Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Autor: Leuch, Albert

Kapitel: I: Der feste Kegelschnitt p sei ein Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreick ein Tripel harmonischer Pole ist

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

eines variablen Parameters λ sein. Alsdann stellt man die Gleichung der p-Tangente t_λ im Punkte P_λ auf und ersetzt hierin die Variablen x_1, x_2, x_3 durch ihre reciproken Werthe, um die Gleichung des Kegelschnittes t_λ' zu erhalten, welcher der Tangente t_λ entspricht. Eliminirt man nun zwischen den beiden Gleichungen für t_λ und t_λ' den in den Coëfficienten derselben auftretenden Parameter λ, so ergibt sich eine Gleichung, welcher die Coordinaten der Schnittpunkte sämmtlicher p-Tangenten mit ihren entsprechenden Kegelschnitten genügen, also die Gleichung unserer C_6. *)

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir nun über zur Untersuchung einiger Curven sechster Ordnung, die sich ergeben, wenn der Kegelschnitt p spezielle Lagen gegenüber dem Fundamentaldreieck annimmt.

I. Der feste Kegelschnitt p sei ein Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreieck ein Tripel harmonischer Pole ist.

Ein Kegelschnitt, bezogen auf ein Tripel harmonischer Pole, hat die Gleichung

p) . . . . . $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 = 0.$

Bezeichnen a_1, a_2, a_3 positive Zahlen, dann liegt der Fundamentalpunkt A_3 innerhalb, A_1 und A_2 dagegen liegen ausserhalb des Kegelschnittes p. Die Fundamentallinien sind die Polaren der Gegenecken in Bezug auf p.

Die Inverse p′ von p hat die Gleichung

p′) . . . $a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 - a_3 x_1^2 x_2^2 = 0;$

sie ist eine Curve vierter Ordnung und sechster Klasse, welche in A_1 und A_2 doppelte Inflexionsknoten besitzt und für welche A_3 ein isolirter Punkt ist. Da die von A_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tan-

---

*) Da zwei zu einander inverse Punkte der Ebene die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind, welcher die Fundamentallinien berührt, so kann die nachgewiesene Curve sechster Ordnung auch betrachtet werden als Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen eine feste Curve zweiten Grades umhüllen.

genten denselben in seinen Schnittpunkten mit $x_1 = 0$ berühren, so sind die Inversen dieser Tangenten, d. h. die Tangenten der C_4 (p') im Doppelpunkt A_1 zugleich Inflexionstangenten und somit A_1 ein doppelter Inflexionsknoten. Diess wird durch Rechnung bestätigt, indem man zeigt, dass jede dieser Tangenten mit der C_4 in A_1 vier zusammenfallende Punkte (drei mit dem einen Aste, einen mit dem andern) gemein hat. Analoges findet für A_2 statt. p' hat zwei reelle, unendlich ferne Punkte, dieselben entsprechen den zwei Schnittpunkten von p mit dem Kreise K. Die Asymptoten der C_4 lassen sich, wie überhaupt sämmtliche Tangenten derselben, leicht konstruiren; bezeichnet X einen gemeinsamen Punkt von p und K, so hat man nur zu berücksichtigen, dass der Tangente im Punkte X'_∞ oder einer Asymptote der C_4 derjenige Kegelschnitt entspricht, welcher durch A_1, A_2, A_3, X geht und den Kegelschnitt p in X berührt.

Um nun die Gleichung der C_6, welche im vorliegenden Falle entsteht, abzuleiten, suchen wir zunächst die Coordinaten eines beliebigen Punktes von p und bestimmen die Gleichung der Tangente von p in diesem Punkt. Wir legen zu diesem Zwecke durch A_1 einen beliebigen Strahl

$$\frac{x_2}{x_3} = \lambda ;$$

derselbe schneidet p in zwei Punkten, für welche man hat:

$$a_1 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + a_2 . \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 - a_3 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda .$$

Daraus folgt:

$$\frac{x_1}{x_3} = \pm \sqrt{\frac{a_3 - a_2 \lambda^2}{a_1}} .$$

Berücksichtigen wir nur das pos. Zeichen der Wurzel, so haben wir für die Coordinaten eines Punktes P_λ auf p:

$$P_\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt{\frac{a_3 - a_2 \lambda^2}{a_1}} : \lambda : 1 .$$

Bezeichnet F die linke Seite der Gleichung von p, so haben die ersten partiellen Differentialquotienten von F in Bezug auf x_1, x_2, x_3 die Werthe:

$$F_1 = 2a_1 x_1 \;;\; F_2 = 2a_2 x_2 \;;\; F_3 = -2a_3 x_3 \;;$$

demnach lautet die Gleichung der Tangente von p in P_λ:

$$(F_1)_\lambda . x_1 + (F_2)_\lambda . x_2 + (F_3)_\lambda . x_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$t_\lambda) \quad . \quad . \quad \sqrt{a_1 (a_3 - a_2 \lambda^2)} . x_1 + a_2 \lambda x_2 - a_3 x_3 = 0 .$$

Der Tangente t_λ entspricht der Kegelschnitt

$$t_\lambda') \quad \sqrt{a_1 (a_3 - a_2 \lambda^2)} \,.\, x_2x_3 + a_2\lambda x_1x_3 - a_3x_1x_2 = 0 \,.$$

Betrachtet man λ als einen variablen Parameter, so repräsentirt die Gleichung für t_λ sämmtliche geraden Linien, welche p umhüllen und die Gleichung von t_λ' sämmtliche Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umschrieben sind und die Curve p′ berühren. Eliminirt man endlich zwischen diesen beiden Gleichungen den Parameter λ, so erhält man die Gleichung des Ortes der Schnittpunkte aller Geraden t_λ mit ihren inversen Kegelschnitten. Durch Elimination der Anfangsglieder folgt zunächst:

$$\lambda a_2 (x_1^2 - x_2^2) \,.\, x_3 = a_3x_2 \, (x_1^2 - x_3^2)$$

$$\lambda = \frac{a_3x_2(x_1^2 - x_3^2)}{a_2x_3(x_1^2 - x_2^2)} \,.$$

Setzt man diesen Werth von λ in die quadrirte Gleichung von t_λ $a_1(a_3 - a_2\lambda^2) \,.\, x_1^2 = (a_3x_3 - a_2\lambda x_2)^2$ ein, so ergibt sich:

$$a_1 \,.\, \left[a_3 - \frac{a_3^2x_2^2(x_1^2 - x_3^2)^2}{a_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2}\right] . \, x_1^2 = \left[a_3x_3 - \frac{a_3x_2^2(x_1^2 - x_3^2}{x_3(x_1^2 - x_2^2)}\right]^2$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$C_6) \; \mathrm{I.}) \; a_2a_3x_1^2 \,.\, (x_2^2 - x_3^2)^2 + a_3a_1x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 - a_1a_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0,$$

welche Gleichung unsere C_6 repräsentirt.

Zur Untersuchung der C_6 übergehend, bestimmen wir zuerst ihre Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen. Substituiren wir in (I) $x_1 = 0$, so kommt

$$x_2^2x_3^2(a_3 x_3^2 - a_2 x_2^2) = 0 \,, \text{ woraus folgt}$$

$$x_2^2 = 0 \,, x_3^2 = 0 \,, \sqrt{a_2} \,.\, x_2 + \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0 \,, \sqrt{a_2} \,.\, x_2 - \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0,$$

d. h. die Schnittpunkte der Fundamentallinie $x_1 = 0$ mit der C_6 sind die Doppelpunkte A_2 und A_3 und die Punkte, in denen $x_1 = 0$ den Kegelschnitt p schneidet; die letztern fallen zusammen mit den Punkten Q_1 und Q_1^*, in welchen die von A_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten die Fundamentallinie $x_1 = 0$ schneiden. Die zwei letzten Gleichungen stellen die p-Tangenten A_1Q_1 und $A_1Q_1^*$ vor. (Tafel I.)

Analog ergiebt sich, dass $A_1 \begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ ein Doppelpunkt und

$$Q_2\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 + \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0 \end{pmatrix}, \; Q_2^*\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 - \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 + i\sqrt{a_2} \,.\, x_2 = 0 \end{pmatrix}, \; Q_3^*\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 - i\sqrt{a_2} \,.\, x_2 = 0 \end{pmatrix}$$

einfache Punkte der C_6 sind. Q_2, Q_2^* sind die Schnittpunkte von $x_2 = 0$ mit p oder mit den von A_2 ausgehenden p-Tangenten, und Q_3, Q_3^*, welche imaginär sind, stellen die Schnittpunkte von $x_3 = 0$ mit p oder mit den von A_3 ausgehenden p-Tangenten vor.

Die Gleichung (I) ist ferner erfüllt für die Coordinaten der Punkte E, E_1, E_2, E_3; diese Punkte ergeben sich als Schnittpunkte der C_6 mit den sechs Geraden

$$x_2 \pm x_3 = 0 \;,\; x_1 \pm x_3 = 0 \;,\; x_1 \pm x_2 = 0.$$

Substituiren wir in (I) $x_2 \pm x_3 = 0$, so folgt:

$$a_3x_3^2(x_3^2 - x_1^2)^2 - a_2x_3^2(x_1^2 - x_3^2)^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$x_3^2\,(x_1^2 - x_3^2)^2 = 0 \quad \text{und daraus}$$

$x_3^2 = 0$, $(x_1 + x_3)^2 = 0$, $(x_1 - x_3)^2 = 0$. Diese Gleichungen drücken aus, dass die Schnittpunkte A_1, E, E_1, E_2, E_3 der Linien $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ mit der C_6 Doppelpunkte der letztern sind.

Um die Tangenten der C_6 in den bekannten Punkten zu bestimmen resp. ihre Gleichungen aufzustellen, sind die Differentialquotienten der Funktion u *) nach x_1, x_2, x_3 erforderlich. Es ist

$$u_1 = 2a_2a_3x_1(x_2^2 - x_3^2)^2 - 4a_3a_1x_2^2(x_3^2 - x_1^2)x_1 - 4a_1a_2x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_2 = 4a_2a_3x_1^2x_2(x_2^2 - x_3^2) + 2a_3a_1x_2(x_3^2 - x_1^2)^2 + 4a_1a_2x_2x^2_3(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_3 = -4a_2a_3x_1^2x_3(x_2^2 - x_3^2) + 4a_3a_1x_2^2x_3(x_3^2 - x_1^2) - 2a_1a_2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$u_{11} = 2a_2a_3(x_2^2 - x_3^2)^2 - 4a_3a_1x_2^2(x_3^2 - 3x_1^2) - 4a_1a_2x_3^2(3x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_{12} = 8a_2a_3x_1x_2(x_2^2 - x_3^2) - 8a_3a_1x_1x_2(x_3^2 - x_1^2) + 8a_1a_2x_2x_3^2$$
$$u_{13} = -8a_2a_3x_1x_3(x_2^2 - x_3^2) - 8a_3a_1x_1x_2^2x_3 - 8a_1a_2x_1x_3(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_{22} = 4a_2a_3x_1^2(3x_2^2 - x_3^2) + 2a_3a_1(x_3^2 - x_1^2)^2 + 4a_1a_2x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2)$$
$$u_{23} = -8a_2a_3x_1^2x_3 + 8a_3a_1x_2x_3(x_3^2 - x_1^2) + 8a_1a_2x_2x_3(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_{33} = -4a_2a_3x_1^2(x_2^2 - 3x_3^2) + 4a_3a_1x_2^2(3x_3^2 - x_1^2) - 2a_1a_2(x_1^2 - x_2^2)^2$$

Das Tangentenpaar in einem Doppelpunkte der Curve $u = 0$ wird nun repräsentirt durch die Gleichung

$$u_{11}x_1^2 + u_{22}x_2^2 + u_{33}x_3^2 + 2\,u_{23}x_2x_3 + 2u_{13}x_1x_3 + 2u_{12}x_1x_2 = 0,$$

wenn x_1, x_2, x_3 die laufenden Coordinaten bedeuten und in die Ausdrücke für u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{13}, u_{12} die Coordinaten des Doppelpunktes substituirt werden.

Für den Doppelpunkt A_1 $\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ ist

$$u_1 = 0 \;,\; u_2 = 0 \;,\; u_3 = 0$$
$$u_{11} = 0 \;,\; u_{12} = 0 \;,\; u_{13} = 0$$

---

*) $u = 0$ bedeutet die Gleichung der C_6.

$u_{22} = 2a_3a_1x_1^4$, $u_{23} = 0$, $u_{33} = -2a_1a_2x_1^4$; *) somit lautet die Gleichung des Tangentenpaares in A_1:

$$a_3x_2^2 - a_2x_3^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$(\sqrt{a_3}\,.\,x_2 + \sqrt{a_2}\,.\,x_3)\,.\,(\sqrt{a_3}\,.\,x_2 - \sqrt{a_2}\,.\,x_3) = 0\,.$$

Hieraus sieht man, dass die Tangenten im Doppelpunkt A_1 die resp. Inversen der p-Tangenten aus A_1 sind. Ganz dieselben Tangenten hat die Curve p′ im Doppelpunkt A_1, was auch schon aus dem Umstande folgt, dass A_1Q_1 und $A_1Q_1^*$ den Kegelschnitt p in Q_1 resp. Q_1^* berühren. — Um zu untersuchen, von welcher Art der Doppelpunkt A_1 ist, bestimmen wir die Schnittpunkte der Tangenten $a_3x_2^2 - a_2x_3^2 = 0$ mit der C_6. $x_2^2 = \frac{a_2}{a_3}x_3^2$ in (I) substituirt, gibt:

$$a_2a_3x_1^2.\left(\frac{a_2}{a_3}x_3^2 - x_3^2\right)^2 + a_1a_2a_3^2\left(x_3^2 - x_1^2\right)^2 - a_1a_2x_3^2\left(x_1^2 - \frac{a_2}{a_3}x_3^2\right)^2 = 0$$

$$\text{oder}\quad x_3^4.\left[(2a_1 + a_2 - a_3)\,x_1^2 - \frac{a_1(a_2 + a_3)}{a_3}\,.\,x_3^2\right] = 0.$$

$x_3^4 = 0$ sagt aus, dass in A_1 vier Schnittpunkte zusammenfallen; jede der Tangenten in A_1 hat also in A_1 vier zusammenfallende Punkte mit der C_6 gemein (mit einem Aste drei, mit dem andern einen), ist daher Inflexionstangente und der Punkt A_1 ein doppelter Inflexionsknoten, wie bei der Curve p′.

Für $A_2 \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ ist

$$u_{11} = 2a_2a_3x_2^4\,;\ u_{12} = 0\,;\ u_{13} = 0$$
$$u_{22} = 0\,;\ u_{23} = 0\,;\ u_{33} = -2a_1a_2x_2^4\,.$$

Die Tangenten der C_6 im Doppelpunkt A_2 haben daher die Gleichungen

$$a_3x_1^2 - a_1x_3^2 = 0 \qquad \text{oder}$$
$$\sqrt{a_3}\,.\,x_1 + \sqrt{a_1}\,.\,x_3 = 0,\ \sqrt{a_3}\,.\,x_1 - \sqrt{a_1}\,.\,x_3 = 0\,;$$

dieselben stimmen überein mit den Gleichungen der Inversen der p-Tangenten aus A_2. Die Tangenten der C_6 in A_2 sind also identisch mit den Tangenten der C_4 in A_2; sie sind für beide Curven Inflexionstangenten und A_2 ist somit auch, wie A_1, ein doppelter Inflexionsknoten für p′ und C_6.

---

*) Hier bedeutet x_1 eine Constante, nämlich die erste Coordinate von A_1, also das zu A_2A_3 gehörige Höhenperpendikel des Dreiecks $A_1A_2A_3$, wenn der Radius des dem letztern eingeschriebenen Kreises gleich der Einheit ist.

Endlich erhält man für die Tangenten der C_6 im Doppelpunkt A_3:

$$a_2 x_1^2 + a_1 x_2^2 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sqrt{a_3}\,.\,x_1 + i\sqrt{a_1}\,.\,x_2 = 0\ ,\ \sqrt{a_2}\,.\,x_1 - i\sqrt{a_1}\,.\,x_2 = 0\ .$$

A_3 ist also ein Doppelpunkt mit imaginären Tangenten, d. h. ein isolirter Punkt der C_6.

Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 sind, wie schon gezeigt worden, ebenfalls Doppelpunkte der C_6; diess wird dadurch bestätigt, dass für dieselben die Ausdrücke u_1, u_2, u_3 verschwinden. Ferner ist für $E\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$:

$$u_{11} = 8a_1(a_3 - a_2)\ ;\ u_{12} = 8a_1a_2\ ;\ u_{13} = -8a_1a_3$$

$$u_{22} = 8a_2(a_3 - a_1)\ ;\ u_{23} = -8a_2a_3\ ;\ u_{33} = 8a_3(a_1 + a_2).$$

Das Tangentenpaar im Doppelpunkt E hat demnach die Gleichung

$$a_1(a_3 - a_2)\,.\,x_1^2 + a_2(a_3 - a_1)\,.\,x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)\,.\,x_3^2 + 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_1a_3x_1x_3 - 2a_2a_3x_2x_3 = 0.$$

Dasselbe stimmt überein mit dem von E aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangentenpaare, denn die Gleichung desselben lautet:

$$(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2)\,(a_1 + a_2 - a_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3)^2$$

oder

$$a_1(a_3 - a_2)x_1^2 + a_2(a_3 - a_1)x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)x_3^2 + 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_1a_3x_1x_3 - 2a_2a_3x_2x_3 = 0.$$

Je nachdem E ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p liegt, sind die Tangenten in E reell oder imaginär und E ist daher ein Knotenpunkt oder ein isolirter Punkt der C_6.

Analog verhält es sich mit den Punkten E_1, E_2, E_3. Enthält der Kegelschnitt p einen der vier Punkte E, E_1, E_2, E_3, dann muss er alle enthalten, weil für sämmtliche vier Punkte $a_1 + a_2 - a_3 = 0$ sein muss; in diesem Falle ist p eine gleichseitige Hyperbel. Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 liegen sämmtlich entweder ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p oder alle auf demselben und zwar

ausserhalb, wenn $a_3 < a_1 + a_2$
innerhalb, wenn $a_3 > a_1 + a_2$
auf p, wenn $a_3 = a_1 + a_2$.

Für die Punkte Q_1 und Q_1^* ist $x_1 = 0$, $x_2^2 = \frac{a_3}{a_2} x_3^2$, daher $u_1 = 0$

$$u_2 = 2a_3a_1\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\,.\,x_3^5 - 4a_1a_3\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\,.\,x_3^5 = -2a_1a_3\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\,.\,x_3^5$$

$$u_3 = 4\frac{a_1a_3^2}{a_2}\,.\,x_3^5 - 2\frac{a_1a_3^2}{a_2}\,.\,x_3^5 = \frac{2a_1a_3^2}{a_2}x_3^5.$$

Die Tangenten in diesen Punkten haben daher die Gleichungen

$$\pm\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\cdot x_2 - \frac{a_3}{a_2}\cdot x_3 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sqrt{a_2}\,.\,x_2 \pm \sqrt{a_3}\,.\,x_3 = 0\,, \qquad \text{also}$$

$$\text{Gleichung von } t_{Q_1} : \sqrt{a_2}\,.\,x_2 + \sqrt{a_3}\,.\,x_3 = 0$$

$$\text{« « } t_{Q_1{}^*} : \sqrt{a_2}\,.\,x_2 - \sqrt{a_3}\,.\,x_3 = 0\,.$$

Die Tangenten der C_6 in Q_1 und $Q_1{}^*$ sind also identisch mit den p-Tangenten in jenen Punkten. †) Ebenso findet man, dass die von A_2 resp. A_3 ausgehenden p-Tangenten A_2Q_2, $A_2Q_2{}^*$; A_3Q_3, $A_3Q_3{}^*$ die Tangenten der C_6 in Q_2, $Q_2{}^*$; Q_3, $Q_3{}^*$ sind; die zwei letzteren Tangenten sind natürlich, sowie ihre Berührungspunkte Q_3, $Q_3{}^*$, imaginär.

Die C_6 und der Kegelschnitt p berühren sich in den sechs Punkten Q (wovon zwei imaginär sind), und da sie im Allgemeinen nur zwölf gemeinsame Punkte haben können, so existiren keine weiteren gemeinsamen Punkte. Demnach werden auch die C_6 und p' nur die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 gemein haben; in der That liefert in A_i jeder Ast der C_4 mit den beiden Aesten der C_6 $1 + 3 = 4$ Schnittpunkte, es zählt also jeder Fundamentalpunkt für acht Schnittpunkte, sämmtliche Schnittpunkte von p' und C_6 liegen daher in den Fundamentalpunkten.

Da A_1Q_1, $A_1Q_1{}^*$; A_2Q_2, $A_2Q_2{}^*$ die C_6 in den resp. Punkten Q_1, $Q_1{}^*$; Q_2, $Q_2{}^*$ berühren, so folgt, dass ihre Inversen, d. h. die Tangenten der C_6 in den Doppelpunkten A_1 und A_2 Inflexionstangenten sein müssen; dasselbe Resultat hat früher schon die Rechnung ergeben.

Die C_6 hat sechs unendlich ferne Punkte, von denen entweder vier reell und zwei imaginär oder gar keine reell sind. Die Curve besitzt vier reelle unendlich ferne Punkte und besteht daher aus vier ins Unendliche gehenden Zweigen (siehe Tafel 1, Fig. 1), wenn $a_3 < a_1 + a_2$, also sämmtliche E_i Knotenpunkte sind. Die C_6 schneidet den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis K ausser A_1, A_2, A_3 in vier Punkten X_1, Y_1, Z_1, W_1, denen die unendlich fernen Punkte der C_6 entsprechen. Die p-Tangenten X_1X_1', Y_1Y_1', Z_1Z_1', W_1W_1' geben die Richtungen an, nach welchen die C_6 ins Unendliche geht, und die zu ihnen parallelen Tangenten der C_6 in X_1', Y_1', Z_1', W_1'

†) Dieses Resultat liess sich erwarten, denn wenn die C_6 diejenigen Punkte enthält, in welchen $x_1 = 0$ den Kegelschnitt p schneidet, so muss in jenen Punkten p von C_6 berührt werden, da keine Punkte der C_6 im Innern von p liegen können.

sind die Asymptoten der Curve. X_1X_1', Y_1Y_1', Z_1Z_1', W_1W_1' sind die von X_1, Y_1, Z_1, W_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten, welche parallel zu den resp. Inversen von A_1X_1, A_1Y_1, A_1Z_1, A_1W_1 sind; sie stellen diejenigen p-Tangenten vor, welche sich mit ihren inversen Hyperbeln in je einem unendlich fernen Punkte schneiden, welche also parallel sind zu je einer Asymptote der ihnen entsprechenden Hyperbeln. — Die C_6 entspricht in der Weise sich selbst, dass

dem	Stück	$EA_1\underset{\infty}{Z_1'}E_1$	das	Stück	$EQ_1{}^*Z_1E_1$	
«	«	$EA_2\underset{\infty}{W_1'}E_2$	«	«	$EQ_2{}^*W_1E_2$	
«	«	$E_1A_2Y_1E_3$	«	«	$E_1Q_2\underset{\infty}{Y_1'}E_3$	und
«	«	$E_2A_1X_1E_3$	«	«	$E_2Q_1\underset{\infty}{X_1'}E_3$	entspricht.

Jeder der vier Zweige entspricht sich also selbst.

Von der C_6 liegen gar keine Punkte im Unendlichen, wenn $a_3 > a_1 + a_2$, also sämmtliche E isolirte Punkte sind (Tafel II, Fig. 1). Die C_6 besteht in diesem Falle aus zwei geschlossenen, mit doppeltem Inflexionsknoten versehenen Curven, von denen die eine in Q_1 und $Q_1{}^*$, die andere in Q_2 und $Q_2{}^*$ den Kegelschnitt p berührt. Dem Curvenstück $Q_1PA_2RQ_1{}^*$ entspricht das Stück $A_1P'Q_2R'A_1$ der andern Curve und dem Stück $Q_1{}^*TA_2Q_1$ entspricht $A_1T'Q_2{}^*A_1$.

In beiden Fällen sind die Plücker'schen Charaktere der C_6, wie im allgemeinsten Falle:

$$\mu = 6\,,\ \nu = 16\,,\ \delta = 7\,,\ \varkappa = 0\,,\ \iota = 30\,,\ \tau = 72.$$

Wenn $a_2 = a_3$, dann wird der Kegelschnitt p (eine Hyperbel) von den Linien $x_2 - x_3 = 0$ und $x_2 + x_3 = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $x_1 = 0$ berührt, es müssen daher A_1E_1 und A_1E_2 der C_6 als Theile angehören. Die Gleichungen von p und C_6 lauten:

p) . . . . . . $a_1x_1{}^2 + a_3(x_2{}^2 - x_3{}^2) = 0$

C_6) . $a_3x_1{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2)^2 + a_1x_2{}^2(x_3{}^2 - x_1{}^2)^2 - a_1x_3{}^2(x_1{}^2 - x_2{}^2)^2 = 0.$

Letztere kann umgeformt werden, wie folgt:

$$a_3x_1{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2)^2 + a_1\left[x_1{}^4.(x_2{}^2 - x_3{}^2) - x_2{}^2x_3{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2)\right] = 0 \text{ oder}$$

$$(x_2{}^2 - x_3{}^2).\left[a_3x_1{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2) + a_1(x_1{}^4 - x_2{}^2x_3{}^2)\right] = 0.$$

Es sondern sich also in der That die Faktoren $x_2 + x_3$ und $x_2 - x_3$ ab, die C_6 zerfällt somit in $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ und die Curve vierter Ordnung:

$$C_4 \ . \ . \ . \ \begin{cases} a_1x_1^4 - a_1x_2^2x_3^2 - a_3x_1^2x_3^2 + a_3x_1^2x_2^2 = 0 & \text{oder} \\ x_1^2(a_1x_1^2 - a_3x_3^2) + x_2^2(a_3x_1^2 - a_1x_3^2) = 0. \end{cases}$$

Die C_4 enthält die Punkte A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3, jedoch sind nur A_2 und A_3 Doppelpunkte der C_4. Ferner geht sie durch die Schnittpunkte Q_2, Q_2^* und Q_3, Q_3^* (die zwei letzteren sind imaginär) der Hyperbel p mit $x_2 = 0$ resp. $x_3 = 0$ und wird, wie die Hyperbel, von A_2Q_2 und $A_2Q_2^*$ in Q_2 resp. Q_2^* berührt. Die Tangenten der C_4 in A_2 sind die Inversen von A_2Q_2 und $A_2Q_2^*$, ihre Gleichungen lauten: $\sqrt{a_1} \, . \, x_3 + \sqrt{a_3} \, . \, x_1 = 0$, $\sqrt{a_1} \, . \, x_3 - \sqrt{a_3} \, . \, x_1 = 0$; da jede von ihnen mit der C_4 in A_2 vier Punkte gemein hat, so sind sie zugleich Inflexionstangenten und A_2 ist ein doppelter Inflexionsknoten. Der Fundamentalpunkt A_3 ist ein isolirter Punkt der C_4. (Tafel II, Fig. 2) Für das Tangentenpaar der C_6 in E ergibt sich:

$$(x_2 - x_3) \, . \left[2a_1x_1 + (a_3 - a_1) \, . \, x_2 - (a_3 + a_1)x_3\right] = 0,$$

daher repräsentirt die Gleichung

$$2a_1x_1 + (a_3 - a_1)x_2 - (a_3 + a_1)x_3 = 0$$

die Tangente der C_4 in E, dieselbe stimmt überein mit der von E aus an die Hyperbel p gehenden Tangente, welche nicht mit A_1E_1 zusammenfällt. Ebenso sind die Tangenten der C_4 in E_1, E_2, E_3 die von diesen Punkten ausgehenden Hyperbeltangenten, welche nicht mit A_1E_1 oder A_1E_2 zusammenfallen. — Die C_4 hat zwei reelle unendlich ferne Punkte und besteht daher aus zwei ins Unendliche gehenden Zweigen. Die Plücker'schen Charaktere der C_4 lauten: $\mu = 4$, $\delta = 2$, $\varkappa = 0$, $\nu = 8$, $\iota = 12$, $\tau = 8$.

Wenn $a_1 = a_2 = a_3$, dann ist p die Hyperbel

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

und da $x_2 \pm x_3 = 0$ und $x_1 \pm x_3 = 0$ die Tangenten derselben in Q_1, Q_1^* resp. Q_2, Q_2^* sind, so sondern sich E_2E_3, A_1E_1, E_1E_3, A_2E_2 von der C_6 ab, so dass schliesslich noch eine C_2 übrig bleibt. Die im vorigen Specialfalle erhaltene C_4 geht über in

$$x_1^2(x_1^2 - x_3^2) + x_2^2(x_1^2 - x_3^2) = 0 \quad \text{oder}$$
$$(x_1^2 - x_3^2) \, . \, (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Die im vorliegenden Falle entstehende C_6 lautet daher:

$$(x_2^2 - x_3^2) \, . \, (x_1^2 - x_3^2) \, . \, (x_1^2 + x_2^2) = 0;$$

sie besteht aus den Linien A_1E_1, A_1E_2; A_2E_1, A_2E_2 und den imaginären Geraden, welche A_3 mit den (imaginären) Schnittpunkten von p mit $x_3 = 0$ verbinden. Sieht man von den erstern ab, so reducirt sich die C_6 auf das Linienpaar

$$x_1 + ix_2 = 0, \quad x_1 - ix_2 = 0;$$

da dasselbe imaginär ist, so werden die Hyperbeltangenten die ihnen entsprechenden Kegelschnitte niemals reell schneiden.

Es bleibt nun noch der besonders interessante Fall zu behandeln übrig, in welchem p eine durch E, E_1, E_2, E_3 gehende gleichseitige Hyperbel vorstellt; derselbe tritt ein, wenn $a_3 = a_1 + a_2$ ist.

Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel p lautet:

$$p) \quad \ldots \quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - (a_1 + a_2) \cdot x_3^2 = 0.$$

Ihr entspricht die Curve vierter Ordnung:

$$p') \quad \ldots \quad a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_1^2x_3^2 - (a_1 + a_2)x_1^2x_2^2 = 0$$

und die C_6 hat die Gleichung:

$$C_6) \quad a_2(a_1 + a_2) \cdot x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_1(a_1 + a_2)x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 - a_1a_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0.$$

Alle drei Curven p, p′ und C_6 gehen durch E, E_1, E_2, E_3 und haben in jedem dieser Punkte die nämliche Tangente. Die Gleichungen der vier gemeinschaftlichen Tangenten lauten:

$$t_E) \quad \ldots \quad a_1x_1 + a_2x_2 - (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$t_{E_1}) \quad \ldots \quad a_1x_1 - a_2x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$t_{E_2}) \quad \ldots \quad a_1x_1 - a_2x_2 - (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$t_{E_3}) \quad \ldots \quad a_1x_1 + a_2x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

Die C_6 berührt also p nicht nur in Q_1, Q_1^*, Q_2, Q_2^*, Q_3, Q_3^*, sondern auch noch in E, E_1, E_2, E_3. (Tafel III.) Wenn aber C_6 und p mehr als zwölf gemeinsame Punkte haben, so müssen sämmtliche Hyperbelpunkte der C_6 angehören, d. h. die Hyperbel p bildet einen Theil der C_6, welche zerfällt. Enthält aber die C_6 sämmtliche Punkte von p, so müssen ihre Inversen d. h. die Punkte von p′ nothwendigerweise ebenfalls der C_6 angehören; es bildet also auch die Curve p′ einen Theil der C_6. Im vorliegenden Falle zerfällt demnach die Curve sechster Ordnung in die gleichseitige Hyperbel p und die ihr entsprechende Curve vierter Ordnung p′. Diess zeigt auch die Gleichung der C_6, dieselbe kann nämlich in folgender Form geschrieben werden:

$$\left[a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - (a_1 + a_2)x_3^2\right] \cdot \left[a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_1^2x_3^2 - (a_1 + a_2)x_1^2x_2^2\right] = 0.$$

Während im allgemeinsten Falle die Verbindungslinie entsprechender Punkte der C_6 den Kegelschnitt p umhüllen, so liegen hier zwei entsprechende Punkte der C_6, von denen der eine stets der Hyperbel p, der andere der Curve p' angehören muss, auf der p-Tangente im ersten der beiden Punkte. Der entsprechende Kegelschnitt einer jeden Hyperbel-Tangente schneidet die letztere in ihrem Berührungspunkte und der Ort des zweiten Schnittpunktes ist die C_4, welche zur Hyperbel invers ist. Der inverse Punkt P' eines Hyperbelpunktes P liegt auf der zu P gehörigen Hyperbel-Tangente.

Die C_6 hat vier reelle unendlich ferne Punkte, da die Hyperbel und die C_4 (p') je zwei besitzen; sie entsprechen den Punkten, in denen der Kreis K die Curven p und p' trifft. Die unendlich fernen Punkte der C_4 sind die Inversen der Schnittpunkte X und Y von K mit p, und die unendlich fernen Punkte der Hyperbel p entsprechen den gemeinsamen Punkten Z und W von K und p' (siehe Tafel III).

Nun muss nach Vorigem

$$
\begin{array}{llllll}
XX'_\infty & \text{die Tangente der Hyperbel in} & & & & X \\
YY'_\infty & « & « & « & « & Y \\
ZZ'_\infty & « & « & « & « & Z'_\infty \\
WW'_\infty & « & « & « & « & W'_\infty \text{ sein,}
\end{array}
$$

es sind daher ZZ'_∞ und WW'_∞ die Asymptoten der Hyperbel. Der Tangente der C_4 in X'_∞ (Asymptote der C_4) entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch A_1, A_2, A_3, X geht und die Hyperbel in X berührt (XX' ist die Tangente desselben in X). Construirt man von demselben die Tangente z. B. in A_1 und zu derselben die Inverse, so geht durch den Schnittpunkt der letztern mit A_2A_3, zu XX' parallel, die erwähnte Asymptote der C_4. Analog kann die andere Asymptote der C_4, die Tangente den C_4 in Y'_∞, construirt werden.

Man kann die C_6 betrachten als eine aus den vier Zweigen:

$$
\begin{array}{lcl}
X'_\infty A_2EA_1Y'_\infty & , & Y'_\infty E_1WA_2E_3A_1ZE_2X'_\infty \\
Z'_\infty E_2XEYE_1W'_\infty & , & W'_\infty Q_2E_3Q_1Z'_\infty
\end{array}
$$

zusammengesetzte Curve. Der erste Zweig berührt den dritten in E, der zweite Zweig berührt den dritten in E_1 und E_2 und der vierten in E_3. Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 sind dann also als Berührungsknoten der C_6 anzusehen. Die Tangente t_E hat in E vier zusammenfallende Punkte mit der C_6 gemein, nämlich zwei mit Hyperbel und der zwei mit der C_4, welche beide Curven sich in E berühren. Analoges gilt für die Tangenten in E_1, E_2 und E_3. *)

Die C_6 kann aber auch angesehen werden als Curve, welche aus den vier Zweigen besteht:

$$\underset{\infty}{Y'}A_1EQ_1{*}YE_1\underset{\infty}{Y'} \qquad \underset{\infty}{X'}A_2EQ_2{*}XE_2\underset{\infty}{X'}$$
$$\underset{\infty}{Z'}Q_1E_3A_1ZE_2\underset{\infty}{Z'} \qquad \underset{\infty}{W'}Q_2E_3A_2WE_1\underset{\infty}{W'}$$

Diese Auffassung entspricht ganz derjenigen bei der Curve C_6 in Fig. 1, Tafel I, wo je zwei inverse Punkte auf demselben Zweige der C_6 liegen und also jeder einzelne Zweig sich selbst entspricht.

Bei der hier vorliegenden C_6 entspricht dem Curvenstück

$EA_1\underset{\infty}{Y'}E_1$	das Stück	$EQ_1{*}YE_1$;	beide	bilden	den	Curvenzweig	$\underset{\infty}{Y'}A_1EQ_1{*}YE_1\underset{\infty}{Y'}$
$EA_2\underset{\infty}{X'}E_2$	« «	$EQ_2{*}XE_2$;	«	«	«	«	$\underset{\infty}{X'}A_2EQ_2{*}XE_2\underset{\infty}{X'}$
$E_3A_1ZE_2$	« «	$E_3Q_1\underset{\infty}{Z'}E_2$;	«	«	«	«	$\underset{\infty}{Z'}Q_1E_3A_1ZE_2\underset{\infty}{Z'}$
$E_3A_2WE_1$	« «	$E_3Q_2\underset{\infty}{W'}E_1$;	«	«	«	«	$\underset{\infty}{W'}Q_2E_3A_2WE_1\underset{\infty}{W'}$

Daraus geht hervor, dass in E die Tangente (t_E) der C_6 für beide durch E hindurchgehende Aeste der C_6 Inflexionstangente ist, sie repräsentirt also zwei zusammenfallende Inflexionstangenten; man kann daher E als einen doppelten Inflexionsknoten ansehen, bei welchem die beiden Tangenten im Knoten zusammenfallen. Die beiden durch E gehenden Zweige der C_6 berühren und durchsetzen sich in E, oder es findet zwischen den beiden Aesten in E eine Osculation statt; einen solchen Punkt nennt man einen Osculationsknoten. Derselbe kann als Vereinigung von drei Knotenpunkten betrachtet werden, d. h. er vertritt die Stelle von drei Doppelpunkten der C_6. Ebenso sind E_1, E_2, E_3 Osculationsknoten der Curve sechster Ordnung. **)

Aus den Gleichungen der Tangenten t_E, t_{E_1}, t_{E_2}, t_{E_3} in den Osculationsknoten ist noch folgendes Erwähnenswerthe ersichtlich:

t_E und t_{E_1} schneiden sich auf $x_1 = 0$ im Punkte F
t_{E_2} und t_{E_3} « « « « « « F_1

(Tafel III, Fig. 2.) und F, F_1 sind harmonisch conjugirt in Bezug auf A_2, A_3.

t_E und t_{E_2} schneiden sich auf $x_2 = 0$ im Punkte G
t_{E_1} und t_{E_3} « « « « « « G_1

und G, G_1 sind harmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf A_1, A_3.

*) Die C_6 ist zweitheilig; jeder Theil (C_2 und C_4) besteht aus zwei unendlichen Aesten, die eine zusammenhängende Curve bilden.

**) Nach der zweiten Auffassung besteht die C_6 aus vier unendlichen Aesten, die nicht zusammenhängen; sie ist also eine viertheilige Curve.

t_E und t_{E_3} schneiden sich auf $x_3 = 0$ in H
t_{E_1} und t_{E_2} « « « « « H_1
und H, H_1 sind harmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf A_1, A_2.

Auf t_E liegen die Punkte F, G, H
« t_{E_1} « « « F, G_1, H_1
« t_{E_2} « « « F_1, G, H_1
« t_{E_3} « « « F_1, G_1, H

Die vier Tangenten bilden also ein vollständiges Vierseit, für welches die sechs Punkte F, G, H, F_1, G_1, H_1 die Ecken, die Fundamentallinien die Diagonalen und A_1, A_2, A_3 die Diagonalpunkte sind. Das vollständige Viereck $E E_1 E_2 E_3$ besitzt das nämliche Diagonal-Dreieck. Sobald eine der vier Tangenten gegeben ist, ergeben sich die übrigen sofort mit Hülfe der Punkte F, G, H. Umgekehrt folgt: Sind vier Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel gegeben, so findet man ihre Berührungspunkte, indem man das Dreieck der Diagonalpunkte und für dieses die Punkte E, E_1, E_2, E_3 construirt.

Der Kegelschnitt p, dessen Gleichung in Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 lautet: $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 = 0$, hat in Liniencoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Gleichung:

$$a_2a_3\xi_1^2 + a_1a_3\xi_2^2 - a_1a_2\xi_3^2 = 0.$$

Für seinen Mittelpunkt 0 erhält man die Gleichung:

$$a_2a_3\sin A_1 \,.\, \xi_1 + a_1a_3\sin A_2 \,.\, \xi_2 - a_1a_2\sin A_3 \,.\, \xi_3 = 0,$$

d. h. für die Coordinaten von 0 ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_2a_3\sin A_1 : a_3a_1\sin A_2 : - a_1a_2\sin A_3.$$

Wenn nun p eine gleichseitige Hyperbel, also $a_1 + a_2 - a_3 = 0$ ist, dann liegt 0 auf dem Kreise K und zwar auf der Geraden

$$x_1 : x_2 = a_2\sin A_1 : a_1\sin A_2.$$

Im speziellen Falle $a_1 = a_2$ liegt 0 auf der Inversen der Schwerlinie A_3S *) des Fundamentaldreiecks.

Für alle unendlich vielen gleichseitigen Hyperbeln, welche durch E, E_1, E_2, E_3 gehen, befindet sich das Centrum 0 auf K. Die Geraden OZ und OW sind die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, und da dieselben aufeinander senkrecht stehen, so muss ZW ein Durchmesser von K sein.

---

*) S bezeichnet den Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$.