# Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A1,A2,E,E3 enthält und die Fundamentallinien A1A3 und A2A3 in A1 resp. A2 berührt

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1889)**

Heft 1215-1243

PDF erstellt am: **23.06.2024**

## III. Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte $A_1, A_2, E, E_3$ enthält und die Fundamentallinien $A_1A_3$ und $A_2A_3$ in $A_1$ resp. $A_2$ berührt.

Die Gleichung von p lautet:

1. p) $x_3^2 - x_1x_2 = 0$; die Curve $p'$ ist mit p identisch.

Wir schreiben die Gleichung:

$$1 - \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{und setzen wieder} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda; \text{ diess gibt:}$$

$$1 - \lambda . \frac{x_1}{x_3} = 0, \text{ woraus folgt: } \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für einen Punkt $P_\lambda$ auf p ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

Da für die Ellipse p $(f = 0)$

$$f_1 = -x_2, \; f_2 = -x_1, \; f_3 = 2x_3,$$

so hat die Tangente der Ellipse in $P_\lambda$ die Gleichung:

2. $t_\lambda$) $\lambda^2 x_1 + x_2 - 2\lambda x_3 = 0$; der ihr correspondirende Kegelschnitt heisst:

3. $t_\lambda'$) $\lambda^2 x_2 x_3 + x_1 x_3 - 2\lambda x_1 x_2 = 0$.

Aus (2) und (3) folgt: $\lambda = \dfrac{x_3(x_1^2 - x_2^2)}{2x_2(x_1^2 - x_3^2)}$ und durch Substitution dieses Werthes in Gl. (2) erhält man:

$$\frac{x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2}{4x_2^2(x_1^2 - x_3^2)^2} + x_2 - \frac{x_3^2(x_1^2 - x_2^2)}{x_2(x_1^2 - x_3^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

III.) $x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$

Diess ist die Gleichung der im Falle (III) erzeugten Curve sechster Ordnung.

Aus der Erzeugungsweise der $C_6$ geht zunächst hervor, dass $A_1$ und $A_2$, weil auf p gelegen, Spitzen der $C_6$ werden und für beide ist $x_3 = 0$ Rückkehrtangente; diess bestätiget auch die Rechnung. Für die Schnittpunkte der Curve mit $x_3 = 0$ hat man nämlich

$$4x_1^3x_2^3 = 0, \text{ woraus folgt: } x_1^3 = 0 \text{ und } x_2^3 = 0,$$

d. h. $x_3 = 0$ hat in $A_1$ und $A_2$ mit der $C_6$ je drei zusammenfallende Punkte gemein. Ferner ergibt die Rechnung, dass das Tangentenpaar in jedem der Doppelpunkte $A_1$ und $A_2$ die Gleichung $x_3^2 = 0$ hat, dass also $A_1$ und $A_2$ Spitzen der $C_6$ sein müssen, deren Tangenten mit $A_1A_2$ zusammenfallen. — Wenn $u = 0$ die Gleichung (III) bedeutet, so ist

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 4x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - 3x_1^2)\\
u_2 &= -4x_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_1(x_3^2 - x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2)\\
u_3 &= 2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2x_3 \,.\, (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)\\
u_{11} &= 4x_3^2(3x_1^2 - x_2^2) + 24x_2x_1(x_2^2 - x_3^2)\\
u_{12} &= -8x_1x_2x_3^2 - 4(x_3^2 - 3x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2)\\
u_{13} &= 8x_1x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_2x_3(3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)\\
u_{22} &= -4x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2) - 24x_1x_2(x_3^2 - x_1^2)\\
u_{23} &= -8x_2x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_1x_3(x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2)\\
u_{33} &= 2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2).
\end{aligned}
$$

Für den Doppelpunkt $A_3$ wird $u_{11} = 0$, $u_{12} = 4x_3^4$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 0$, $u_{23} = 0$, $u_{33} = 0$, daher hat sein Tangentenpaar die Gleichung $x_1 \,.\, x_2 = 0$. Der Fundamentalpunkt $A_3$ ist also ein Knotenpunkt der $C_6$ und die Tangenten in demselben sind $A_2A_3$ und $A_1A_3$; sie sind die respectiven Inversen der Tangenten $A_3Q_3$ und $A_3Q_3^*$ ($Q_3$ fällt mit $A_1$, $Q_3^*$ mit $A_2$ zusammen), welche von $A_3$ aus an die Ellipse gehen. (Siehe Fig. 1, Tafel V.) Aus dem Umstande, dass $A_3Q_3$, $A_3Q_3^*$ die $C_6$ in $Q_3$ resp. $Q_3^*$ berühren, folgt, dass die Tangenten im Knoten $A_3$ Inflexionstangenten sind (vergl. Fall I); diess stimmt mit der Thatsache überein, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die Tangenten der $C_6$ in den Punkten $Q_1$ und $Q_2$, welche mit $A_3$ zusammenfallen, vorstellen. Die folgende Rechnung liefert den einfachsten Nachweis hiefür. Substituirt man in (III) $x_1 = 0$, so kommt $x_3^2 \,.\, x_2^4 = 0$, woraus folgt: $x_3^2 = 0$, $x_2^4 = 0$, d. h. $x_1 = 0$ schneidet die $C_6$ in $A_2$ zwei Mal, in $A_3$ vier Mal.

Ferner ist für $x_2 = 0$: $x_3^2 \,.\, x_1^4 = 0$, oder $x_3^2 = 0$ und $x_1^4 = 0$, was besagt, dass $x_2 = 0$ mit der $C_6$ in $A_1$ zwei, in $A_3$ vier Punkte gemein hat.

$A_3$ ist also ein doppelter Inflexionsknoten.

Die Punkte $E_1 \begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ sind Doppelpunkte mit reellen und von einander verschiedenen Tangenten, also Knotenpunkte der $C_6$. Die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von $E_1$ resp. $E_2$ aus an die Ellipse gehenden Tangenten. Die bezüglichen Gleichungen lauten:

Für das Tangentenpaar in $E_1$:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

und für dasjenige in $E_2$:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

Was die Punkte $E_3$ (1, 1, — 1) und E (1, 1, 1) betrifft, so sind dieselben zunächst als Doppelpunkte der $C_6$ anzusehen, weil für diese Punkte $u_1$, $u_2$, $u_3$ verschwinden.

Als Gleichung des Tangentenpaares in $E_3$ erhält man:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 = 0$$

und diejenige für das Tangentenpaar in E lautet:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0,$$

d. h. die beiden Tangenten der $C_6$ im Doppelpunkt $E_3$ fallen zusammen mit der Ellipsentangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ im Punkte $E_3$ und die Tangenten im Doppelpunkt E sind vereinigt in der zu E gehörigen Ellipsentangente $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. *)

Allein diese Punkte sind nicht etwa Spitzen, wie die nachfolgende Betrachtung zeigt.

Für die Schnittpunkte der $C_6$ mit der Tangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ ergibt sich, wenn man in der Curvengleichung $x_3 = -\frac{x_1 + x_2}{2}$ setzt:

$$(x_1 - x_2)^4 \, . \, (x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Im Doppelpunkt $E_3$ hat also die Tangente mit der Curve vier vereinigte Punkte gemein und schneidet sie noch in den zwei Punkten

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -1 + \sqrt{5}, \; \frac{x_2}{x_3} = -(1 + \sqrt{5})\right)$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -(1 + \sqrt{5}), \; \frac{x_2}{x_3} = -1 + \sqrt{5}\right).$$

Der Punkt $E_3$ muss daher ein Berührungsknoten sein, d. h. durch $E_3$ gehen zwei Aeste der $C_6$, welche sich in ihm zweipunktig berühren. Die beiden Curvenzweige sind aber nicht reell, denn setzt man im Bereiche des Punktes $E_3$ $y = x_1 + x_2 + 2x_3$, $z = x_1 - x_2$, wo y und z sehr klein sind, in die Gleichung der $C_6$ ein, so wird annähernd $16x_3^2y^2 + 8x_3yz^2 + 5z^4 = 0$; diese Gleichung repräsentirt zwei imaginäre Curvenzweige, die einander in $E_3$ berühren, ihre gemeinschaftliche Tangente $y = 0$ ist reell. In Uebereinstimmung damit findet man auch, dass die Schnittpunkte der $C_6$ mit der Geraden $x_1 - kx_2 = 0$ mit Ausnahme der zwei sich in $E_3$ befindenden imaginär sind, so lange k zwischen 0 und $+\infty$ liegt. Weil die Curve nicht reell durch $E_3$ hindurch geht, so ist $E_3$ ein isolirter Punkt der $C_6$, allein er muss als imaginärer Berührungsknoten angesehen werden. Da im Punkte $E_3$ zwei Durchschnittspunkte der beiden sich in ihm

*) Die beiden Tangenten in $E_3$ und E gehen durch den Punkt $\left(\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}\right)$.

berührenden Curvenzweige vereinigt sind, so repräsentirt derselbe zwei vereinigte Knotenpunkte. Ebenso ist E ein imaginärer Berührungsknoten mit reeller Tangente.

Die gemeinsamen Punkte der Ellipse und der $C_6$ sind $A_1$, $A_2$, $E_3$, E; die $C_6$ berührt die Ellipse in $A_1$ und $A_2$ zweipunktig, in $E_3$ und E vierpunktig.

Die $C_6$ hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 6, \quad \delta = 7, \quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 10, \quad \iota = 14, \quad \tau = 21.$$

---

Wenn die Hyperbel $x_3^2 + x_1x_2 = 0$ den festen Kegelschnitt p vorstellt, dann ergibt sich die $C_6$:

$$x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Die Hyperbel geht durch $A_1$, $A_2$, $E_1$, $E_2$ und berührt in $A_1$, $A_2$ die respectiven Fundamentallinien $A_1A_3$, $A_2A_3$. Die $C_6$ hat zwei Spitzen in $A_1$ und $A_2$, für welche wieder $x_3 = 0$ die Rückkehrtangente ist; ferner besitzt sie drei Knotenpunkte, den doppelten Inflexionsknoten $A_3$ und die Knotenpunkte E und $E_3$. Die Punkte $E_1$ und $E_2$ sind isolirte Punkte der $C_6$ und zwar imaginäre Berührungsknoten, die Tangenten in denselben sind reell und zwar die zu $E_1$ und $E_2$ gehörigen Hyperbeltangenten, also die den Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$) mit $E_1$ resp. $E_2$ verbindenden Geraden. (Fig. 2, Tafel V.)

---

## IV. Es sei p ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht, hat allgemein die Gleichung:

1. p) . . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = 0$;

ihm entspricht alsdann die gerade Linie

2. p') . . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Für die Coordinaten eines beliebigen Punktes $P_\lambda$ von p ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(a_1 + \lambda a_2) : (a_1 + \lambda a_2) : - \lambda a_3.$$