche auch gleichseitig sein und im speziellsten Falle in ein Linienpaar zerfallen kann). Bei drei unendlich fernen Punkten kann die C_3 aber auch bestehen aus einem Oval und drei unendlichen Aesten, die eine zusammenhängende Curve bilden. Wenn die unendlich fernen Punkte gewöhnliche Punkte sind, so hat einer der Aeste keinen Inflexionspunkt, der zweite einen und der dritte zwei Inflexionspunkte. Liegt dagegen ein Inflexionspunkt im Unendlichen, so können entweder zwei Aeste mit keinen und ein Ast mit zwei Inflexionsstellen oder zwei Aeste mit je einem und ein Ast mit keinem Inflexionspunkt vorkommen.

Im zweiten Falle, in welchem nur ein unendlich ferner Punkt, also auch nur eine Asymptote existirt, setzt sich die C_3 zusammen aus einem Oval und einer Serpentine. Letztere kann in eine gerade Linie und das Oval in eine Ellipse, speziell einen Kreis übergehen.

Im dritten Falle kann die C_3 bestehen aus einer Serpentine und einem Oval, welches parabolische Form hat, d. h. die unendlich ferne Gerade berührt; die Serpentine kann speziell zur Geraden und das Oval zur Parabel werden. Oder die beiden Theile der C_3 sind ein Oval und eine Curve, welche eine Asymptote hat und die unendlich ferne Gerade berührt, d. h. eine Curve, welche in parabolischer Form auseinander geht. Ein Zweig der letztern hat zwei Inflexionspunkte, der andere einen oder, wenn ein Inflexionspunkt im Unendlichen liegt, so haben beide Zweige je eine Inflexionsstelle.

Die viel Interessantes bietende Untersuchung aller möglichen Spezialfälle, welche ich vollständig durchgeführt habe, soll den Gegenstand einer besondern Abhandlung bilden, die demnächst veröffentlicht wird.

*) Vergl. Salmon-Fiedler, Art. 205.