Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Autor: Leuch, Albert

Kapitel: II: Der Kegelschnitt p sei dem Fundamentaldreieck eingeschrieben

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

II. Der Kegelschnitt p sei dem Fundamentaldreieck eingeschrieben.

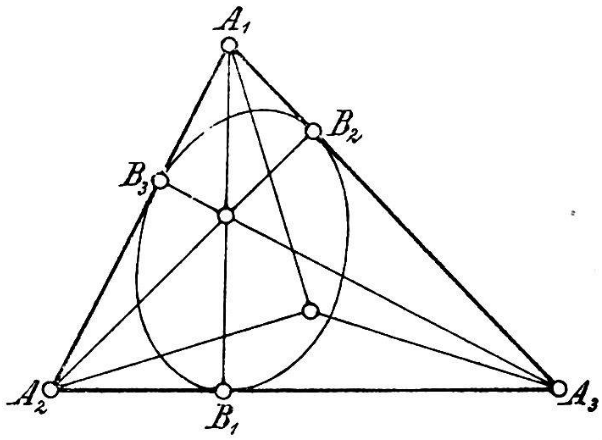
Ein dem Fundamentaldreieck eingeschriebener Kegelschnitt hat die Gleichung:

$$1.\ p)\begin{cases} \sqrt{a_1x_1} + \sqrt{a_2x_2} + \sqrt{a_3x_3} = 0 \qquad \text{oder} \\ a_1{}^2x_1{}^2 + a_2{}^2x_2{}^2 + a_3{}^2x_3{}^2 - 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_1a_3x_1x_3 \\ \qquad - 2a_2a_3x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Die correspondirende Curve p′ ist die Curve vierten Gerades:

$$2.\ p')\begin{cases} \sqrt{a_1x_2x_3} + \sqrt{a_2x_1x_3} + \sqrt{a_3x_1x_2} = 0 \qquad \text{oder} \\ a_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2 + a_2{}^2x_1{}^2x_3{}^2 + a_3{}^2x_1{}^2x_2{}^2 - 2a_1a_2x_3{}^2x_1x_2 \\ \qquad - 2a_1a_3x_2{}^2x_1x_3 - 2a_2a_3x_1{}^2x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Diese C_4 besitzt drei Spitzen in den Fundamental-Punkten; die zugehörigen Rückkehr-Tangenten sind die Inversen zu den resp. Verbindungslinien der Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 mit den Berührungspunkten des Kegelschnittes auf den Gegenseiten. Die betreffenden Gleichungen lauten:



Für die Tangente in der Spitze A_1 : $a_3x_2 - a_2x_3 = 0$
« « « « « « A_2 : $a_1x_3 - a_3x_1 = 0$
« « « « « « A_3 : $a_2x_1 - a_1x_2 = 0$

Die drei Tangenten gehen durch einen und denselben Punkt, den Inversen des gemeinsamen Punktes von A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, wobei B_1, B_2, B_3 die Berührungspunkte von p mit A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 bezeichnen. *)

Um die Gleichung der Curve sechster Ordnung C_6 zu erhalten, setzen wir wieder für einen Punkt P_λ auf p $\dfrac{x_2}{x_3} = \lambda$, dann gibt Gleichung (1):

*) Unter dem eingeschriebenen Kegelschnitt wurde, wie gewöhnlich, derjenige verstanden, für welchen die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 zwischen den Ecken des Fundamentaldreiecks liegen; es liegen dann auch keine Punkte von p und p′ ausserhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und p′ kann somit keine unendlich fernen Punkte besitzen. Diess ist der Fall, wenn die Coefficienten a_1, a_2, a_3 positive Werthe haben.

$$\sqrt{a_1 \frac{x_1}{x_3}} + \sqrt{a_2\lambda} + \sqrt{a_3} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{(\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda})^2}{a_1}.$$

Für die Coordinaten des Punktes P_λ ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda})^2 : a_1\lambda : a_1.$$

Bedeutet f die linke Seite der Gleichung (1), so sind

$$f_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{2\sqrt{x_1}}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{2\sqrt{x_2}}, \quad f_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{2\sqrt{x_3}}$$

die ersten Differentialquotienten von f nach x_1, x_2, x_3; durch Substitution der Coordinaten von P_λ gehen dieselben über in

$$f_1 = -\frac{\sqrt{a_1}}{2(\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda})}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{2\sqrt{a_1\lambda}}, \quad f_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{2\sqrt{a_1}},$$

wobei ein gemeinschaftlicher constanter Faktor weggelassen worden ist. *) Nun erhält man für die Tangente t_λ des Kegelschnittes p im Punkte P_λ die Gleichung:

$$3.\quad t_\lambda) \quad -\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda}} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1\lambda}} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_1}} \cdot x_3 = 0$$

und für ihren entsprechenden (inversen) Kegelschnitt:

$$4.\quad t_\lambda') \quad -\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda}} \cdot x_2x_3 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1\lambda}} \,.\, x_1x_3 + \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \,.\, x_1x_2 = 0.$$

Multiplizirt man (3) mit $-x_2x_3$, (4) mit x_1 und addirt beide Gleichungen, so kommt:

$$\sqrt{\frac{a_2}{a_1\lambda}} \cdot x_3(x_1^2 - x_2^2) = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \cdot x_2(x_3^2 - x_1^2);$$

hieraus folgt:

$$\sqrt{\frac{a_2}{\lambda}} = \frac{\sqrt{a_3} \,.\, x_2(x_3^2 - x_1^2)}{x_3(x_1^2 - x_2^2)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{a_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2}{a_3x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2}.$$

Setzt man den gefundenen Werth von λ in (3) ein, so ergibt sich als Resultat der Elimination des Parameters λ zwischen (3) und (4) die folgende Gleichung:

---

*) Anmerkung. $\sqrt{x_1}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $\sqrt{x_2}$ und $\sqrt{x_3}$ beide negativ oder positiv sind. Wenn $\sqrt{x_2}$ und $\sqrt{x_3}$ positiv angenommen werden, wie hier geschehen ist, so muss $\sqrt{x_1}$ negativ sein, da die Werthe von $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{x_3}$ der Gleichung $\sqrt{a_1x_1} + \sqrt{a_2x_2} + \sqrt{a_3x_3} = 0$ genügen müssen.

$$-\frac{\sqrt{a_1}\,.\,x_1}{\sqrt{a_3}+\dfrac{a_2x_3(x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{a_3}\,.\,x_2(x_3^2-x_1^2)}}+\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\cdot\frac{x_2(x_3^2-x_1^2)}{x_3(x_1^2-x_2^2)}\cdot x_2+\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\cdot x_3=0$$

oder

$$-\frac{a_1x_1x_2(x_3^2-x_1^2)}{a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)}+\frac{x_2^2(x_3^2-x_1^2)}{x_3(x_1^2-x_2^2)}+x_3=0$$

oder

$$\begin{aligned}&-a_1x_1x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,.\,(x_1^2-x_2^2)\\&+x_2^2(x_3^2-x_1^2)\,.\left[a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)\right]\\&+x_3^2(x_1^2-x_2^2)\,.\left[a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)\right]=0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&-a_1x_1x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,.\,(x_1^2-x_2^2)\\&-\left[a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)\right].\,x_1^2(x_2^2-x_3^2)=0\end{aligned}$$

oder

II.) $\quad . \quad . \quad . \quad a_3x_1x_2(x_2^2-x_3^2)\,(x_3^2-x_1^2)$

$$+a_2x_1x_3(x_2^2-x_3^2)\,(x_1^2-x_2^2)+a_1x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,(x_1^2-x_2^2)=0.$$

Diese Gleichung repräsentirt die C_6.

Nehmen wir speziell $a_1 = a_2 = a_3$ an, d. h. stellt p den Kegelschnitt vor, welcher die Fundamentallinien in den Punkten

$$\begin{pmatrix}x_1=0\\x_2-x_3=0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2=0\\x_1-x_3=0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_3=0\\x_1-x_2=0\end{pmatrix}$$

berührt, dann sind $x_2-x_3=0$, $x_1-x_3=0$, $x_1-x_2=0$ die Rückkehrtangenten der C_4 (p′) und die bezüglichen Gleichungen lauten:

für p: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}=0$

« p′: $\sqrt{x_2x_3}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_1x_2}=0$

« C_6: $x_1x_2(x_2^2-x_3^2)\,(x_3^2-x_1^2)+x_1x_3(x_2^2-x_3^2)\,(x_1^2-x_2^2)$

$$+x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,(x_1^2-x_2^2)=0.$$

Die Untersuchung der Curve (II) zeigt zunächst, dass die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 Knotenpunkte derselben sind. Die Fundamentallinie $x_1 = 0$ schneidet die C_6 in sechs Punkten, für welche $x_2^3\,.\,x_3^3=0$, also $x_2^3=0$, $x_3^3=0$, d. h. A_2 und A_3 sind Doppelpunkte, die Fundamentallinie A_2A_3 ist Tangente der C_6 sowohl in A_2 als in A_3, und die Punkte Q_1 und Q_1^* fallen mit A_2 resp. A_3 zusammen. (Tafel IV, Fig. 1.)

Ferner folgt aus Gleichung (II)

für $x_2=0$: $x_1^3\,.\,x_3^3=0$ oder $x_1^3=0$, $x_3^2=0$ und

für $x_3=0$: $x_1^3\,.\,x_2^3=0$ oder $x_1^3=0$, $x_2^2=0$;

demnach ist $x_2 = 0$ Tangente in den Knotenpunkten A_3, A_1 und $x_3 = 0$ Tangente in A_1, A_2; Q_2 fällt mit A_3, Q_2^* mit A_1, Q_3 mit A_1 und Q_3^* mit A_2 zusammen.

Die Fundamentallinien repräsentiren also die sechs Tangenten in den Knotenpunkten A_1, A_2, A_3, jede ist somit eine Doppeltangente der C_6.

Weitere Doppelpunkte der C_6 sind E, E_1, E_2, E_3. Substituirt man in (II) $x_2 \pm x_3 = 0$, so folgt:

$$\pm x_3^2 . (x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_3^2) = 0 \quad \text{oder} \quad x_3^2(x_3^2 - x_1^2)^2 = 0$$

$$\text{woraus} \quad x_3^2 = 0 \,, \; (x_3 + x_1)^2 = 0 \,, \; (x_3 - x_1)^2 = 0,$$

d. h. die Punkte A_1, E, E_1, E_2, E_3 gehören der C_6 an und sind Doppelpunkte derselben. E wird, weil innerhalb des Kegelschnittes p gelegen, zu einem isolirten Punkt der C_6; E_1, E_2, E_3 dagegen sind Knotenpunkte, die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von E_1, E_2, E_3 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten. Für das Tangentenpaar in E_1 $(-1, 1, 1)$ z. B. erhält man:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0, \text{*)}$$

woraus sich die Gleichungen der einzelnen Tangenten in E_1 ergeben:

$$2x_1 + \left(1 + \sqrt{5}\right) . x_2 + \left(1 - \sqrt{5}\right) . x_3 = 0$$

$$2x_1 + \left(1 - \sqrt{5}\right) . x_2 + \left(1 + \sqrt{5}\right) . x_3 = 0.$$

Die C_6 hat sechs unendlich ferne Punkte, welche sämmtlich reell sind; dieselben sind die Inversen der Schnittpunkte der C_6 mit dem Kreise K. Bezeichnen X, Y, Z, V, W, T diese Schnittpunkte, dann repräsentiren X', Y', Z', V', W', T' die unendlich fernen Punkte der Curve und die Geraden XX', YY', ZZ', VV', WW', TT', welche die Richtungen angeben, nach welchen die Curve ins Unendliche geht, müssen Tangenten des Kegelschnittes p sein. Von den sechs Punkten X, Y etc. gehen an den Kegelschnitt p je zwei Tangenten, allein nur eine derselben gibt jeweilen die Richtung nach einem unendlich fernen Punkt der C_6 an und zwar diejenige, welche parallel ist zum Inversen des Strahles, der einen Punkt X, Y etc. mit einem Fundamentalpunkt verbindet. Die C_6 besteht aus sechs ins Unendliche gehenden Aesten, von denen je zwei eine zusammenhängende Theilcurve bilden.

Dem Curvenstück A_1WE_2 entspricht $Q_1\underset{\infty}{W'}E_2$

« « $A_1\underset{\infty}{Y'}E_1$ « Q_1YE_1.

Die beiden Aeste $\underset{\infty}{Y'}A_1WE_2\underset{\infty}{W'}$ und $\underset{\infty}{W'}Q_1YE_1\underset{\infty}{Y'}$, welche in der angegebenen Weise einander entsprechen, haben grosse Aehnlichkeit

*) Vorausgesetzt, dass $a_1 = a_2 = a_3$ sei.

mit den Aesten der Hyperbel $x_3^2 + x_1 x_2 = 0$. Letztere hat mit der C_6 gemein die Punkte A_1, A_2 sammt Tangenten und die Punkte E_1 und E_2, dagegen sind die Tangenten der Hyperbel in E_1 und E_2 verschieden von den Tangenten der C_6 in diesen Punkten. Ferner entspricht

dem Stück $A_1 V E_3$ das Stück $Q_1^* \underset{\infty}{V'} E_3$
« « $A_1 \underset{\infty}{X'} E_1$ « « $Q_1^* X E_1$.

Die aus diesen Curvenstücken zusammengesetzten Aeste

$$\underset{\infty}{X'} A_1 V E_3 \underset{\infty}{V'}\ ,\ \underset{\infty}{V'} Q_1^* X E_1 \underset{\infty}{X'}$$

welche in der angeführten Weise zu einander invers sind, haben Aehnlichkeit mit der Hyperbel $x_2^2 + x_1 x_3 = 0$, welche durch A_1, A_2, E_1, E_3 geht und $A_1 A_2$ in A_1 und $A_3 A_2$ in A_3 berührt, wie die C_6. Endlich entspricht

dem Stück $A_2 Z E_3$ das Stück $Q_2 \underset{\infty}{Z'} E_3$
« « $A_2 \underset{\infty}{T'} E_2$ « « $Q_2 T E_2$.

Die aus diesen Stücken bestehenden Aeste

$$\underset{\infty}{T'} A_2 Z E_3 \underset{\infty}{Z'}\ ,\ \underset{\infty}{Z'} Q_2 T E_2 \underset{\infty}{T'}$$

der C_6, welche in der soeben angegebenen Weise einander entsprechen, bilden eine hyperbelähnliche Curve; dieselbe hat mit der Hyperbel $x_1^2 + x_2 x_3 = 0$ gemein die Punkte A_2, A_3, E_2, E_3 und die Tangenten in A_2 und A_3.

Die Plücker'schen Charaktere der vorliegenden C_6 sind die nämlichen wie bei der C_6, welche im allgemeinsten Falle resultirt. *)

Sind die Werthe von a_1, a_2, a_3 respective proportional zu $\cos^2 \frac{A_1}{2}$, $\cos^2 \frac{A_2}{2}$, $\cos^2 \frac{A_3}{2}$, dann gibt Gleichung (II) die spezielle C_6, †) welche entsteht, wenn p der dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ eingeschriebenen Kreis (mit dem Centrum E) ist, dessen Gleichung lautet:

$$\cos\frac{A_1}{2} \cdot \sqrt{x_1} + \cos\frac{A_2}{2} \cdot \sqrt{x_2} + \cos\frac{A_3}{2} \cdot \sqrt{x_3} = 0.$$

Setzt man nun voraus, dass a_1, a_2, a_3 sowohl negative als positive Grössen sein können, so stellt die Gleichung

---

*) Anmerkung. In Uebereinstimmung mit der Note auf Seite 22 wurde die Gleichung (II) discutirt unter der Voraussetzung, dass a_1, a_2, a_3 positiv seien und in Fig. 1, Tafel IV ist speziell $a_1 = a_2 = a_3$ angenommen worden.

†) Der Unterschied zwischen dieser Curve und der in Fig. 1, Tafel IV skizzirten ist unwesentlich.

$$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0$$

allgemein einen Kegelschnitt vor, welcher die Fundamentallinien berührt. Ausser dem betrachteten Falle, in welchem a_1, a_2, a_3 positiv sind, können folgende Fälle vorkommen:

a_1	negativ,	a_2	und	a_3	positiv
a_2	«	a_1	«	a_3	«
a_3	«	a_1	«	a_2	«

d. h. entweder können in der Kegelschnittsgleichung alle drei Doppelprodukte negativ sein oder es sind zwei der Doppelprodukte positiv, während das dritte negativ ist. Bedeuten z. B. a_1, a_2 positive Zahlen und ist $a_3 = -\alpha_3$, so ergeben sich für die Curven p, p′ und C_6 folgende Gleichungen:

p) $a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + \alpha_3^2x_3^2 + 2a_2\alpha_3x_2x_3 + 2\alpha_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0$

p′) $a_1^2x_2^2x_3^2 + a_2^2x_1^2x_3^2 + \alpha_3^2x_1^2x_2^2 + 2a_2\alpha_3x_1^2x_2x_3 + 2\alpha_3a_1x_2^2x_3x_1$
$- 2a_1a_2x_3^2x_1x_2 = 0$

C_6) $a_1x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) + a_2x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$
$- \alpha_3x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$ *)

Der Kegelschnitt p berührt die Fundamentaldreiecksseite A_1A_2 und die Verlängerungen der Seiten A_1A_3, A_2A_3, so dass sämmtliche Punkte von p ausserhalb des Fundamentaldreiecks liegen. Die ihm entsprechende Curve vierter Ordnung p′ liegt in Folge dessen ebenfalls ganz ausserhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und besitzt zwei reelle unendlich ferne Punkte, da p den Kreis K zwei Mal schneidet. Die C_6 hat in diesem Falle nur zwei reelle unendlich ferne Punkte und besteht aus einer hyperbelähnlichen Curve (zwei unendlichen Aesten) und zwei Ovalen, von denen das eine mit der Ellipse $x_2^2 - x_1x_3 = 0$ die Punkte A_1, A_3, E, E_2 und die Tangenten in A_1 und A_3, das andere mit der Ellipse $x_1^2 - x_2x_3 = 0$ die Punkte A_2, A_3, E, E_1 und die Tangenten in A_2 und A_3 gemein hat. (Vergl. Fig. 2 in Tafel IV, wo p den die Fundamentallinien berührenden Kreis bedeutet, dessen Mittelpunkt E_3 ist.) **)

---

*) Diese Gleichungen erhält man aus den früheren auch dadurch, dass man x_3 durch $-x_3$ ersetzt.

**) Dieser Kreis hat die Gleichung

$$\cos\frac{A_1}{2}\cdot\sqrt{x_1} + \cos\frac{A_2}{2}\cdot\sqrt{x_2} + \cos\frac{A_3}{2}\sqrt{-x_3} = 0$$

und die Gleichung der C_6 lautet:

$$\cos^2\frac{A_1}{2}\,x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) + \cos^2\frac{A_2}{2}\,x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$$
$$- \cos^2\frac{A_3}{2}\,x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$