Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Autor: Leuch, Albert

Kapitel: IV: Es sei p ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

berührenden Curvenzweige vereinigt sind, so repräsentirt derselbe zwei vereinigte Knotenpunkte. Ebenso ist E ein imaginärer Berührungsknoten mit reeller Tangente.

Die gemeinsamen Punkte der Ellipse und der C_6 sind A_1, A_2, E_3, E; die C_6 berührt die Ellipse in A_1 und A_2 zweipunktig, in E_3 und E vierpunktig.

Die C_6 hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 6, \quad \delta = 7, \quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 10, \quad \iota = 14, \quad \tau = 21.$$

Wenn die Hyperbel $x_3^2 + x_1x_2 = 0$ den festen Kegelschnitt p vorstellt, dann ergibt sich die C_6:

$$x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Die Hyperbel geht durch A_1, A_2, E_1, E_2 und berührt in A_1, A_2 die respectiven Fundamentallinien A_1A_3, A_2A_3. Die C_6 hat zwei Spitzen in A_1 und A_2, für welche wieder $x_3 = 0$ die Rückkehrtangente ist; ferner besitzt sie drei Knotenpunkte, den doppelten Inflexionsknoten A_3 und die Knotenpunkte E und E_3. Die Punkte E_1 und E_2 sind isolirte Punkte der C_6 und zwar imaginäre Berührungsknoten, die Tangenten in denselben sind reell und zwar die zu E_1 und E_2 gehörigen Hyperbeltangenten, also die den Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$) mit E_1 resp. E_2 verbindenden Geraden. (Fig. 2, Tafel V.)

IV. Es sei p ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht, hat allgemein die Gleichung:

1. p) . . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = 0$;

ihm entspricht alsdann die gerade Linie

2. p') . . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Für die Coordinaten eines beliebigen Punktes P_λ von p ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(a_1 + \lambda a_2) : (a_1 + \lambda a_2) : - \lambda a_3.$$

Bezeichnet $F = 0$ die Gleichung von p, so haben die ersten Differentialquotienten von F nach x_1, x_2, x_3 die Werthe

$$F_1 = a_2x_3 + a_3x_2\,,\quad F_2 = a_1x_3 + a_3x_1\,,\quad F_3 = a_1x_2 + a_2x_1\,;$$

dieselben gehen, wenn man die Coordinaten von P_λ substituirt, abgesehen von einem constanten Faktor, über in

$$(F_1)_\lambda = a_1a_3\,,\quad (F_2)_\lambda = a_2a_3\lambda^2,\quad (F_3)_\lambda = (a_1 + a_2\lambda)^2.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente t_λ von p im Punkte P_λ:

3. t_λ) . . $a_1a_3x_1 + a_2a_3\lambda^2x_2 + (a_1 + a_2\lambda)^2x_3 = 0$

und diejenige des der Geraden t_λ entsprechenden Kegelschnittes t_λ':

4. t_λ') . $a_1a_3x_2x_3 + a_2a_3\lambda^2x_1x_3 + (a_1 + a_2\lambda)^2x_1x_2 = 0.$

Betrachtet man λ als variablen Parameter, so repräsentirt Gleichung (4) sämmtliche dem Fundamentaldreieck umschriebene Kegelschnitte, welche die feste Gerade p' berühren. Durch Elimination von λ zwischen (3) und (4) folgt:

IV.) $a_1^2x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_2^2x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + a_3^2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$
$- 2a_1a_2x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) - 2a_1a_3x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$
$- 2a_2a_3x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$

Die erhaltene Gleichung (IV), welche im Allgemeinen eine Curve sechster Ordnung repräsentirt, ist die Gleichung des Ortes der Schnittpunkte aller Tangenten t_λ mit ihren entsprechenden Kegelschnitten. Diese C_6 hat drei Spitzen in A_1, A_2, A_3; die zugehörigen Rückkehrtangenten sind die resp. Inversen der Tangenten von p in A_1, A_2, A_3, also bezw. die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, wobei B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte der Geraden p' mit den Fundamentallinien A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 bezeichnen. Bedeutet $u = 0$ die Gleichung (IV), so ergibt sich für A_1:

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$$

$u_{11} = 0$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 2a_2^2x_1^4$, $u_{23} = 2a_2a_3x_1^4$, $u_{33} = 2a_3^2x_1^4$;*)

das Tangentenpaar im Doppelpunkt A_1 wird daher ausgedrückt durch die Gleichung:

$$a_2^2x_2^2 + 2a_2a_3x_2x_3 + a_3^2x_3^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$(a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0\,,$$

d. h. die Tangenten im betrachteten Doppelpunkt fallen zusammen, A_1 ist eine Spitze der C_6 und die zugehörige Rückkehrtangente ist $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, also A_1B_1. Letztere hat mit der C_6 in A_1 drei vereinigte Punkte gemein. Analog findet man, dass

$$a_1x_1 + a_3x_3 = 0\,,\quad a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

die Tangenten in den resp. Rückkehrpunkten A_2, A_3 vorstellen. (Tafel VI.)

---

*) Unter x_1 ist hier die erste Coordinate von A_1 zu verstehen.

Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 sind Doppelpunkte mit je zwei von einander verschiedenen reellen oder imaginären Tangenten, also Knotenpunkte oder isolirte Punkte, je nachdem sie ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p liegen; die Tangenten in denselben werden nämlich angegeben durch die resp. von E, E_1, E_2, E_3 ausgehenden Kegelschnittstangenten. Das Tangentenpaar im Doppelpunkt E_3 z. B. hat die Gleichung:

$$(a_{12} - a_{13})^2 x_1^2 + (a_{12} - a_{23})^2 x_2^2 + (a_{13} + a_{23})^2 x_3^2$$
$$+ 2\left[a_{12}(a_{23} - a_{12}) + a_{13}(a_{23} + a_{12})\right] . x_1 x_2$$
$$2\left[a_{13}(a_{13} - a_{12}) + a_{23}(a_{13} + a_{12})\right] . x_1 x_3$$
$$+ 2\left[a_{23}(a_{23} - a_{12}) + a_{13}(a_{23} + a_{12})\right] . x_2 x_3 = 0.$$

Enthält der Kegelschnitt p einen der Punkte E, E_1, E_2, E_3 (mehr als einen kann p nicht enthalten, wenn er nicht in ein Linienpaar zerfallen soll), dann wird derselbe zu einem Berührungsknoten der C_6 und die gemeinschaftliche Tangente der beiden sich in ihm berührenden Aeste ist die Tangente von p in diesem Punkte. *) Die C_6 mit drei Spitzen kann höchstens einen Berührungsknoten besitzen.

Für die Schnittpunkte der C_6 mit $x_1 = 0$ hat man

$$a_2^2 x_2^2 x_3^4 + a_3^2 x_3^2 x_2^4 + 2 a_2 a_3 x_2^3 x_3^3 = 0 \quad \text{oder}$$
$$x_2^2 x_3^2 (a_2 x_3 + a_3 x_2)^2 = 0,$$

d. h. $x_1 = 0$ schneidet die C_6 in den Spitzen A_2, A_3 und berührt sie in $Q_1(x_1 = 0,\ a_3 x_2 + a_2 x_3 = 0)$, dem Schnittpunkte der p-Tangente in A_1 mit $x_1 = 0$.

Da für $Q_1 \left(\frac{x_1}{x_3} = 0,\ \frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_2}{a_3}\right)$ $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$, während u_1 von 0 verschieden ist, so ergibt sich, in Uebereinstimmung mit dem Vorigen, als Gleichung der Tangente der C_6 im Punkte Q_1:

$$x_1 = 0.$$

Analog findet man, dass $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ die resp. Tangenten der C_6 in den Punkten

$$Q_2\left(x_2 = 0,\ \frac{x_1}{x_3} = -\frac{a_1}{a_3}\right)$$
$$Q_3\left(x_3 = 0,\ \frac{x_1}{x_2} = -\frac{a_1}{a_2}\right) \quad \text{sind.}$$

*) Geht z. B. p durch E_3, dann ist p' die Tangente von p in E_3, also gleichzeitig die Tangente im Berührungsknoten der C_6.

Die C_6 und der Kegelschnitt p haben zwölf gemeinsame Punkte, unter denen sich die doppelten Fundamentalpunkte befinden; sehen wir von den letztern ab, so bleiben noch sechs gemeinsame Punkte, welche die Inversen der sechs gemeinsamen Punkte von C_6 und der Geraden p' sein müssen. Ist S ein von A_1, A_2, A_3 verschiedener gemeinsamer Punkt von p und C_6, so müssen sich in diesem Punkte die beiden Curven berühren; S repräsentirt also zwei gemeinsame Punkte. Im entsprechenden Punkte S' berühren sich alsdann C_6 und die Gerade p'. Die C_6 berührt daher in drei Punkten den Kegelschnitt p und in ihren Inversen die Gerade p'. Der Geraden SS', welche p in S berührt, entspricht ein Kegelschnitt C_2^*, welcher durch S und S' geht und sowohl p' als C_6 in S' berührt. Es gibt drei Tangenten von p, deren entsprechende Kegelschnitte (C_2^*) sie in ihren Berührungspunkten schneiden; diese Punkte sind gleichzeitig die Berührungspunkte der beiden Curven C_6 und p, und in ihren Inversen berühren sich C_6, p' und die bezüglichen Kegelschnitte C_2^*. Die Gerade p' ist somit eine dreifache Tangente der C_6, ihre Berührungspunkte sind entweder reell und (im Allgemeinen) von einander verschieden oder es ist nur einer derselben reell. Um die Coordinaten der Berührungspunkte der dreifachen Tangente p' zu erhalten, hat man die Gleichungen (2) und (IV) in Bezug auf $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ aufzulösen.

Die C_6 hat sechs unendlich ferne Punkte, welche paarweise imaginär sein können. In dem in Tafel VI skizzirten Falle, in welchem E und E_1 isolirte Punkte sind, liegen gar keine Punkte der C_6 im Unendlichen und nur ein Berührungspunkt der dreifachen Tangente p' ist reell.

Die Plücker'schen Charaktere der Curve IV sind im allgemeinsten Falle (bei der allgemeinsten Lage des dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umschriebenen Kegelschnittes p):

$$\mu = 6, \quad \delta = 4, \quad \varkappa = 3$$
$$\nu = 13, \quad \iota = 24, \quad \tau = 39.$$