

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1889)  
**Heft:** 1215-1243

**Artikel:** Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung  
**Autor:** Leuch, Albert  
**Kapitel:** III: Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A1,A2,E,E3 enthält und die Fundamentallinien A1A3 und A2A3 in A1 resp. A2 berührt  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319023>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### III. Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte $A_1, A_2, E, E_3$ enthält und die Fundamentallinien $A_1A_3$ und $A_2A_3$ in $A_1$ resp. $A_2$ berührt.

Die Gleichung von p lautet:

1. p)  $x_3^2 - x_1x_2 = 0$ ; die Curve  $p'$  ist mit p identisch.

Wir schreiben die Gleichung:

$$1 - \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{und setzen wieder} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda; \text{ diess gibt:}$$

$$1 - \lambda \cdot \frac{x_1}{x_3} = 0, \text{ woraus folgt: } \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für einen Punkt  $P_\lambda$  auf p ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

Da für die Ellipse p ( $f = 0$ )

$$f_1 = -x_2, f_2 = -x_1, f_3 = 2x_3,$$

so hat die Tangente der Ellipse in  $P_\lambda$  die Gleichung:

2.  $t_\lambda$ )  $\lambda^2 x_1 + x_2 - 2\lambda x_3 = 0$ ; der ihr correspondirende Kegelschnitt heisst:

3.  $t'_\lambda$ )  $\lambda^2 x_2 x_3 + x_1 x_3 - 2\lambda x_1 x_2 = 0$ .

Aus (2) und (3) folgt:  $\lambda = \frac{x_3(x_1^2 - x_2^2)}{2x_2(x_1^2 - x_3^2)}$  und durch Substitution dieses Werthes in Gl. (2) erhält man:

$$\frac{x_1 x_3^2 (x_1^2 - x_2^2)^2}{4x_2^2 (x_1^2 - x_3^2)^2} + x_2 - \frac{x_3^2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_2 (x_1^2 - x_3^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\text{III.) } x_3^2 (x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1 x_2 (x_2^2 - x_3^2) (x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Diess ist die Gleichung der im Falle (III) erzeugten Curve sechster Ordnung.

Aus der Erzeugungsweise der  $C_6$  geht zunächst hervor, dass  $A_1$  und  $A_2$ , weil auf p gelegen, Spitzen der  $C_6$  werden und für beide ist  $x_3 = 0$  Rückkehrtangente; diess bestätigt auch die Rechnung. Für die Schnittpunkte der Curve mit  $x_3 = 0$  hat man nämlich

$$4x_1^3 x_2^3 = 0, \text{ woraus folgt: } x_1^3 = 0 \text{ und } x_2^3 = 0,$$

d. h.  $x_3 = 0$  hat in  $A_1$  und  $A_2$  mit der  $C_6$  je drei zusammenfallende Punkte gemein. Ferner ergibt die Rechnung, dass das Tangentenpaar in jedem der Doppelpunkte  $A_1$  und  $A_2$  die Gleichung  $x_3^2 = 0$  hat, dass also  $A_1$  und  $A_2$  Spitzen der  $C_6$  sein müssen, deren Tangenten mit  $A_1A_2$  zusammenfallen. — Wenn  $u = 0$  die Gleichung (III) bedeutet, so ist

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 4x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - 3x_1^2) \\
 u_2 &= -4x_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_1(x_3^2 - x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2) \\
 u_3 &= 2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2x_3(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \\
 u_{11} &= 4x_3^2(3x_1^2 - x_2^2) + 24x_2x_1(x_2^2 - x_3^2) \\
 u_{12} &= -8x_1x_2x_3^2 - 4(x_3^2 - 3x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2) \\
 u_{13} &= 8x_1x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_2x_3(3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \\
 u_{22} &= -4x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2) - 24x_1x_2(x_3^2 - x_1^2) \\
 u_{23} &= -8x_2x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_1x_3(x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2) \\
 u_{33} &= 2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2).
 \end{aligned}$$

Für den Doppelpunkt  $A_3$  wird  $u_{11} = 0$ ,  $u_{12} = 4x_3^4$ ,  $u_{13} = 0$ ,  $u_{22} = 0$ ,  $u_{23} = 0$ ,  $u_{33} = 0$ , daher hat sein Tangentenpaar die Gleichung  $x_1 \cdot x_2 = 0$ . Der Fundamentalpunkt  $A_3$  ist also ein Knotenpunkt der  $C_6$  und die Tangenten in demselben sind  $A_2A_3$  und  $A_1A_3$ ; sie sind die respectiven Inversen der Tangenten  $A_3Q_3$  und  $A_3Q_3^*$  ( $Q_3$  fällt mit  $A_1$ ,  $Q_3^*$  mit  $A_2$  zusammen), welche von  $A_3$  aus an die Ellipse gehen. (Siehe Fig. 1, Tafel V.) Aus dem Umstande, dass  $A_3Q_3$ ,  $A_3Q_3^*$  die  $C_6$  in  $Q_3$  resp.  $Q_3^*$  berühren, folgt, dass die Tangenten im Knoten  $A_3$  Inflexionstangenten sind (vergl. Fall I); diess stimmt mit der Thatsache überein, dass  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  die Tangenten der  $C_6$  in den Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$ , welche mit  $A_3$  zusammenfallen, vorstellen. Die folgende Rechnung liefert den einfachsten Nachweis hiefür. Substituirt man in (III)  $x_1 = 0$ , so kommt  $x_3^2 \cdot x_2^4 = 0$ , woraus folgt:  $x_3^2 = 0$ ,  $x_2^4 = 0$ , d. h.  $x_1 = 0$  schneidet die  $C_6$  in  $A_2$  zwei Mal, in  $A_3$  vier Mal.

Ferner ist für  $x_2 = 0$ :  $x_3^2 \cdot x_1^4 = 0$ , oder  $x_3^2 = 0$  und  $x_1^4 = 0$ , was besagt, dass  $x_2 = 0$  mit der  $C_6$  in  $A_1$  zwei, in  $A_3$  vier Punkte gemein hat.

$A_3$  ist also ein doppelter Inflexionsknoten.

Die Punkte  $E_1 \begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$  und  $E_2 \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$  sind Doppelpunkte mit reellen und von einander verschiedenen Tangenten, also Knotenpunkte der  $C_6$ . Die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von  $E_1$  resp.  $E_2$  aus an die Ellipse gehenden Tangenten. Die bezüglichen Gleichungen lauten:

Für das Tangentenpaar in  $E_1$ :

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

und für dasjenige in  $E_2$ :

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

Was die Punkte  $E_3$  (1, 1, — 1) und  $E$  (1, 1, 1) betrifft, so sind dieselben zunächst als Doppelpunkte der  $C_6$  anzusehen, weil für diese Punkte  $u_1, u_2, u_3$  verschwinden.

Als Gleichung des Tangentenpaares in  $E_3$  erhält man:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 = 0$$

und diejenige für das Tangentenpaar in  $E$  lautet:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0,$$

d. h. die beiden Tangenten der  $C_6$  im Doppelpunkt  $E_3$  fallen zusammen mit der Ellipsentangente  $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$  im Punkte  $E_3$  und die Tangenten im Doppelpunkt  $E$  sind vereinigt in der zu  $E$  gehörigen Ellipsentangente  $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ .\*)

Allein diese Punkte sind nicht etwa Spitzen, wie die nachfolgende Betrachtung zeigt.

Für die Schnittpunkte der  $C_6$  mit der Tangente  $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$  ergibt sich, wenn man in der Curvengleichung  $x_3 = -\frac{x_1 + x_2}{2}$  setzt:

$$(x_1 - x_2)^4 \cdot (x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Im Doppelpunkt  $E_3$  hat also die Tangente mit der Curve vier vereinigte Punkte gemein und schneidet sie noch in den zwei Punkten

$$\left( \frac{x_1}{x_3} = -1 + \sqrt{5}, \frac{x_2}{x_3} = -(1 + \sqrt{5}) \right)$$

$$\left( \frac{x_1}{x_3} = -(1 + \sqrt{5}), \frac{x_2}{x_3} = -1 + \sqrt{5} \right).$$

Der Punkt  $E_3$  muss daher ein Berührungsknoten sein, d. h. durch  $E_3$  gehen zwei Aeste der  $C_6$ , welche sich in ihm zweipunktig berühren. Die beiden Curvenzweige sind aber nicht reell, denn setzt man im Bereiche des Punktes  $E_3$   $y = x_1 + x_2 + 2x_3$ ,  $z = x_1 - x_2$ , wo  $y$  und  $z$  sehr klein sind, in die Gleichung der  $C_6$  ein, so wird annähernd  $16x_3^2y^2 + 8x_3yz^2 + 5z^4 = 0$ ; diese Gleichung repräsentirt zwei imaginäre Curvenzweige, die einander in  $E_3$  berühren, ihre gemeinschaftliche Tangente  $y = 0$  ist reell. In Uebereinstimmung damit findet man auch, dass die Schnittpunkte der  $C_6$  mit der Geraden  $x_1 - kx_2 = 0$  mit Ausnahme der zwei sich in  $E_3$  befindenden imaginär sind, so lange  $k$  zwischen 0 und  $+\infty$  liegt. Weil die Curve nicht reell durch  $E_3$  hindurch geht, so ist  $E_3$  ein isolirter Punkt der  $C_6$ , allein er muss als imaginärer Berührungsknoten angesehen werden. Da im Punkte  $E_3$  zwei Durchschnittpunkte der beiden sich in ihm

---

\*) Die beiden Tangenten in  $E_3$  und  $E$  gehen durch den Punkt  $\left( \frac{x_3 = 0}{x_1 + x_2 = 0} \right)$ .

berührenden Curvenzweige vereinigt sind, so repräsentirt derselbe zwei vereinigte Knotenpunkte. Ebenso ist E ein imaginärer Berührungsknoten mit reeller Tangente.

Die gemeinsamen Punkte der Ellipse und der  $C_6$  sind  $A_1, A_2, E_3, E$ ; die  $C_6$  berührt die Ellipse in  $A_1$  und  $A_2$  zweipunktig, in  $E_3$  und  $E$  vierpunktig.

Die  $C_6$  hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\begin{aligned} \mu &= 6, & \delta &= 7, & \kappa &= 2 \\ \nu &= 10, & \iota &= 14, & \tau &= 21. \end{aligned}$$

Wenn die Hyperbel  $x_3^2 + x_1x_2 = 0$  den festen Kegelschnitt  $p$  vorstellt, dann ergibt sich die  $C_6$ :

$$x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Die Hyperbel geht durch  $A_1, A_2, E_1, E_2$  und berührt in  $A_1, A_2$  die respectiven Fundamentallinien  $A_1A_3, A_2A_3$ . Die  $C_6$  hat zwei Spitzen in  $A_1$  und  $A_2$ , für welche wieder  $x_3 = 0$  die Rückkehrtangente ist; ferner besitzt sie drei Knotenpunkte, den doppelten Inflexionsknoten  $A_3$  und die Knotenpunkte  $E$  und  $E_3$ . Die Punkte  $E_1$  und  $E_2$  sind isolirte Punkte der  $C_6$  und zwar imaginäre Berührungsknoten, die Tangenten in denselben sind reell und zwar die zu  $E_1$  und  $E_2$  gehörigen Hyperbeltangenten, also die den Punkt  $(x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0)$  mit  $E_1$  resp.  $E_2$  verbindenden Geraden. (Fig. 2, Tafel V.)

#### IV. Es sei $p$ ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht, hat allgemein die Gleichung:

$$1. \quad p) \quad . \quad . \quad . \quad a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = 0;$$

ihm entspricht alsdann die gerade Linie

$$2. \quad p') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Für die Coordinaten eines beliebigen Punktes  $P_\lambda$  von  $p$  ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(a_1 + \lambda a_2) : (a_1 + \lambda a_2) : -\lambda a_3.$$